

Armenante Davide

Progetto di macchine

Appunti del corso

2020

Prego comunque...

Prefazione

Prima che il lettore si immerga in questa appassionante lettura vorrei fare due precisazioni. L'impaginazione è tanto figa quanto il libro è scritto male, non si tratta di un elaborato professionale ma di appunti presi a lezione. Appreziate però, tutte le immagini sono state rifatte vettorialmente.

Trieste,

Davide Armenante
02, 2020

Indice

1	Richiami teorici	1
1.1	Teoria della similitudine	1
1.2	Influenza di Re	9
1.3	Flusso comprimibile	10
1.4	Richiamo di termodinamica	13
2	Turbomacchine assiali	15
2.1	Generalità	15
2.2	Nomenclatura	15
2.2.1	Definizioni geometriche	16
2.2.2	Definizioni per la corrente fluida	16
2.2.3	Forze	16
2.2.4	Adimensionalizzazione delle forze	19
2.3	Ugelli e diffusori	22
2.4	Schiere palari	23
2.4.1	Schiere di espansione	23
2.4.2	Schiere di compressione	25
2.5	Equilibrio radiale	28
2.5.1	Termodinamica	29
2.5.2	Ipotesi semplificative	30
2.6	Condizione di vortice libero	30
2.7	Vortice forzato	31
2.7.1	A valle del vortice forzato	35
2.8	Vortice generico	36
2.8.1	Angolo di palettatura costante	37

Richiami teorici

1.1 Teoria della similitudine

L'applicazione della teoria della similitudine costituisce un primo e potente strumento della progettazione in generale e di una turbomacchina in modo particolare. La teoria della similitudine permette di risolvere diversi problemi:

- note le prestazioni di una macchina che ha determinate dimensioni, si possono ricavare le prestazioni di una macchina geometricamente simile a quella considerata ma di diverse dimensioni (esempio tipico: modellino della grande turbina idraulica che viene provato prima di procedere alla costruzione della macchina vera);
- nota una certa condizione di funzionamento di una certa turbomacchina individuare le condizioni di funzionamento simili a quella precedente ottenibili a diverse velocità di rotazione o con diversi valori di portata o diversi valori del lavoro scambiato (fluido/macchina);
- curve di prestazioni rilevate in determinate condizioni ambientali possono essere espresse in funzione di parametri che sono invarianti al variare delle condizioni ambientali stesse. Possiamo conoscere le prestazioni di una macchina operante in condizioni diverse (compressore a livello del mare ad agosto e in montagna a natale);

Accanto tutti questi aspetti che riguardano la capacità di predire le prestazioni di una macchina abbiamo un aspetto proprio relativo alla progettazione. Con la teoria della similitudine possiamo, in maniera molto semplice e molto veloce, stabilire in una fase preliminare di progetto che tipo di macchina dobbiamo usare, quale sarà la sua geometria di base e quali saranno le sue dimensioni. Sfruttiamo l'esperienza che è stata fatta con la progettazione di tutte le macchine di quel tipo (sviluppatе e provate).

Il teorema di Buckingham (conosciuto anche come teorema π greco), dovuto al fisico statunitense Edgar Buckingham, afferma:

Dato un problema descritto da un certo numero di equazioni in cui siano presenti n variabili fisiche, se le dimensioni fondamentali di queste

variabili sono x allora il problema può essere completamente descritto da $n - x$ variabili adimensionali.

Per studiare il comportamento di una turbomacchina si definisce il seguente funzionale.

$$f(D_i, l_j, \dot{m}, \omega, L_i, \mu, a_{01}, \rho_{01}) = 0 \quad (1.1)$$

Con

D_i : serie di diametri rilevanti;

l_j : serie di lunghezze rilevanti;

\dot{m} : portata in massa;

ω : velocità angolare;

L_i : lavoro ideale scambiato tra macchina e fluido per unità di massa;

μ : viscosità dinamica del fluido;

a_{01} : velocità del suono all'ingresso in condizioni di ristagno;

ρ_{01} : densità del fluido.

$$Re = \frac{\rho_{01} \omega D^2}{\mu} \quad (1.2)$$

$$Ma = \frac{\omega D}{a_{01}} \quad (1.3)$$

In una macchina termica in cui il fluido cambia le proprietà nei vari punti della macchina per definire la densità o la velocità del suono devo fissare convenzionalmente una condizione rispetto alla quale vado a valutare quella proprietà.

Una condizione di riferimento che viene spesso adottata (non è l'unica) potrebbe essere quella di valutare queste quantità nelle condizioni totali all'ingresso della macchina (cioè condizioni valutate immaginando il fluido in quiete) che possiamo indicare con il pedice 01 (0: condizioni totali o di ristagno; 1: condizioni di ingresso).

