



آمار در ابعاد بالا

نیم سال اول ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱
مدرس: سید ابوالفضل مطهری

تاریخ تحویل تا آخر روز ۵ شنبه ۲۵ آذر.

سوال ۱

فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_n نقاطی در $[0, 1]^2$ که به صورت یکنواخت و مستقل از هم انتخاب شده‌اند و همچنین تابع $\omega : ([0, 1]^2)^n \rightarrow \mathbb{R}$ طول کوتاه ترین تور مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره گرد باشد، آن گاه ثابت کنید:

۱. اگر بدانیم که ω یک تابع $2\sqrt{2}$ -لیپشیتز باشد، آن گاه:

$$\mathbb{P}(|\omega - \mathbb{E}[\omega]| \leq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{16n}\right).$$

۲. به ازای نقطه‌ی دلخواه $y \in [0, 1]^2$ داریم که

$$\mathbb{E}\left[\min_{1 \leq k \leq K} d(y, X_k)\right]$$

از اردر $O(1/\sqrt{K})$ می‌باشد که d در آن، معیار فاصله است.

۳. برای هر مجموعه‌ی $n - 1$ نقطه‌ای $A = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}\}$ داریم:

$$|\omega(A \cup X_n) - \omega(A \cup X'_n)| \leq 2(d(X_n, A) + d(X'_n, A)),$$

که در آن $d(X, A)$ معیار کمترین فاصله نقطه X تا نقاط مجموعه‌ی A است.

۴. برای مارتینگل‌های دوب $Z_i = \mathbb{E}[\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) | X_1, X_2, \dots, X_i]$ نشان دهید:

$$|Z_i - Z_{i-1}| \leq \min\left\{2\sqrt{2}, \frac{O(1)}{\sqrt{n-i}}\right\}.$$

۵. در نهایت نشان دهید:

$$\mathbb{P}(|\omega - \mathbb{E}[\omega]| \leq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{O(\log n)}\right).$$

قابل توجه علاقه‌مندان: ثابت شده است که ω دارای باندهای زیرگوسی است. (:

سوال ۲

برای عدد پوششی خواص زیر را نشان دهید:

۱. اگر $f_i : R \rightarrow R$ ها توابع p -لیپشیتز باشند و $A \in \mathbb{R}^m$ ، آن گاه:

$$N(p\epsilon, \{(f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_m(a_m)) | (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A\}, \|\cdot\|_2) \leq N(\epsilon, A, \|\cdot\|_2).$$

۲. مثال نقضی ارائه دهید که در آن، اگر $L \subseteq K$ باشد آن گاه نتوان نتیجه گرفت:

$$N(\epsilon, L, d) \leq N(\epsilon, K, d).$$

نقض بودن مثال خود را نشان دهید.

۳. اگر $L \subseteq K$ باشد، آن گاه:

$$N(\epsilon, L, d) \leq N(\epsilon/2, K, d).$$

سوال ۳

۱. لم sauer یک باند بالا برای کاردینالیتی دسته توابع بر حسب بُعد VC به دست می دهد. این رابطه را به دست آورده و اثبات کنید.

۲. با استفاده از قسمت قبل، برای کاردینالیتی یک هایپر پلین k بُعدی باند بالا به دست آورید.

۳. برای تعداد نمونه های لازم برای تخمین سادک k^1 بُعدی یک باند بالا به دست آورید.

سوال ۴

تمرین ۲.۴ از کتاب.

سوال ۵

تمرین ۳.۴ از کتاب.