

	Universidade Federal de Pernambuco Centro de Informática Eletromagnetismo	
	Relatório do Projeto 1 - Método dos Momentos	
	Aluno: Arnaldo Rafael Morais Andrade	Data: 10/09/2017

1. Objetivos

Determinar expressões para os elementos das matrizes de impedância e de tensão do método dos momentos, a fim de obter uma aproximação para a distribuição de carga superficial na placa e analisar a capacitância recorrente.

2. Metodologia

1. Determine as expressões para os elementos das matrizes de impedância e de tensão do método dos momentos, em função de N.
 - a. Para a abordagem em questão, N será o número total de quadrados provenientes das subdivisões. A partir das aproximações e resolução das integrais, chega-se a matriz de impedâncias, em que Δl é o lado do quadrado. Observa-se que a matriz é simétrica e de tamanho NxN.

$$Z_{mn} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ Z_{N1} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\Delta l}{\pi \epsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1), & \text{if } m = n \\ \frac{\Delta l^2}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}}, & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

- b. Já a matriz de tensão, fica em forma de vetor de tamanho Nx1, no qual é apenas levado em conta o potencial inicial.

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ \dots \\ V_0 \end{bmatrix}, Nx1 \quad (2)$$

2. Para o caso em que $L = 10$ cm, e $V_0 = 1$ V, resolva o sistema linear para um valor de N específico (você escolhe). Determine as amplitudes dos pulsos, e obtenha uma aproximação para a distribuição de carga superficial na placa. Plote o resultado.

- a. Com o objetivo de facilitar os cálculos, o ponto escolhido em cada quadrado foi o seu centro ou centro de massa. A matriz de densidade de carga, α , que queremos encontrar, deve ser de tamanho $N \times 1$, resultando assim em um sistema linear de N equações.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, N \times 1 \quad (3)$$

- b. Sendo assim, o sistema se dará da seguinte forma:

$$[Z_{mn}] [\alpha_n] = [V] \quad (4)$$

- c. Isolando a matriz de coeficientes, finalmente temos:

$$[\alpha_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V] \quad (5)$$

- d. Para os valores definidos em questão e com N representando 20 divisões (ou 400 quadrados), o gráfico da Figura 1 foi gerado, através da biblioteca *matplotlib* da linguagem *python*, que pode ser visto na seção Resultados.

3. Resolva o problema e plote a distribuição superficial de carga para diferentes valores de N . Comente os resultados.

- a. Para diferentes valores de N : 6, 10 e 64, a análise da questão, além dos gráficos das Figuras 2, 3, 4, 5 e 6, podem ser conferidas na seção Resultados.

4. Determine a expressão da Capacitância da placa (em relação ao infinito) para a aproximação de carga através de N^2 funções de pulso. Varie N e observe a convergência da capacitância.

- a. O cálculo da capacitância se dá em termos da carga total e o potencial na placa. Como se trata do infinito, o valor do potencial trabalhado é o V_0 . Primeiro deve-se calcular a carga total através da distribuição de carga e por fim, descobrir a capacitância. Temos as seguintes relações:

$$Q = \Delta_l^2 \sum_{m=1}^N [\alpha_m] ; C = \frac{Q}{V_0} \quad (6)$$

- b. Pela equação 6, temos que a carga será o somatório de todos os pontos de distribuição de carga multiplicados pela área do quadrado. Já a capacitância será a carga total pelo potencial na placa.
- c. Os valores de N da Tabela 2 foram baseados nos valores anteriormente calculados. Para valores muito maiores que estes, o custo computacional torna-se muito alto, além de comprometer a precisão dos resultados. Com isso, A Tabela 2 pode ser vista na seção Resultados.