Posso allo stesso modo definire la cifra di flusso ϕ e di pressione ψ come segue:

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \omega D^3} (= \frac{Q}{\omega D^3}) \quad (1.4)$$

$$\psi = \frac{L_i}{\rho_{01} \omega^2 D^2} \quad (1.5)$$

Il funzionale può essere espresso quindi secondo i numeri adimensionali:

$$f(\pi_i, \pi_j, \phi, \psi, Re, Ma) = 0 \quad (1.6)$$

Si può semplificare sotto le ipotesi di geometria simile.

$$f(\phi, \psi, Re, Ma) = 0 \quad (1.7)$$

Si può semplificare sotto le ipotesi di fluido incomprimibile trascurando il numero di Reynolds. Guardando il diagramma di Moody in figura 1.1, in

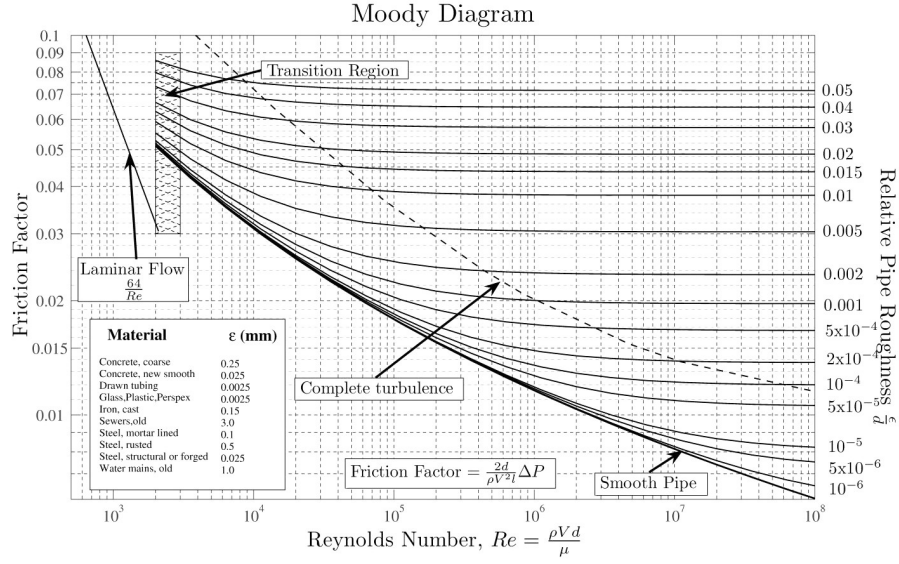


Figura 1.1

ascisse è presente Re ed in ordinate il coefficiente di perdita di carico del nostro tubo ξ . Le scale sono logaritmiche. Il legame tra ξ e Re , per bassi numeri di Reynolds, è rappresentato da una retta. Poi si ha una zona di transizione non ben definita ed infine una serie di linee a rugosità relativa costante ϵ/D (con ϵ rugosità media).

Nel primo tratto di legame lineare si ha una corrente laminare. Il tratto tratteggiato è un tratto nel quale, in condizioni sperimentali assolutamente controllate, è possibile mantenere un flusso laminare ma altamente instabile. In condizioni di flusso turbolento la perdita di carico dipende dalla rugosità. Possiamo inoltre osservare che se consideriamo un solo valore di rugosità relativa la curva presenta una certa pendenza fino ad un certo valore di Re (limite o critico) e poi diventa orizzontale.

Se il numero di Reynolds è superiore ad un certo valore limite il coefficiente di perdita di carico è indipendente da Re . Se trasferiamo questa osservazione alla turbomacchina si può verificare sperimentalmente che se Re è molto elevato questo potrà anche variare ma le prestazioni non ne saranno influenzate. Variazioni anche grandi del numero di Reynolds purchè siano nel campo di Re molto elevato, non influenzano le prestazioni della mia macchina.

$$f(\phi, \psi, Ma) = 0 \quad (1.8)$$

In seguito si aggiungerà una perdita sul modello, il rendimento di una macchina piccola sarà sempre inferiore al rendimento di una macchina grande.

In ultimo se si considerano i fenomeni di comprimibilità trascurabili, si può trascurare anche il numero di Mach, equivalentemente si fa l'ipotesi $Ma < 0.3$.

Dotando la pompa di un sensore di pressione, giri e portata, posso andare a definire una curva di prestazione adimensionale.

Naturalmente affinché le macchine operino in condizioni di similitudine devono, per definizione, avere ϕ e ψ uguali.

$$\phi = \frac{Q}{\omega D^3} \propto \frac{c_m}{u} \quad (1.9)$$

$$\psi = \frac{L_i}{\omega^2 D^2} \propto \frac{c_u}{u} \quad (1.10)$$

Quindi, assegnato D , la cifra di flusso è proporzionale alla velocità meridiana e inversamente proporzionale a u dove $u = \omega \times r$. La variazione di c_u corrisponde alla variazione dell'energia cinetica a valle della macchina.

