4. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

Постановки задач математической физики, рассмотренные в части I этой книги, включают *функциональные уравнения*, связывающие искомые и заданные функции, принадлежащие некоторым множествам функций. Поэтому при изучении приближенных методов математической физики возникает необходимость использовать некоторые понятия и методы функционального анализа. Одними из основных объектов изучения в функциональном анализе являются бесконечномерные нормированные *пространства*, элементами которых во многих случаях являются функции. В этой главе использованы некоторые положения функционального анализа, изложенные в [IX].

4.1. Нормированные пространства

Множество, между элементами которого установлены определенные соотношения, часто называют *пространством*. Если такое множество состоит из функций, то говорят о ***функциональном пространстве***. Так, если множество функций удовлетворяет аксиомам линейного пространства [IV], то его часто называют линейным функциональным пространством. Его элементами могут быть, например, скалярные или векторные (действительные или комплексные) функции. Векторные функции будем обозначать так же, как и векторы — полужирным курсивом (например, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$), а скалярные — светлым курсивом (например, f, u, v).

Пример 4.1. Множество всех определенных на числовой прямой $\mathbb{R}$ многочленов $P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_{k-1}x + a_k$ степени не выше некоторого натурального числа $k \in \mathbb{N}$ с произвольными действительными или комплексными коэффициентами (с обычными операциями сложения функций и умножения на числа) является линейным функциональным пространством. Множества скалярных действительных функций или вектор-функций, непрерывных или непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, удовлетворяют аксиомам линейного пространства и поэтому являются линейными функциональными пространствами. #

В дальнейшем, если специально не оговорено, будем рассматривать линейные функциональные пространства, элементами которых являются скалярные действительные функции с операцией умножения только на действительные числа. Если система $\{u_n\}_N$ элементов линейного функционального пространства $\mathcal{U}$ является в $\mathcal{U}$ линейно зависимой (независимой) [IV], то для краткости эту систему будем называть линейно зависимыми (независимыми) функциями в $\mathcal{U}$. В основном будем изучать *бесконечномерные линейные* функциональные *пространства*, т.е. такие, в которых можно указать сколь угодно большое число линейно независимых функций.

Под *линейной оболочкой* системы функций $u_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, образующих (бесконечную) последовательность $\{u_n\}$, будем понимать множество всевозможных (конечных) линейных комбинаций функций этой системы. Систему $\{u_n\}$ функций из $\mathcal{U}$ называют линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Линейная оболочка бесконечной линейно независимой системы $\{u_n\}$ функций является бесконечномерным линейным функциональным пространством.

Пример 4.2. Множество всех действительных функций одного действительного переменного, непрерывных на отрезке $[a, b]$, является линейным пространством (см. пример 4.1), причем бесконечномерным, поскольку для любого $N \in \mathbb{N}$ существует N линейно независимых элементов этого линейного пространства. Например, многочлены x^n, $n = \overline{1, N}$, линейно независимы. Линейное пространство многочленов степени не выше некоторого натурального числа N конечномерно [IV]. #

Говорят, что в линейном пространстве $\mathcal{U}$ задана *норма*, если каждому элементу $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ поставлено в соответствие действительное число $\|\boldsymbol{u}\|$, причем верны три аксиомы нормы:

1) $\|\boldsymbol{u}\| \geqslant 0$ и $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\|\boldsymbol{u}\| = \mathbf{0}$;
2) $\|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
3) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство, в котором задана норма, называют нормированным пространством. В случае *линейного функционального пространства*, в котором определена норма, говорят о ***функциональном нормированном пространстве***, а норму элемента (функции) в таком функциональном пространстве называют ***нормой функции***.

Чтобы подчеркнуть, что речь идет о норме функции $\boldsymbol{u}$ в пространстве $\mathcal{U}$, будем писать $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{U}}$, а правило, которое устанавливает соответствие между функцией $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ и ее нормой в $\mathcal{U}$, будем обозначать $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$.

Отметим, что в нормированном пространстве $\mathcal{U}$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \big|\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\|\big| \leqslant \|\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}. \tag{4.1}$$

Действительно, если в неравенстве треугольника (аксиома 3) заменить сначала $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, а затем $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$, то получим неравенства $\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$ и $\|\boldsymbol{v}\| - \|\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$. Учитывая равенства $\|-\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$ и $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ (аксиома 2), приходим к (4.1).

Нормированное пространство $\mathcal{U}$ является *метрическим пространством* с *метрикой*, индуцированной нормой, т.е. $\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$. Под сходимостью последовательности $\{\boldsymbol{u}_n\}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ понимают сходимость этой последовательности по метрике ρ, индуцированной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Элемент $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ называют *пределом последовательности* $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset \mathcal{U}$, *сходящейся по норме*, если

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}\| = 0. \tag{4.2}$$

Понятия окрестности точки, внутренней, изолированной, граничной и предельной точки множества, фундаментальной последовательности, ограниченности, замкнутости и компактности множества, введенные для метрического пространства [I], применимы и для нормированного пространства.

