

تمرینات ماتریس ها و جبر خطی - سری دهم

۱- فرض کنید $A \in M_{m,n}(F)$ و نگاشت $T_A: F^n \rightarrow F^m$ که برابر هر $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$

$$T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

دارد نظر میکنیم. T_A نسبت به پایه استاندارد F^n و F^m است.

۲- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که نگاشت خطی است که

$$T(1, 0, 1) = (2, 3, -1) \quad , \quad T(1, -1, 1) = (3, 0, -2)$$

$$, \quad T(-2, 7, -1) = (2, 3, -1)$$

$$C = \{ (1, 0, 1), (1, -1, 1), (-2, 7, -1) \}$$

یک پایه برای \mathbb{R}^3 باشد و B را نیز پایه استاندارد \mathbb{R}^3 در نظر بگیریم، $M(T, C)$ و

$M(T, C, B)$ را بیابید.

۳- فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد ۴ باشد و $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ پایه V

باشد. اگر $T: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد که ماتریس آن نسبت به B

به صورت زیر باشد

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

پایه \mathbb{R}^4 برای $\text{Ker } T$ و $\text{Im } T$ بر حسب اعضای B بیابید.

۴- $T, S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشت‌های خطی هستند و نسبت به پایه‌ها زیر

$$B = \{(1, 2), (2, 1)\} \text{ و } C = \{(1, 1), (1, 2)\} \text{ از } \mathbb{R}^2 \text{ داریم}$$

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ و } M(S, C) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الف) ماتریس $T+S$ را نسبت به C بیابید.

ب) ماتریس $T \circ S$ را نسبت به B بیابید.

۵- $u = (3, 3) \in \mathbb{R}^2$ ، مختصات $T(u)$ نسبت به B و مختصات $S(u)$ نسبت به C را بیابید.

۵- فرض کنید T یک فضای برداری n بعدی و $T: V \rightarrow V$ نگاشت خطی باشد. اگر برای یک $x \in V$ به اینم

$$T^{n-1}(x) \neq 0 \text{ و } T^n(x) = 0$$

نشان دهید $\{x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)\}$ مستقل خطی است و لذا پایه‌ای از V است. نوشتن ماتریس T نسبت به این پایه را بیابید.

۶- فرض کنید $T, S: V \rightarrow V$ نگاشت‌های خطی باشند و $\dim V < \infty$. نشان دهید

اگر $T \circ S = \text{id}_V$ ، آنگاه $S \circ T = \text{id}_V$. آیا این مطلب در صورت نامتناهی بودن V نیز صحیح است.

۷- فرض کنید V^* (مماس فضایی برداری V باشد و $D \subseteq D' \subseteq V^*$ و $B \subseteq B' \subseteq V^*$

الف) نشان دهید $B^\perp = (\langle B \rangle)^\perp$ و $D^\perp = (\langle D \rangle)^\perp$.

ب) نشان دهید $B'^\perp \subseteq B^\perp$ و $D'^\perp \subseteq D^\perp$.