Mantenere ϕ e ψ uguali significa avere triangoli di velocità simili (vedi la figura 1.2). Consideriamo il caso di una macchina idraulica e vediamo come

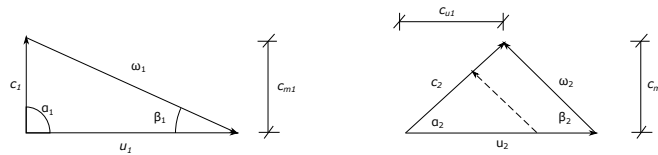


Figura 1.2

possiamo trovare il luogo dei punti di funzionamento simili sul piano delle prestazioni e quindi come le curve di prestazioni adimensionali stanno in rapporto con le curve di prestazioni dimensionali.

Se rileviamo le prestazioni di una pompa otteniamo la curva di funzionamento caratteristica (diagramma prevalenza-portata) per un certo valore della velocità di rotazione (figura 1.3).

Queste sono curve espresse in funzione di grandezze dimensionali, si possono però esprimere in funzione di grandezze adimensionali. Si consideri un punto di funzionamento A , il luogo dei punti di funzionamento simili ad A sarà caratterizzato dal fatto di avere stessi ϕ e ψ .

Considerando quindi il generico punto x posso scrivere

$$\phi = \frac{Q}{\omega D^3} = \frac{Q_x}{\omega_x D^3} \quad (1.11)$$

Considerando una macchina con lo stesso diametro posso scrivere

$$\frac{Q_x}{Q} = \frac{\omega_x}{\omega} \Rightarrow Q_x = Q \frac{\omega_x}{\omega} \quad (1.12)$$

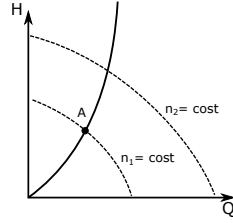


Figura 1.3

Imponendo invece l'uguaglianza della cifra di pressione

$$\psi = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = \frac{gH_x}{\omega_x^2 D^2} \quad (1.13)$$

In questo modo si ottiene

$$H_x = H \left(\frac{\omega_x}{\omega} \right)^2 = H \left(\frac{Q_x}{Q} \right)^2 \Rightarrow H_x = \frac{H}{Q^2} Q_x^2 \quad (1.14)$$

Che è l'equazione di una parabola sul piano H - Q , passante per il punto A e per l'origine degli assi. Noto che il lavoro varia al variare del quadrato della velocità angolare mentre la portata varia linearmente. Ad ogni curva $\phi - \psi$ corrisponde una curva di rendimento, posso quindi individuare una coppia $\bar{\phi} - \bar{\psi}$ ottimale (figura 1.4). Posso anche definire il coefficiente di velocità

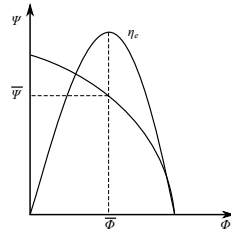


Figura 1.4

periferica.

$$k_P = \frac{\omega D}{\sqrt{L_i}} \quad (1.15)$$

Si tratta di una cifra che lega la velocità periferica della macchina al lavoro ideale della stessa.

Quando ho ϕ e ψ posso definire una cifra di potenza adimensionalizzata come prodotto delle due.

$$\Lambda = \frac{P}{\rho \omega^3 D^5} \quad (1.16)$$

Per macchina motrice

$$\Lambda = \phi \psi \eta_e \quad (1.17)$$

Per macchina operatrice

$$\Lambda = \frac{\phi \psi}{\eta_e} \quad (1.18)$$

Con la seguente espressione posso poi eliminare la caratteristica geometrica ottenere il numero specifico di macchina (o velocità specifica) che rappresenta una condizione di funzionamento lavoro-portata indipendente dalla dimensione della macchina.

$$\omega_s = k = \phi^{1/2} \psi^{-3/4} = \omega \frac{\sqrt{Q}}{L_i^{3/4}} \quad (1.19)$$

La forma della macchina varierà al variare di k . Avere dei k piccoli significa avere delle macchine nelle quali il termine di scambio di energia è prevalente rispetto al termine di portata. Questo numero permette, grazie all'esperien-

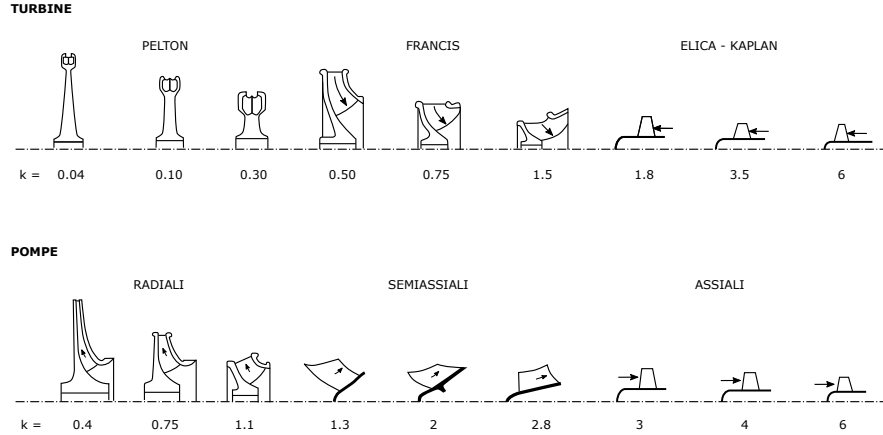


Figura 1.5: Variazione della forma delle giranti delle turbine idrauliche al variare del numero caratteristico di macchina.

za storica, di classificare la forma geometrica di una macchina in base alle condizioni portata - lavoro.

