Аппроксимация производных при помощи метода баланса приводит к единообразным выражениям вне зависимости от того, как расположены возможные точки разрыва функций $p(x)$ и $r(x)$ в (7.10). В случае неоднородной среды использование метода баланса обычно позволяет ограничиться применением равномерной сетки с постоянным шагом.

7.4. Пример простейшей разностной схемы

В одномерных стационарных краевых задачах математической физики искомые функции зависят лишь от одной пространственной координаты и не зависят от времени. В математическую формулировку таких задач входят обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) с граничными условиями. Рассмотрим построение *разностной схемы* для сравнительно простой краевой задачи, описываемой линейным ОДУ второго порядка

$$-u''(x)+q(x)\,u(x)=f(x),\qquad x\in[0,l],\tag{7.20}$$

где $q(x), f(x)\in C[0,l]$, с граничными условиями

$$u(0)=\overline{u}_0,\qquad u(l)=\overline{u}_l.\tag{7.21}$$

К задаче (7.20), (7.21) можно прийти при рассмотрении установившегося распределения температуры $u(x)$ в тонком цилиндрическом стержне длиной l, торцы которого имеют заданные значения температуры $\overline{u}_0$ и $\overline{u}_l$, а на его боковой поверхности происходит теплообмен с окружающей средой (рис. 7.1). При этом интенсивность теплообмена задает функция $q(x)>0$, $x\in[0,l]$, а изменение температуры $u_c(x)$ среды вдоль стержня — функция $f(x)/q(x)$.

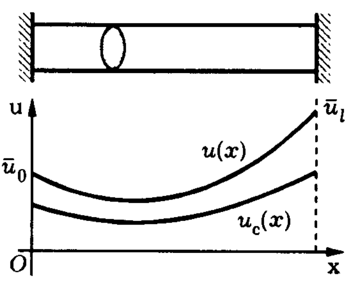

Рис. 7.1

Разобьем отрезок $[0,l]$ внутренними точками $x_n=nh$, $n=\overline{1,N-1}$, на N частичных отрезков равной длины $h = l/N$, т.е. введем равномерную *одномерную сетку* с номерами узлов $n = \overline{0, N}$. Для каждого внутреннего узла x_n, $n = \overline{1, N-1}$, используем *аппроксимацию* (7.3) второй *производной* $u''(x)$, имеющую второй *порядок погрешности.* Тогда из (7.20) получим систему $N-1$ *разностных уравнений*

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + q_n u_n = f_n, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{7.22}$$

относительно неизвестных *узловых значений* u_n искомой функции $u(x)$, причем $q_n = q(x_n)$, $f_n = f(x_n)$ и в соответствии с (7.21) $u_0 = \overline{u}_0$, $u_N = \overline{u}_l$.

Итак, разностная схема в данном случае состоит из равномерной одномерной сетки с $N+1$ узлами и системы (7.22) разностных уравнений при заданных значениях u_0 и u_N. Ясно, что (7.22) образует систему $N-1$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно узловых значений u_n, $n = \overline{1, N-1}$, *матричная запись* которой

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} \tag{7.23}$$

включает квадратную *трехдиагональную матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 2+q_1h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2+q_2h^2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+q_3h^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2+q_{N-2}h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2+q_{N-1}h^2 \end{pmatrix}$$

порядка $N-1$ и векторы $\boldsymbol{u} = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n\ \dots\ u_{N-1})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n\ \dots\ y_{N-1})^{\mathrm{T}}$, где $y_1 = f_1h^2 + u_0$, $y_{N-1} = f_{N-1}h^2 + u_N$ и $y_n = f_nh^2$, $n = \overline{2, N-2}$. Из $(N-1)^2$ элементов матрицы

A ненулевыми являются лишь $3N-5$ и соответствуют коэффициентам СЛАУ (7.22), которую можно представить в виде

$$\begin{cases} b_1u_1 - c_1u_2 = y_1, \\ -a_nu_{n-1} + b_nu_n - c_nu_{n+1} = y_n, \quad n = \overline{2, N-2}, \\ -a_{N-1}u_{N-2} + b_{N-1}u_{N-1} = y_{N-1}, \end{cases} \tag{7.24}$$

