

Методы вычислений

Отчет по лабораторной работе №3

**УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА**

Кузьмин А.  
Студент группы ИУ7-29  
Вариант 19

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Формулировка задачи

Найти решение краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  в следующей формулировке:

$$\begin{aligned}\Delta u + f &= 0, \\ u|_{x=0} &= \varphi_0(y), \quad u|_{y=0} = \psi_0(x), \\ u|_{x=a} &= \varphi_a(y), \quad u|_{y=b} = \psi_b(x),\end{aligned}$$

Решение разностной задачи провести итерационным методом (верхней релаксации). Провести анализ указанной разностной схемы на устойчивость и сходимость. Оценить точность полученного решения. Для этого повторить вычисления, уменьшив вдвое шаг по каждой оси и сравнить результаты двух расчетов по совпадающим узлам.

Решение предоставить в табличном виде и графически.

## 1.2. Исходные данные

$a$	1
$b$	1
$\varphi_0(y)$	$2y^2$
$\varphi_a(y)$	$2\sin(\pi y)$
$\psi_0(x)$	$x - x^2$
$\psi_b(x)$	$2 - 2x$
$f(x, y)$	$5 + x + y$

## 2. Теоретические сведения

Выбирается сетка с узлами  $(x_i, t_j), i, j = \overline{0, N}, x_i = ih_x, t_j = jh_y$ . Разностная схема строится, аппроксимируя частные производные 2-го порядка вторыми разностями. Пусть  $u_{ij} = u(x_i, y_j), f_{ij} = f(x_i, y_j)$ . Тогда

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} + f_{ij} = 0 \quad (1)$$

$$u_{0j} = \varphi_0(y_j), u_{Nj} = \varphi_a(y_j), u_{i0} = \psi_0(x_i), u_{iN} = \psi_b(x_i) \quad (2)$$

### 2.1. Метод верхней релаксации

Решение задачи проводится методом верхней релаксации. Координатная форма метода имеет вид:

$$u_{ij}^{k+1/2} = \frac{h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k) + \frac{h_x^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k) + \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)} f_{ij},$$
$$u_{ij}^{k+1} = \omega u_{ij}^{k+1/2} + (1 - \omega) u_{ij}^k$$

Значение параметра для метода верхней релаксации:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sin \frac{\pi}{N}}$$

### 2.2. Условие останова

Оценивать близость очередного приближения к точному решению проще оценивать по результатам последних двух итераций. В качестве условия останова используется неравенство:

$$\|u^{k+1} - u^k\| < (2 - \omega)\epsilon$$

## 3. Устойчивость

Данная разностная схема "крест" является устойчивой.

## 4. Порядок аппроксимации

В данном случае порядок аппроксимации равен  $O(h_x^2 + h_y^2)$ .

## 5. Результаты

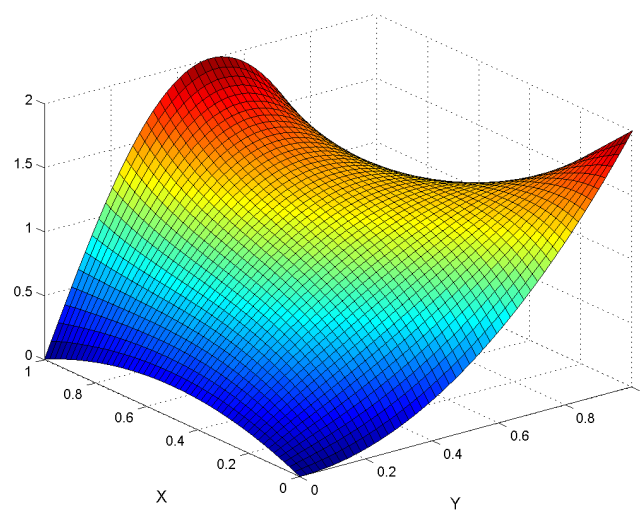


Рис. 1. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона