4.7. Пополнение нормированного пространства

Если последовательность $\{u_n\}$ элементов *банахова пространства* $\mathcal{B}$ такова, что любой элемент $u \in \mathcal{B}$ можно единственным образом представить в виде сходящегося ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \tag{4.52}$$

то последовательность $\{u_n\}$ называют *счетным базисом* в $\mathcal{B}$. При этом равенство (4.52) называют *разложением элемента u по базису* $\{u_n\}$, а коэффициенты a_n в этом равенстве — *координатами элемента u в* данном *базисе*.

Счетный базис является последовательностью линейно независимых элементов. Банахово пространство со счетным базисом сепарабельно [IX], но не всякое сепарабельное пространство имеет счетный базис.

Обсуждение *математических моделей* физических процессов в части I показывает, что в этих моделях, как правило, приходится иметь дело с решением *операторного уравнения* вида

$$P(u) = f, \tag{4.53}$$

где P — некоторый оператор в банаховом пространстве $\mathcal{B}$, $u \in D(P)$, $f \in R(P)$. На практике элементами банахова пространства являются функции $u(x)$, определенные в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^m$ и удовлетворяющие краевым условиям на границе ∂V этой области. Большинство приближенных методов решения подобных уравнений основано на построении такой последовательности $\{\widetilde{u}_N\}$, что

$$\lim_{N \to \infty} P(\widetilde{u}_N) = f. \tag{4.54}$$

При этом изучают вопросы, имеет ли последовательность $\{\widetilde{u}_N\}$ предел, принадлежит ли этот предел $D(P)$ и является ли он решением уравнения $P(u) = f$.

Учитывая (4.52), можно положить

$$\widetilde{u}_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(N) u_n, \quad a_n(N) \in \mathbb{R}, \tag{4.55}$$

где функции $u_n \in \mathcal{B}$, $n = \overline{1, N}$, являются элементами счетного базиса $\{u_n\}$ в банаховом пространстве $\mathcal{B}$.

Если область определения $D(P)$ оператора P является подпространством и $u_n \in D(P)$, $n \in \mathbb{N}$, то при выполнении условия (4.54) в некоторых случаях (см. **5.2**) можно ожидать, что последовательность $\{\widetilde{u}_N\}$ будет сходиться к искомой функции $u_0 \in D(P)$, удовлетворяющей (4.53). Но если $u_n \notin D(P)$, то и $\widetilde{u}_N \notin D(P)$, так что выражение $P(\widetilde{u}_N)$ в (4.54) не будет определено. Поэтому следует использовать такие функции $u_n \in D(P)$, $n \in \mathbb{N}$, которые бы составляли счетный базис $\{u_n\}$ в $D(P)$.

Однако $D(P)$ может и не быть подпространством. Тогда последовательность $\{\widetilde{u}_N\} \subset D(P)$ может сходиться к элементу $u \notin D(P)$, не являющемуся решением уравнения (4.53) в обычном смысле. Кроме того, (4.53) не имеет решения в $D(P)$, если $f \notin R(P)$, что характерно для прикладных задач.

Эти трудности можно преодолеть, расширив понятие решения операторного уравнения. Такое ***решение***, называемое ***обобщенным*** в отличие от ***классического решения*** $u_0 \in D(P)$, рассматривают в пространстве, получаемом расширением области $D(P)$ определения оператора P, пополняя ее некоторыми особыми элементами.

Напомним, что *линейные пространства* D и D' называют изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение φ: $D \to D'$, что $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in D$. Такое отображение называют изоморфизмом этих пространств.

Определение 4.10. ***Нормированные пространства*** D и D' называют ***изометричными*** и говорят, что D' изометрично D (и наоборот), если существует их изоморфизм φ как линейных пространств, удовлетворяющий условию $\|\varphi(u)\|_{D'} = \|u\|_D$, $u \in D$. При этом изоморфизм φ называют ***изометрией***.

Определение 4.11. Банахово пространство $\mathcal{B}$ называют ***пополнением нормированного пространства*** D, если существует *линейное многообразие* $D' \subset \mathcal{B}$, изометричное D и являющееся *множеством, всюду плотным* в $\mathcal{B}$ ($\overline{D'} = \mathcal{B}$).