где $a_n = c_{n-1} = 1$, $n = \overline{2, N-1}$, и $b_n = a_n + c_n + q_nh^2 \neq 0$, $n = \overline{1, N-1}$, если учесть, что $a_1 = c_{N-1} = 0$. При $q(x) \geqslant 0$, $x \in (0, l)$, коэффициенты в (7.24) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} b_n - a_n - c_n \geqslant 0, \\ a_n \geqslant 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \\ c_n > 0, \quad n = \overline{1, N-2}. \end{cases} \tag{7.25}$$

В рассматриваемом случае выполнены неравенства

$$|b_n| \geqslant |a_n| + |c_n| > |a_n|, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{7.26}$$

причем $a_1 = c_{N-1} = 0$, т.е. при $n = 1$ и $n = N-1$ первое неравенство в (7.25) является заведомо строгим. Если это неравенство является строгим хотя бы для одного значения n, будем говорить о трехдиагональной ***матрице с частичным диагональным преобладанием***. В случае $q(x) > 0$, $x \in (0, l)$, все неравенства в (7.26) строгие, т.е. A — *матрица с диагональным преобладанием*. СЛАУ, у которой матрица с диагональным преобладанием, имеет решение, и притом единственное [III]. Это решение можно найти *методом Гаусса*.

Для решения СЛАУ, матрица которой имеет частичное диагональное преобладание, наиболее эффективным является *метод прогонки*, основанный на возможности выразить любое узловое значение u_n, $n = \overline{1, N-2}$, через значение u_{n+1} в соседнем узле, т.е.

$$u_n = \mu_n u_{n+1} + \nu_n, \quad n = \overline{1, N-2}, \tag{7.27}$$

причем из первого равенства (7.24) имеем $\mu_1 = \frac{c_1}{b_1}$ и $\nu_1 = \frac{y_1}{b_1}$, а далее из (7.24) при помощи (7.27) находим

$$\mu_n = \frac{c_n}{b_n - a_n\mu_{n-1}}, \quad \nu_n = \frac{y_n + a_n\nu_{n-1}}{b_n - a_n\mu_{n-1}}, \quad n = \overline{2, N-2}. \tag{7.28}$$

Подставляя $u_{N-2} = \mu_{N-2}u_{N-1} + \nu_{N-2}$ в последнее равенство (7.24), получаем

$$u_{N-1} = \frac{y_{N-1} + a_{N-1}\nu_{N-2}}{b_{N-1} - a_{N-1}\mu_{N-2}}. \tag{7.29}$$

Это позволяет затем при помощи (7.27) и предварительно вычисленных по формуле (7.28) коэффициентов μ_n и ν_n найти остальные значения u_n, где номер n последовательно принимает значения $N-2, \ldots, 1$.

Решение СЛАУ (7.24) существует и единственно, если по формулам (7.27)–(7.29), полученным из СЛАУ эквивалентными преобразованиями, можно однозначно найти неизвестные значения u_n, $n = \overline{1, N-1}$. Это будет в том случае, когда ни один из знаменателей $\Delta_n = b_n - a_n\mu_{n-1}$ в (7.28) и (7.29) в процессе вычислений не обращается в нуль. С помощью метода математической индукции покажем, что для существования и единственности решения СЛАУ достаточно выполнения условия (7.26). Действительно, $\Delta_1 = b_1 \neq 0$ и $|\mu_1| = \frac{|c_1|}{|b_1|} \leqslant 1$. Предположим, что $\Delta_{n-1} \neq 0$ и $|\mu_{n-1}| \leqslant 1$ при $2 < n \leqslant N-1$. Тогда получаем

$$|\Delta_n| = |b_n - a_n\mu_{n-1}| \geqslant |b_n| - |a_n\mu_{n-1}| \geqslant |b_n| - |a_n| > 0,$$

т.е. $\Delta_n \neq 0$. Кроме того, имеем $|\Delta_n| \geqslant |c_n|$, $n = \overline{1, N-2}$, и в данном случае $|\Delta_n| \geqslant |a_n|$, $n = \overline{2, N-1}$. Поэтому $|\mu_n| = \frac{|c_n|}{|\Delta_n|} \leqslant 1$ и $|a_n| \leqslant |\Delta_n|$. Следовательно, алгоритм метода прогонки, использующий рекуррентные формулы (7.27) и (7.28), не приводит к накоплению вычислительной погрешности, связанной, например, с ошибками округления. В таком случае говорят, что алгоритм обладает ***вычислительной устойчивостью***.

