

计量分析与 STATA 应用

钟经樊 连玉君 著

关于作者：钟经樊 台湾中央研究院 经济研究所

连玉君 中山大学 岭南学院 金融系

中文版本：版本 1.0，二〇〇八年三月

钟经樊和连玉君拥有版权 © 2007 – 2008。保留所有权利。

这份文档是我们即将出版的书稿，目前免费提供给中山大学岭南学院的师生使用。

发布这份文档的目的有二：

其一，用做授课讲义，帮助岭南学院的同学们学习 STATA；

其二，恳请大家对书稿提出修改意见，包括书稿的结构安排、表述错误，以及错别字等细节。

书稿的使用仅限于岭南学院范围内，请勿外传或散布于网络。

目录

第十四章 GARCH 模型	1
14.1 ARCH 与 GARCH	1
14.1.1 条件期望与非条件期望	1
14.1.2 ARCH 模型	2
14.1.3 GARCH(p, q) 模型	10
14.2 GARCH 模型的扩展	17
14.2.1 ARCH-M 模型	17
14.2.2 非对称 GARCH 模型	18

第十四章

GARCH 模型

金融时间序列常常表现出不同于宏观时间序列的特征，如波动的丛聚性和分布的“尖峰厚尾”特征。传统的时间序列模型（假设干扰项的方差不随时间改变）往往无法捕捉这些特征。Engle (1982) 提出的 ARCH (auto-regressive conditional heteroskedasticity) 能够较好地描述金融资产价格波动的特征，在过去的二十年里得到了广泛的应用。在实际应用中，为了达到更好的拟合效果，常常需要设定较多的滞后项来描述波动的持续性，这往往会因为参数数目过多而降低估计的有效性。针对这个问题，Bollerslev (1986) 提出了广义 ARCH 模型，即 GARCH(p, q) 模型。在随后的研究中，学者们根据金融时间序列的特征，又进一步提出了 ARCH-M (Engle et al., 1987), EGARCH (Nelson, 1991), Threshold ARCH (TARCH, Zakoian, 1990), Power ARCH (PARCH, Higgins and Bear, 1992), Asymmetric power ARCH (A-PARCH, Ding, Granger and Engle, 1993), 多元 GARCH (Multivariable GARCH, Engle and Kroner, 1995) 等模型。

本章中，我们对上述模型进行介绍，并给出这些模型在 Stata 中的实现方法。

14.1 ARCH 与 GARCH

14.1.1 条件期望与非条件期望

Engle (1982) 提出的 ARCH 模型的基本特点是允许干扰项的条件方差随时间改变，而其非条件方差则不随时间改变。此前我们曾提到，若一个时间序列的均值、方差或协方差是随时间改变的，那么它就是非平稳的。然而，这并不意味着条件方差随时间改变的时间序列是非平稳的。应该注意到，在此前定义“非平稳过程”时，我们强调的是序列的“长期”或“非条件”均值或方差。因此，只要一个序列的非条件方差是不随时间改变的，那么即使其条件方差随时间改变，它仍然是平稳的。

因此，在学习 ARCH 模型过程中，我们需要区分条件期望和非条件期望，这会进一步影响序列的概率分布。在使用 MLE 估计计量模型时，我们往往假设序列的条件分布为正态分布。然而，序列的非条件分布往往不同于其条件分布。在 ARCH 模型中，若假设其条件分是正态的，那么其非条件分布往往是非正态的，通常具有“厚尾” (fat-tails) 特征。

由于大家对自回归 (AR) 过程已经比较熟悉, 所以我们可以从 AR(1) 入手来解释 ARCH 模型的设定思想。考虑如下 AR(1) 模型:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t \quad (14-1)$$

其中, $t = 1, 2, \dots, T$, $u_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$, 同时, 假设 $|\rho| < 1$ 。显然, y_t 是一个平稳过程, 其非条件期望和方差分别为: $E(y_t) = 0$ 和 $\text{Var}(y_t) = \sigma^2/(1 - \rho^2)$ 。 y_t 的条件期望是指在给定第 $t - 1$ 期的信息后 y_t 的期望值。为了简单起见, 通常将第 $t - 1$ 期的已知信息集合表示为 Ω_{t-1} 。假设 y_t 的产生过程为 (14-1), 则其条件期望为:

$$E(y_t | \Omega_{t-1}) = \rho y_{t-1}$$

条件方差为:

$$\text{Var}(y_t | \Omega_{t-1}) = E(u_t^2 | \Omega_t) = \sigma^2$$

显然, y_t 的条件期望是随时间改变的, 而其非条件期望则不随时间改变。

有些情况下, 我们不仅需要预测时序的水平趋势, 同时也要预测其波动情况。图 14-1 是上证综指的时序图, 在某些时段, 其波动很小, 而在另一些时段其波动却非常剧烈。波动情况 (方差) 的变化对于研究金融市场的微观机制具有非常重要的意义, 因为投资者在持有风险较高的资产时往往希望得到较高的回报率。



图 14-1: 上证综指时序图

14.1.2 ARCH 模型

虽然在上面的例子中, u_t 的非条件方差是不随时间改变的, 但对于多数金融时间序列而言, 其条件方差往往是随时间改变的。我们可以采用如下 AR(p) 过程来描述这种特征:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + v_t \quad (14-2)$$

其中, $v_t \sim \text{IIDN}(0, \sigma^2)$ 。由此可知, u_t^2 的条件期望为:

$$E(u_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2$$

满足 (14-2) 式的白噪声序列 u_t 称为 p 阶 “自回归条件异方差” (AutoRegression Conditional Heteroskedastic) 过程, 通常表示为 $u_t \sim \text{ARCH}(p)$ 。

下面我们以最简单的 ARCH(1) 过程来说明, 采用文献中惯用的方式可将 ARCH(1) 过程表示为:

$$y_t = \mathbf{x}_t' \beta + u_t \quad (14-3a)$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t} \quad (14-3b)$$

$$h_t = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 \quad (14-3c)$$

其中, $v_t \sim \text{IIDN}(0, 1)$, $a_0 > 0$ 且 $a_1 < 1$ 。则 u_t 的非条件期望和方差分别为:¹

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0 \\ \text{Var}(u_t) &= \frac{a_0}{1 - a_1} \end{aligned}$$

我们注意到, 模型 (14-3a)-(14-3c) 完全满足传统线性回归模型的基本假设条件, 因此, OLS 估计仍然是 β 的所有线性无偏估计中最有效的估计量 (BLUE)。

然而, 由于模型具有 ARCH 效应, 所以还存在更为有效的非线性估计量。 u_t 的条件期望和方差分别为:

$$\begin{aligned} E(u_t | \Omega_{t-1}) &= 0 \\ \text{Var}(u_t | \Omega_{t-1}) &= E(u_t^2 | \Omega_{t-1}) \\ &= a_0 + a_1 u_{t-1}^2 \end{aligned}$$

据此, 我们可以进一步得到 y_t 的条件期望和条件方差:

$$\begin{aligned} E(y_t | \Omega_{t-1}) &= \mathbf{x}_t' \beta \\ \text{Var}(y_t | \Omega_{t-1}) &= a_0 + a_1 u_{t-1}^2 \end{aligned}$$

¹ u_t 的非条件期望为, $E(u_t) = E(v_t)E(a_0 + a_1 u_{t-1}^2)^{1/2} = 0$ (因为 $E(v_t) = 0$)。 u_t 的非条件方差为,

$$\begin{aligned} \text{Var}(u_t) &= E[\{u_t - E(u_t)\}^2] \\ &= E(u_t^2) \quad \text{因为 } E(u_t) = 0 \\ &= E(v_t^2)E(a_0 + a_1 u_{t-1}^2) \\ &= a_0 + a_1 E(u_{t-1}^2) \quad \text{因为 } E(v_t^2) = 1 \\ &= a_0 / (1 - a_1) \quad \text{因为若 } u_t \text{ 弱平稳, 则 } E(u_t^2) = E(u_{t-1}^2) \end{aligned}$$

因此, y_t 的条件方差同样是 u_{t-1}^2 的函数。换言之, ARCH 会直接影响干扰项 u_t , 而被解释变量 y_t 虽然是由线性模型产生, 但由于其干扰项中包含了 ARCH 效应, 所以 y_t 本身也是一个 ARCH 过程。

在图 14-2 中, 我们模拟产生了三个时间序列, 数据产生过程如下:²

$$\begin{aligned} y_t &= 0.9y_{t-1} + u_t \\ u_t &= v_t \sqrt{1 + a_1 u_{t-1}^2} \quad v_t \sim \text{IIDN}(0, 1) \end{aligned}$$

其中, (a)-(c) 图分别对应 $a_1 = 0$, $a_1 = 0.2$ 和 $a_1 = 0.9$ 。可见, a_1 值越大波动的自相关性 (波动的持续性) 越强。这一特征在 y_t^2 序列中表现得更加显著 (见图 14-3)。