Теорема 4.23. Любое нормированное пространство D имеет некоторое пополнение $\mathcal{B}$. Любые два пополнения $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ нормированного пространства D изометричны.

◀ Две фундаментальные последовательности $\{u_n\}$ и $\{u'_n\}$ элементов из D назовем эквивалентными и будем писать $\{u_n\} \sim \{u'_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u'_n\|_D = 0. \tag{4.56}$$

Для отношения $\sim$ из (4.56) следуют свойства *рефлексивности* ($\{u_n\} \sim \{u_n\}$, так как $\|u_n - u_n\|_D \equiv 0$), *симметричности* (если $\{u_n\} \sim \{u'_n\}$, то $\{u'_n\} \sim \{u_n\}$ в силу $\|u_n - u'_n\|_D = \|u'_n - u_n\|_D$) и *транзитивности*: если $\{u_n\} \sim \{u'_n\}$ и $\{u'_n\} \sim \{u''_n\}$, то $\{u_n\} \sim \{u''_n\}$, так как из (4.1) имеем

$$0 \leqslant \|u_n - u''_n\|_D = \|(u_n - u'_n) + (u'_n - u''_n)\|_D \leqslant \\ \leqslant \|u_n - u'_n\|_D + \|u'_n - u''_n\|_D$$

и после перехода в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u''_n\|_D = 0.$$

Следовательно, отношение $\sim$ является отношением *эквивалентности*. Поэтому множество всех фундаментальных последовательностей элементов из D распадается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых составляет некоторый *класс эквивалентности*. Множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей из D обозначим $\mathcal{B}$ и покажем, что его можно наделить структурой банахова пространства.

Начнем с определения в $\mathcal{B}$ операции сложения. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ — классы эквивалентности по отношению, введенному в D. Выберем из этих классов эквивалентности фундаментальные в D последовательности $\{\boldsymbol{u}_n\} \in \widetilde{\boldsymbol{u}}$ и $\{\boldsymbol{v}_n\} \in \widetilde{\boldsymbol{v}}$. Нетрудно проверить, что последовательность $\{\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_n\}$ также фундаментальна в D. Поэтому она входит в некоторый класс эквивалентности, который обозначим $\widetilde{\boldsymbol{u}} + \widetilde{\boldsymbol{v}}$. Покажем, что определение этого класса корректно, т.е. оно не зависит от выбора последовательностей из классов $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{v}}$. Пусть $\{\boldsymbol{u}_n\} \sim \{\boldsymbol{u}'_n\}$ и $\{\boldsymbol{v}_n\} \sim \{\boldsymbol{v}'_n\}$. Докажем, что $\{\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_n\} \sim \{\boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{v}'_n\}$. Наряду с (4.56) будет верно и

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}'_n\|_D = 0. \tag{4.57}$$

Используя (4.1), получаем

$$0 \leqslant \|(\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_n) - (\boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{v}'_n)\|_D = \|(\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}'_n) + (\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}'_n)\|_D \leqslant$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}'_n\|_D + \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}'_n\|_D.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (4.56) и (4.57), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|(\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_n) - (\boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{v}'_n)\|_D = 0,$$

т.е. $\{\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_n\} \sim \{\boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{v}'_n\}$, а значит, и $\{\boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{v}'_n\} \in \widetilde{\boldsymbol{u}} + \widetilde{\boldsymbol{v}}$, что доказывает корректность определения в $\mathcal{B}$ операции сложения элементов.

Введем операцию умножения элементов из $\mathcal{B}$ на числа. Если последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\} \in \widetilde{\boldsymbol{u}}$ фундаментальна в D, то легко проверить, что последовательность $\{\lambda \boldsymbol{u}_n\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, также фундаментальна в D. Следовательно, она входит в некоторый класс эквивалентности, который обозначим $\lambda \widetilde{\boldsymbol{u}}$. Проверим, что определение этого класса корректно, т.е. оно не зависит от выбора последовательностей из класса $\widetilde{\boldsymbol{u}}$. Пусть $\{\boldsymbol{u}_n\} \sim \{\boldsymbol{u}'_n\}$.

