



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - CIN

ANTENAS

---

## Relatório da Lista 3

---

*Feito por :*  
Arnaldo Rafael Morais Andrade  
arma

# Conteúdo

1	Objetivos . . . . .	2
2	Metodologia . . . . .	2
	2.1 Geometria . . . . .	2
	2.2 Prática . . . . .	2
3	Resultados . . . . .	8
4	Discussão de Resultados . . . . .	8

# 1 Objetivos

Análise numérica das propriedades de antenas tipo dipolos usando o Método dos Momentos.

# 2 Metodologia

Para a parte prática, foi utilizado a linguagem *Python*, no ambiente *jupyter-notebook*, para implementar a formulação do problema, por baixo, esta linguagem usa as mesmas funções do *Matlab*, então não há problemas.

Além disso, como forma de facilitar os cálculos, o comprimento de onda foi escolhido como 1 metro.

## 2.1 Geometria

Seja uma antena de dipolo linear, de comprimento  $L$ , ao longo do eixo  $Z$ , alimentada pelo centro. Considere que o raio do fio  $a$  seja muito menor que o comprimento de onda ( $a \ll \lambda$ ), e que o metal da antena seja perfeitamente condutor.

## 2.2 Prática

1. Seguindo o procedimento mostrado em sala, obtenha os elementos das matrizes de Impedância ( $Z$ ) e de Tensão ( $V$ ) para funções de base tipo triangulares.

**R:** Sabemos que para obtermos a corrente no dipolo, precisamos da matriz de impedância e de tensão. A equação (1) mostra esta formulação.

$$[Z_{mn}][I_m] = [V_m] \rightarrow [I_m] = [Z_{mn}]^{-1}[V_m] \quad (1)$$

Como o dipolo é alimentado pelo centro, fica fácil mostrar que o elemento de tensão será um vetor coluna com seu índice central valendo  $-j\omega\epsilon_0 V_0$  e os outros índices serão nulos. Caso o número de segmentos seja ímpar, sua forma é mostrada na equação (2), do contrário, tem sua forma mostrada na equação (3).

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -j\omega\epsilon_0 V_0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, Nx1 \quad (2)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -j\omega\epsilon_0 V_0 \\ -j\omega\epsilon_0 V_0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, Nx1 \quad (3)$$

Para sua construção da matriz de impedâncias, podemos utilizar a equação auxiliar, vista em sala de aula, que representa o método de Galerkin. Sendo  $k$  o número de onda,  $\Delta$  o tamanho do segmento,  $a$  o raio da antena,  $A_{mn}$ ,  $\Phi_{mn}$ ,  $\Psi_{mn}$  e  $Z$ , funções auxiliares, temos:

$$Z_{mn} = k^2 A_{mn} - \Phi_{mn} \quad (4a)$$

$$A_{mn} = \Delta^2 \Psi(m, n) \quad (4b)$$

$$\Phi_{mn} = \Psi(m - \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}) - \Psi(m + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}) - \Psi(m - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) + \Psi(m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \quad (4c)$$

$$\Psi(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\Delta} \ln \left( \frac{\frac{\Delta}{2} + \sqrt{(\frac{\Delta}{2})^2 + a^2}}{a} \right) - \frac{jk}{4\pi}, & \text{se } m = n \\ \frac{\exp(-jk\sqrt{(Z(m) - Z(n))^2 + a^2})}{4\pi\sqrt{(Z(m) - Z(n))^2 + a^2}}, & \text{c.c} \end{cases} \quad (4d)$$

$$Z(x) = \frac{-L}{2} + x\Delta \quad (4e)$$

Com as equações acima, finalmente podemos montar a matriz de impedâncias. Será uma matriz quadrada com os mesmos elementos na diagonal. O detalhe é que precisamos de apenas sua primeira linha para montar toda a sua matriz, pois se trata de uma matriz de Toeplitz, isto é:

$$Toeplitz = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{11} & & & a_{1n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1n-1} & \dots & \dots & a_{11} \end{bmatrix}$$

Finalmente, para descobrir a impedância de entrada, foi necessário estabelecer a tensão como  $V_0$  e dividir pela corrente quando  $Z = 0$ , como mostra a equação abaixo.

$$Z_{in} = \frac{V_0}{I_m(0)} \quad (5)$$

**2.** Implemente a formulação em Matlab ou outro ambiente/linguagem desejada.

**R:** O código em questão será anexado junto a esse documento, uma cópia também será enviada ao email, caso necessário.

Um detalhe relevante de implementação, na construção dos gráficos de distribuição de corrente, foi adicionado zeros ao vetor corrente, de forma que representasse a corrente nula nas extremidades do dipolo. Além disso, para as figuras de convergência de corrente, foi escolhida a corrente central,  $I_m(0)$ , como referência.