В рассматриваемом случае алгоритм метода прогонки обладает ***устойчивостью*** и ***по входным данным***, поскольку возможные погрешности в задании исходной информации при формулировке краевой задачи (7.20), (7.21) не возрастают в процессе вычислений благодаря выполнению неравенств $|\mu_n| \leqslant 1$ и $|a_n| \leqslant |\Delta_n| \leqslant 1$. ***Алгоритм*** называют ***устойчивым***, если он обладает одновременно и вычислительной устойчивостью и устойчивостью по входным данным, и ***неустойчивым*** в противном случае.

Для СЛАУ (7.24) справедлив так называемый ***принцип максимума***, состоящий в том, что $u_n \leqslant 0$ при выполнении неравенств (7.25) и $u_0 \leqslant 0$, $u_N \leqslant 0$, $y_n \leqslant 0$, $n = \overline{1, N-1}$. Докажем это от противного. Предположим, что $u_n > 0$ в одном или нескольких внутренних узлах x_n, $n = \overline{1, N-2}$. Обозначим через x_m узел, в котором значение $u_m > 0$ является наибольшим. Тогда в соответствии с (7.25) имеем

$$a_m u_m \geqslant a_m u_{m-1}, \qquad c_m u_m > c_m u_{m+1}$$

и с учетом (7.24) запишем

$$0 \leqslant (b_m - a_m - c_m) u_m <$$
$$< b_m u_m - a_m u_{m-1} - c_m u_{m+1} = y_m \leqslant 0. \quad (7.30)$$

Полученное противоречие ($0 < 0$) доказывает, что $u_n \leqslant 0$, $n = \overline{1, N-2}$. Если же наибольшим является значение $u_{N-1} > 0$, то при $m = N-1$ также приходим к противоречию в (7.30), поскольку $a_{N-1} > 0$ и $c_{N-1} = 0$.

СЛАУ (7.24) получена эквивалентными преобразованиями из СЛАУ (7.22). Поэтому принцип максимума по отношению к (7.22) можно сформулировать так: $u_n \leqslant 0$ при выполнении неравенств (7.25) и $u_0 \leqslant 0$, $u_N \leqslant 0$, $f_n \leqslant 0$, $n = \overline{1, N-1}$.

Если в (7.22) $f_n = 0$, $n = \overline{1, N-1}$, то для узловых значений v_n, $n = \overline{1, N-1}$, являющихся решением такой СЛАУ при $v_0 = u_0$ и $v_N = u_N$, справедлива оценка

$$\max_{n=\overline{1,N-1}} |v_n| \leqslant \max\{|u_0|, |u_N|\} = M \geqslant 0. \qquad (7.31)$$

Действительно, рассмотрим совокупность узловых значений $\xi_n = v_n - M$, $n = \overline{1, N-1}$, которые будут удовлетворять (7.22) при $f_n = -Mq_n h^2 \leqslant 0$, $n = \overline{1, N-1}$, причем $\xi_0 = v_0 - M \leqslant 0$ и $\xi_N = v_N - M \leqslant 0$. Поэтому, согласно принципу максимума, имеем $\xi_n \leqslant 0$, или $v_n \leqslant M$, $n = \overline{1, N-1}$, откуда следует (7.31).