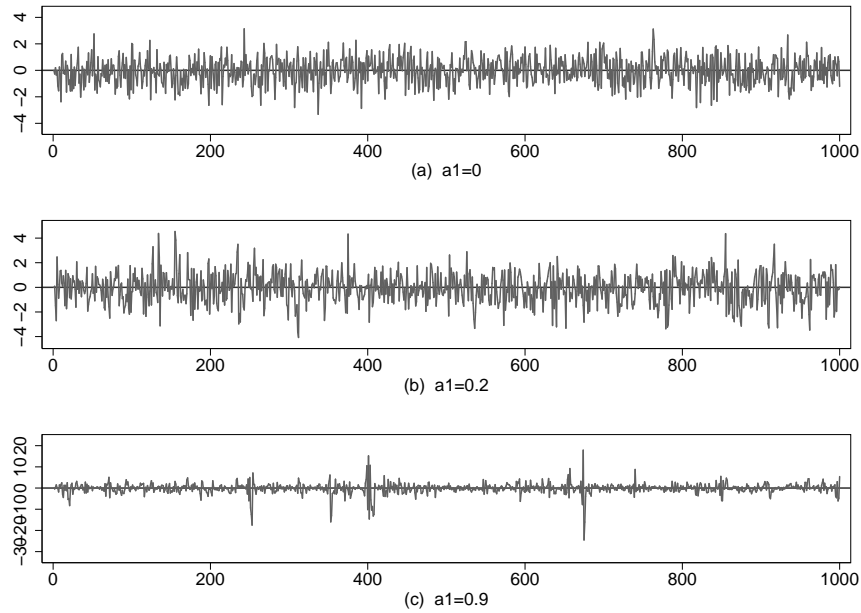


图 14-2: ARCH(1) 过程的模拟数值

ARCH(p) 模型及其扩展

前面已经提到, 金融时间序列的波动往往具有“丛聚性”, 因此将上面介绍的 ARCH(1) 模型扩展至 ARCH(p) 模型往往能够更好的描述这种波动特征。ARCH(p) 模型可表示为:

$$u_t = v_t \sqrt{h_t} \quad v_t \sim \text{IIDN}(0, 1) \quad (14-4a)$$

$$h_t = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + a_2 u_{t-2}^2 + \cdots + a_p u_{t-p}^2 \quad (14-4b)$$

²数据模拟过程可以使用笔者编写的命令 `sim_arch`。

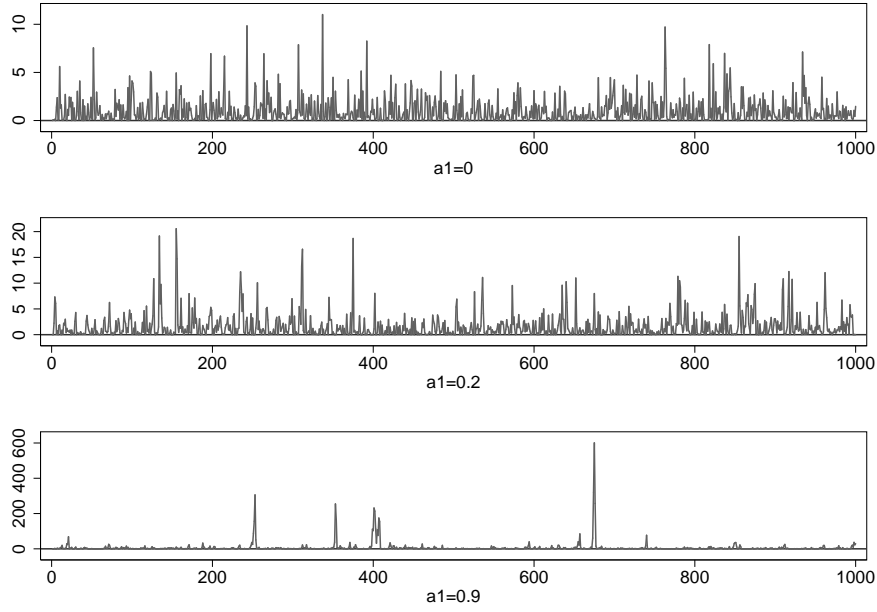


图 14-3: ARCH(1) 过程模拟数据的平方

基于 (14-1) 的设定，我们可以把 ARCH(p) 模型扩展为 AR(m)-ARCH(p) 模型：

$$\begin{aligned}
 y_t &= \delta + \sum_{j=1}^m \rho_j y_{t-j} + u_t \\
 u_t &= v_t \sqrt{h_t} \quad v_t \sim \text{IIDN}(0, 1) \\
 h_t &= a_0 + \sum_{j=1}^p a_j u_{t-j}^2
 \end{aligned}$$

显然，按照这一思路，我们同样可以建立 ARMA(m, n)-ARCH(p)。

基于 (14-3a) 的设定，我们尚可把 ARCH(p) 模型扩展为多元回归模型：

$$y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{it} + u_t \quad (14-5a)$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t} \quad v_t \sim \text{IIDN}(0, 1) \quad (14-5b)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{j=1}^p a_j u_{t-j}^2 \quad (14-5c)$$

这里， x_{it} 为外生变量或被解释变量的滞后项。在金融时间序列分析中，如果研究的对象是资产价格，我们往往还会在模型设定中加入虚拟变量，以捕捉“周内日历效应”(day-of-the-week)。

例如，在分析股票价格的日资料时，我们便可以在 (14-5a) 的基础上作如下设定：

$$y_t = \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} + \sum_{l=1}^5 a_l D_{lt} + u_t$$

其中， $l = 1$ (周一)， 2 (周二)， 3 (周三)， 4 (周四)， 5 (周五)， D_{lt} 为 0/1 虚拟变量。

ARCH 效应的检验

在模型设定之前，我们需要检验是否存在 ARCH 或 GARCH 效应。前面已经提到，由于模型 (14-3a)-(14-3b) 的 OLS 估计是无偏且一致的，所以我们可以利用 OLS 估计的残差来检验 ARCH 效应是否存在。基本步骤如下：

第一步 采用 OLS 估计模型 $y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + u_t$ ，得到残差 \hat{u}_t ，以及 \hat{u}_t^2 ；

第二步 估计模型 $\hat{u}_t^2 = a_0 + a_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \cdots + a_p \hat{u}_{t-p}^2$ ，得到 R^2 ；

第三步 构造统计量： $LM = T \cdot R^2 \sim \chi^2(p)$ 。

该检验由 Engle (1982) 提出，基本思想在于，若不存在 ARCH 效应，则 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$ 应当不会显著异于零。因此，我们可以针对原假设 $H_0: a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ 进行检验，并基于 LM 原则构造统计量。

模型的评估

若我们设定的 ARCH 模型是正确的，那么标准化后的残差：

$$z_t = \frac{u_t}{\sqrt{h_t}} \quad (14-6)$$

应当为一 *i.i.d* 的随机序列。因此，我们可以通过分析序列 $\{z_t\}$ 来评估模型的设定是否合理。具体而言，若均值方程设定无误，则 z_t 不应表现出显著的序列相关，这可以采用 Ljung-Box 统计量进行检验。我们可以采用同样的方法分析 z_t^2 以评判方差方程的设定情况。最后，通过分析 z_t 的偏度、峰度以及分位-分位图 (即，Q-Q 图)，我们可以大体判定模型的分布假设是否合理。

► Example

我们收集了上证综指 2001.01.02–2008.04.30 共 1766 个交易日的数据，图 14-4 绘制了日回报率及其绝对值的时序图。可以看出，上证综指的收益波动具有明显的“丛聚”特征。

