позволяет при помощи вытекающего из (6.112) неравенства

$$\|\widetilde{u}_N - u_0\| \leqslant \frac{1}{\tau}\|A\widetilde{u}_n - f\| \qquad (6.115)$$

оценивать по норме погрешность приближенного решения. В заключение заметим, что (6.112) верно для *положительно определенного оператора* A. В самом деле, в этом случае в соответствии с (5.2) и (5.11) имеем $\|Au\|\|u\| \geqslant \langle Au, u\rangle \geqslant \gamma^2\|u\|^2$, откуда при $\gamma^2 = \tau$ следует (6.112).

6.8. Методы Бубнова — Галеркина и Ритца

Рассмотрим частный случай *метода ортогональных проекций* приближенного решения *операторного уравнения* $Au = f$. Пусть *области определения* $D(A)$ и *значений* $R(A)$ оператора A являются *всюду плотными подмножествами сепарабельного гильбертова пространства* $\mathcal{H}$, а система $\{u_k\}$ — *счетным базисом* в $D(A)$ и $R(A)$. Приближенное решение $\widetilde{u}_N$ вида (6.79) уравнения $Au = f$, согласно методу ортогональных проекций для случая, когда *проекционные функции* совпадают с *базисными*, т.е. $v_k = u_k$, $k = \overline{1, N}$, находим, решая получаемую из (6.80) систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle Au_n, u_k\rangle = \langle f, u_k\rangle, \qquad k = \overline{1, N}, \qquad (6.116)$$

относительно коэффициентов a_n.

Такую процедуру нахождения приближенного решения операторного уравнения $Au = f$ называют ***методом Бубнова*** * ***— Галеркина.*** Поскольку метод ортогональных проекций является, в свою очередь, одним из вариантов *проекционного метода*, то условия существования решения СЛАУ (6.116) и сходимости приближенного решения следуют из теорем 6.11,

*И.Г. Бу́бнов (1872–1919) — русский инженер.

6.12 и замечаний 6.3, 6.4 (см. **Д.6.1**). Отметим, что метод Бубнова — Галеркина можно использовать, не накладывая на оператор A существенных ограничений: он может не быть *положительно определенным оператором*, *симметрическим* и даже линейным.

Рассмотрим более подробно практически важный случай, когда оператор A является положительно определенным. В этом случае элементы $\boldsymbol{u}_n$ *счетного базиса* $\{\boldsymbol{u}_n\}$, используемого при построении приближенного решения $\widetilde{\boldsymbol{u}}_N$ вида (6.103), могут и не принадлежать области $D(A)$ определения оператора A, т.е. $\boldsymbol{u}_n \notin D(A)$, $n=\overline{1,N}$. Это существенно расширяет возможности метода Бубнова — Галеркина по сравнению с *методами коллокации* и *наименьших квадратов*.

Пусть $\mathcal{H}_A$ — *энергетическое пространство*, которое является *пополнением нормированного пространства* $D(A)$ по *энергетической норме*

$$\|\boldsymbol{u}\|_A = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_A},$$

индуцированной *энергетическим скалярным произведением*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_A = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle .$$

Теперь приближенное решение операторного уравнения $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ с положительно определенным оператором A вместо (6.79) можно искать в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{u}_n \in \mathcal{H}_A, \tag{6.117}$$

где функции $\boldsymbol{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$, образуют счетный базис в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_A$. При этом коэффициенты a_n, $n=\overline{1,N}$, находят из решения СЛАУ (6.116), которая принимает вид

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_k\rangle_A = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_k\rangle, \quad k=\overline{1,N}. \tag{6.118}$$

Элементы $\langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_k \rangle_A$, $k, n = \overline{1, N}$, в (6.118) составляют *матрицу Грама* системы функций $\{\boldsymbol{u}_n\}_N$, которая в силу свойств счетного базиса $\{\boldsymbol{u}_n\}$ является линейно независимой в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_A$. Следовательно, определитель этой матрицы отличен от нуля, а СЛАУ (6.118) имеет единственное решение относительно коэффициентов a_n, $n = \overline{1, N}$.

Рассмотрим еще один метод приближенного решения уравнения $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ с положительно определенным оператором A, в конечном итоге опять приводящий к решению СЛАУ (6.118). *Обобщенное решение* $\boldsymbol{u}_*$ этого уравнения единственно и минимизирует *квадратичный функционал* $J[\boldsymbol{u}] = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - 2\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle$, который называют также *функционалом энергии*. Если элементы *минимизирующей последовательности* $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_N\}$ искать в виде (6.117), то при нахождении коэффициентов a_n, $n = \overline{1, N}$, придем к совпадающей с (6.118) СЛАУ. Такую процедуру нахождения коэффициентов принято называть ***методом Ритца****.