Пусть теперь множество узловых значений w_n, $n = \overline{1, N-1}$, удовлетворяет СЛАУ (7.24) при условии $w_0 = w_N = 0$. Обозначим $Y = \max\limits_{n=\overline{1,N-1}} |f_n|$ и рассмотрим совокупность узловых значений

$$z_n = \frac{1}{2} Y x_n (l - x_n) = \frac{1}{2} Y h^2 n(N - n) \geqslant 0, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

Непосредственной проверкой убедимся, что тогда значения $\zeta_n = w_n - z_n$, $n = \overline{1, N-1}$, будут удовлетворять СЛАУ (7.24) при условии $\zeta_0 = \zeta_N = 0$, если в ее правой части f_n заменить на $f_n - Y - q_n z_n \leqslant 0$, $n = \overline{1, N-1}$. Следовательно, согласно принципу максимума, получим $\zeta_n \leqslant 0$, или

$$w_n \leqslant z_n = Y \frac{x_n(l - x_n)}{2} = \\ = \frac{x_n(l - x_n)}{2} \max_{n=\overline{1,N-1}} |f_n|, \quad n = \overline{1, N-1}. \qquad (7.32)$$

Отсюда с учетом $Nh = l$ находим

$$\max_{n=\overline{1,N-1}} |w_n| \leqslant \max_{n=\overline{1,N-1}} |z_n| \leqslant \frac{Yl^2}{8} = \frac{l^2}{8} \max_{n=\overline{1,N-1}} |f_n|. \qquad (7.33)$$

Ясно, что при заданных значениях u_0 и u_N решение СЛАУ (7.24) можно представить в виде $u_n = v_n + w_n$. Поэтому с учетом (7.31) и (7.33) справедлива оценка

$$\max_{n=\overline{1,N-1}} |u_n| = \max_{n=\overline{1,N-1}} |v_n + w_n| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n=\overline{1,N-1}} |v_n| + \max_{n=\overline{1,N-1}} |w_n| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|u_0|, |u_N|\} + \frac{l^2}{8} \max_{n=\overline{1,N-1}} |f_n|. \quad (7.34)$$

Теперь вывод об устойчивости по входным данным алгоритма метода прогонки при решении СЛАУ (7.22) можно перенести на соответствующую этой СЛАУ разностную схему. Пусть $\widetilde{u}_n$, $n = \overline{1, N-1}$, — решение СЛАУ (7.22) при правых частях $\widetilde{f}_n$ и заданных $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{u}_N$. Тогда значения $\eta_n = u_n - \widetilde{u}_n$, $n = \overline{1, N-1}$, будут удовлетворять СЛАУ (7.22) при правых частях $\Delta f_n = f_n - \widetilde{f}_n$ и заданных $\Delta u_0 = u_0 - \widetilde{u}_0$, $\Delta u_N = u_N - \widetilde{u}_N$, а вместо (7.34) получим

$$\max_{n=\overline{1,N-1}} |\eta_n| = \max_{n=\overline{1,N-1}} |u_n - \widetilde{u}_n| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|\Delta u_0|, |\Delta u_N|\} + \frac{l^2}{8} \max_{n=\overline{1,N-1}} |\Delta f_n|. \quad (7.35)$$

Значения Δf_n, $n = \overline{1, N-1}$, и Δu_0, Δu_N можно рассматривать как погрешности при задании исходной информации для краевой задачи (7.20), (7.21). Выполнение неравенства (7.35) означает, что рассматриваемая разностная схема обладает устойчивостью по входным данным.

Перейдем к оценке погрешностей, возникающих при приближенном решении краевой задачи (7.20), (7.21). Пусть функция $\overline{u}(x)$ является точным решением этой задачи и предположим, что $\overline{u}(x)$ имеет на отрезке $[0, l]$ непрерывную производную четвертого порядка. Тогда, подставляя в разностные уравнения (7.22) вместо u_n значения $\overline{u}_n = \overline{u}(x_n)$ и используя приближенный вариант (7.7) при $h_{n\pm1/2} = h$, получим

$$-\frac{\overline{u}_{n-1} - 2\overline{u}_n + \overline{u}_{n+1}}{h^2} + q_n\overline{u}_n - f_n \approx -\overline{u}_n'' + \overline{u}_n^{\mathrm{IV}}\frac{h^2}{12} +$$

$$+ q_n\overline{u}_n - f_n = \overline{u}_n^{\mathrm{IV}}\frac{h^2}{12} = \psi_n, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (7.36)$$