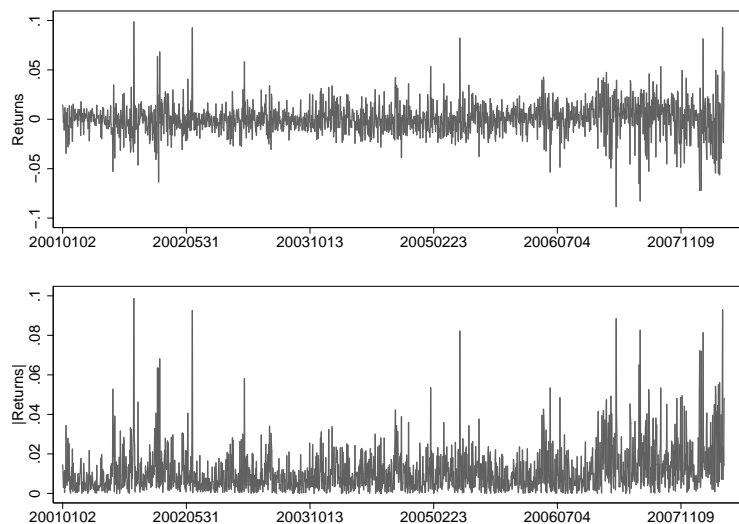


图 14-4: 上证综指回报率及其绝对值的时序图

图 14-5 进一步绘制了上证综指回报率 (hrr) 的核密度函数图和 Q-Q Normal 图。³相对于正态分布，hrr 的分布具有“尖峰厚尾”的特征。

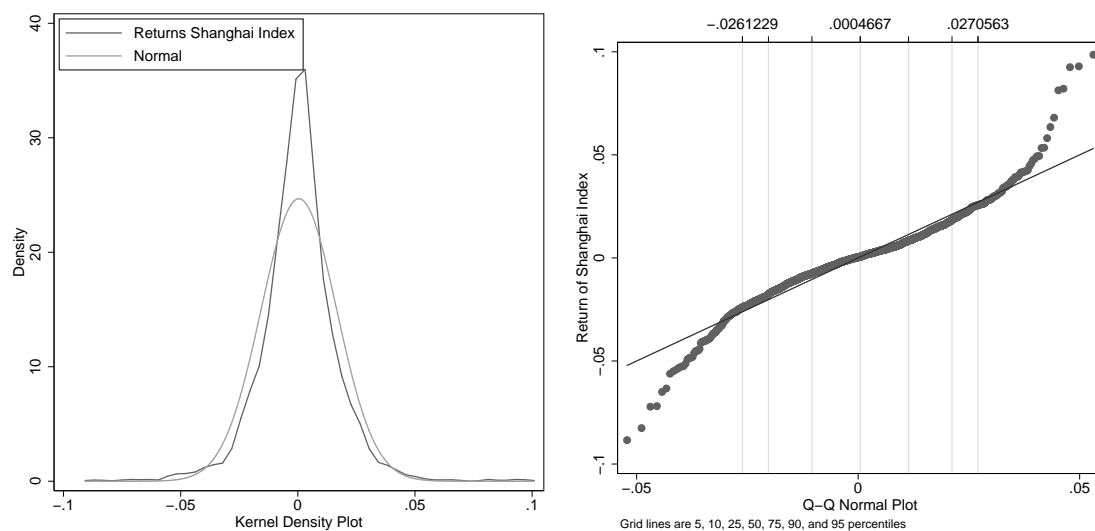


图 14-5: 上证综指回报率的核密度及 Q-Q-Normal 图

³可以分别采用 `kdensity hrr` 和 `qnorm hrr` 命令绘制 hrr 的核密度函数图和 Q-Q Normal 图。

图 14-6 为 hrr 和 hrr^2 的自相关系数图 (ACF)，可见， hrr 序列本身并不存在明显的自相关，而其平方项 hrr^2 却表现出高度自相关，这表明 hrr 的波动可能存在很强的“丛聚性”。

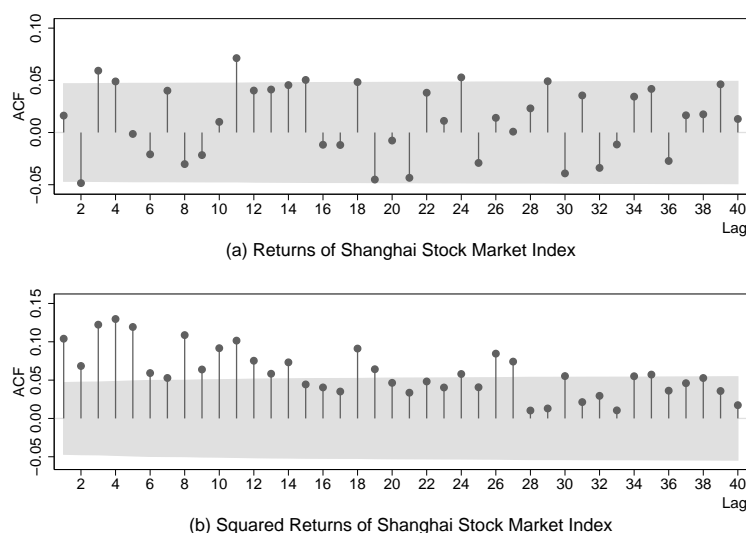


图 14-6: 上证综指回报率及其平方值的自相关系数

在设定 ARCH (p) 模型之前，我们需要检验是否存在。我们可以在完成 OLS 估计后，采用 `archlm` 执行第 6 页中介绍的 LM 检验：

```
. use hs_index.dta.dta, clear
. regress rr_hu
  (output omitted)
. archlm, lag(1/5)
LM test for autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)
```

lags (p)	chi2	df	Prob > chi2
1	18.734	1	0.0000
2	24.986	2	0.0000
3	47.239	3	0.0000
4	66.711	4	0.0000
5	82.203	5	0.0000

H0: no ARCH effects vs. H1: ARCH(p) disturbance

可见，存在显著的 ARCH 效应。接下来我们需要确定滞后阶数 p ，这可以通过绘制由均值方程得到的残差序列平方的偏自相关函数图 (PACF) 进行初步判断：

```
. predict u, res
. gen usq = u^2
. pac usq, ytitle(Partial ACF)
```

执行上述指令后将输出图 14-7 所示的 PACF 图。可见，在滞后 5 阶时，仍然存在明显的自相

关，因此我们选择 $p = 5$ 。

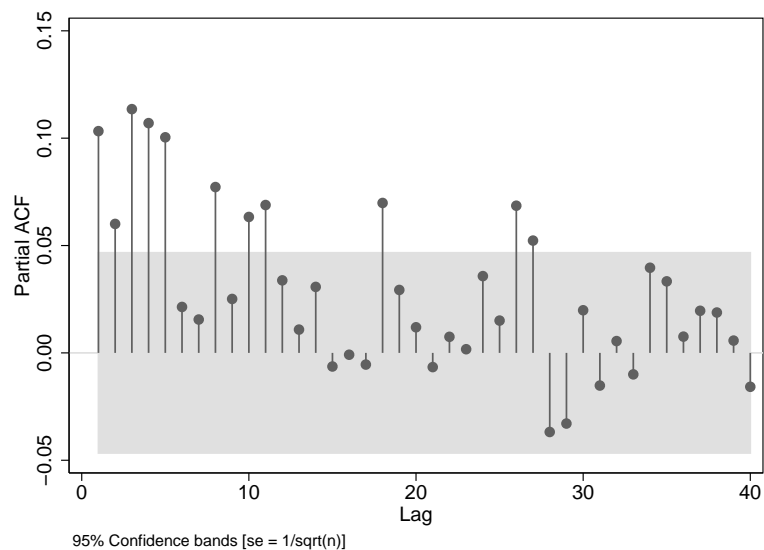


图 14-7: 残差平方序列的偏自相关系数 (PACF)

接下来，我们可以采用 `arch` 命令估计 ARCH (5) 模型：

```
. arch rr_hu, arch(1/5)
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0:   log likelihood = 4911.4295
(output omitted)
Iteration 8:   log likelihood = 4945.6101

ARCH family regression
Sample: 1 to 1766
Log likelihood = 4945.61
Number of obs   = 1766
Wald chi2(.)    = .
Prob > chi2     = .
```

rr_hu	OPG					[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.	z	P> z			
rr_hu							
_cons	.0003831	.0002699	1.42	0.156	-.0001458	.000912	
ARCH							
arch							
L1.	.1160299	.0174088	6.67	0.000	.0819093	.1501505	
L2.	.1278136	.0258769	4.94	0.000	.0770957	.1785314	
L3.	.1810568	.0262545	6.90	0.000	.129599	.2325147	
L4.	.2039839	.0263722	7.73	0.000	.1522953	.2556724	
L5.	.1380379	.0268653	5.14	0.000	.0853828	.190693	
_cons	.0000814	6.22e-06	13.09	0.000	.0000692	.0000936	

经过 8 次迭代后，模型收敛。这里，选项 `arch(1/5)` 的作用在于指定 ARCH 设定中的滞后项

结构。我们注意到，输出结果中的 `wald_chi2(.)` 一项及相应的 `p` 值都显示为 “.”，这是因为我们的均值方程中只包含了常数项，此时没有任何需要检验的变量。⁴

有些时候我们需要采用 AIC 或 BIC 信息准则对多个模型进行比较（比如，我们可以根据这些信息准则来确定模型的滞后阶数），这可以在完成上述估计后采用 `estat ic` 命令：

```
. estat ic
```

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	1766	.	4945.61	7	-9877.22	-9838.885

◀

14.1.3 GARCH(p, q) 模型

在使用 ARCH 模型时，为了能够更好地描述波动的持续性（随后会介绍 ARCH 效应的检验和滞后阶数的确定），往往需要在条件方差函数 (14-4b) 的设定中需要加入较多的滞后项。而为了保证方差非负，我们就需要对参数 a_j 进行限制。这在很大程度上增加了模型估计的难度，同时，参数数目过多也会降低估计的有效性。借鉴在传统时间序列分析中 ARMA 过程的建模思想，Bollerslev (1986) 提出了广义 ARCH 模型，即 GARCH。假设 y_t 由模型 (14-5a) 产生，在 GARCH(p, q) 模型中， u_t 定义为：

$$u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t \quad (14-7a)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (14-7b)$$