Определение 4.1. ***Последовательность*** $\{u_n\} \subset \mathcal{U}$ называют ***фундаментальной*** в нормированном пространстве $\mathcal{U}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N \in \mathbb{N}$, что при всех $m > N$ и $n > N$ верно неравенство $\|u_m - u_n\| < \varepsilon$.

В *полном нормированном* (*банаховом**) *пространстве* любая фундаментальная последовательность сходится по норме. Банахово пространство будем обозначать символом $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{U}$ — нормированное пространство. Напомним [IX], что если для множества $X \subset \mathcal{U}$ его замыкание $\overline{X}$, т.е. объединение X со всеми предельными точками X из $\mathcal{U}$, совпадает с $\mathcal{U}$, то *множество* X называют *всюду плотным* в $\mathcal{U}$. С учетом определения предельной точки множества в метрическом пространстве [I] можно дать следующее эквивалентное определение.

Определение 4.2. Множество $X \subset \mathcal{U}$ называют всюду плотным в нормированном пространстве $\mathcal{U}$, если для любого $u \in \mathcal{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $u' \in X$, что $\|u - u'\| < \varepsilon$.

Нормированное пространство $\mathcal{U}$ называют *сепарабельным*, если в этом пространстве существует счетное всюду плотное подмножество.

Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ — *линейная оболочка* некоторой системы элементов u_n, $n \in \mathbb{N}$, нормированного пространства $\mathcal{U}$. Если эта оболочка — замкнутое множество, то она является *подпространством нормированного пространства* $\mathcal{U}$. Напомним, что *систему* элементов называют *замкнутой* в банаховом пространстве, если ее линейная оболочка является всюду плотной в

*С. Ба́нах (1892–1945) — польский математик.

этом пространстве. Замкнутость системы $\{u_n\}$ означает, что любой элемент $u \in \mathcal{U}$ можно сколь угодно точно (по норме этого пространства) представить конечными линейными комбинациями элементов данной системы, т.е. для любых $u \in \mathcal{U}$ и $\varepsilon > 0$ можно подобрать такой номер $N \in \mathbb{N}$ и такие коэффициенты $a_n \in \mathbb{R}$, $n = \overline{1, N}$, что для элемента

$$\widetilde{u}_N = \sum_{n=1}^{N} a_n u_n$$

будет выполнено неравенство $\|u - \widetilde{u}_N\| < \varepsilon$.

Пример 4.3. Функциональное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ действительных функций $f(x)$ одного действительного переменного x является линейным (см. пример 4.1). Оно будет банаховым [IX], если ввести норму

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{4.3}$$

Это банахово пространство обозначают $C[a, b]$.

В линейном функциональном пространстве $C[a, b]$ можно ввести и другую норму. Из свойств интеграла Римана и неравенства треугольника для действительных чисел следует, что соотношение

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad f \in C[a, b], \tag{4.4}$$

задает норму в $C[a, b]$. Но полученное нормированное пространство с нормой (4.4) не является полным. Покажем это для случая $[a, b] = [0, 1]$. Например, нетрудно убедиться, что последовательность непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций (рис. 4.1)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1/2 - 1/n; \\ nx + 1 - n/2, & 1/2 - 1/n \leqslant x < 1/2; \\ 1, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.5}$$

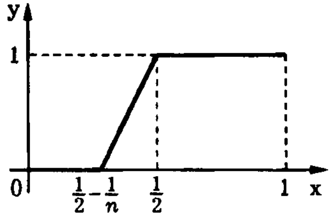

Рис. 4.1

в нормированном пространстве $C[a,b]$ с нормой (4.4) является фундаментальной. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ при любых $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$ и $m > n$ имеем

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| = \int\limits_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_{1/2-1/n}^{1/2} |\varphi_n(x) - \varphi(x)_m|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1/2-1/n}^{1/2} \left(nx + 1 - \frac{n}{2}\right) dx = \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Однако эта фундаментальная последовательность не имеет предела в $C[a.b]$. Предположим противное: пусть существует непрерывная на отрезке [0, 1] функция φ_0, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_0\| = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \big|\varphi_n(x) - \varphi_0(x)\big|\,dx = 0.$$

Заметим, что для разрывной в точке $x = 1/2$ функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1/2; \\ 1, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.6}$$

справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{1/2-1/n}^{1/2} \left|nx+1-\frac{n}{2}\right|dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