Os gráficos são encontrados nas respostas de cada tópico desta seção, enquanto que as tabelas são providas no tópico "Resultados". As questões 4 e 6 foram agregadas em uma só.

**3.** Para uma antena de meio comprimento-de-onda ( $L = \lambda/2$ ), e raio  $a = 10^{-4}\lambda$ , determine a distribuição de corrente ao longo da antena. Use 19 funções de base. Varie o número de funções de base ( $N$ ) e observe a convergência.

**R:**

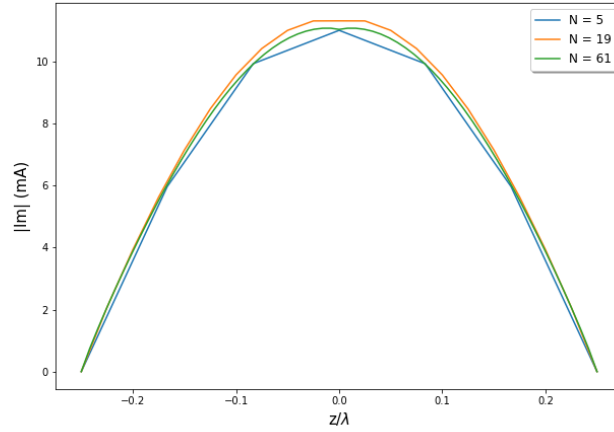


Figura 1: Distribuição de Corrente para  $L = \lambda/2$

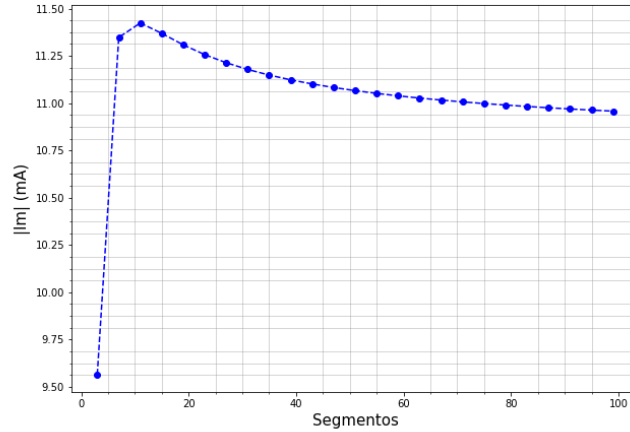


Figura 2: Convergência da Corrente para  $L = \lambda/2$

5. Repita o item 3 para uma antena de 1 comprimento-de-onda ( $L = \lambda$ ).

**R:**

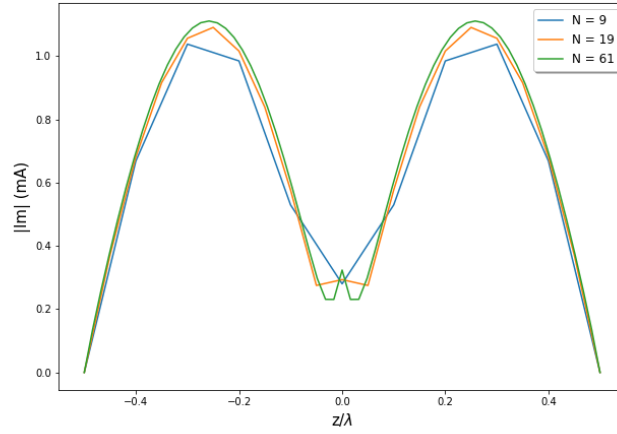


Figura 3: Distribuição de Corrente para  $L = \lambda$

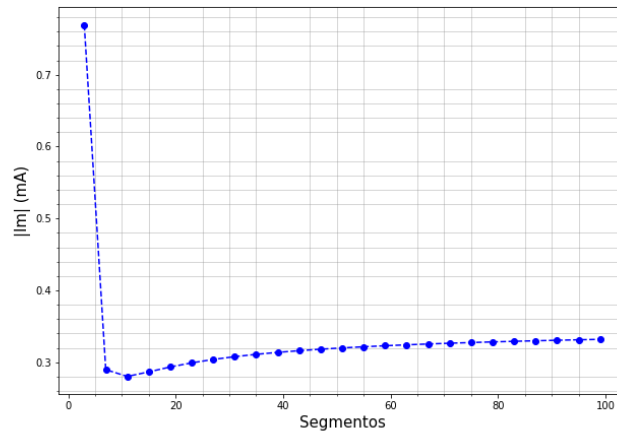


Figura 4: Convergência da Corrente para  $L = \lambda$

**6.** (Junto com a questão 4). Para a antena do item anterior, obtenha a impedância de entrada, e mostre sua convergência com N. Para a antena de ( $L = \lambda$ ), obtenha a impedância de entrada, e mostre sua variação com N.