其中， $v_t \sim \text{IIDN}(0, 1)$, $p \geq 0$, $q > 0$; $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ 。也就是说， u_t 的条件方差同时受到往期 u_{t-i}^2 和往期条件方差 h_{t-j} 的影响，即， h_t 服从 ARMA(p, q) 过程。显然，ARCH 模型 ($p = 0$) 和白噪声过程 ($p = q = 0$) 都是 GARCH 模型的特例。

利用滞后算子 $L(Lu_t = u_{t-1})$ ，GARCH(p, q) 过程 u_t 的条件方差可表示为：

$$h_t = a_0 + a(L)u_t^2 + \beta(L)h_t \quad (14-8)$$

其中， $a(L) = a_1 L + a_2 L^2 + \cdots + a_q L^q$, $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_p L^p$ 。(14-8) 可进一步表示为：

$$\begin{aligned} h_t &= a_0 [1 - \beta(L)]^{-1} + a(L) [1 - \beta(L)]^{-1} u_t^2 \\ &= a_0 \left(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i u_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (14-9)$$

⁴有兴趣的读者可以执行命令 `arch rr.hu L(1/3).rr.hu, arch(5)`，看看结果有何变化。

其中,

$$\omega_i = a_i + \sum_{s=1}^n \beta_s \omega_{i-s} \quad i = 1, 2, \dots, q$$

这里, $n = \min\{p, i-1\}$ 。

从上述分析可知, GARCH(p, q) 过程可表示为 ARCH(∞) 过程。因此, 任何平稳的高阶 ARCH 过程都可以近似表示为阶数较低的 GARCH 过程。大量实证研究表明, 最简单的 GARCH(1,1) 通常就可以达到很好的拟合效果, 即

$$h_t = a_0 + a_1 u_t^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (14-10)$$

Bollerslev (1986) 对 GARCH (1,1) 模型进行了非常细致的探讨, 他从理论上给出了 GARCH (p, q) 过程 u_t 为严格平稳过程 (strictly stationary) 的条件为: $a(1) + \beta(1) < 1$, 为弱平稳过程 (weakly stationary) 的条件为: $\sqrt{3} \cdot a(1) + b(1) < 1$ 。

GARCH 模型的估计

给定 \mathbf{x}_t 和 $t-1$ 期的信息集合 $\Omega_{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_1, y_0; \mathbf{x}'_{t-1}, \dots, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_0)'$, 同时假设 $v_t \sim \text{IIDN}(0, 1)$, 且 v_t 与 \mathbf{x}_t 和 Ω_{t-1} 都不相关, 则我们可以写出 u_t 的条件密度函数为:

$$f(u_t | \mathbf{x}_t, \Omega_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot h_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{u_t^2}{h_t}\right) \quad (14-11)$$

其中, $u_t = y_t - \mathbf{x}'_t \beta$, $h_t = a_0 + a_1 u_{t-1}^2$ 。相应的条件对数似然函数为:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\gamma}) &= \sum_{t=1}^T \ln f(y_t | \mathbf{x}_t, \Omega_{t-1}) \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{u_t^2}{h_t} \end{aligned} \quad (14-12)$$

其中, 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 包含了所有条件均值方程和 GARCH 模型中的待估参数。由于参数估计的一阶条件是非线性的, 并且不存在封闭解, 所以在求解最大似然估计量时, 通常采用 OLS 迭代法 (iterative OLS, 参见 Engle, 1982) 或数值算法求解。

多数金融时间序列的非条件分布都具有“厚尾”特征 (相对于正态分布)。因此, Bollerslev (1986) 建议在研究金融时间序列时, 采用 t 分布, 因为相对于正态分布, t 分布具有“尖峰厚尾”的特征。此时, u_t 的条件密度函数为:⁵

$$f(u_t | \Omega_{t-1}) = \frac{\Gamma[(\tau+1)/2]}{\Gamma(\tau/2) \sqrt{\pi \cdot (\tau-2) \cdot h_t}} \cdot \left[1 + \frac{u_t^2}{(\tau-2) \cdot h_t}\right]^{-(\tau+1)/2} \quad (14-13)$$

⁵ 这一设定意味着 $v_t \sqrt{\tau/(\tau-2)}$ 服从自由度为 τ 的 t 分布 (期望和方差分别为 0 和 $\tau/(\tau-2)$), v_t 服从标准正态分布。

其中, $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛分布函数 (gamma function), τ 是 t 分布的自由度 (取值大于 2)。若设定自由度为 τ 的 t 分布, 则条件对数似然函数为:

$$\ln L(\alpha_1) = - \sum_{t=1}^T \left[\frac{\tau+1}{2} \cdot \ln \left(1 + \frac{u_t^2}{(\tau-2)h_t} \right) + \frac{1}{2} \ln(h_t) \right] \quad (14-14)$$

若不事先设定 t 分布的自由度 τ , 而是希望将其作为一个参数估计出来, 则对数似然函数为:

$$\ln L(\alpha_2) = T \left\{ \ln[(\tau+1)/2] - \ln[\Gamma(\tau/2)] - \frac{1}{2} \ln[(\tau-2)\pi] \right\} + \ln L(\alpha_1) \quad (14-15)$$

其中, $\ln L(\alpha_1)$ 由 (14-14) 式确定。

Nelson (1991) 建议使用“广义指数分布” (generalized exponential distribution) 来更为灵活地描述“厚尾”特征, 正态分布可以视为该分布的一个特例。此时, u_t 的条件密度函数为:

$$f(u_t|\Omega_{t-1}) = \frac{\tau}{2^{(\tau+1)/\tau} \cdot \Gamma(1/\tau) \cdot \lambda \sqrt{h_t}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left| \frac{u_t}{\lambda \sqrt{h_t}} \right|^\tau \right) \quad (14-16)$$

其中, τ 是一个取值为正的参数, 用于反映分布的尾部形状, λ 为常数, 定义为

$$\lambda = \left\{ \frac{2^{(-2/\tau)} \cdot \Gamma(1/\tau)}{\Gamma(3/\tau)} \right\}^{1/2}$$

当 $\tau < 2$ 时, 广义指数分布具有较厚的尾部, 当 $\tau > 2$ 时则尾部较薄, 而当 $\tau = 2$ (此时 $\lambda = 1$) 时, 转化为正态分布。

文献中使用的其他分布还包括正态泊松混合分布 (Normal-Possion mixture distribution, Jorion, 1988), 幂指数分布 (power exponential distribution, Bailie and Bollerslev, 1989), 正态-对数-正态混合分布 (Normal-log normal mixture, Hsieh, 1989) 等等。

除了“厚尾”特征外, 金融时间序列的另一个重要的特征是“偏态” (skewness)。例如, 股票收益率往往具有“负偏态分布” (negatively skewness distribution), 表现为股票市场的大幅下跌往往并不会伴随同等幅度的大幅上涨。此时, 就需要一种能同时反映“厚尾”和“偏态”的分布, 如 Fernandez and Steel (1998) 提出的 skewed Student- t 分布。⁶

► Example

要估计 GARCH(1, 1) 模型, 只需在 arch 命令后同时附加 arch(1) 和 garch(1) 选项:

```
. arch rr_hu, arch(1) garch(1)
(output omitted)
Iteration 16: log likelihood = 4961.6549
ARCH family regression
Sample: 1 to 1766                                Number of obs = 1766
```

⁶Laurent and Peters (2002a, 2002b) 介绍了其它几种在 GARCH 模型中设定非正态分布的方法。

Log likelihood = 4961.655				Wald chi2(.) = .	
				Prob > chi2 = .	
rr_hu	OPG				
	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]
rr_hu					
_cons	.0002804	.0002836	0.99	0.323	-.0002755 .0008364
ARCH					
arch					
L1.	.126284	.0120623	10.47	0.000	.1026424 .1499256
garch					
L1.	.8625677	.0133483	64.62	0.000	.8364055 .8887299
_cons	5.57e-06	1.28e-06	4.37	0.000	3.07e-06 8.07e-06

由此，我们得到均值方程为：

$$rr_hu_t = 0.00028 + u_t$$

方差方程为：

$$h_t = 5.57^6 + 0.126u_{t-1}^2 + 0.863h_{t-1}$$

我们注意到，对应于 (14-10) 式， $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 0.989$ ，非常接近于 1。这一现象在估计 GARCH 模型中非常普遍，因此在有些应用中会对 GARCH(1,1) 模型附加约束条件 $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ ，构成单整 (integrated) GARCH (简称 IGARCH) 模型，详见 Tsay (2005, p.122)。