поскольку, согласно (7.20), $-\overline{u}_n'' + q_n\overline{u}_n - f_n = 0$. Значение

$$\psi = \max_{n=\overline{1,N-1}} |\psi_n| = \frac{h^2}{12}\max_{n=\overline{1,N-1}} |\overline{u}_n^{\mathrm{IV}}| \leqslant \frac{M_4}{12}h^2, \quad M_4 = \max_{x\in[0,l]} |\overline{u}^{\mathrm{IV}}(x)|,$$

назовем ***погрешностью аппроксимации ОДУ*** (7.20) рассматриваемой разностной схемой. Говорят, что разностное уравнение аппроксимирует ОДУ, если $\psi \to 0$ при $h \to 0$. При этом показатель степени m' в неравенстве $\psi \leqslant C'h^{m'}$, где $C' > 0$ — некоторая константа, называют ***порядком аппроксимации***. В данном случае $m' = 2$.

Из (7.36) следует, что значения $\overline{u}_n$, $n = \overline{1, N-1}$, удовлетворяют (7.22) при замене f_n на $\overline{f}_n = f_n + \psi_n$, т.е. значения $\Delta u_n = \overline{u}_n - u_n$ удовлетворяют условиям $\Delta u_0 = \Delta u_N = 0$ и СЛАУ (7.22) при замене в ней f_n на ψ_n. Тогда в соответствии с (7.32) и (7.36) имеем

$$|\overline{u}_n - u_n| \leqslant x_n\frac{l - x_n}{2}\max_{n=\overline{1,N-1}} |\psi_n| \leqslant$$

$$\leqslant M_4h^2x_n\frac{l - x_n}{24}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (7.37)$$

откуда следует

$$\Delta u = \max_{n=\overline{1,N-1}} |\overline{u}_n - u_n| \leqslant \frac{M_4l^2}{96}h^2. \quad (7.38)$$

Значение Δu называют ***погрешностью разностной схемы***. Если $\Delta u \to 0$ при $h \to 0$, то говорят, что решение разностных уравнений сходится к решению соответствующей краевой задачи, или короче: разностная схема сходится. При этом показатель степени m в неравенстве $\Delta u \leqslant Ch^m$, $C > 0$, называют ***порядком точности разностной схемы***. Для рассматриваемой разностной схемы $m = 2$. Совпадение порядка точности разностной схемы с порядком аппроксимации является в данном случае следствием непрерывной зависимости решения u_n, $n = \overline{1, N-1}$, разностных уравнений от их правых частей*.

Оценки (7.37) и (7.38) *погрешности*, называемые *априорными*, обычно трудно использовать на практике, поскольку значение M_4 сложно оценить до решения задачи. *Апостериорную оценку погрешности* можно получить *методом Рунге*, используя результаты решений СЛАУ (7.22) на так называемых сгущающихся сетках, т.е. на нескольких сетках с увеличивающимся числом узлов при условии сохранения ранее введенных узлов. Пусть $u^*_{n^*}$ — значения в узлах $x^*_{n^*}$, $n^* = \overline{1, N^*-1}$, удовлетворяющие (7.22) при $u^*_0 = \overline{u}_0$, $u^*_{N^*} = \overline{u}_l$, числе $N^* = 2N$ узлов сетки и ее *шаге* $h^* = h/2$. Оценивая левую часть в (7.37) сверху, т.е. заменяя неравенство (7.37) равенством, для узла $x_n = x^*_{n^*} = x^*_{2n}$ находим

$$|\overline{u}_n - u_n| = M_4 h^2 x_n \frac{l - x_n}{24}, \qquad n = \overline{1, N-1},$$

$$|\overline{u}^*_{n^*} - u^*_{n^*}| = M_4 (h^*)^2 x^*_{n^*} \frac{l - x^*_{n^*}}{24} = M_4 \frac{h^2}{4} x_n \frac{l - x_n}{24},$$

где $\overline{u}^*_{n^*} = \overline{u}_n$ и $n^* = \overline{1, N^*-1}$. Отсюда получаем

$$4\,|\overline{u}^*_{n^*} - u^*_{n^*}| = |\overline{u}_n - u_n|,$$

или, обозначая $\Delta u^*_n = |\overline{u}^*_{n^*} - u^*_{n^*}| = |\overline{u}_n - u^*_n|$,

$$4\Delta u^*(x_n) = |\overline{u}_n - u_n| = |(\overline{u}_n - u^*_n) + u^*_n - u_n| \leqslant \Delta u^*_n + |u^*_n - u_n|.$$