**R:**

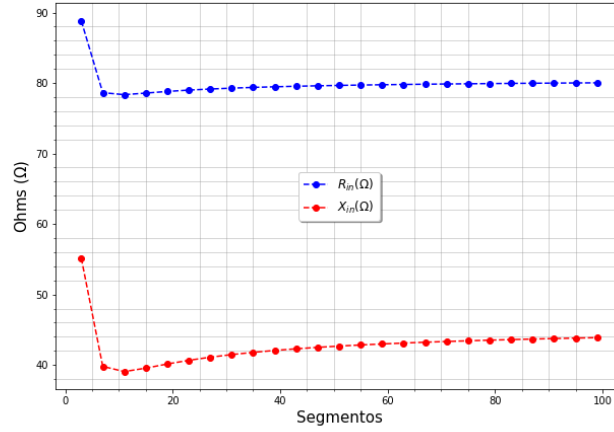


Figura 5: Convergência de  $Z_{in}$  para  $L = \lambda/2$

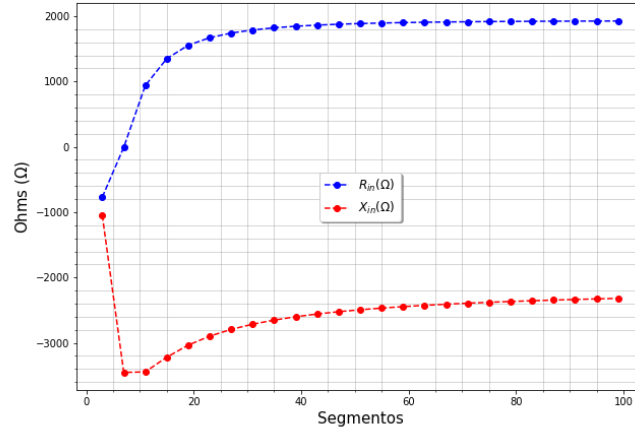


Figura 6: Convergência de  $Z_{in}$  para  $L = \lambda$



### 3 Resultados

Com o análise das figuras 1,2,3,4,5,6, foram criadas as tabelas 1 e 2, como pode-se ver abaixo. Para o dipolo de onda completa, resultados com segmentos menores que 9, mostram-se inesperados. Havia valores negativos para resitência, bem como a corrente.

Tabela 1: Características do Dipolo de meia onda

Segmentos(N)	$I_m(0)(mA)$	$Z_{in}(\Omega)$
5	9.71 -5.17j	80.21 +42.74j
19	10.07 -5.13j	78.80 +40.12j
61	9.70 -5.23j	79.77 +43.03j
99	9.60 -5.26j	80.02 +43.86j

Tabela 2: Características do Dipolo de onda completa

Segmentos(N)	$I_m(0)(mA)$	$Z_{in}(\Omega)$
9	0.044 +0.276j	562.6 -3525.5j
19	0.133 +0.261j	1553.9 -3034.0j
61	0.199 +0.254j	1903.2 -2435.1j
99	0.211 +0.255j	1924.6 -2319.2j

### 4 Discussão de Resultados

É possível analisar, através das tabelas e gráficos, que o dipolo de meia onda apresenta sua corrente máxima no seu centro, daí uma impedância de entrada razoável, com uma reatância controlável. Valores compatíveis com a resistência de fontes do mercado atual.

Já o dipolo de onda completa, é o oposto. Apresenta uma corrente baixa em seu centro, o que ocasiona numa impedância de entrada alta. Sua reatância é bastante alta. Condiz com a referência de que, para antenas multiplas de 1 comprimento de onda, suas impedâncias de entrada tendem à infinito.

Com este método de Galerkin, é possível atingir bons resultados, porém, é necessário um número elevado de segmentos para uma maior precisão, e com isso, um custo computacional maior, mesmo que ainda seja feita a otimização da matriz de Toeplitz, como dito anteriormente.