МГТУ им. Н.Э. Баумана

# Методы вычислений

## Отчет по лабораторной работе №1

### Распространение тепла в стержне

Кузьмин А.
Студент группы ИУ7-29
Вариант 19

Москва 2013

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Формулировка задачи

Найти температуру $u(x, t)$ тонкого стержня длиной $l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, на концах которого задан температурный режим. Коэффициент теплопроводности $K$ меняется в зависимости от температуры по заданному закону $K = K(u)$. В начальный момент времени $t = 0$ стержень находится при фиксированной температуре $u_0$ по всей длине. Найти момент времени $T$, в который температура в середине стержня будет максимальной.

## 1.2. Исходные данные

| | |
|---|---|
| $l$ | 1 |
| $\rho$ | 1 |
| $c$ | 0.5 |
| $u_0$ | 0.1 |
| $a$ | 1 |
| $b$ | 2 |
| $\sigma$ | 0.25 |
| $t_0$ | 0.5 |
| $Q$ | 10 |

## 1.3. Тепловой поток

На правом конце стрежня тепловой поток равен 0.

На левом конце стрежня:

$$W_3(t) = \begin{cases} 2Q(t_0 - t), & 0 \leq t < t_0; \\ 0, & t \geq t_0; \end{cases}$$

## 1.4. Коэффициент теплопроводности

$K(u) = a + bu^{\sigma}$

# 2. Теоретические сведения

## 2.1. Краевая задача

$$\begin{cases} c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0;l), \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0 \\ K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = W_3(t) \\ K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

## 2.2. Разностная схема

При решении задачи используется неявная разностная схема. Вводится сетка $W_t^\tau$ с узлами $w_i^j = (x_i, t_j)$, $i = \overline{0:N}$, $j = \overline{0:M}$; где $x_i = ih$, $t = j\tau$.

Соответствующее сеточное уравнение:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{K_{i+}^{j+1}(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - K_{i-}^{j+1}(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1})}{h^2} \tag{1}$$

где

$$K_{i+}^{j+1} = \frac{K_{i+1}^{j+1} + K_i^{j+1}}{2}; \qquad K_{i-}^{j+1} = \frac{K_i^{j+1} + K_{i-1}^{j+1}}{2} \tag{2}$$

Преобразовывая выражение, получаем:

$$u_i^{j+1}h^2 - u_i^j h^2 = K_{i+}^{j+1}\tau(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - K_{i-}^{j+1}\tau(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) \tag{3}$$

$$u_i^j = u_i^{j+1} - \frac{\tau}{h^2}K_{i+}^{j+1}u_{i+1}^{j+1} + \frac{\tau}{h^2}K_{i+}^{j+1}u_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2}K_{i-}^{j+1}u_i^{j+1} - \frac{\tau}{h^2}K_{i-}^{j+1}u_{i-1}^{j+1} \tag{4}$$

$$u_i^j = (1 + \frac{\tau}{h^2}(K_{i+}^{j+1} + K_{i+}^{j+1}))u_i^{j+1} - \frac{\tau}{h^2}K_{i+}^{j+1}u_{i+1}^{j+1} - \frac{\tau}{h^2}K_{i-}^{j+1}u_{i-1}^{j+1} \tag{5}$$

$$u_i^j = a_i u_{i-1}^{j+1} + b_i u_i^{j+1} + c_i u_{i+1}^{j+1}; \tag{6}$$

где

$$a_i = -\alpha K_{i-}^{j+1}; \qquad b_i = 1 + \alpha(K_{i+}^{j+1} + K_{i-}^{j+1}); \qquad c_i = -\alpha K_{i+}^{j+1}; \qquad \alpha = \frac{\tau}{h^2};$$

Граничные условия:

$$K_{0+}^{j+1}\frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = W|_{x=l} = W_3(t); \qquad K_{N-}^{j+1}\frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} = 0; \tag{7}$$

Следовательно:

$$u_1^{j+1} - u_0^{j+1} = \frac{W_3 h}{K_{0+}^{j+1}}; \qquad u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1} = 0; \tag{8}$$

Тогда для $j+1$ слоя получим уравнение $Au^{j+1} = F$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} \frac{W_3^{j+1}h}{K_{N-}^{j+1}} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ ... \\ f_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3. Устойчивость

Условие устойчивости для параметрической схемы с параметром $\alpha$ и $K = K(u(x))$

$$(\frac{1}{2} - \alpha) \max_{0 \le x \le l} K(u(x)) \frac{\tau}{h^2} \le 1 \tag{9}$$

Для неявной схемы это условие выполняется при любых соотношениях $h$ и $\tau$ .

## 2.4. Аппроксимация

Замена дифференциального уравнения разностным происходит с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$. При $\alpha = 1/2$ из-за дополнительной симметрии порядок аппроксимации равен $O(\tau + h^2)$. Порядок аппроксимации для граничных условий равен $O(h)$.

## 3. Результаты

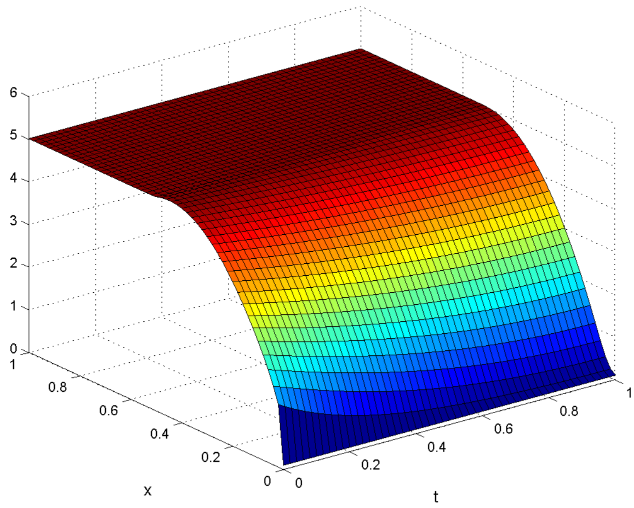


Рис. 1. Распространение тепла в стержне