Докажем, что $\{\lambda \boldsymbol{u}_n\} \sim \{\lambda \boldsymbol{u}'_n\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Используя (4.56), находим

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda \boldsymbol{u}_n - \lambda \boldsymbol{u}'_n\|_D = |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}'_n\|_D = 0,$$

т.е. $\{\lambda \boldsymbol{u}_n\} \sim \{\lambda \boldsymbol{u}'_n\}$, а значит, и $\{\lambda \boldsymbol{u}'_n\} \in \lambda\widetilde{\boldsymbol{u}}$, что доказывает корректность определения в $\mathcal{B}$ операции умножения элемента на число.

Итак, в $\mathcal{B}$ введены линейные операции. Так как они определены через линейные операции в D, то можно показать, что в $\mathcal{B}$ выполнены все аксиомы линейного пространства. Поэтому $\mathcal{B}$ является линейным пространством. Роль нулевого элемента в $\mathcal{B}$ выполняет класс $\widetilde{\mathbf{0}}$, определяемый условием $\widetilde{\boldsymbol{u}} + \widetilde{\mathbf{0}} = \widetilde{\boldsymbol{u}}$, $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{B}$. Представителем этого класса является фундаментальная последовательность, все члены которой равны нулевому элементу $\mathbf{0} \in D$. Отсюда, учитывая (4.56), получаем, что последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\} \in \widetilde{\mathbf{0}}$ тогда и только тогда, когда $\|\boldsymbol{u}_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Введем норму в линейном пространстве $\mathcal{B}$. Для любого класса эквивалентности $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ выберем фундаментальную последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\} \in \widetilde{\boldsymbol{u}}$ и положим

$$\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathcal{B}} = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n\|_D. \tag{4.58}$$

Так как в соответствии с (4.1)

$$\big|\|\boldsymbol{u}_m\|_D - \|\boldsymbol{u}_n\|_D\big| \leqslant \|\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{u}_n\|_D,$$

то числовая последовательность $\{\|\boldsymbol{u}_n\|\}$ в силу определения 4.1 фундаментальна и, согласно критерию Коши [I], сходится к некоторому пределу. Значение этого предела не зависит от выбора последовательности из класса $\widetilde{\boldsymbol{u}}$. В самом деле, для произвольных последовательностей $\{\boldsymbol{u}_n\}$ и $\{\boldsymbol{u}'_n\}$ из класса эквивалентности $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ в соответствии с (4.1) имеем $\big|\|\boldsymbol{u}_n\|_D - \|\boldsymbol{u}'_n\|_D\big| \leqslant$ $\leqslant \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}'_n\|_D$ и, используя (4.56), получаем $\|\boldsymbol{u}\|_D - \|\boldsymbol{u}'_n\|_D \to 0$ при $n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}'_n\|_D = \lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n\|_D$.

Для (4.58) выполнены аксиомы нормы (см. **4.1**). Действительно, $\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{B}} \geqslant 0$, причем если $\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{B}} = 0$, то для любой последовательности $\{u_n\} \in \widetilde{u}$ в соответствии с (4.58) $\|u_n\|_D \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $\{u_n\} \in \widetilde{\mathbf{0}}$, т.е. $\widetilde{u} = \widetilde{\mathbf{0}}$. Очевидно и обратное: если $\widetilde{u} = \widetilde{\mathbf{0}}$, то $\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{B}} = 0$. Из аксиом нормы имеем $\|\lambda u_n\|_D = |\lambda|\,\|u_n\|_D$ и $\|u_n + v_n\|_D \leqslant \|u_n\|_D + \|v_n\|_D$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{u_n\} \in \widetilde{u}$ и $\{v_n\} \in \widetilde{v}$. Переходя в этих соотношениях к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|\lambda\widetilde{u}\|_{\mathcal{B}} = |\lambda|\,\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{B}}$ и $\|\widetilde{u}+\widetilde{v}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \|\widetilde{u}\|_{\mathcal{B}}+\|\widetilde{v}\|_{\mathcal{B}}$.

