конце первой (при $\text{Fo} = \frac{1}{12}$) и начале второй стадий процесса теплопроводности, что дает $D(0) = T^* - T_0$. В итоге при $\text{Fo} \geqslant \frac{1}{12}$ получим

$$\widetilde{\Theta}_3(\text{Fo},\xi) = \frac{T^* - \widetilde{T}(t,x)}{T^* - T_0} = (1-\xi^2)\exp\left(-3\left(\text{Fo} - \frac{1}{12}\right)\right). \quad (6.101)$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$\widetilde{\Theta}_3(\text{Fo},\xi) = \frac{T^* - \widetilde{T}(t,x)}{T^* - T_0} = A'(1-\xi^2)\exp(-3\text{Fo}), \quad (6.102)$$

где $A' = \exp(0{,}25) \approx 1{,}2840$ довольно близко к значению коэффициента $A_1 = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}2732$ при первом члене точного решения (6.97). Результаты расчетов по (6.100) и (6.101) при $\xi = 0$ представлены выше (см. табл. 6.1) и достаточно хорошо согласуются с точным решением.

6.7. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим еще один метод приближенного решения *операторного уравнения* $Au = f$, где A — линейный *непрерывный оператор, области определения* $D(A)$ и *значений* $R(A)$ которого являются *всюду плотными подмножествами гильбертова пространства* $\mathcal{H}$. Пусть система $\{u_n\} \subset D(A)$ образует *счетный базис* в $D(A)$. Приближенное решение

$$\widetilde{u}_N = \sum_{n=1}^{N} a_n u_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad (6.103)$$

уравнения $Au = f$ будем искать из условия минимума нормы $\|A\widetilde{u}_N - f\|$ *невязки* этого *операторного уравнения*, в котором коэффициенты a_n принимают любые действительные значения.

Из этого условия получаем

$$\min_{\widetilde{u}_N \in D(A)} \left\| A\widetilde{u}_N - f \right\|^2 = \min_{a_n \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n A u_n - f \right\|^2. \tag{6.104}$$

Для произвольных значений $a_n \in \mathbb{R}$, $n = \overline{1, N}$, имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n A u_n - f \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n A u_n - f,\ \sum_{k=1}^{N} a_k A u_k - f \right\rangle =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=1}^{N} a_k \langle A u_n, A u_k \rangle - 2 \sum_{k=1}^{N} a_k \langle f, A u_k \rangle + \langle f, f \rangle. \tag{6.105}$$

Таким образом, нужно найти минимум неотрицательной функции N переменных a_n, $n = \overline{1, N}$. Необходимыми условиями достижения этого минимума [V] будут равенства нулю частных производных правой части (6.105) по переменным a_k, $k = \overline{1, N}$, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle A u_n, A u_k \rangle = \langle f, A u_k \rangle, \quad k = \overline{1, N}, \tag{6.106}$$

относительно коэффициентов a_n, совпадающей с (6.80) при $v_k = A u_k \in R(A) \subset \mathcal{H}$.

Если *однородное операторное уравнение* $Au = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой элемент в $\mathcal{H}$, имеет лишь нулевое решение $u = \mathbf{0}$, т.е. *ядро линейного оператора* A состоит только из нулевого элемента, то система $\{A u_n\}_N$ является линейно независимой в $\mathcal{H}$ при любом N, так как последовательность $\{u_n\}$ образует в $D(A)$ счетный базис. В противном случае из элементов системы $\{A u_n\}_N$ можно было бы составить равную $\mathbf{0}$ нетривиальную линейную комбинацию

$$\sum_{n=1}^{N} b_n A u_n = A \sum_{n=1}^{N} b_n u_n = \mathbf{0}, \qquad \sum_{n=1}^{N} |b_n| > 0,$$

но это означало бы, что существует ненулевое решение уравнения $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, поскольку функции $\boldsymbol{u}_n$ счетного базиса линейно независимы и их нетривиальная линейная комбинация отлична от $\mathbf{0}$.