Sfruttando l'esperienza possiamo analizzare le migliori macchine esistenti e vedere quanto valgono per quelle macchine le cifre adimensionali π_i , π_j e diagrammarle in funzione di k . Facciamo un esempio concreto considerando una tipica macchina radiale (una pompa centrifuga) e consideriamo la sezione

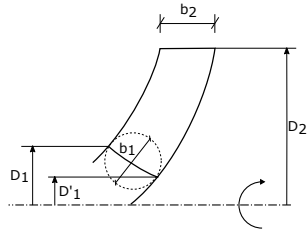


Figura 1.6

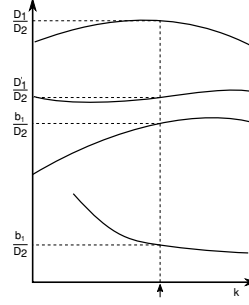


Figura 1.7

meridiana semplificata al massimo (figura 1.6). Si definiscono le seguenti dimensioni caratteristiche più significative. Si tratta di un esempio didattico, in realtà posso andare a definire un database molto più ampio e raffinato. Siano

- D_2 : diametro massimo della girante;
- D_1 : diametro massimo della sezione di ingresso;
- D'_1 : diametro minimo della sezione d'ingresso;
- b_2 : altezza della pala in uscita;
- b_1 : altezza della pala in ingresso.

Per definire b_1 bisogna prendere il diametro medio e con riferimento al punto di intersezione tra questo ed il profilo della pala in ingresso si traccia la circonferenza inscritta nella sezione d'ingresso. Come grandezza caratteristica della sezione d'ingresso prendo proprio il diametro di questa circonferenza. Per queste grandezze posso definire le seguenti cifre adimensionali:

$$\frac{D_1}{D_2} \quad \frac{D'_1}{D_2} \quad \frac{b_1}{D_2} \quad \frac{b_2}{D_2}$$

Queste cifre sono funzioni di k . Posso allora essere definite delle curve che riportano in ascisse il valore del numero caratteristico k ed in ordinate i valori dei 4 parametri. Naturalmente fissato k devo poi determinare il numero di giri a cui deve lavorare la macchina. Ricapitolando, note portata, prevalenza e fissata la velocità di rotazione, conosco il valore di k . Entrando in questi diagrammi si trovano i valori dei quattro parametri e quindi definisco per sommi capi la sezione meridiana della nostra macchina (figura 1.7).

Esiste una dimensione ottimale cioè una dimensione alla quale corrisponde il massimo rendimento. Bisogna però definire un'ulteriore grandezza detta diametro specifico.

$$D_s = \phi^{-1/2} \psi^{1/4} = D \cdot \frac{L_i^{1/4}}{\sqrt{Q}} \quad (1.20)$$

Bisogna cercare di eliminare la velocità di rotazione. È stato verificato che esiste, con riferimento alle dimensioni di massimo rendimento, un legame tra D_s e ω_s .

$$D_s = f(\omega_s) \quad (1.21)$$

Questa funzione è descritta empiricamente sul *Diagramma di Cordier*. Questo diagramma rappresenta l'interpolazione di una serie di dati sperimentali (da vedere come correlazione statistica). Si può estendere questa relazione con i

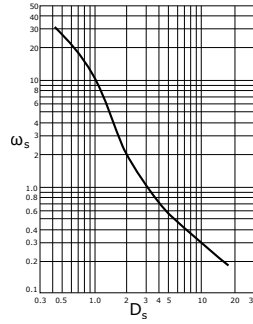


Figura 1.8: Diagramma di Cordier

diagrammi di Baliè, intorno alla curva si disegnano curve di isorendimento.

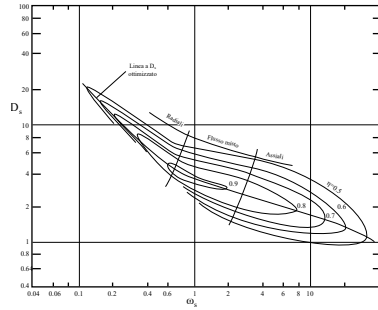


Figura 1.9

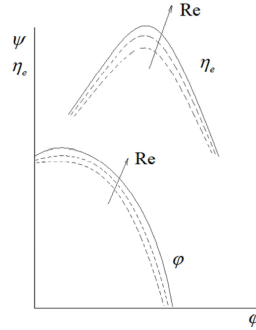


Figura 1.10

1.2 Influenza di Re

Queste considerazioni sono state fatte trascurando l'influenza di Re . Ricordando il diagramma di Moody la relazione è fatta rispetto a ϵ/D . Per le macchine è essenzialmente uguale, al variare di Re le curve si spostano più in alto, questo effetto si riflette in un abbassamento di rendimento e quindi di prevalenza.