3. Resultados

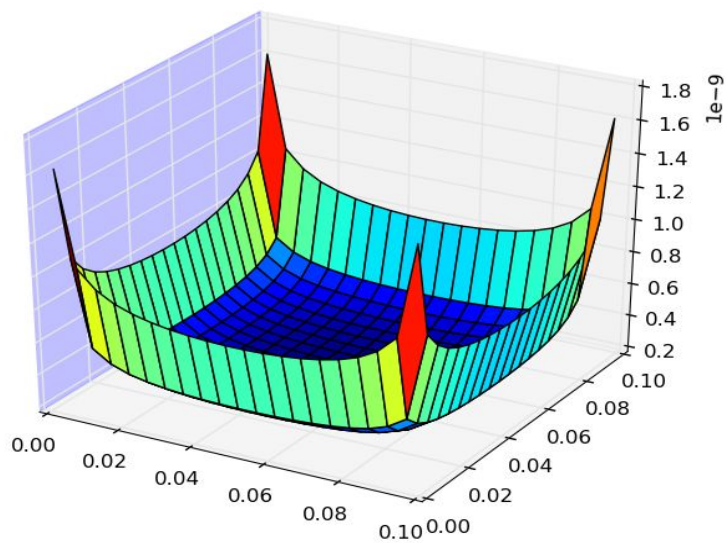


Figura 1 - Distribuição de cargas na Placa para N = 20

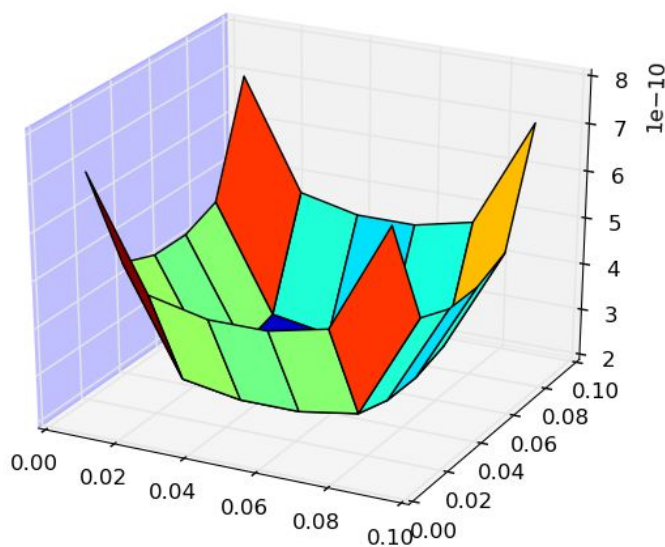


Figura 2 - Distribuição de cargas na Placa para N = 6

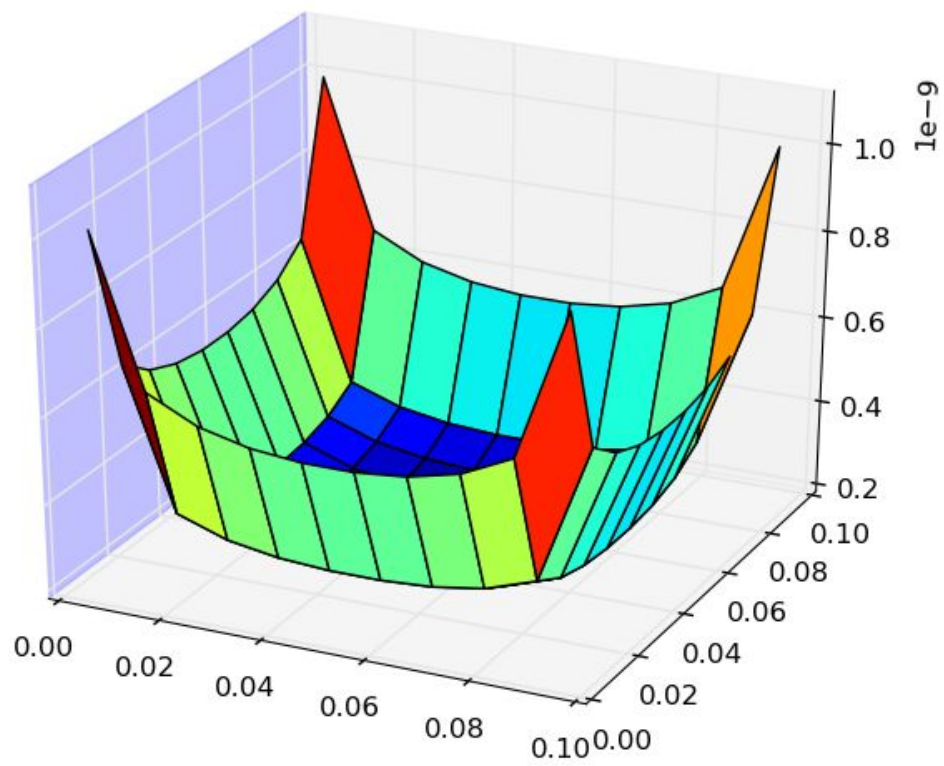


Figura 3 - Distribuição de cargas na Placa para $N = 10$

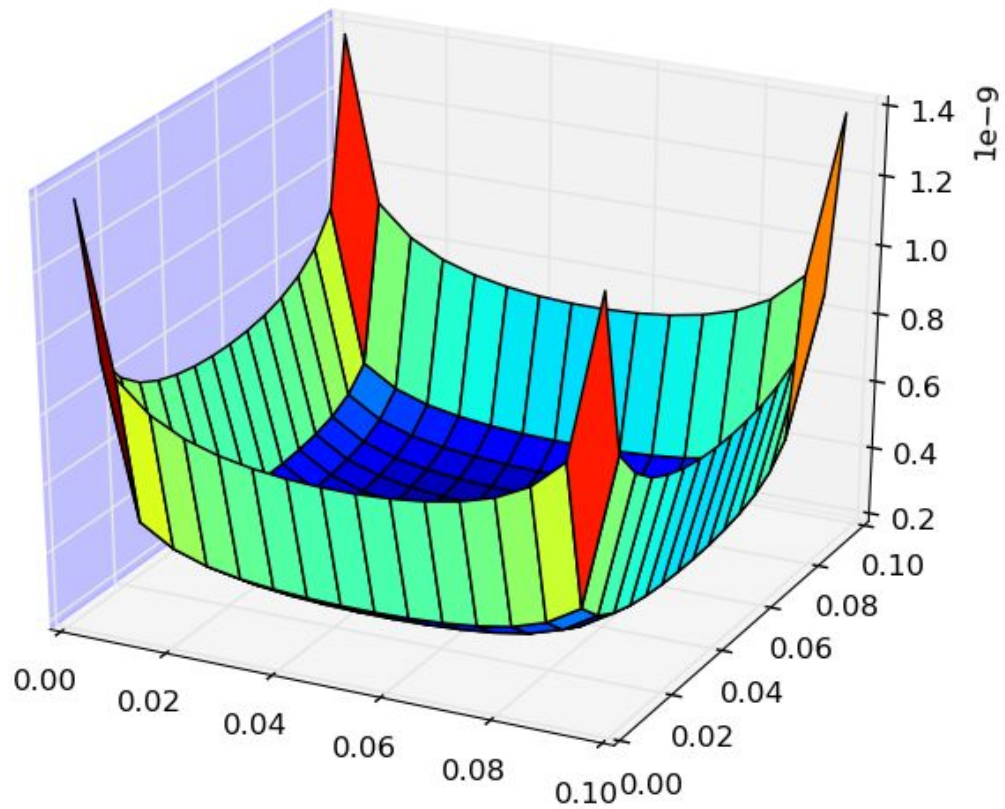


Figura 4 - Distribuição de cargas na Placa para $N = 16$

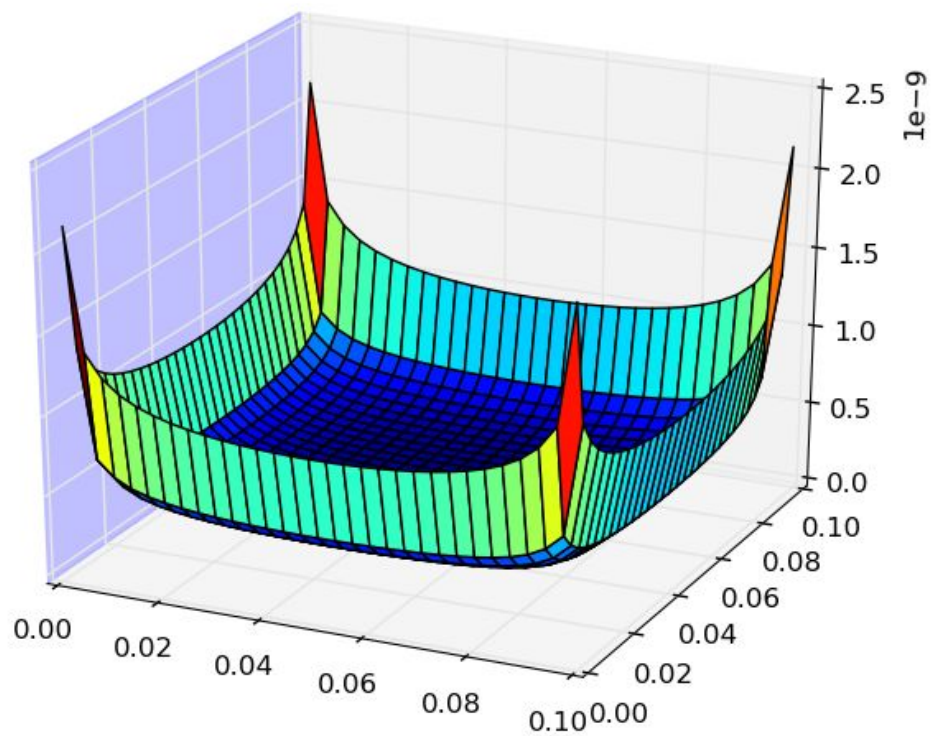


Figura 5 - Distribuição de cargas na Placa para $N = 30$

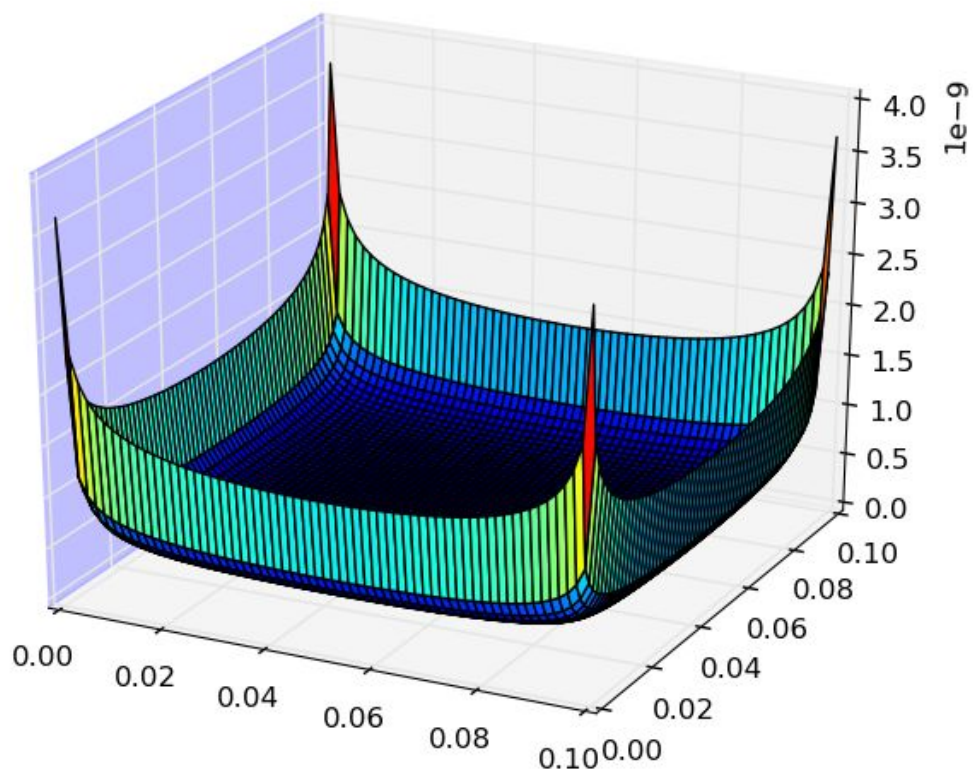


Figura 6 - Distribuição de cargas na Placa para $N = 64$

Tabela 1 - Distribuição de cargas para diferentes valores de N

N	Quadrados	Mínimo $\rho(rho)$ (C/m ²)	Máximo $\rho(rho)$ (C/m ²)