此时，模型的 AIC 和 BIC 分别为：

. estat ic						
Model	Obs	ll (null)	ll (model)	df	AIC	BIC
.	1766	.	4961.655	4	-9915.31	-9893.404

显然，无论根据 AIC 还是 BIC，GARCH(1,1) 模型都明显优于我们在第 10 页中估计的 ARCH(5) 模型。

接下来，我们可以采用 predict 命令获得条件方差 h_t 、残差 u_t 的估计值，以及标准化残差 $z_t = u_t/\sqrt{h_t}$ ，并进而通过分析 z_t 来评判模型的设定是否合理。

```

predict ht, variance      /*条件方差*/
predict ut, residual      /*均值方程的残差*/
gen      zt = ut / sqrt(ht) /*标准化残差*/
gen      zt2 = zt^2       /*标准化残差的平方*/

```

从图 14-8 绘制的条件方差 h_t 的时序图来看，上证综指的收益率存在非常明显的“丛聚波动”特征，而标准化残差 z_t 的时序图则没有明显的丛聚特征。

图 14-9 表明，标准化残差 z_t 及其平方项 z_{t-1}^2 都不存在明显的序列相关。同时，采用 corrgram 命令得到 z_t 的 Ljung-Box 统计量为 $Q(10) = 19.55(0.034)$, $Q(20) = 40.49(0.004)$; z_{t-1}^2

的 Ljung-Box 统计量为 $Q(10) = 9.22(0.511)$ 和 $Q(20) = 18.40(0.561)$, 括号中为 p 值。这表明均值方程的设定并不是非常合理, 因为标准化残差表现出很强的序列相关性。由于 z_{t-1}^2 不存在明显的序列相关, 所以方差方程采用 GARCH(1,1) 设定还是比较合理的。⁷

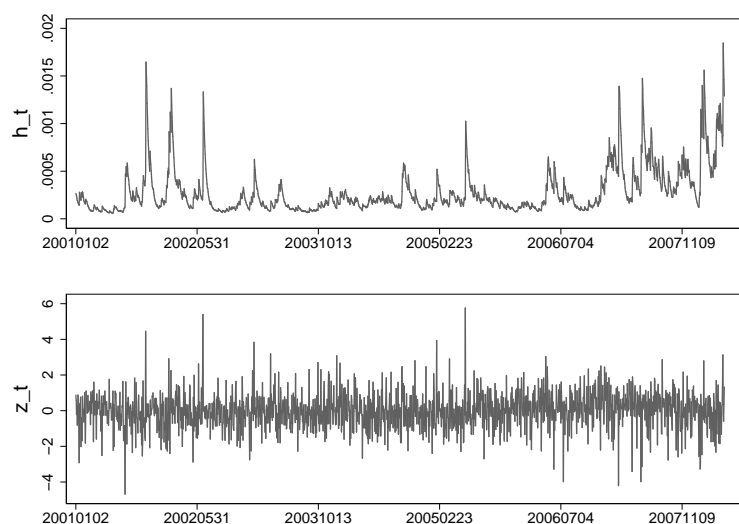


图 14-8: 条件方差 h_t 和标准化残差 z_t 的时序图

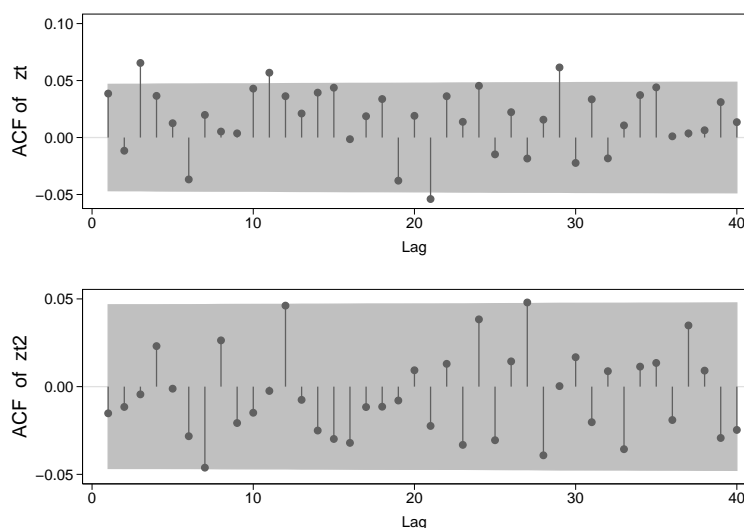


图 14-9: 标准化残差 z_t 及 z_t^2 的自相关系数图

标准化残差 z_t 之所以表现出高度自相关, 很可能是因为我们在均值方程的设定中未能充分反映上证综指回报率率的自相关特征, 因此, 我们在均值方程中加入 ARMA 项, 估计了如下

⁷我们还可以用 `wntestb zt` 命令检验标准化残差序列 z_t 是否服从正态分布。

ARMA(1,5)-GARCH(1,1) 模型：⁸

$$rr_hu_t = \omega + \rho_1 rr_hu_{t-1} + \theta_1 u_{t-1} + \cdots + \theta_5 u_{t-5} + u_t$$

其中， u_t 和 h_t 的设定同 (14-7a) 和 (14-10)。结果为：

```
. arch rr_hu, ar(1) ma(1/5) arch(1) garch(1)
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0:   log likelihood =   4861.8933
(output omitted)
Iteration 43:   log likelihood =   4966.2204

ARCH family regression -- ARMA disturbances

Sample: 1 - 1766                                Number of obs   =       1766
Distribution: Gaussian                          Wald chi2(6)     =       30.84
Log likelihood =   4966.22                      Prob > chi2      =       0.0000
```

		OPG				
		Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]
rr_hu	_cons	.0002788	.0003097	0.90	0.368	-.0003282 .0008857
ARMA						
	ar					
	L1.	-.680118	.3876396	-1.75	0.079	-1.439878 .0796417
	ma					
	L1.	.691525	.385831	1.79	0.073	-.0646898 1.44774
	L2.	-.0269018	.0288681	-0.93	0.351	-.0834821 .0296786
	L3.	.0243927	.0303705	0.80	0.422	-.0351325 .0839178
	L4.	.0644122	.0355527	1.81	0.070	-.0052697 .1340941
	L5.	.0464287	.0224901	2.06	0.039	.0023489 .0905085
ARCH						
	arch					
	L1.	.126448	.0124073	10.19	0.000	.1021302 .1507658
	garch					
	L1.	.862823	.0138538	62.28	0.000	.8356701 .889976
	_cons	5.49e-06	1.32e-06	4.17	0.000	2.91e-06 8.07e-06

我们发现，在均值方程 (ARMA) 中， rr_hu_{t-1} 的系数为 -0.68 ，在 10% 水平上显著。这从一定程度上表明沪市的市场有效性较低，因为在一个有效的资本市场中，股票价格的变动是无法预测的。同时我们注意到，在 MA 部分， u_{t-1} ， u_{t-4} 在 10% 水平上显著，而和 u_{t-5} 则在 5% 水平上显著，这似乎表明沪市综指存在一定的“日历效应”。此时，标准化残差 z_t 的 Ljung-Box 统计量为 $Q(10) = 8.12(0.617)$ ， $Q(20) = 27.89(0.112)$ ； z_{t-1}^2 的 Ljung-Box 统计量为 $Q(10) = 8.988(0.533)$ ， $Q(20) = 19.03(0.520)$ 。可见，此时模型设定较为合理。

⁸经过多次尝试发现，ARMA(1,1)-GARCH(1,1) 模型已经具有较好的拟合效果， z_t 对应的 $Q(10)=14.5(0.152)$ ， $Q(20)=35.14(0.019)$ 。

当然，我们还可以采用似然比检验 (LR test) 来比较一下上述 GARCH(1,1) 和 ARMA(1,5)-GARCH(1,1) 模型的优劣：

```
. qui arch rr_hu, arch(1) garch(1)
. est store garch11
. qui arch rr_hu, arch(1) garch(1) ar(1) ma(1/5)
. est store armall_garch11
. lrtest garch11 armall_garch11

Likelihood-ratio test                                LR chi2(6) =      9.13
(Assumption: garch11 nested in armall_garch11)      Prob > chi2 =    0.1663
```

LR 检验得到 $\chi^2(16) = 9.13$ ，相应的 p 值为 0.1663，这表明两个模型并不存在显著差异。

上述结果是在假设 u_t 的条件密度函数为正态分布的前提下得到的，若使用 t 分布 (14-13)，则只需在上述估计命令后附加 `distribution(t)` 选项即可：

```
. arch rr_hu, nolog arch(1) garch(1) distribution(t)

ARCH family regression

Sample: 1 - 1766                                Number of obs   =      1766
Distribution: t                                Wald chi2(.)    =          .
Log likelihood = 5024.285                      Prob > chi2     =          .
```