Questo è un fenomeno prevedibile in termini statistici, storicamente grazie all'accumulazione di dati sono stati definiti due fattori di correzione, di rendimento f_η e f_ψ diagrammati rispetto a Re . Man mano che Re scende il loro effetto diventa sempre più importante. Parto dalla ω_s , scrivo Φ e ψ nei diversi

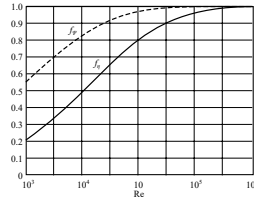


Figura 1.11

punti di funzionamento della macchina in funzione di ω_s .

$$\omega_s = \phi^{1/2} \psi^{-3/4} \Rightarrow \begin{cases} \psi = \psi(\omega_s) \\ \eta = \eta(\omega_s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_\psi = f(Re) \\ f_\eta = f(Re) \end{cases} \quad (1.22)$$

Con i coefficienti correttivi vado a trovarmi i valori adimensionali corretti

$$\begin{cases} \psi_{corretto} = f_\psi \cdot \psi(\omega_s) \\ \eta_{corretto} = f_\eta \cdot \eta(\omega_s) \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\eta = \eta_s \cdot f_r(D) \quad (1.24)$$

$$\frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_2} = \left[\frac{Re_{u,2}}{Re_{u,1}} \right]^n, \quad n = 0.1 - 0.25 \quad (1.25)$$

$$\frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_2} = 0.5 + 0.5 \left[\frac{Re_{u,2}}{Re_{u,1}} \right]^{0.2} \quad (1.26)$$

$$\frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_2} = 0.3 + 0.7 \left[\frac{Re_{u,2}}{Re_{u,1}} \right]^{0.2} \quad (1.27)$$

Si considera poi un effetto scala non solo legato alle rugosità superficiali ma anche legato ai giochi. L'effetto scala può essere espresso rispetto ai rapporti dimensionali. Queste relazioni sono sempre costruite per via empirica sulla base dei dati storici.

$$\frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_2} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^\alpha \quad (1.28)$$

1.3 Flusso comprimibile

Se si considera il flusso comprimibile le relazioni diventano più complesse. Infatti si ha:

$$\psi = f(\phi, Ma) \quad (1.29)$$

ψ dipende quindi anche dal numero di Mach. Nel diagramma $\phi-\psi$ si ottengono diverse curve al variare del numero di Mach (Figura 1.12), le curve diventano poco leggibili. Posso infatti ottenere lo stesso valore di lavoro giocando sulle grandezze di T-p, non ho più una definizione univoca di lavoro. Si tratta di una rappresentazione poco fisica e di un esercizio esclusivamente accademico. Per questo tipo di macchine si utilizzeranno curve molto diverse. Per avere

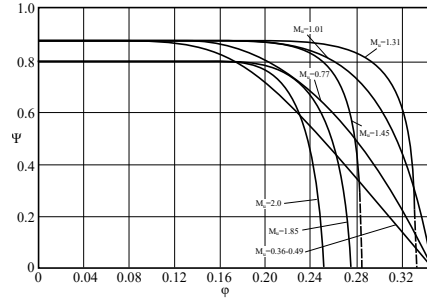


Figura 1.12: Curve adimensionali di funzionamento di una famiglia di compressori, per un fluido assegnato, a diversi numeri di Mach periferici. Sono definiti $Ma = \frac{\omega D}{a_{01}}$, $Mu = \frac{\omega \frac{D}{2}}{a}$

una grandezza confrontabile di funzionamento devo rendere qualsiasi prova io faccia a grandezza standard. In questo modo posso rappresentare condizioni di funzionamento in modo univoco. Definisco il significato dei pedici:

- s : grandezze relative alle condizioni standard;
- c : valori corretti, cioè riportati alle condizioni standard;
- " " : valori da correggere rilevati nel corso della prova.

Proprietà di un gas generico miscela di due gas con massa molare M :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{p_2}{\rho} = x_1 \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} = RT \left(\frac{x_1}{M_1} + \frac{x_2}{M_2} \right) = RT \left(\frac{1}{M} \right) \quad (1.30)$$

$$c_P = x_1 c_{P1} + x_2 c_{P2} \quad (1.31)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\frac{x_1}{M_1} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{x_2}{M_2} \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}{\frac{x_1}{M_1} + \frac{x_2}{M_2}} \quad (1.32)$$

Rapporto di compressione standard:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{01c}}{p_{01s}} \Rightarrow p_{02} \frac{p_{01s}}{p_{01}} \quad (1.33)$$

Parametro di portata

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} = \frac{\dot{m}_c\sqrt{T_{01s}}}{p_{01s}} \Rightarrow \dot{m}_c = \dot{m}\sqrt{\frac{T_{01}}{T_{01s}}} \left(\frac{p_{01s}}{p_{01}}\right) \quad (1.34)$$

Parametro di velocità

$$\frac{n}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{n_c}{\sqrt{T_{01s}}} \quad (1.35)$$

Si definiscono quindi le condizioni ambientali standard.