Таким образом, (4.58) определяет в линейном пространстве $\mathcal{B}$ норму, т.е. $\mathcal{B}$ является нормированным пространством. Покажем, что оно включает линейное многообразие D', изометричное D. Прежде всего убедимся, что существует инъективное отображение φ, переводящее D в $\mathcal{B}$. Любому элементу $u \in D$ поставим в соответствие класс $\varphi(u) = \widetilde{u}' \in \mathcal{B}$ фундаментальных последовательностей, которому принадлежит стационарная последовательность $\{u_n\}$ с элементами $u_n = u \in D$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что эта последовательность сходится к элементу $u \in D$. Но если в классе эквивалентности $\widetilde{u}' \in \mathcal{B}$ хотя бы одна последовательность $\{u_n\} \in \widetilde{u}'$ сходится к некоторому элементу $u \in D$, то все последовательности этого класса сходятся, причем к этому же элементу $u \in D$. В самом деле, пусть $\{u'_n\} \in \widetilde{u}'$. Тогда с учетом аксиомы 3 нормы (см. **4.1**) запишем

$$\|u'_n - u\|_D \leqslant \|u'_n - u_n\|_D + \|u_n - u\|_D.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (4.56), получаем, что $\|u'_n - u\|_D \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, если $\varphi(u) = \varphi(w)$ для некоторых $u, w \in D$, $u \neq w$, то класс эквивалентности $\varphi(u)$ состоит из последовательностей, которые сходятся как к u, так и к w, что невозможно. Следовательно, отображение φ инъективно.

Из (4.58) вытекает, что если $u \in D$ и $\widetilde{u}' = \varphi(u)$, то

$$\|\widetilde{u}'\|_{\mathcal{B}} = \|u\|_D. \tag{4.59}$$

Обозначим область значений отображения φ через D'. Соответствие φ между элементами $u \in D$ и классами $\widetilde{u}' \in D' \subset \mathcal{B}$, удовлетворяющее (4.59), является биективным (взаимно однозначным) отображением D в D'. Это отображение линейно в силу определения в $\mathcal{B}$ линейных операций с классами эквивалентности, и поэтому D' — линейное многообразие в $\mathcal{B}$, а отображение φ — изоморфизм между D и D'. В качестве нормы в D' используем норму в $\mathcal{B}$. С учетом (4.59) $\|\varphi(\boldsymbol{u})\|_{D'} = \|\varphi(\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{B}} = \|\boldsymbol{u}\|_D$. Согласно определению 4.10, это означает, что D и D' изометричны.

Итак, множество D' всех классов $\widetilde{\boldsymbol{u}}'$, содержащих стационарные последовательности, члены каждой из которых равны соответствующему элементу из D, является линейным многообразием в $\mathcal{B}$, изометричным D. Покажем, что это многообразие всюду плотно в $\mathcal{B}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и в любом классе $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{B}$ рассмотрим некоторую фундаментальную последовательность $\{\boldsymbol{u}_m\} \in \widetilde{\boldsymbol{u}}$ элементов из D. В силу определения 4.1 фундаментальной последовательности существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что

$$\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m\|_D < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.60}$$

при $m > N$ и $n > N$. Зафиксируем номер $m > N$. Тогда класс $\varphi(\boldsymbol{u}_m) = \widetilde{\boldsymbol{u}}_m \in D'$ содержит стационарную последовательность, все элементы которой равны $\boldsymbol{u}_m$. В соответствии с (4.58) и (4.60) получим

$$\|\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_m\|_{\mathcal{B}} = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m\|_D \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{4.61}$$

Это означает, что в любой ε-окрестности точки $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{B}$ найдется хотя бы одна точка из D'. Таким образом, согласно определению 4.2, линейное многообразие D' всюду плотно в $\mathcal{B}$.

Наконец, покажем, что нормированное пространство $\mathcal{B}$ является полным, т.е. банаховым. Пусть задана фундаментальная в $\mathcal{B}$ последовательность $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_n\}$ элементов из $\mathcal{B}$. Так как D' всюду плотно в $\mathcal{B}$, то для каждого $\widetilde{\boldsymbol{u}}_n \in \mathcal{B}$ можно найти такой элемент $\widetilde{\boldsymbol{v}}_n \in D'$, что

$$\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_n - \widetilde{\boldsymbol{u}}_n\|_{\mathcal{B}} < \frac{1}{n}. \tag{4.62}$$