Скалярные произведения в левой части (6.106) являются элементами *матрицы Грама* системы функций $A\boldsymbol{u}_n$, $n = \overline{1, N}$. Но для линейно независимой системы функций определитель этой матрицы отличен от нуля [III]. Поэтому СЛАУ (6.106) при любом N имеет единственное решение относительно неизвестных a_n, $n = \overline{1, N}$. Описанный способ нахождения коэффициентов a_n в (6.103) называют ***методом наименьших квадратов*** приближенного решения операторного уравнения $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. При этом (6.104) можно трактовать как условие наилучшей по норме аппроксимации элемента $\boldsymbol{f}$ линейной комбинацией элементов $A\boldsymbol{u}_n$, $n = \overline{1, N}$. Если система $\{A\boldsymbol{u}_n\}_N$ является ортогональной в $\mathcal{H}$, т.е. $\langle A\boldsymbol{u}_n, A\boldsymbol{u}_k\rangle = 0$ при $n \neq k$, то СЛАУ (6.106) имеет единственное решение $a_n = \dfrac{\langle \boldsymbol{f}, A\boldsymbol{u}_k\rangle}{\|A\boldsymbol{u}_n\|^2}$, $n = \overline{1, N}$.

Пусть для оператора A область определения $D(A) \subset \mathcal{H} = L_2(V)$. Тогда вместо (6.106) можно написать

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int\limits_V (A\boldsymbol{u}_n) A\boldsymbol{u}_k \, dV = \int\limits_V \boldsymbol{f}(A\boldsymbol{u}_k)\, dV, \quad k = \overline{1, N}. \tag{6.107}$$

Если система $\{A\boldsymbol{u}_n\}_N$ ортогональна в $L_2(V)$, то из (6.107) сразу получаем

$$a_n = \frac{1}{\|A\boldsymbol{u}_n\|^2} \int\limits_V \boldsymbol{f}(A\boldsymbol{u}_n)\, dV, \quad n = \overline{1, N}. \tag{6.108}$$

Пример 6.8. Применим метод наименьших квадратов к приближенному решению задачи (6.84). Это решение будем искать (как и в примере 6.5) на всюду плотном *линейном многообразии* $X \subset L_2[0, 1]$ четырежды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям (6.84). В качестве счетного базиса в X рассмотрим систему функций $u_n(\xi) = \sin n\pi\xi$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что $u_n(\xi) \in D(A)$ образуют ортогональную в $L_2[0,1]$ систему функций, так как при $n \neq k$

$$\langle u_n, u_k \rangle = \int\limits_0^1 \sin n\pi\xi \sin k\pi\xi \, d\xi = 0.$$

Функции $Au_n(\xi) = (n\pi)^4 \sin n\pi\xi$, $n \in \mathbb{N}$, также ортогональны на отрезке $[0,1]$. Кроме того, учитывая, что правая часть f дифференциального уравнения в задаче (6.84) равна единице, получим

$$\langle f, Au_n \rangle = \int\limits_0^1 Au_n(\xi)\, d\xi = \left(\frac{n}{\pi}\right)^4 \int\limits_0^1 \sin n\pi\xi \, d\xi = \left(\frac{n}{\pi}\right)^3 \bigl(1 - (-1)^n\bigr),$$

$$\|Au_n\|^2 = \int\limits_0^1 \bigl(Au_n(\xi)\bigr)^2 d\xi = \left(\frac{n}{\pi}\right)^8 \int\limits_0^1 \sin^2 n\pi\xi \, d\xi = \frac{(n\pi)^8}{2}.$$

Отсюда следует, согласно (6.108), что $a_n = 0$ для всех четных $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, а для всех нечетных $n = 2m-1$ находим $a_n = a_{2m-1} = \dfrac{4}{(2m-1)^5\pi^5}$. Так, $a_1 = \dfrac{4}{\pi^5} \approx 0{,}0130709$ и $a_3 = \dfrac{4}{243\pi^5} \approx$ $\approx 0{,}0000537$. Уже в первом приближении максимальный безразмерный прогиб $u_1^* = a_1 = \dfrac{4}{\pi^5}$ балки (см. рис. 6.3) менее чем на 0,4 % превышает его точное значение (6.87), равное $u^* =$ $= \dfrac{5}{384} \approx 0{,}0130208$, а в следующем приближении значение $u_3^* =$ $= a_1 - a_3 = \dfrac{968}{243\pi^5} \approx 0{,}0130162$ отличается от точного менее чем на 0,04 %. Нетрудно проверить, что решение уравнения (6.85) второго порядка с дифференциальным оператором $\widetilde{A} = \dfrac{d^2}{d\xi^2}$ приведет к тому же результату.

Итак, приближенное решение задачи (6.84) можно представить в виде

$$\widetilde{u}_N(\xi) = \sum_{m=1}^{N} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{\big((2m-1)\pi\big)^5}. \tag{6.109}$$

Ясно, что получающийся из (6.109) при $N \to \infty$ ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{\big((2m-1)\pi\big)^5} \tag{6.110}$$

сходится на отрезке $[0,1]$, причем равномерно, так как *ряд* $\frac{4}{\pi^5}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^5}$ является *мажорирующим* для ряда (6.110).

