5. ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

5.1. Гильбертово пространство

Бесконечномерное *банахово пространство*, в котором введена операция *скалярного умножения*, индуцирующая норму этого пространства, называют *гильбертовым**. Мы будем обозначать его, как правило, символом $\mathcal{H}$ (по первой букве фамилии Д. Гильберта). Скалярное произведение элементов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ будем обозначать $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.

Напомним, что операция скалярного умножения удовлетворяет следующим *аксиомам скалярного умножения* (в их формулировках $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ — произвольные элементы линейного пространства, а α — произвольное действительное число):

1) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$ (симметрия);

2) $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle$ (дистрибутивность);

3) $\langle \alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ (однородность);

4) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \geqslant 0$, причем $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (неотрицательность скалярного квадрата).

В случае комплексного гильбертова пространства аксиома симметрии принимает вид $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle}$.

Норма в гильбертовом пространстве, порожденная скалярным умножением, выражается через *скалярный квадрат* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle$:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}. \tag{5.1}$$

Неравенство Коши — Буняковского

$$\bigl|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\bigr| \leqslant \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}\sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} \tag{5.2}$$

*Д. Гильберт (1862–1943) — немецкий математик.

справедливо для произвольного евклидова пространства, в том числе и для гильбертова пространства (в последнем случае его иногда называют ***неравенством Шварца****). Отметим, что неравенство Коши — Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда элементы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ линейно зависимы, т.е. один из них может быть получен умножением другого на число. В частности, это верно, когда хотя бы один из элементов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ является нулевым.

С учетом (5.1) неравенство(5.2) принимает вид

$$\left|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\right| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. В линейном пространстве X функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, скалярное умножение можно ввести соотношением [IX]

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx, \quad f, g \in X. \tag{5.4}$$

Несложно проверить, что для формулы (5.4) выполнены все аксиомы скалярного умножения. Это пространство, являясь линейным (см. пример 2.1), будет нормированным. При этом норма, индуцированная скалярным умножением, определена соотношением

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \quad f \in X.$$

Последовательность функций из X, *фундаментальная в нормированном пространстве* X, может не иметь предела в X, т.е. нормированное пространство X со скалярным умножением (5.4) не является полным (а значит, и гильбертовым). Например, нетрудно показать, что последовательность $\{\varphi_n\}$ не-

*Г. Шварц (1843-1921) — немецкий математик.

прерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $\varphi_n(x)$, рассмотренных в примере 4.3 (см. рис. 4.1), фундаментальна в X, но не является сходящейся в X.

Известно*, что гильбертовым является *пространство функций* $f(x)$, *суммируемых* на отрезке $[0, 1]$ *с квадратом.* Это пространство обозначают $L_2[0, 1]$. Скалярное умножение в нем определяют соотношением

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx, \quad f, g \in L_2[0,1], \tag{5.5}$$

а норму — соотношением

$$\|f\| = \Bigl(\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx\Bigr)^{1/2}, \quad f \in L_2[0,1]. \tag{5.6}$$

Равенство (5.5) аналогично (5.4), но теперь интегралы в (5.6) и (5.5) следует понимать как интегралы Лебега. Нетрудно убедиться, используя свойства *интеграла Лебега* [IX] (они аналогичны свойствам определенного интеграла), что для (5.5) выполнены все аксиомы скалярного умножения.

Сходимость в среднем квадратичном фундаментальной последовательности $\{g_n(x)\}$ функций $g_n(x) \in L_2[0,1]$ к функции $g(x) \in L_2[0,1]$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \bigl(g_n(x) - g(x)\bigr)^2\,dx = 0.$$

Отметим, что непрерывные, непрерывно дифференцируемые заданное число раз, кусочно постоянные и *измеримые* ограниченные *функции* (в том числе принимающие на $[0, 1]$ конечное число значений) составляют *всюду плотные подмножества* гильбертова пространства $L_2[0,1]$ [IX]. Поскольку в $L_2[0,1]$ су-

*См., например: *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.*

ществуют счетные всюду плотные подмножества (например, многочлены с рациональными коэффициентами), то *пространство* $L_2[0,1]$ будет *сепарабельным.* #

Гильбертовым пространством является множество $L_2(\Omega)$ действительных функций, суммируемых с квадратом на *измеримом множестве* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [XV]. Скалярное умножение в $L_2(\Omega)$ вводят соотношением

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad f, g \in L_2(\Omega).$$

Для этих функций конечен интеграл Лебега

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\Omega} |f(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x},$$

который определяет норму в $L_2(\Omega)$.