Таким образом, методы Ритца и Бубнова — Галеркина приближенного решения уравнения $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ в случае положительно определенного оператора A приводят к решению одной и той же СЛАУ (6.118). Однако метод Бубнова — Галеркина в отличие от метода Ритца можно применять и для решения уравнения $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ с произвольным оператором A.

Пусть $\{\boldsymbol{u}_n\}$ — базис в $\mathcal{H}_A$, ортонормированный относительно энергетического скалярного произведения. В этом случае приближенное решение (6.117) с коэффициентами $a_n = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_n \rangle_A$, полученными методом Ритца, будет частичной суммой ряда Фурье [XV]

$$\boldsymbol{u}_* = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \boldsymbol{u}_n, \quad \alpha_n = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_n \rangle_A, \quad \boldsymbol{u}_n \in \mathcal{H}_A, \tag{6.119}$$

обобщенного решения $\boldsymbol{u}_*$ уравнения $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. Это означает, что в случае ортонормированного в $\mathcal{H}_A$ базиса $\{\boldsymbol{u}_n\}$ приближенное

*В. Ритц (1878-1909) — немецкий физик и математик.

решение (6.117) уравнения $Au = f$ с положительно определенным оператором A сходится в $\mathcal{H}_A$ к обобщенному решению (6.119) этого уравнения по энергетической норме, причем в силу свойств ряда Фурье [IX]

$$\|u_* - \widetilde{u}_N\|_A^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n^2. \tag{6.120}$$

Но для положительно определенного оператора A обобщенное решение u_* уравнения $Au = f$ совпадает со *слабым решением* этого уравнения, удовлетворяющим равенству $\langle u_*, v\rangle_A = \langle f, v\rangle$ для любого $v \in \mathcal{H}_A$. Это следует из совпадения СЛАУ для нахождения коэффициентов приближенного решения методами Ритца и Бубнова — Галеркина. Поэтому приближенное решение $\widetilde{u}_N$ сходится при $N \to \infty$ и к слабому решению $u_* \in \mathcal{H}_A$ уравнения $Au = f$ по энергетической норме. Поскольку для энергетической нормы $\|u\|_A \geqslant \gamma\|u\|$, то $\widetilde{u}_N$ сходится к u_* и по норме $\|\cdot\|$ в гильбертовом пространстве.

Замечание 6.1. Выбор в (6.117) и (6.118) в качестве базисных функций (и совпадающих с ними проекционных) собственных элементов положительно определенного оператора A обеспечивает сходимость не только приближенного решения к слабому решению уравнения $Au = f$, но и сходимость к нулю нормы *невязки* этого *операторного уравнения*. Действительно, пусть u_n, $n \in \mathbb{N}$, — собственные элементы оператора A, соответствующие собственным значениям $\lambda_n > 0$, образующие в $\mathcal{H}$ ортонормированный базис. Если несколько различных линейно независимых собственных элементов соответствуют одному и тому же собственному значению, то положим, что в этом случае существует столько же равных между собой собственных значений, т.е. различными значениями индекса n обозначим различные собственные элементы. Умножая скалярно равенство $Au_n = \lambda_n u_n$ на u_k и учитывая, что $\langle Au_n, u_k\rangle = \langle u_n, u_k\rangle_A$, запишем

$$\langle Au_n, u_k\rangle = \lambda_n \langle u_n, u_k\rangle = \lambda_n\delta_{nk} = \langle u_n, u_k\rangle_A,$$

где $\delta_{nk} = 1$ при $n = k$ и $\delta_{nk} = 0$ при $n \neq k$. Отсюда следует, что $\langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_n \rangle_A = \lambda_n$ и $\langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_k \rangle_A = 0$ при $k \neq n$, т.е. в соответствии с (6.118) $a_n = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n \rangle}{\lambda_n}$, так что вместо (6.117) будем иметь

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n \rangle}{\lambda_n} \boldsymbol{u}_n. \qquad (6.121)$$

Подвергая (6.121) действию оператора A, получаем

$$A\widetilde{\boldsymbol{u}}_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n \rangle}{\lambda_n} A\boldsymbol{u}_n = \sum_{n=1}^{N} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n \rangle \boldsymbol{u}_n. \qquad (6.122)$$

Правая часть (6.122) является конечной суммой разложения элемента $\boldsymbol{f}$ в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\boldsymbol{u}_n\}$ функций $\boldsymbol{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $A\widetilde{\boldsymbol{u}}_N \to \boldsymbol{f}$ при $N \to \infty$.