Pressione ridotta

$$\sigma = \frac{p_{01}}{p_{01s}} \quad (1.36)$$

Temperatura ridotta

$$\theta = \frac{T_{01}}{T_{01s}} \quad (1.37)$$

Si ottiene:

$$p_{01c} = \frac{p_{02}}{\sigma}$$

$$\dot{m}_c = \dot{m} \frac{\sqrt{\theta}}{\sigma}$$

$$n_c = \frac{n}{\sqrt{\theta}}$$

Si ottiene così la portata di massa corretta e il numero di giri corretto.

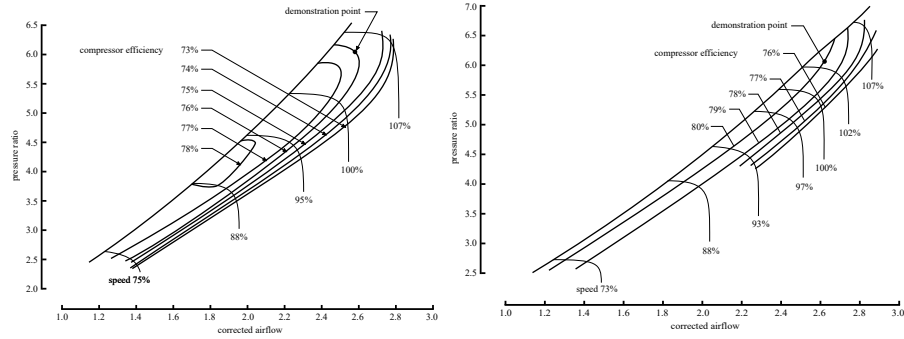


Figura 1.13

In questo modo si trovano le mappe di funzionamento delle macchine. Si diagrammano la portata d'aria corretta con il rapporto di compressione. Sono tracciate diverse curve al variare dei giri con le curve di isorendimento.

A questo punto si espande l'espressione di ϕ .

$$M_{01} = \frac{\omega D}{a_{01}} = \frac{\omega D}{\sqrt{kRT_{01}}} \quad \begin{aligned} p &= \rho_i RT \\ a &= \sqrt{kRT} \end{aligned}$$

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}\omega D^3} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}M_{01}a_{01}D^2} = \frac{\dot{m}RT_{01}}{\rho_{01}M_{01}\sqrt{kRT_{01}}D^2} = \frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{\rho_{01}M_{01}\sqrt{k}D^2} \quad (1.38)$$

$$\psi = \frac{L_i}{\omega^2 D^2} = \frac{\Delta h_{0s}}{\omega^2 D^2} = \frac{\frac{k}{k-1}RT_{01} \left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{M_{01}^2 kRT_{01}} \quad (1.39)$$

L'idea è quella di rappresentare in modo univoco il comportamento del compressore usando i termini ϕ , ψ ma mantenendo la significatività fisica.

Se utilizzo lo stesso fluido posso trascurare R e k . Utilizzando la stessa macchina trascuro anche D , riferendosi alle condizioni standard posso considerare $M_{01} = \text{cost}$. Ricavo le seguenti relazioni semplificate:

$$\begin{aligned} M_{01} &\rightarrow \frac{\omega D}{\sqrt{RT_{01}}} \Rightarrow M_{01} \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{T_{01}}} \\ \Rightarrow \phi &\rightarrow \frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{\rho_{01}D^2} \Rightarrow \phi \rightarrow \frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{\rho_{01}} \end{aligned}$$

$$\psi \rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} \text{ da finire}$$

Si tratta di grandezze che posso andare a misurare in un banco prova. La mappa di funzionamento del compressore assume quindi una forma più leggibile, sull'asse delle ascisse ho la portata in massa corretta con la temperatura in ingresso e sulle ordinate il rapporto di compressione. Assieme a queste posso anche costruire le linee di isorendimento e quindi la curva ideale operativa del compressore data dall'involuppo delle curve di isorendimento. Guardando ai diagrammi si vede che abbiamo un fenomeno noto come ingolfamento del compressore. Intendiamo il raggiungimento di quella condizione di funzionamento in cui non è più possibile variare la portata variando il rapporto delle pressioni attorno alla macchina. Questo perchè in qualche punto si raggiungono le condizioni di flusso sonico e quindi, ricordando lo studio dell'ugello convergente-divergente, abbiamo un blocco sonico della portata.

1.4 Richiamo di termodinamica

Lo scambio termico è trascurabile per i bassi tempi di residenza del fluido nel condotto.