Выясним, к какой функции $v(\xi)$ сходится ряд (6.110). После почленного четырехкратного дифференцирования (6.110) получим ряд

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)\pi\xi}{(2m-1)}, \tag{6.111}$$

который сходится к единице поточечно в интервале $(0,1)$ и является рядом Фурье функции $\varphi(x) = 1$ в этом интервале [IX]. Поэтому функция $\varphi(x)$ является в этом интервале четвертой производной суммы ряда (6.110), т.е. функции $v(\xi)$. Таким образом, $\frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} = 1$, $\xi \in (0,1)$, и, следовательно, функция $v(\xi)$ удовлетворяет уравнению в (6.84). Но она удовлетворяет и всем граничным условиям задачи (6.84) при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, что следует непосредственно из (6.110), а также из ряда, полученного двукратным дифференцированием (6.110). Отсюда заключаем, что функция $v(\xi)$ как сумма ряда (6.110) совпадает с точным решением (6.86) задачи (6.84), а $\widetilde{u}_N(\xi)$ сходится к точному решению $u(\xi)$ при $N \to \infty$ равномерно на отрезке $[0,1]$, а следовательно, и в $L_2[0,1]$.

Оценим скорость сходимости по норме $\|u - \widetilde{u}_N\|$. Так как N-й остаток функционального ряда (6.110)

$$u(\xi) - \widetilde{u}_N(\xi) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{\left((2m-1)\pi\right)^5}$$

сходится на отрезке $[0, 1]$ абсолютно и равномерно [IX], то сходится и квадрат этого остатка. Поэтому в силу ортогональности на отрезке $[0, 1]$ функций $u_n(\xi) = \sin n\pi\xi$ имеем

$$\|u - \widetilde{u}_N\|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{\left((2m-1)\pi\right)^5} \right)^2 d\xi =$$

$$= \frac{8}{\pi^{10}} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{10}}.$$

Если в дифференциальное уравнение $\dfrac{d^4u(\xi)}{d\xi^4} = 1$ задачи (6.84) подставить приближенное решение $\widetilde{u}_N$ из (6.109), то получим невязку

$$1 - A\widetilde{u}_N = 1 - \frac{d^4\widetilde{u}_N(\xi)}{d\xi^4} = 1 - \sum_{m=1}^{N} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{(2m-1)\pi}.$$

Тогда, принимая во внимание ортогональность на отрезке $[0, 1]$ функций $u_n(\xi) = \sin n\pi\xi$, находим [IX]

$$\|1 - A\widetilde{u}_N\|^2 = \int_0^1 \left(1 - \sum_{m=1}^{N} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{(2m-1)\pi} \right)^2 d\xi =$$

$$= 1 - 8\sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \frac{\sin(2m-1)\pi\xi}{(2m-1)\pi}\, d\xi + \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{4\sin(2m-1)\pi\xi}{(2m-1)\pi} \right)^2 d\xi =$$

$$= 1 - \sum_{m=1}^{N} \frac{16}{(2m-1)^2\pi^2} + \sum_{m=1}^{N} \frac{8}{(2m-1)^2\pi^2} = 1 - \sum_{m=1}^{N} \frac{8}{(2m-1)^2\pi^2}.$$

Учитывая, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

в итоге получаем

$$\|1 - A\widetilde{u}_N\|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Таким образом, для данной задачи скорость сходимости приближенного решения к точному при $N \to \infty$ существенно выше стремления к нулю нормы невязки. #

Ясно, что пример 6.8 носит иллюстративный характер, поскольку задачу (6.84) легко решить точно последовательным интегрированием (см. пример 6.5). В общем случае установить сходимость к точному решению приближенного решения, полученного методом наименьших квадратов, довольно сложно.