6	36	2.12463424e-10	7.13794258e-10
10	100	2.05510338e-10	1.00731214e-09
16	256	2.02296829e-10	1.39108536e-09
20	400	2.01323102e-10	1.62345374e-09
30	900	2.00109262e-10	2.15234181e-09
64	4096	1.98945642e-10	3.65577577e-09

A partir da Tabela 1 e das figuras apresentadas, observa-se que a medida que o número de divisões aumenta, além do gráfico ter uma base mais sólida, o rho apresenta suas tendências. O seu mínimo apresenta uma convergência enquanto seu máximo sempre aumenta. A distribuição de carga na placa apresenta valores menores no centro da placa e maiores nas suas extremidades. O que mostra que a carga elétrica acumula-se próxima aos limites (ou cantos) da placa.

Tabela 2 - Capacitância da placa com variação de N

N	Quadrados	Capacitância (F)
6	36	3.91237634e-12
10	100	3.98332759e-12
16	256	4.02263246e-12
20	400	4.03546173e-12
30	900	4.05216545e-12
64	4096	4.06898157e-12

Como pode ser observado na Tabela 2, a capacitância tende a 4.07 pF. Como já dito, para valores maiores, a capacitância apresenta um erro associado mais significativo.

4. Conclusões

De acordo com os gráficos e tabelas mostradas, a distribuição superficial de cargas numa placa, se mostra maior em suas extremidades. O que aponta um acúmulo de cargas superior nos limites da placa, enquanto que no centro a concentração é pequena. Além de sua capacitância, que confirmada através de experimentos, independe do potencial da placa, apenas de suas medidas geométricas.