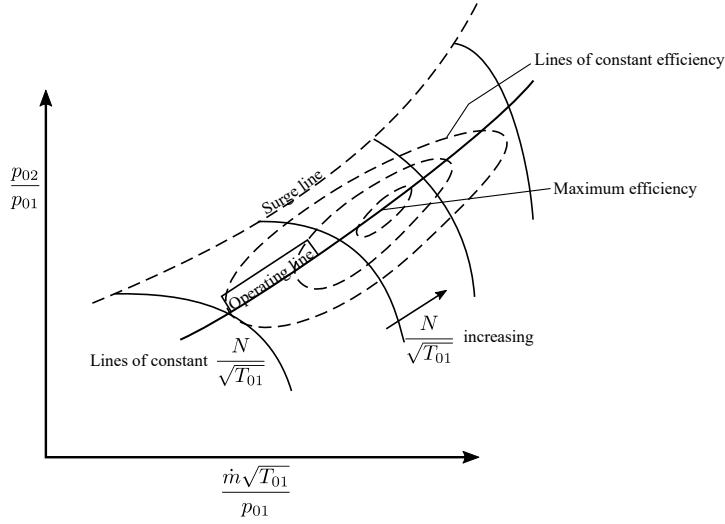


Figura 1.14

Rotore adiabatico

$$L'_{12} = h_{t1} - h_{t2} \quad (1.40)$$

$$h_t = h + \frac{c^2}{2} + gz \quad (1.41)$$

$$L'_{12} = \left\{ \frac{u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2}}{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}} \right\} \quad (1.42)$$

Naturalmente il lavoro è stato scritto, in base alle note convenzioni, per una macchina motrice.

Il lavoro è composto da una parte cinetica (c) e da una parte statica (u, ω).

Risulta chiaro che una macchina radiale avrà anche le componenti statiche, a differenza di una macchina puramente assiale, potrà quindi, a parità di stadi, eseguire un maggior lavoro.

Ponendomi come osservatore relativo rispetto al rotore posso scrivere

$$u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 - h_2 - \frac{c_2^2}{2} - gz_2 \quad (1.43)$$

Posso quindi definire la rotalpia come grandezza di stato:

$$h + \frac{c^2}{2} + gz - uc_u = \text{cost.} = I \quad (1.44)$$

Riassunto:

- $I = \text{cost.}$ in un rotore adiabatico;
- $h_t = \text{cost.}$ in uno statore adiabatico.

Posso esprimere tutte le grandezze fin'ora viste in un piano $T - s$ o $h - s$.
I rendimenti sono da sbobinare.

Turbomacchine assiali

2.1 Generalità

Si possono seguire diversi approcci via via più raffinati.

Nell'approccio monocimensionale il flusso è rappresentato da un unico tubo di corrente con condizioni di deflusso mediate. Risulta utile in fase di pre dimensionamento.

Nell'approccio bidimensionale/quasi-tridimensionale il flusso è rappresentato da più tubi di corrente con condizioni di deflusso mediate nella singola regione di deflusso. Si utilizza in fase di dimensionamento. Il piano su cui si va a considerare il fluido è il mantello cilindrico che compone la macchina, aperto a piano. Si analizza l'equilibrio radiale del flusso della macchina. Ho delle corone cilindriche che attraverso la macchina che scambiano energia e impogno l'equilibrio radialmente.

L'approccio tridimensionale si usa in fase di ottimizzazione per tenere conto dei flussi secondari. Questo è un approccio computazionalmente molto oneroso.

Si andrà quindi ad approfondire il secondo approccio.

2.2 Nomenclatura

Per il profilo isolato posso definire le seguenti grandezze adimensionali:

$$\frac{x}{c} \quad \frac{y}{c} \quad \frac{t}{c}$$

Posso poi definire la solidità della schiera come segue:

$$\sigma = \frac{c}{s} \tag{2.1}$$

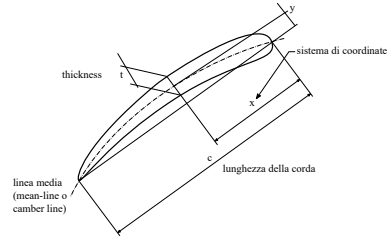


Figura 2.1

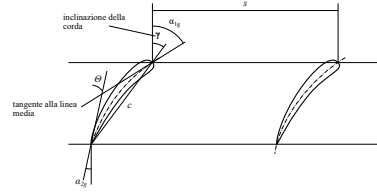


Figura 2.2

2.2.1 Definizioni geometriche

θ : deflessione geometrica del profilo (angolo di Camber);
 γ : ancolo di calettamento del profilo della schiera (inclinazione della corda rispetto alla direzione ortogonale);
 α_{1g}, α_{2g} : inclinazioni delle tangenti alla linea media rispetto alla direzione ortogonale.

$$\theta = \alpha_{1g} - \alpha_{2g} = \Delta\alpha_g$$

2.2.2 Definizioni per la corrente fluida

α_1 : inclinazione del vettore velocità rispetto alla direzione di riferimento ortogonale alla schiera, una palettatura non riuscirà mai a deviare la corrente tanto quanto è inclinata geometricamente;
 α : inclinazione del vettore velocità con riferimento alla corda (angolo di attacco del flusso rispetto la schiera);
 i : inclinazione del vettore velocità rispetto la tangente alla linea media (angolo di incidenza);
 δ : angolo di deviazione o deviazione (angolo di deviazione del flusso in uscita rispetto la tangente alla linea media);
 $\epsilon = \Delta\alpha$: entità della deflessione subita dal flusso tra ingresso e uscita. Nel caso delle turbine le deviazioni sono più alte rispetto ai compressori, rallentare una corrente è sempre molto più facile che accelerarla.

