и $u_0(\xi,\zeta) \to 0$ при $\xi \to \infty$ может быть решена методом Фурье (разделения переменных) [XII] или при помощи интегрального преобразования либо на отрезке $[\overline{f}_1(0), \overline{f}_2(0)]$, либо в полуограниченном промежутке $[0,\infty]$ [XI]. Формулировки краевых задач для нахождения функций $u_n(\xi,\zeta)$, $n \in \mathbb{N}$, входящих в правую часть (6.69), являются более громоздкими, но решение этих задач можно получить теми же методами.

В итоге, согласно принципу суперпозиции решений [XII], функция

$$T(\rho,\zeta) = \widetilde{T}(\rho,\zeta) + \overline{T}(\rho,\zeta) = \widetilde{T}(\rho,\zeta) + u\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon},\zeta\right)$$

будет решением исходной краевой задачи (6.56)–(6.58).

6.5. Метод ортогональных проекций

Пусть искомая функция $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет *операторному уравнению*

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{6.75}$$

где A — линейный *непрерывный оператор*, *области определения* $D(A)$ и *значений* $R(A)$ которого являются *всюду плотными подмножествами гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ со *скалярным произведением* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если перенести заданный элемент $\boldsymbol{f}$ в левую часть этого уравнения, то получим равенство

$$A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой элемент в $\mathcal{H}$. Выберем в $\mathcal{H}$ *счетный базис* $\{\boldsymbol{v}_k\}$. Тогда это равенство, согласно теореме 5.1, можно заменить системой эквивалентных равенств

$$\langle A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k\rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.76}$$

Пусть последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\}$ образует в $D(A)$ *счетный базис*. Тогда в соответствии с (4.52) искомый элемент $\boldsymbol{u} \in D(A)$

можно единственным образом представить в виде

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{u}_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{u}_n \in D(A). \tag{6.77}$$

Подставляя (6.77) в (6.76) и учитывая свойства скалярного произведения и оператора A, получаем

$$\begin{aligned}
\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_k \rangle &= \left\langle A \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \right\rangle = \left\langle A \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \right\rangle = \\
&= \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n A\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \langle A\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \rangle = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle A\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Таким образом, система равенств (6.76) равносильна системе

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle A\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6.78}$$

представляющей собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно *координат* a_n *элемента* $\boldsymbol{u}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{u}_n\}$. Если в (6.77) ограничиться первыми N элементами $\boldsymbol{u}_n$ счетного базиса, т.е. приближенно принять

$$\boldsymbol{u} \approx \widetilde{\boldsymbol{u}}_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{u}_n \in D(A), \tag{6.79}$$

и в (6.78) ограничиться первыми N равенствами, в которых суммирование выполняется от 1 до N, то получим конечную систему N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle A\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k \rangle, \quad k = \overline{1, N}, \tag{6.80}$$

относительно N первых координат a_n. Элементами матрицы такой системы будут скалярные произведения $\langle A\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_k\rangle$.

Решения СЛАУ (6.80) при различных N естественно рассматривать как приближения неизвестного решения уравнения (6.75). Если, в частности, $\{\boldsymbol{v}_k\}$ является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$, то решению СЛАУ (6.80) соответствует решение $\widetilde{\boldsymbol{u}}_N$ вида (6.79) уравнения $A_N\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{f}}_N$, где A_N — оператор, действующий из N-мерного подпространства $D_N(A)$, совпадающего с *линейной оболочкой* системы $\{\boldsymbol{u}_n\}_N$, в N-мерное подпространство $R_N(A)$, совпадающее с линейной оболочкой системы $\{\boldsymbol{v}_k\}_N$. При этом $A_N\boldsymbol{u}$ совпадает с N-й частичной суммой разложения элемента $A\boldsymbol{u}$ по базису $\{\boldsymbol{v}_k\}$, а $\widetilde{\boldsymbol{f}}_N$ является N-й частичной суммой ряда $\boldsymbol{f} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\boldsymbol{v}_k$, где $f_k = \langle\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k\rangle$.

Однако в случае произвольного базиса $\{\boldsymbol{v}_k\}$, даже если определитель матрицы СЛАУ (6.80) отличен от нуля, нельзя утверждать, что последовательность $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_N\}$ приближенных решений вида (6.79) при $N \to \infty$ сходится к *классическому* $\boldsymbol{u}_0$ или *слабому* $\boldsymbol{u}_*$ *решениям* уравнения (6.75). При некоторых ограничениях ответ на вопрос о сходимости $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_N\}$ к $\boldsymbol{u}_0$ или к $\boldsymbol{u}_*$ удается решить теоретическим путем (см. **Д.6.1**). Однако на практике часто приходится ограничиваться лишь сравнением между собой нескольких приближенных решений.

Описанная схема построения приближенного решения уравнения (6.75), приводящая к СЛАУ (6.80), лежит в основе большой группы приближенных аналитических методов, которые обычно объединяют под общим названием ***метод ортогональных проекций***. Такое название объясняется тем, что равенства (6.80) представляют собой условия ортогональности элемента $A\widetilde{\boldsymbol{u}}_N - \boldsymbol{f}$ всем базисным элементам $\boldsymbol{v}_k$ N-мерного подпространства $R_N(A)$. При этом ***функции*** $\boldsymbol{u}_n$, $n = \overline{1, N}$, которые используют для представления приближенного решения (6.79), называют ***базисными***, а ***функции*** $\boldsymbol{v}_k$ в СЛАУ (6.80) — ***проекционными***.

Метод ортогональных проекций является частным случаем *проекционного метода*, в котором условия равенства нулю проекций ***невязки*** $A\tilde{u}_N - f$ ***операторного уравнения*** на элементы v_k, $k = \overline{1, N}$, базиса N-мерного подпространства $\mathcal{H}_N \subset R(A)$ имеют более общий вид (см. **Д.6.1**). Если $R(A) \subset \subset L_2(\mathbb{R})$, то чаще метод ортогональных проекций называют ***методом взвешенных невязок***. В этом случае счетный базис в $R(A)$ будет образован последовательностью $\{v_k\}$ действительных функций v_k, $k \in \mathbb{N}$, так что (6.80) можно рассматривать как N условий равенства нулю определенного в $L_2(\mathbb{R})$ скалярного произведения невязки операторного уравнения и ***весовых функций*** v_k, $k = \overline{1, N}$. Иногда процедуру применения (6.80) называют ***методом моментов***, или методом Галеркина — Петрова*.

Особенности каждого конкретного метода в группе методов, определяемых условиями (6.80), зависят от выбора счетных базисов в $D(A)$ и $R(A)$. Такие методы рассмотрены ниже.

6.6. Коллокации в подобластях и в точках

Рассмотрим один из наиболее простых приемов нахождения приближенного решения *операторного уравнения* $Au = f$ (6.75). Пусть *области определения* $D(A)$ и *значений* $R(A)$ *оператора* A, входящего в (6.75), являются *всюду плотными подмножествами гильбертова пространства* $L_2(V)$ *функций, суммируемых* (интегрируемых по Лебегу) *с квадратом* в области $V \subset \mathbb{R}^m$.

Разобьем V на N подобластей V_k, $k = \overline{1, N}$, так, чтобы выполнялось равенство

$$\bigcup_{k=1}^{N} V_k = V_0,$$

*Б.Г. Галёркин (1871–1945) — российский инженер и ученый в области механики. Г.И. Петров (1912–1987) — российский ученый в области механики.