МГТУ им. Н.Э. Баумана

Методы вычислений

Отчет по лабораторной работе №2

Колебания струны

Кузьмин А.
Студент группы ИУ7-29
Вариант 19

Москва, 2013

1. Постановка задачи

1.1. Формулировка задачи

Найти функцию $u(x,t)$, описывающую поперечные малые колебания однородной струны длины $l = 1$, концы которой движутся по заданным законам. Значение $u(x,t)$ задает величину отклонения точки струны с координатой x в момент времени t от положения равновесия. Движение левого конца струны $(x = 0)$ определяется законом $u(0,t) = \mu(t)$, правого $(x = l)$ - законом $u(l,t) = \nu(t)$. Начальное положение струны $u(x,0) = \phi(x)$, начальная скорость $u_t(x,0) = \psi(x)$. Закон колебания струны определяется дифференциальным уравнением $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

1.2. Исходные данные

$$\begin{cases} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) &= \mu(t), \\ u(l,t) &= \nu(t), \\ u(x,0) &= \phi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(x) &= (x+0.5)(x+1) \\ \psi(x) &= cos(x+0.5), \\ \mu(t) &= 0.5, \\ \nu(t) &= 3-2t \\ a &= 1, \\ l &= 1. \end{cases}$$

2. Теоретические сведения

Для решения этой задачи сеточным методом выбирается прямоугольная сетка с узлами $(x_i, t_j), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, x_i = ih, t_j = j\tau, h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{M}$. Частные производные заменяются соответствующими конечными разностями. В результаты дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \tag{1}$$

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) \tag{2}$$

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \frac{\tau^2 a^2}{h^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) \tag{3}$$

Начальное условие $u_t(t = 0) = \psi(x)$ разностным соотношением:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi_i, i = \overline{1, N-1}. \tag{4}$$

Другое начальное условие и граничные условия в разностной задаче реализуются точно:

$$u_i^0 = \phi_i, i = \overline{0, N}; u_0^j = \mu^j, u_N^j = \nu^j, j = \overline{1, M} \tag{5}$$

2.1. Решение задачи

По начальному положению струны определяется значение сеточной функции на нулевом слое:

$$u_i^0 = \varphi_i \tag{6}$$

По начальным скоростям определяются значения сеточной функции на первом слое:

$$u_i^1 = \tau\psi_i + u_i^0 \tag{7}$$

Наконец, по разностному уравнению (3) можно вычислить значения сеточной функции во внутренних узлах $(j+1)$-слоя по уже известным значениям двух предыдущих слоев. Значения в граничных узлах находятся из граничных условий:

$$u_0^j = \mu^j \tag{8}$$

$$u_N^j = \upsilon^j \tag{9}$$

2.2. Устойчивость

Чтобы данная разностная схема "крест"была устойчива, должно выполняться соотношение:

$$\frac{a^2\tau^2}{h^2} \leq 1 \tag{10}$$

2.3. Аппроксимация

Замена дифференциального уравнения разностным происходит с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. Соотношение, используемое для аппроксимации начальных скоростей, обеспечивает порядок аппроксимации $O(\tau)$.

3. Результаты

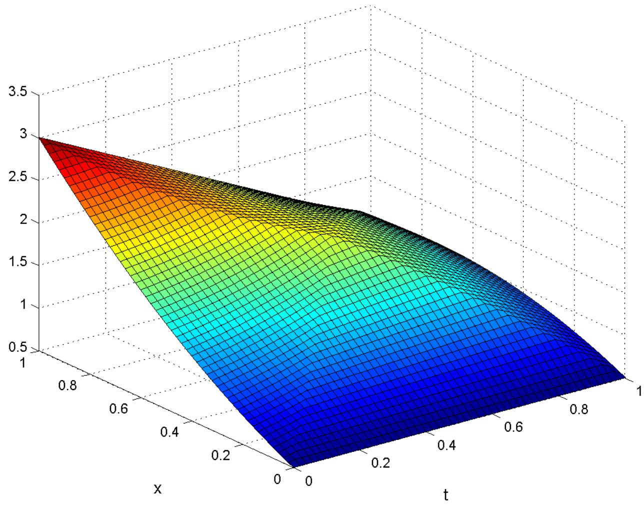

Рис. 1. Колебания струны