	OPG					
	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
rr_hu						
_cons	.000205	.0002854	0.72	0.473	-.0003544	.0007645
ARCH						
arch						
L1.	.0983981	.0176673	5.57	0.000	.0637709	.1330253
garch						
L1.	.8896208	.0188714	47.14	0.000	.8526336	.9266079
_cons	5.27e-06	1.85e-06	2.84	0.004	1.64e-06	8.91e-06
/ln dfm2	1.031935	.2229921	4.63	0.000	.5948784	1.468991
df	4.806491	.6258252			3.81281	6.34485

```
. est store garch11_t
```

这里，我们并未指定 t 分布的自由度，此时 Stata 会将其当作一个未知参数估计出来，即 $df=4.806$ ，且在 1% 水平上显著。⁹ 当然，我们也可以事先设定 t 分布的自由度。要设定

⁹需要说明的是，为了保证自由度的估计值为正且大于 2，在估计 $t(\tau)$ 分布的自由度 τ 时，stata 将该参数设定为 $\ln(\tau - 2)$ ，相应的估计值和标准误对应结果中的 `ln dfm2` 项，它与 `df` 值得关系为 $4.806 = \exp(1.039) + 2$ 。

$t(5)$ ，只需将上述命令中的选项 `distribution(t)` 修改为 `distribution(t 5)` 即可。¹⁰

在本例中，使用 t 分布要优于正态分布，因为此处得到的对数似然值 (5024.29) 明显大于我们在第 12 页中在正态分布假设下的值 (4961.66)，而 LR 检验则进一步证实了这一猜测：

```
. lrtest garch11 garch11_t
Likelihood-ratio test                                LR chi2(1)  =    125.26
(Assumption: garch11 nested in garch11_t)          Prob > chi2 =    0.0000
```

◀

14.2 GARCH 模型的扩展

14.2.1 ARCH-M 模型

通常而言，多数金融资产都具有高风险高回报的特征。因此，资产回报也会受到其波动情况的影响。设某种资产的超额回报率 (资产收益减去无风险收益) 为 y_t ，我们可以进一步将其分解为投资者在 $t-1$ 时点可以预期到的收益 μ_t ，以及不可预期的收益 u_t 两个部分：

$$y_t = \mu_t + u_t$$

Engle, Lillien and Robins (1987) 提出的 ARCH-M 模型可表示如下：¹¹

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \delta h_t + u_t \quad (14-17a)$$

$$u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t \quad (14-17b)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^p u_{t-i}^2 \quad (14-17c)$$

其中， $v_t \sim \text{IIDN}(0, 1)$ 。我们注意到，期望收益 $\mu_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \delta h_t$ 由外生变量 \mathbf{x}_t 和波动 h_t 两个部分构成。因此，参数 δ 可以捕捉 u_t 的波动对 y_t 期望收益的影响。在特定的假设下， δ 事实上就是“相对风险规避系数” (coefficient of relative risk aversion)，有时也称为“风险贴水” (risk premium)。

若把上式中的 h_t 设定为 (14-10)，即 GARCH(1, 1)，则我们可以得到文献中广泛应用的 GARCH(1, 1)-M 模型。

► Example

我们可以采用如下命令估计 GARCH(1,1)-M 模型：

```
. arch rr_hu, nolog arch(1) garch(1) archm
ARCH family regression
```

¹⁰若假设 u_t 的条件分布为 Nelson (1991) 建议的广义指数分布 (14-16)，则可设定选项 `distribution(ged)`。

¹¹文献中使用的其他设定方式包括： $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \delta \sqrt{h_t} + u_t$ 及 $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \delta \log h_t + u_t$ 。

```

Sample: 1 to 1766
Log likelihood = 4964.468
Number of obs   = 1766
Wald chi2(1)    = 5.81
Prob > chi2     = 0.0159

```

rr_hu	OPG					
	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
rr_hu _cons	-.0006515	.0004821	-1.35	0.177	-.0015964	.0002933
ARCHM sigma2	5.189279	2.152646	2.41	0.016	.9701708	9.408386
ARCH arch l1.	.130165	.0123743	10.52	0.000	.1059119	.1544181
garch l1.	.8573138	.0137219	62.48	0.000	.8304194	.8842082
_cons	6.00e-06	1.32e-06	4.55	0.000	3.42e-06	8.59e-06

由于附加了 `nolog` 选项，所以并未显示迭代过程。类似于前面的例子，选项 `arch(1)` 和 `garch(1)` 用于设定 **GARCH(1,1)** 过程。**GARCH-M** 则通过选项 `archm` 来设定。从估计结果来看， δ 的系数为 5.19，且在 5% 水平上显著。因此，在上证交易所，投资者会要求风险贴水。

如果我们把 (14-17a) 式设定为 $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \delta \sqrt{h_t} + u_t$ ，则可以采用如下命令进行估计：

```
arch rr_hu, nolog arch(1) garch(1) archm archmexp(sqrt(X))
```

可以看出，均值方程中 h_t 项的具体形式可以通过 `archmexp(exp)` 选项来控制，其中 `exp` 可以是任何表达式，但表达式中必须包含 `x`。¹²

同理，如果把均值方程设定为 $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \delta \log h_t + u_t$ ，则可以采用如下命令进行估计：

```
arch rr_hu, nolog arch(1) garch(1) archm archmexp(log(X))
```

◀

14.2.2 非对称 GARCH 模型

Black (1976), Christie (1982), 以及 Schwert (1989) 等学者的经验证据表明，股价的变化趋势往往与波动的变化趋势负相关。具体而言，“坏消息”引起的波动明显大于“好消息”引起的波动，通常称之为“非对称效应” (asymmetric effect) 或“杠杆效应” (leverage effect)。¹³ 显然，ARCH 模型和 GARCH 模型都无法捕捉这一特征，因为在二者条件方差的设定中，干扰项的滞后项都是以平方的形式出现的，致使正干扰和负干扰对条件方差具有完全相同的影响。

¹²可以把 `x` 视为 h_t 的替代式。

¹³之所以使用“杠杆效应”这一名词，是因为当公司的股价下跌时，相对于债务而言，股东权益的价值降低了，进而使其财务杠杆提高。这使得持有该公司股票更具风险。详见 Nelson (1991, 脚注 3)。

下面我们采用最简单的 ARCH(1) 模型说明“杠杆效应”存在的条件。考虑如下 ARCH (1) 模型：

$$y_t = (a + by_{t-1}^2)^{1/2} v_t, \quad a > 0, b > 0$$

其中, $v_t \sim i.i.d.N(0, 1)$, 由此可得：

$$\begin{aligned} & \text{Cov}_{t-1}(y_t - y_{t-1}, h_{t+1} - h_t) \\ &= \text{Cov}_{t-1}(y_t, h_{t+1}) \\ &= \text{Cov}_{t-1}(y_t, a + by_{t-1}^2) \\ &= b \text{Cov}_{t-1}(y_t, y_{t-1}^2) \\ &= b(a + by_{t-1}^2)^{2/3} \text{Cov}(v_t, v_t^2) \\ &= b(a + by_{t-1}^2)^{2/3} E(v_t^3) \end{aligned}$$

可见, 只有在干扰项 v_t 左偏的情况下, 才会出现杠杆效应。因此, 只有在干扰项 v_t 服从非对称分布的情况下, 才能在模型设定中反映出杠杆效应。

EGARCH 模型

Nelson (1991) 提出的指数 (Exponential) GARCH (EGARCH 模型) 能够反映出非对称效应。在该模型中, 条件方差的自然对数被设定成干扰项 (而非干扰项的平方) 滞后值的函数。基本设定如下：

$$\begin{aligned} \log h_t &= a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot [|v_{t-j}| - E|v_{t-j}| + \delta v_{t-j}] \\ &= \begin{cases} [a_0 - a(1)E|v_t|] + (1 + \delta) \sum_{j=1}^{\infty} a_j |v_{t-j}| & \text{若 } v_{t-j} \geq 0 \\ [a_0 - a(1)E|v_t|] + (1 - \delta) \sum_{j=1}^{\infty} a_j |v_{t-j}| & \text{若 } v_{t-j} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $a(1) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $E|v_t|$ 是一个常数, 其取值决定于 v_t 的分布函数。若假设 v_t 服从正态分布, 则

$$E|v_t| = \sqrt{2/\pi}$$

若假设 v_t 服从 t 分布 (14-13) (此时, $h_t = 1$), 则

$$E|v_t| = 2\sqrt{\tau - 2} \cdot \frac{\Gamma((\tau + 1)/2)}{\sqrt{\pi}(\tau - 1)\Gamma(\tau/2)}$$

如果 v_t 服从广义误差分布 (14-16) ($h_t = 1$), 则

$$E|v_t| = \lambda \cdot 2^{(1/\tau)} \cdot \frac{\Gamma(2/\tau)}{\Gamma(1/\tau)}$$