Тогда

$$\int_0^1 \left|\varphi_0(x)-\varphi(x)\right|dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left|\varphi_0(x)-\varphi(x)\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left|\varphi_0(x)-\varphi_n(x)\right|dx + \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|dx = 0.$$

Поскольку $|\varphi_0(x)-\varphi(x)| \geqslant 0$ для $x \in [0, 1]$ и

$$\int_0^1 \left|\varphi_0(x)-\varphi(x)\right|dx = \int_0^{1/2} \left|\varphi_0(x)-\varphi(x)\right|dx + \int_{1/2}^1 \left|\varphi_0(x)-\varphi(x)\right|dx,$$

то каждый из двух последних интегралов равен нулю. Отсюда в силу неотрицательности и непрерывности подынтегральной функции $|\varphi_0(x)-\varphi(x)|$ на каждом из промежутков $[0, 1/2)$ и $[1/2, 1]$ получаем $\varphi_0(x)=\varphi(x)$ для всех $x \in [0, 1/2) \cup [1/2, 1]$. Тогда $x = 1/2$ является для функции $\varphi_0(x)$ точкой разрыва первого рода, что противоречит предположению непрерывности φ_0 на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$, фундаментальная в линейном нормированном пространстве $C[a, b]$ с нормой (4.4), не является сходящейся в $\mathcal{U}$ по этой норме, т.е. $C[a, b]$ с нормой (4.4) не будет полным нормированным пространством.

Можно показать*, что банаховым является пространство *суммируемых* (или *интегрируемых по Лебегу***) на отрезке $[a, b]$ *функций* $f(x)$, обозначаемое $L_1[a,b]$ и имеющее норму [IX]

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{4.7}$$

которая определена при помощи интеграла Лебега. Элементами пространства $L_1[a,b]$ являются классы функций, равных почти всюду на отрезке $[0, 1]$. В частности, этому пространству при $[a, b] = [0, 1]$ принадлежит не интегрируемая по Риману на отрезке $[0, 1]$, но интегрируемая по Лебегу на этом отрезке *функция Дирихле*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

причем $\|\chi(x)\| = 0$, поскольку эта функция почти всюду равна нулю.

Пример 4.4. Функциональное пространство $\mathcal{U}$ действительных функций одного действительного переменного, k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, является линейным (см. пример 4.1). В этом функциональном пространстве можно вводить следующие нормы:

$$\|f\|_0 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_1 = \max_{0\leqslant m\leqslant k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(m)}(x)|,$$

$$\|f\|_2 = \sum_{m=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(m)}(x)|,$$

*См.: *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.*

**А. Лебе́г (1875–1941) — французский математик.

где $f^{(m)}(x)$, $m \geqslant 1$, — производная порядка m функции $f(x)$, а $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Функциональное пространство $\mathcal{U}$ с нормой $\|\cdot\|_0$ является линейным многообразием банахова пространства $C[a,b]$ (см. пример 4.3). Поскольку это линейное многообразие не является замкнутым в $C[a,b]$ (существуют последовательности непрерывно дифференцируемых функций, сходящиеся в $C[a,b]$, т.е. по норме $\|\cdot\|_0$, к непрерывной функции, которая ни в одной точке отрезка $[a,b]$ не имеет конечной производной*), то функциональное пространство $\mathcal{U}$ с нормой $\|\cdot\|_0$ не является банаховым.

Нетрудно показать, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, действующие в функциональном пространстве $\mathcal{U}$, являются эквивалентными, т.е. найдутся такие положительные числа α и $\beta > 0$, что

$$\alpha\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1 \leqslant \beta\|f\|_2, \qquad f \in \mathcal{U}.$$

Отметим, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{U}$ сходится по нормам $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_2$ тогда и только тогда, когда функциональные последовательности $\{f_n^{(m)}(x)\}$ производных сходятся равномерно на отрезке $[a,b]$ при любом $m = \overline{0,k}$ [IX]. Отсюда, в частности, ясно, что из сходимости последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{U}$ по нормам $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_2$ следует сходимость этой последовательности по норме $\|\cdot\|_0$. Обратное утверждение неверно. Так, например, последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin n^2 x$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится на отрезке $[0,1]$ к нулевой функции, поскольку $\max\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, сходится к нулю по норме $\|\cdot\|_0$. Функциональная последовательность $\{f_n'(x)\} = \{n\cos n^2 x\}$ первых производных не является равномерно сходящейся на отрезке $[0,1]$. Более того, она расходится при $x = 0$, так как $f_n'(0) = n$.

Функциональное пространство $\mathcal{U}$ с нормой $\|\cdot\|_1$ или нормой $\|\cdot\|_2$ является банаховым и его обозначают $C^k[a,b]$.

*См.: *Фихтенгольц Г.М.*