Обобщением пространства $L_2(\Omega)$ является гильбертово пространство $L_2(\Omega,\sigma)$ *функций, суммируемых с квадратом и с весом* σ, где $\sigma(\boldsymbol{x})$ — неотрицательная измеримая на Ω действительная функция. Для функций из $L_2(\Omega,\sigma)$ конечен интеграл

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\Omega} |f(\boldsymbol{x})|^2 \sigma(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ имеет вид [XV]

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})\, \sigma(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad f, g \in L_2(\Omega,\sigma).$$

Гильбертовым будет и линейное пространство $L_2^{(m)}(\Omega)$ векторных функций $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, определенных на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которых конечен интеграл

$$\|\boldsymbol{f}\|^2 = \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\, dx,$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает операцию *стандартного скалярного умножения* векторов m-мерного евклидова арифметического пространства. Правило скалярного умножения в $L_2^{(m)}(\Omega)$ задает формула [XV]

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in L_2^{(m)}(\Omega).$$

Отметим, что в $L_2[0,1]$, $L_2(\Omega)$ и $L_2^{(m)}(\Omega)$ считают равными любые две функции, отличающиеся на множестве, для которого *мера Лебега* равна нулю (говорят также „на множестве меры нуль"). Это обеспечивает выполнение аксиомы скалярного умножения (и соответственно нормы), согласно которой $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ только в случае, если $\boldsymbol{u}$ является нулевым элементом линейного пространства.

Напомним, что если *элементы* $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ связаны соотношением $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$, то их называют *ортогональными*. В этом случае используют запись $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ (или $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$). Если элемент $\boldsymbol{w} \in \mathcal{H}$ ортогонален каждому элементу $\boldsymbol{u}$ *подпространства* $M \subset \mathcal{H}$, т.е. $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in M$, то этот *элемент* называют *ортогональным подпространству* M и пишут $\boldsymbol{w} \perp M$.

Если последовательности $\{\boldsymbol{u}_n\}$ и $\{\boldsymbol{v}_n\}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по норме сходятся к элементам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, то существует предел [IX]

$$\lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{H}. \tag{5.7}$$

Полагая в (5.7) сначала $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}$, $n \in \mathbb{N}$, а затем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n\| = \|\boldsymbol{u}\|, \tag{5.8}$$

в частности при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ из первого равенства (5.8) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2. \tag{5.9}$$

Замечание 5.1. Элемент $\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}$, ортогональный множеству M, всюду плотному в гильбертовом *пространстве* $\mathcal{H}$, является *нулевым элементом* $\mathcal{H}$, т.е. $\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \in \mathcal{H}$. Действительно, если $\boldsymbol{u} \perp M$ и $\overline{M} = \mathcal{H}$, то существует последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset M$, такая, что $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ при $n \to \infty$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u} \rangle = 0$. Тогда

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u} \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u} \right\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2,$$

т.е $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Таким образом, если для некоторого элемента $\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}$ при любом $\boldsymbol{v} \in M$ справедливо $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$, то $\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \in \mathcal{H}$.

Теорема 5.1. Пусть последовательность $\{\boldsymbol{v}_k\}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ образует *счетный базис*. Если для некоторого элемента $\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}$ выполнены равенства $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$, $k \in \mathbb{N}$, то $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

◀ Множество M всех элементов вида

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} b_k \boldsymbol{v}_k \tag{5.10}$$

будет всюду плотным в $\mathcal{H}$, так как эти элементы образуют *линейную оболочку* счетного базиса [IX]. По условию теоремы $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$ при произвольном $k \in \mathbb{N}$. Поэтому с учетом линейности скалярного умножения, согласно (5.10),

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \boldsymbol{u}, \sum_{k=1}^{n} b_k \boldsymbol{v}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_k \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{v} \in M.$$

Отсюда в соответствии с замечанием 5.1 следует, что $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. ▶

В любом сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ существует ортонормированный базис [IX]. Напомним схему построения ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно, то можно выделить счетное множество $M \subset \mathcal{H}$, такое, что $\overline{M} = \mathcal{H}$. Располагая элементы из M в виде последовательности и удаляя из нее все элементы, являющиеся линейными комбинациями предыдущих, получаем линейно независимую систему $\{u_n\} \subset M$, замкнутую в $\mathcal{H}$.

Используя *процесс ортогонализации Грама — Шмидта*, эту систему можно ортонормировать и получить *ортонормированную систему* $\{w_k\}$ функций $w_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$, причем также замкнутую в $\mathcal{H}$. Ортонормированная замкнутая система и является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$. Отметим также, что эта система будет *полной ортонормированной системой*. Для такой системы справедливо, что в $\mathcal{H}$ нет элемента, кроме нулевого, ортогонального всем элементам этой системы.

5.2. Операторы и функционалы в гильбертовом пространстве

Рассмотрим *линейный оператор* A: $D(A) \to \mathcal{H}$, *область определения* $D(A)$ которого является *всюду плотным множеством* в *гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

Определение 5.1. Линейный ***оператор*** A называют ***симметрическим***, если для произвольных элементов $u, v \in D(A)$ справедливо равенство $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, и ***положительным***, если к тому же $\langle Au, u\rangle \geqslant 0$ для любого элемента $u \in D(A)$, причем $\langle Au, u\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $u = \mathbf{0}$. При выполнении неравенства

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \gamma^2\|u\|^2, \quad u \in D(A), \tag{5.11}$$

где $\gamma \neq 0$, положительный ***оператор*** A называют ***положительно определенным***.