Nelson 证明得到, 若 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty$, 那么 $\log h_t, h_t$, 以及 u_t 都是严格平稳的。

EGARCH 模型的基本思想在于, 由于条件方差的自然对数 $\log(h_t)$ 既可以取正值也可以取负值, 我们无须限定上述模型中的 a_j 都为正值。我们注意到, EGARCH 模型假设条件方差 $\log(h_t)$ 决定于随机干扰的绝对值 $|v_{t-j}|$ 与其期望值 $E|v_{t-j}|$ 之间的偏离程度。前期正向干扰和负向干扰对波动的非对称影响 (杠杆效应) 则通过 $\delta \cdot v_{t-j}$ 来反映。系数 a_j 通常都为正值, 所以 δ 的取值具有如下含义:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 < \delta: \text{ 正干扰会增加波动, 而负干扰则会降低波动} \\ 0 < \delta \leq 1: \text{ 正干扰引起的波动比负干扰要大} \\ \delta = 0: \text{ 正负干扰对波动的的影响具有相同的效果} \\ -1 \leq \delta < 0: \text{ 正干扰引起的波动比负干扰要小} \\ \delta < -1: \text{ 正干扰会降低波动, 而负干扰会增波动} \end{array} \right.$$

对于上面提到的“杠杆效应”, 理论上预期 δ 的估计值应介于 -1 和 0 之间。

类似于 (14-7b) 式中 GARCH (p, q) 模型的表示方式, EGARCH (p, q) 模型通常表示如下:

$$\log h_t = \omega + \beta(L) \log h_t + \alpha(L)[|v_t| - E|v_t| + \delta \cdot v_t] \quad (14-18)$$

其中, ω 为常数, $a(L) = \sum_{j=1}^q a_j L^j$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j$ 。需要强调的是, 在此模型中, 我们无须假设 $a(L)$ 和 $\beta(L)$ 中的系数都为正值。实证分析中使用较为广泛的 EGARCH (1, 1) 模型可表示如下:

$$\log h_t = \omega_1 + \beta_1 \log h_{t-1} + \alpha_1 |v_{t-1}| + \delta_1 v_{t-1} \quad (14-19)$$

由于 $E|v_{t-1}|$ 为常数, 所以可以包含在常数项 ω_1 中。

此外, 我们同样可以在均值方程中设定 ARMA 项, 得到 ARMA-EGARCH 模型; 我们亦可在均值方程中加入 h_t , 得到 EGARCH-M 模型。

► Example

通过设定选项 `earch()` 和 `egarch()`, 可估计 (14-19) 式中的 EGARCH(1,1) 模型:

```
. arch rr_hu, nolog earch(1) egarch(1)
ARCH family regression
Sample: 1 to 1766
Log likelihood = 4980.466
Number of obs = 1766
Wald chi2(.) = .
Prob > chi2 = .
```

rr_hu	OPG					[95% Conf. Interval]
	Coef.	Std. Err.	z	P> z		
rr_hu						
_cons	.0000866	.0002936	0.29	0.768	-.0004889	.000662

ARCH						
earch						
L1.	-.0445071	.0090919	-4.90	0.000	-.0623268	-.0266874
earch_a						
L1.	.224391	.0201126	11.16	0.000	.184971	.2638111
egarch						
L1.	.9787821	.0050905	192.28	0.000	.9688048	.9887594
_cons	-.1653254	.0425369	-3.89	0.000	-.2486963	-.0819546

模型经过 90 次迭代达到收敛。估得的方差方程为：

$$\log h_t = -0.165 + 0.979 \log h_{t-1} + 0.224 \left| v_{t-1} - \sqrt{2/\pi} \right| - 0.045 v_{t-1}$$

由于我们并未设定 `distributiong()` 选项，所以 `stata` 默认 v_t 服从正态分布，因此上述估计式中 $E|v_t| = \sqrt{2/\pi}$ 。可见， v_{t-1} 项在 1% 水平上显著为负，这表明沪市存在显著的“杠杆效应”，即坏消息引起的波动明显大于好消息。

若假设 v_t 服从 t 分布，则可采用如下命令估计 EGARCH 模型：

```
arch rr_hu, nolog earch(1) egarch(1) distribution(t)
```

估得的方差方程为 (详细结果从略)：

$$\log h_t = -0.169 + 0.978 \log h_{t-1} + 0.203 \left| v_{t-1} - \sqrt{2/\pi} \right| - 0.043 v_{t-1}$$

GARCH 项和 v_{t-1} 项的系数都在 1% 水平上显著异于 0。这与此前在正态分布假设下得到的结果非常相似。同样，若设定选项 `distirbution(ged)` 则可以估计 v_t 服从广义指数分布下的 EGARCH 模型，得到的结果与正态分布和 t 分布假设下非常相似。

为了能够更为形象的说明外部冲击的非对称效应，Engle and Ng (1993) 引入了所谓的“信息冲击曲线”来图示非对称效应。它描述了 h_t 与标准化后的干扰项 u_{t-1} (通常记为 $z_{t-1} = u_{t-1}/\sqrt{h_t}$) 之间的关系。在完成 EGARCH 模型的估计后，可以采用 `newsimpact` 命令绘制“信息冲击曲线”：¹⁴

```
newsimpact, range(4)
```

这里，选项 `range(4)` 用于指定 z_{t-1} 的取值范围为 $(-4, 4)$ 。默认情况下取值为 $(-2, 2)$ 。从图 14-10 中显示的结果来看，负面冲击 (利空消息) 引起的波动的确大于正面消息 (利好消息) 引起的波动。

◀

GJR-GARCH 模型

在 EGARCH 模型中，为了反映正负干扰对条件方差影响的差异，Nelson 采用了与 GARCH 模型非常不同的设定方式：被解释变量是条件方差的自然对数，即 $\ln(h_t)$ 。Glosten, Jagannathan,

¹⁴该命令需要下载，请输入 `ssc install newsimpact` 或 `findit newsimpact` 命令。

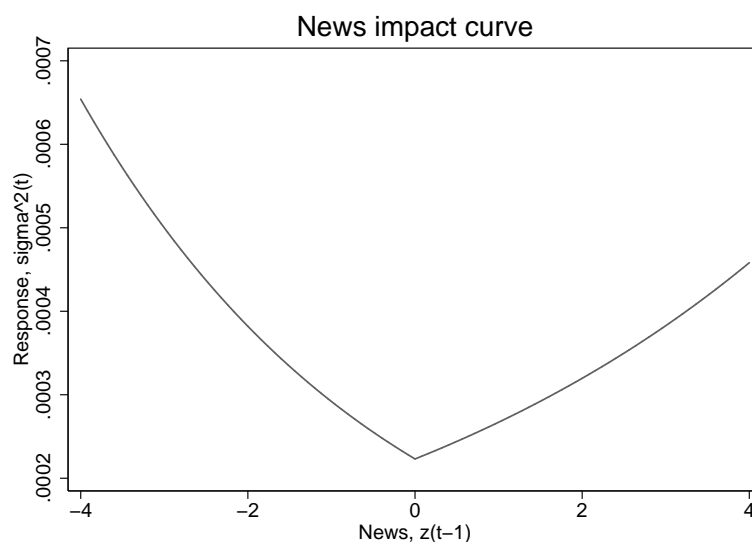


图 14-10: 信息冲击曲线 (News Impact Curve)

and Runkle (1993, GJR) 以及 Zakoian (1994) 则通过在 GARCH 模型中引入虚拟变量来反映非对称效应。该模型通常称为 GJR-GARCH 或 TGARCH (Threshold GARCH) 模型，其基本设定为：

$$h_t = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \gamma_1 u_{t-1}^2 I_{t-1} \quad (14-20)$$

其中， $I_{t-1} = 1$ (当 $u_{t-1} \geq 0$); $I_{t-1} = 0$ (当 $u_{t-1} < 0$)。因此，如果 $\gamma_1 < 0$ ，则表明“坏消息”引起的波动显著大于“好消息”引起的波动，即存在“杠杆效应”。此时，保证 h_t 非负的条件为： $\beta_1 \geq 0$ ，且 $a_1 + \gamma_1 \geq 0$ 。显然，当 $\gamma_1 = 0$ 时，GJR-GARCH(1, 1) 模型便转化为一般的 GARCH (1, 1) 模型。

我们同样可以把 GJR-GARCH 模型扩展为 ARMA-GJR-GARCH 模型或 GJR-GARCH-M 模型。这里需要说明的是，基于 GJR-GARCH 模型确认出的非对称效应和 EGARCH 模型是不同的。

► Example

估计 GJR-GARCH 模型可以通过设定 `tgarch()` 选项来实现：

```
. arch rr_hu, nolog arch(1) garch(1) tarch(1)
ARCH family regression
Sample: 1 to 1766
Log likelihood = 4968.588
```