В итоге для узла x_n получаем оценку погрешности

$$\Delta u^*_n = |\overline{u}_n - u^*_n| \leqslant \frac{|u^*_n - u_n|}{3} = \Delta u_n. \tag{7.39}$$

*См., например: *Самарский А.А.*

Пример 7.1. Рассмотрим краевую задачу

$$-u''(x)+x^2u(x)=\left(\frac{\pi^2}{4}+x^2\right)\cos\frac{\pi x}{2},\quad x\in(0,1),$$
$$u(0)=1,\quad u(1)=0,$$

имеющую точное решение $\overline{u}(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$. Используем разностную схему (7.22) при $q_n=x_n^2$ и $f_n=\left(\frac{\pi^2}{4}+x_n^2\right)\cos\frac{\pi x_n}{2}$, где $x_n=\frac{n}{4}$, $n=\overline{0,4}$, т.е. разобьем отрезок $[0,1]$ тремя внутренними точками на $N=4$ частичных отрезков равной длины $h=\frac{1}{N}=\frac{1}{4}$. Тогда при заданных значениях $u_0=1$ и $u_N=0$ получим СЛАУ из трех уравнений

$$-u_{n-1}+\left(2+\frac{n^2}{256}\right)u_n-u_{n+1}=\frac{4\pi^2+n^2}{256}\cos\frac{\pi n}{8},\quad n=\overline{1,N-1}.$$

Ее решение методом прогонки представлено в табл. 7.1.

Таблица 7.1

n	u_n	n^*	$u^*_{n^*}$	$\overline{u}(x^*_{n^*})$	Δ^*_n	Δ_n	C^*_n
0	1,000000	0	1,000000	1,000000	0	0	0
–	–	1	0,981114	0,980785	3,29	–	4,34
1	0,926080	2	0,924413	0,923880	5,33	5,56	7,43
–	–	3	0,832097	0,831470	6,27	–	9,29
2	0,709703	4	0,707733	0,707107	6,26	6,57	9,91
–	–	5	0,556116	0,555570	5,46	–	9,29
3	0,384324	6	0,383082	0,382683	3,99	4,14	7,43
–	–	7	0,195300	0,195090	2,10	–	4,34
4	0	8	0	0	0	0	0

В случае $N^*=8$ та же разностная схема приведет к СЛАУ из семи уравнений

$$-u^*_{n^*-1}+\left(2+\frac{(n^*)^2}{4096}\right)u^*_{n^*}-u^*_{n^*+1}=\frac{16\pi^2+(n^*)^2}{4096}\cos\frac{\pi n^*}{16},$$

$$n^*=\overline{1,N^*-1},$$

причем $u_0^* = 1$ и $u_{N^*}^* = 0$. Решение этой СЛАУ и значения $\overline{u}(x_{n^*})$ точного решения в узлах $x_{n^*} = \dfrac{n^*}{N^*}$ приведены в табл. 7.1. Там же представлены значения $\Delta_n^* = 10^4|\overline{u}(x_{n^*}) - u_{n^*}^*|$. Их сравнение со значениями $\Delta_n = 10^4 \Delta u_n$, вычисленными в соответствии с (7.39), показывает, что метод Рунге дает в данном случае хорошие результаты. Вместе с тем погрешности значения $C_n^* = 10^4 \cdot \dfrac{M_4}{24}(h^*)^2 x_{n^*}^*(1 - x_{n^*}^*)$, соответствующие априорной оценке (7.37), где в данном случае

$$M_4 = \max_{x=[0,1]} |\overline{u}^{\mathrm{IV}}(x)| = \frac{\pi^4}{16} \max_{x=[0,1]} \left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| = \frac{\pi^4}{16},$$

заметно выше (см. табл. 7.1).

Вопросы и задачи

7.1. Какой порядок погрешности имеет формула $u''_{n\pm1} \approx \approx \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$, где h — постоянный шаг одномерной сетки?

7.2. Показать, что погрешность аппроксимации в (7.8) имеет первый порядок, а в (7.9) — второй порядок.