7. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Используемые в задачах математической физики модели физических процессов (см. **1–3**) предполагают в большинстве случаев непрерывность распределения искомых величин в пространстве и их непрерывное изменение во времени. Вместе с тем можно получить некоторое приближенное представление о пространственном распределении и эволюции во времени этих величин, если оперировать совокупностью их значений в фиксированные моменты времени на конечном множестве точек пространства. Ясно, что уменьшение интервалов между выбранными фиксированными моментами времени и сокращение расстояний между выбранными точками пространства должны приближать такое дискретное представление к непрерывному распределению искомых величин.

7.1. Понятие о сеточных методах

Множество точек пространства, используемых для приближенного представления непрерывного пространственного распределения какой-либо величины, называют ***пространственной сеткой***, а точки — ***узлами*** (или узловыми точками) этой ***сетки***. Аналогично множество фиксированных моментов времени называют ***временной сеткой***, а такие моменты времени — узлами этой сетки. Объединение пространственных сеток, рассматриваемых в выбранные фиксированные моменты времени, образует множество узлов ***пространственно-временной сетки***. Множество узлов пространственной сетки в фиксированный момент времени называют ***слоем простран-***

ственно-временно́й сетки. ***Значение*** величины в узле сетки называют ***узловым***.

При необходимости значения величин в промежутках между узлами сетки можно найти *интерполированием.* Это позволяет получить по дискретной информации об искомых величинах их приближенные непрерывные зависимости от пространственных координат и времени.

При рассмотрении пространственного распределения искомых величин их зависимость может быть существенной не от всех трех пространственных координат. Тогда наряду с общим случаем ***трехмерной сетки*** в частных случаях она может быть ***двумерной*** или даже ***одномерной***. В стационарных задачах искомые величины не зависят от времени. Поэтому необходимость в использовании временно́й сетки при решении таких задач отпадает.

Понятия сетки и сеточного узла являются основными при построении большой группы приближенных методов решения задач математической физики, называемых ***сеточными методами*** (иногда используют собирательный термин — ***метод сеток***). В таких методах непрерывное пространственное распределение искомых величин и описание их непрерывного изменения во времени представляют совокупностью их значений в узлах пространственно-временно́й сетки. При этом производные искомых функций, входящие в дифференциальные уравнения математической физики и краевые условия, приближенно заменяют (аппроксимируют) в каждом узле *конечными разностями*. В итоге исходную математическую формулировку задачи сводят к системе уравнений (в общем случае нелинейных) относительно неизвестных узловых значений. Такие ***уравнения*** называют ***разностными***, а их систему вместе с правилами их построения называют ***разностной схемой***. Одной и той же краевой задаче могут соответствовать различные разностные схемы. В случае линейной задачи разностная схема включает систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Описанный подход приводит к одному из наиболее широко применяемых вариантов метода сеток — ***методу конечных разностей*** (МКР) приближенного решения задач математической физики. Но математическая формулировка таких задач может и не содержать дифференциальных уравнений, а включать *интегральные уравнения* (в общем случае — *интегро-дифференциальные*) или *функционалы*, в которых искомые функции входят в подынтегральное выражение [XV]. В таких случаях узлы пространственно-временно́й сетки используют для построения *квадратурных формул*, что позволяет приближенно заменить интегралы соответствующими *квадратурными суммами*, содержащими узловые значения искомых функций. В итоге метод сеток также приводит к системе уравнений относительно неизвестных узловых значений.

Отметим, что группу соседних узлов пространственно-временно́й сетки можно использовать для построения непрерывной функции, имеющей так называемый конечный носитель (например, являющейся *интерполяционным многочленом*, принимающим некоторое значение в фиксированном узле и нулевое значение во всех соседних). Из таких функций, построенных для каждого узла сетки с конечным числом узлов, можно составить базис конечномерного *функционального пространства*, в котором применимы *проекционные методы* приближенного решения задач математической физики. При таком сочетании эти ***методы*** иногда называют ***проекционно-сеточными****.

В частности, подобный подход приводит к *методам конечных* или *граничных элементов*, которые также обычно относят к группе сеточных методов. При этом под элементом в общем случае понимают подобласть пространственно-временно́й области, содержащую группу соседних узлов соответствующей сетки, используемую для построения упомянутой непрерывной функции, т.е. конечный или граничный элемент является конечным носителем этой функции.

---

*См., например: *Марчук Г.И., Агошков В.И.*