Тогда, используя (4.1), получаем

$$\|\widetilde{\boldsymbol v}_m-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}=\|(\widetilde{\boldsymbol v}_m-\widetilde{\boldsymbol u}_m)+(\widetilde{\boldsymbol u}_n-\widetilde{\boldsymbol v}_n)+(\widetilde{\boldsymbol u}_m-\widetilde{\boldsymbol u}_n)\|_{\mathcal B}\leqslant$$
$$\leqslant\|\widetilde{\boldsymbol v}_m-\widetilde{\boldsymbol u}_m\|_{\mathcal B}+\|\widetilde{\boldsymbol u}_n-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}+\|\widetilde{\boldsymbol u}_m-\widetilde{\boldsymbol u}_n\|_{\mathcal B}<$$
$$<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\|\widetilde{\boldsymbol u}_m-\widetilde{\boldsymbol u}_n\|_{\mathcal B}. \quad (4.63)$$

Согласно определению 4.1 фундаментальной последовательности, для произвольного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что $\|\widetilde{\boldsymbol u}_m-\widetilde{\boldsymbol u}_n\|_{\mathcal B}<\frac{\varepsilon}{2}$ при $m>N$ и $n>N$. Выберем $m>\max\left\{\frac{4}{\varepsilon},N\right\}$ и $n>\max\left\{\frac{4}{\varepsilon},N\right\}$. Тогда из (4.63) имеем

$$\|\widetilde{\boldsymbol v}_m-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \quad (4.64)$$

что, согласно определению 4.1, означает фундаментальность последовательности $\{\widetilde{\boldsymbol v}_n\}$ в $\mathcal B$. Благодаря изометричности D' и D каждому элементу $\widetilde{\boldsymbol v}_n\in D'$ соответствует единственный элемент $\boldsymbol v_n\in D$, причем в силу фундаментальности последовательности $\{\widetilde{\boldsymbol v}_n\}$ последовательность $\{\boldsymbol v_n\}$ также фундаментальна и ей соответствует некоторый класс эквивалентности $\widetilde{\boldsymbol v}\in\mathcal B$.

Учитывая (4.1) и (4.62), запишем

$$0\leqslant\|\widetilde{\boldsymbol u}_n-\widetilde{\boldsymbol v}\|_{\mathcal B}\leqslant\|\widetilde{\boldsymbol u}_n-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}+\|\widetilde{\boldsymbol v}-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}<\frac{1}{n}+\|\widetilde{\boldsymbol v}-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}. \quad (4.65)$$

Так как $\|\widetilde{\boldsymbol v}-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}=\lim\limits_{m\to\infty}\|\widetilde{\boldsymbol v}_m-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\|\widetilde{\boldsymbol v}-\widetilde{\boldsymbol v}_n\|_{\mathcal B}=0$. Переходя в (4.65) к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{\boldsymbol u}_n-\widetilde{\boldsymbol v}\|_{\mathcal B}=0,$$

т.е. на основании (4.2) заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{\boldsymbol u}_n=\widetilde{\boldsymbol v}$. Это означает, что произвольная фундаментальная последовательность элементов из $\mathcal B$ сходится по норме $\|\cdot\|_{\mathcal B}$ к элементу, также принадлежащему $\mathcal B$, т.е. нормированное пространство $\mathcal B$ является полным (банаховым) пространством (см. **4.1**).

Таким образом, все условия определения 4.11 выполнены, а это значит, что $\mathcal{B}$ является пополнением нормированного пространства D. ▶

Вопросы и задачи

4.1. Доказать, что в функциональном пространстве $\mathcal{U}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ можно ввести следующие нормы:

$$\|f\|_1 = |f(a)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|, \quad \|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|\,dx + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Показать, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны норме

$$\|f\|_0 = \max\left\{\max_{x\in[a,b]} |f(x)|,\ \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|\right\}, \quad f\in\mathcal{U},$$

т.е. найдутся числа $\alpha_i, \beta_i > 0$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\alpha_i\|f\|_0 \leqslant \|f\|_i \leqslant \beta_i\|f\|_0, \quad f\in\mathcal{U}.$$

4.2. Доказать неравенство Гельдера* для интегралов при $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$:

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

4.3. Доказать неравенство Минковского для интегралов при $p \geqslant 1$:

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

*О. Гéльдер (1859–1937) — немецкий математик.