Теорема 6.7. Пусть A — линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, область определения $D(A)$ и область значений $R(A)$ которого всюду плотны в $\mathcal{H}$, $\{u_n\}$ — счетный базис в $D(A)$. Тогда построенное по методу наименьших квадратов приближенное решение (6.103) сходится в $\mathcal{H}$ при $N \to \infty$ к *классическому решению* операторного уравнения $Au = f$, $f \in R(A)$, если система $\{Au_n\}$ является счетным базисом в $R(A)$ и для некоторого $\tau > 0$ выполнено условие

$$\|Au\| \geqslant \tau\|u\|, \quad u \in D(A). \tag{6.112}$$

◀ При выполнении условия (6.112), согласно теореме 4.16, существует *ограниченный обратный оператор* A^{-1}, т.е. операторное уравнение $Au = f$, $f \in R(A)$, имеет единственное решение $u_0 = A^{-1}f$. В силу свойств счетного базиса $\{Au_n\}$ система $\{Au_n\}_N$ является линейно независимой при любом $N \in \mathbb{N}$,

*См.: *Градштейн И.С., Рыжик И.М.*

т.е. СЛАУ (6.106) при любом N имеет единственное решение относительно коэффициентов a_n, $n = \overline{1, N}$. Кроме того, для произвольного $f \in R(A)$ при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N_* \in \mathbb{N}$ и такие коэффициенты $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n = \overline{1, N_*}$, что справедливо неравенство

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N_*} \alpha_n A u_n \right\| < \tau\varepsilon. \tag{6.113}$$

Если в (6.113) α_n заменить соответственно на коэффициенты a_n, $n = \overline{1, N_*}$, найденные из условия (6.104), то неравенство останется верным, поскольку в этом случае его левая часть достигает минимума. Но и при $N > N_*$ будет выполнено неравенство

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n A u_n \right\| < \tau\varepsilon, \tag{6.114}$$

если коэффициенты a_n, $n = \overline{1, N}$, найдены из условия (6.104). Действительно, при $a_n = \alpha_n$, $n = \overline{1, N_*}$, и $a_n = 0$, $n = \overline{N_* + 1, N}$, левые части (6.113) и (6.114) совпадут, а при нахождении коэффициентов a_n иэ условия (6.104) левая часть (6.114) может только уменьшиться.

Таким образом, с учетом (6.79), (6.114) и равенства $f = Au_0$ получаем

$$\|Au_0 - A\widetilde{u}_N\| = \|A(u_0 - \widetilde{u}_N)\| < \tau\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (6.112), имеем $\|u_0 - \widetilde{u}_N\| < \varepsilon$. Следовательно, $\widetilde{u}_N \to u_0$ при $N \to \infty$. ▶

Отметим, что при выполнении условий теоремы 6.7 для построенного по методу наименьших квадратов приближенного решения $\widetilde{u}_N$ (6.103) имеем $A\widetilde{u}_N \to f$ при $N \to \infty$, т.е. стремится к нулю норма $\|A\widetilde{u}_N - f\|$ невязки операторного уравнения, возникающей при подстановке $\widetilde{u}_N$ в уравнение $Au = f$. Это позволяет при помощи вытекающего из (6.112) неравенства

$$\|\widetilde{u}_N - u_0\| \leqslant \frac{1}{\tau}\|A\widetilde{u}_n - f\| \qquad (6.115)$$

оценивать по норме погрешность приближенного решения. В заключение заметим, что (6.112) верно для *положительно определенного оператора* A. В самом деле, в этом случае в соответствии с (5.2) и (5.11) имеем $\|Au\|\|u\| \geqslant \langle Au, u\rangle \geqslant \gamma^2\|u\|^2$, откуда при $\gamma^2 = \tau$ следует (6.112).

6.8. Методы Бубнова — Галеркина и Ритца

Рассмотрим частный случай *метода ортогональных проекций* приближенного решения *операторного уравнения* $Au = f$. Пусть *области определения* $D(A)$ и *значений* $R(A)$ оператора A являются *всюду плотными подмножествами сепарабельного гильбертова пространства* $\mathcal{H}$, а система $\{u_k\}$ — *счетным базисом* в $D(A)$ и $R(A)$. Приближенное решение $\widetilde{u}_N$ вида (6.79) уравнения $Au = f$, согласно методу ортогональных проекций для случая, когда *проекционные функции* совпадают с *базисными*, т.е. $v_k = u_k$, $k = \overline{1, N}$, находим, решая получаемую из (6.80) систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle Au_n, u_k\rangle = \langle f, u_k\rangle, \qquad k = \overline{1, N}, \qquad (6.116)$$

относительно коэффициентов a_n.

Такую процедуру нахождения приближенного решения операторного уравнения $Au = f$ называют ***методом Бубнова*** — ***Галеркина***. Поскольку метод ортогональных проекций является, в свою очередь, одним из вариантов *проекционного метода*, то условия существования решения СЛАУ (6.116) и сходимости приближенного решения следуют из теорем 6.11,

*И.Г. Бу́бнов (1872–1919) — русский инженер.