Пример 6.9. Используем метод Бубнова — Галеркина для приближенного решения краевой задачи (6.84), уравнение которой содержит положительно определенный оператор $A = \frac{d^4}{d\xi^4}$. Решение будем искать во всюду плотном подмножестве $X \subset \subset L_2[0,1]$ четырежды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций, которое является *линейным многообразием.* Как и в примере 6.5, в качестве счетного базиса в X выберем систему функций $u_n(\xi) = \sin n\pi\xi \in D(A)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих граничным условиям в (6.84).

Так как функции $u_n(\xi) \in D(A)$ ортогональны на отрезке $[0, 1]$ (см. пример 6.8), то при $n \neq k$

$$\langle Au_n, u_k \rangle = \int_0^1 \bigl(Au_n(\xi)\bigr) u_k(\xi)\, d\xi = (n\pi)^4 \int_0^1 \sin n\pi\xi \sin k\pi\xi\, d\xi = 0.$$

В случае $n = k$ находим

$$\langle Au_n, u_n \rangle = \int_0^1 \bigl(Au_n(\xi)\bigr) u_n(\xi)\, d\xi = (n\pi)^4 \int_0^1 \sin^2 n\pi\xi\, d\xi = \frac{(n\pi)^4}{2}.$$

Учитывая, что в задаче (6.84) правая часть f дифференциального уравнения равна единице, для нечетных $k = 2m - 1$ имеем

$$\langle f, u_k \rangle = \int_0^1 \sin k\pi\xi \, d\xi = \frac{2}{k\pi}$$

и в соответствии с (6.116) для нечетных $n = 2m - 1$ получаем $a_n = a_{2m-1} = \dfrac{4}{(2m-1)^5 \pi^5}$ и $a_n = a_{2m} = 0$ для всех четных $n = 2m$. Это означает, что для рассматриваемой задачи метод Бубнова — Галеркина и метод наименьших квадратов приводят к одинаковому результату. Несложно проверить, что к тому же результату приведет и решение уравнения (6.85) с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$. #

Метод Бубнова — Галеркина широко применяют и для приближенного решения тех операторных уравнений, в которых оператор не является положительно определенным.

Пример 6.10. Применим метод Бубнова — Галеркина как вариант *метода взвешенных невязок* к приближенному решению задачи, рассмотренной в примере 6.7. Приближенное решение сначала будем искать в виде (6.93), а в качестве *весовой функции* возьмем входящую в (6.93) функцию $v_1(x) = 1 - (x/h)^2$. Эта функция при использовании метода Бубнова — Галеркина выполняет одновременно роль и базисной и проекционной функций.

Подставив (6.93) в (6.91), приравняем нулю взвешенную невязку

$$\int_0^h \left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} \right) v_1(x) \, dx = - \int_0^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)^2 \frac{dD(t)}{dt} \, dx -$$

$$- \int_0^h a D(t) \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \frac{2}{h^2} \, dx = -\frac{8h}{15} \frac{dD(t)}{dt} - \frac{4a}{3h} D(t) = 0.$$

Отсюда следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{D(t)}{dt}+\frac{5a}{2h^2}D(t)=0, \tag{6.123}$$

решение которого представим в виде

$$D(t)=D(0)\exp\left(-\frac{5at}{2h^2}\right)=D(0)\exp(-2{,}5\mathrm{Fo}), \tag{6.124}$$

где $\mathrm{Fo}=\frac{at}{h^2}$ — число Фурье (безразмерное время), а $D(0)$ — начальное значение функции $D(t)$, которое найдем из равенства нулю взвешенной невязки в начальном условии задачи:

$$\int\limits_0^h \left(\widetilde{T}(0,x)-T_0\right)v_1(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^h \left(T^*-D(0)\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)-T_0\right)\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)dx=0.$$

После вычислений получим $D(0)=\frac{5}{4}(T^*-T_0)$ и, подставляя (6.124) в (6.93), запишем

$$\widetilde{\Theta}(\mathrm{Fo},\xi)=\frac{T^*-\widetilde{T}(t,x)}{T^*-T_0}=5\frac{1-\xi^2}{4}\exp(-2,5\mathrm{Fo}),\quad \xi=\frac{x}{h}. \tag{6.125}$$

Результаты расчета по (6.125) при $\xi=0$ приведены в табл. 6.1.

6.9. Задачи на собственные значения

Рассмотрим *однородное операторное уравнение* вида (5.41)

$$A\boldsymbol{u}-\lambda B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{u},\boldsymbol{0}\in D(A)\subset\mathcal{H}, \tag{6.126}$$

где A и B — линейные операторы, действующие в *гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$, причем $D(A)\subset D(B)$ и $D(A)$ — *всюду*