	OPG				
rr_hu	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]

```
Number of obs      =      1766
Wald chi2(.)        =          .
Prob > chi2         =          .
```

rr_hu						
_cons	.0000226	.0003036	0.07	0.941	-.0005725	.0006177
ARCH						
arch						
l1.	.1533976	.015775	9.72	0.000	.1224791	.1843161
tarch						
l1.	-.0744284	.0149807	-4.97	0.000	-.10379	-.0450667
garch						
l1.	.874734	.0123436	70.87	0.000	.8505409	.898927
_cons	4.93e-06	1.18e-06	4.19	0.000	2.62e-06	7.24e-06

得到的方差方程为：

$$h_t = 4.93^{-6} + 0.153u_{t-1}^2 + 0.875h_{t-1} - 0.074u_{t-1}^2 I_{t-1}$$

由于 $\hat{\gamma}_1 = -0.074$ ，且在 1% 水平上显著，因此存在显著的“杠杆效应”。若进一步采用 newsimpact 命令绘制“信息冲击曲线”，可得到图 14-11。这与我们此前采用 EGARCH 模型得到的结果 (见图 14-10) 非常相似。

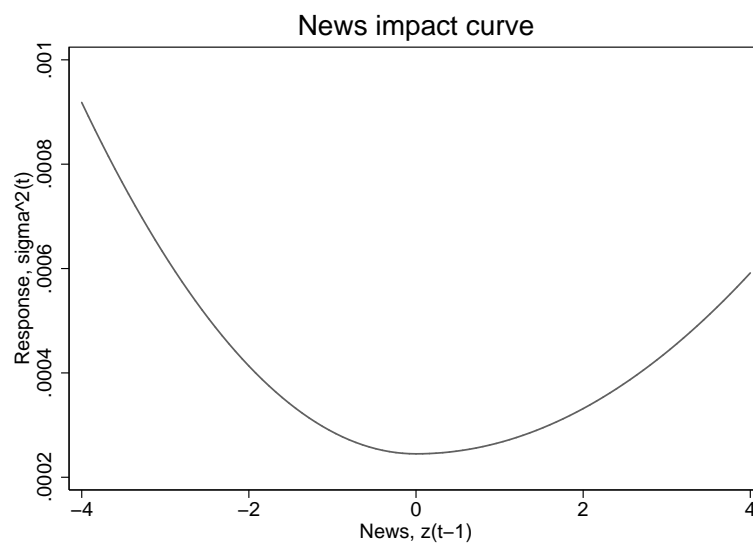


图 14-11: 信息冲击曲线 (News Impact Curve)

参考文献

- [1] Bai, X., Russell, J. R., and Tiao, G. C. (2003). Kurtosis of GARCH and stochastic volatility models with non-normal innovations. *Journal of Econometrics* 114: 349–360.
- [2] Bai, X., Russell, J. R., and Tiao, G. C. (2004). Effects of non-normality and dependence on the precision of variance estimates using high-frequency financial data. Revised working paper, Graduate School of Business, University of Chicago.
- [3] Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004). Power and bi-power variations with stochastic volatility and jumps (with discussion). *Journal of Financial Econometrics* 2: 1–48.
- [4] Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 meeting of the American Statistical Associations, Business and Economic Statistics Section, 177–181.
- [5] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31: 307–327.
- [6] Bollerslev, T., (1987), A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Price and Rate of Return. *Review of Economics and Statistics* 9, 542-547. (t distribution)
- [7] Bollerslev, T. (1990). Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH approach. *Review of Economics and Statistics* 72: 498–505. (CCORR)
- [8] Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance. *Journal of Econometrics* 52: 5–59.
- [9] Bollerslev, T., Engle, R. F., and Nelson, D. B. (1994). ARCH model. In R. F. Engle and D. C. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics IV*, pp. 2959–3038. Elsevier Science, Amsterdam.
- [10] Bollerslev, T, Engle, R. F. and Wooldridge (1998), A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances, *Journal of Political Economy* 96, 116-131. (VECH)
- [11] Bollerslev, T. and Jubinski, D. (1999). Equality trading volume and volatility: latent information arrivals and common long-run dependencies. *Journal of Business & Economic Statistics* 17: 9–21.
- [12] Breidt, F. J., Crato, N., and de Lima, P. (1998). On the detection and estimation of long memory in stochastic volatility. *Journal of Econometrics* 83: 325–348.
- [13] Cao, C. and Tsay, R. S. (1992). Nonlinear time series analysis of stock volatilities. *Journal of Applied Econometrics* 7: s165–s185.

- [14] Cheung Y-W, Ng LK (1996) A causality-in-variance test and its application to financial market prices. *Journal of Econometrics*, 72: 33-48
- [15] Chou, R. F. (1988), “Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH” , *Journal of Applied Econometrics*, Vol.3, 279-294. (GARCH-M)
- [16] Christie, A. A., (1982), The Stochastic Behavior of Common Stock Variance-Value, Leverage and Interest Rate Effects, *Journal of Financial Economics* 10, 407-732.
- [17] Campbell, J.Y., and L. Hentschel, 1992, No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns, *Journal of Financial Economics* 31, 281-318.
- [18] Ding, Z., Granger, C. W. J., and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock returns and a new model. *Journal of Empirical Finance* 1: 83–106.
- [19] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations. *Econometrica* 50: 987–1007.
- [20] Engle, R. F., (2002), Dynamic Conditional Correlation-A Simple Class of Multivariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics* 20,339-350. (DCC)
- [21] Engle R.F. and K.F. Kroner (1995), Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory* 11, 122-150. (BEKK)
- [22] Engle, R. F. and V. K. Ng (1993), Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, *Journal of Finance* 48, 1749-1778. (NGARCH)
- [23] Engle, R. F., D. Lilien, and R. Robins (1987), Estimation of time varying risk premiums in the term structure, *Econometrica* 55, 391-408. (ARCH-M)
- [24] French, K. R., Schwert, G. W., and Stambaugh, R. F. (1987). Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics* 19: 3–29.
- [25] Garman, M. B. and Klass, M. J. (1980). On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business* 53: 67–78.
- [26] Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess return on stocks. *Journal of Finance* 48: 1779–1801. (GJR-GARCH)
- [27] Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [28] Hansen, B.E., 1994, Autoregressive Conditional Density Estimation, *International Economic Review* 35, 705-730. (Generalized Student-t)

- [29] Harvey, A. C., Ruiz, E., and Shephard, N. (1994). Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies* 61: 247–264.
- [30] Hong Y (2001) A test for volatility spillover with application to exchange rates. *Journal of Econometrics*, 103: 183-224.
- [31] Jacquier, E., Polson, N. G., and Rossi, P. (1994). Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion). *Journal of Business & Economic Statistics* 12: 371–417.
- [32] Kroner and Ng (1998), Modeling Asymmetric Comovement of Assets Returns, *Review of Financial Studies* 11(4), 817-844. (ADC)
- [33] Laurent, S., Luc, B. and Rombouts, V.K. (2006), Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics* 21(1): 79-109.
- [34] Lütkepohl, Helmut (1993). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, 2nd edition, Berlin: Springer-Verlag.
- [35] Lütkepohl, H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer Berlin Heidelberg New York.
- [36] McLeod, A. I. and Li, W. K. (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis* 4: 269–273.
- [37] Melino, A. and Turnbull, S. M. (1990). Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics* 45: 239–265.
- [38] Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory* 6: 318–334.
- [39] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica* 59: 347–370. (EGARCH)
- [40] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, Lecture Notes in Statistics, 11. Springer-Verlag, New York.
- [41] Pagan, A. (1996). The econometrics of financial markets, *Journal of Empirical Finance* 3: 15–102. (关于 GARCH 的一个综述)
- [42] Parkinson, M. (1980). The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business* 53: 61–65.
- [43] Rachev, S.T., S. Mittnik, F.J. Fabozzi, S.M. Focardi, Teo, Jašić, (2007), *Financial Econometrics: From Basics to Advanced Modeling Techniques*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

-
- [44] Ray, B. K. and Tsay, R. S. (2000). Long-range dependence in daily stock volatilities. *Journal of Business & Economic Statistics* 18: 254–262.
- [45] Rogers, L. C. G. and Satchell, S. E. (1991). Estimating variance from high, low and closing prices. *Annals of Applied Probability* 1: 504–512.
- [46] Taylor, S. J. (1994). Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. *Mathematical Finance* 4: 183–204.
- [47] Tong, H. (1978). On a threshold model. In C. H. Chen (ed.), *Pattern Recognition and Signal Processing*. Sijhoff & Noordhoff, Amsterdam.
- [48] Tong, H. (1990). *Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- [49] Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series, 2th*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [50] Yang, D. and Zhang, Q. (2000). Drift-independent volatility estimation based on high, low, open, and close prices. *Journal of Business* 73: 477–491.
- [51] Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroscedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control* 18: 931–955. (TGARCH)