Dalle considerazioni geometriche viste prima si può scrivere

$$\epsilon = \theta + i - \delta \quad (2.2)$$

2.2.3 Forze

Le forze agenti sulla schiera di pale posso scriverle rispetto al sistema di rif assiale tangenziale per determinare la coppia, ovvero la potenza fornita all'albero nel caso di compressore. La componente assiale sarà la spinta che i

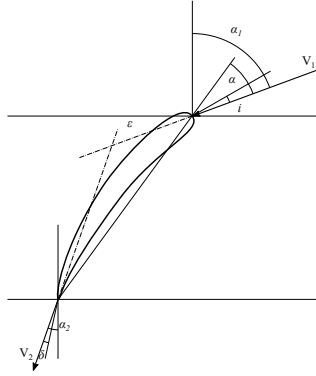


Figura 2.3

cuscinetti dovranno sopportare per il funzionamento ma ri riperquotono anche sulle perdite di carico.

Le forze vanno anche declinate sotto il profilo di portanza e resistenza. Si tratta delle stesse forze su due sistemi di riferimento diversi.

$$\begin{cases} F_a = f(\Delta v, \Delta p_0) \\ F_t = f(\Delta v, \Delta p_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = f(F_a, F_t) \\ D = f(F_a, F_t) \end{cases}$$

Considero una schiera palare e considero un volume di controllo ($ABCD$) che segue la linea media del profilo. Le velocità in ingresso e in uscita le scompongo nella direzione assiale e radiale.

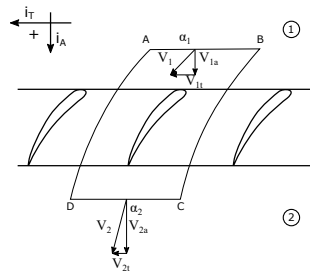


Figura 2.4

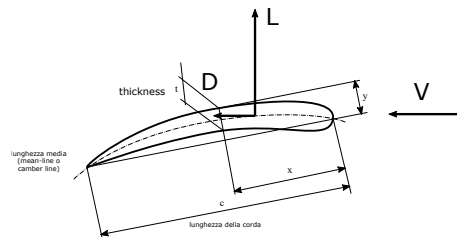


Figura 2.5

Applico le equazioni di conservazione. Per continuità ho:

$$s\rho V_{1a} = s\rho V_{2a} \Rightarrow V_{1a} = V_{2a} = V_a \quad (2.3)$$

Dove ho ipotizzato ρ costante, per un compressore assiale i rapporti di compressione per stadio sono modesti, nel caso di una turbina non sarebbe valido. Per quanto riguarda la quantità di moto in direzione tangenziale:

$$F_t = \dot{m}\Delta V_t = s\rho V_a(V_{1t} - V_{2t}) \quad (2.4)$$

In direzione assiale

$$F_a = s(p_1 - p_2) \quad (2.5)$$

Scrivendo la pressione nelle componenti di pressione statica e dinamica posso espandere l'espressione delle forze assiali ottenendo:

$$F_a = \dots = \frac{1}{2}\rho s(V_{t2} - V_{t1})(V_{t2} + V_{t1}) + s\Delta p_0 \quad (2.6)$$

Δp_0 è la perdita di pressione totale, rappresenta quindi la perdita di carico nel deflusso attraverso la schiera. $(V_{t2} - V_{t1})$ rappresenta il trasferimento di quantità di moto. Se divido il termine $(V_{t2} + V_{t1})$ per 2 ottengo l'espressione della velocità tangenziale all'infinito (velocità media indisturbata).

$$\frac{(V_{t2} + V_{t1})}{2} = V_{t\infty}$$

Eseguendo ulteriori semplificazioni posso scrivere

$$F_a = -F_t \frac{V_{t\infty}}{V_a} + \Delta p_0 = -F_t \tan \alpha_\infty + s\Delta p_0 \quad (2.7)$$

Oltre a questa grandezza posso definire un coefficiente di perdita y come

$$y = \frac{\Delta p_0}{p_{02} - p_2} = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{2}\rho V_2^2} \quad (2.8)$$

Nota bene: è stato usato lo stesso simbolo ma non deve essere confuso con il numero di Camber.

Nel sistema di riferimento relativo, le forze vengono scomposte nella componente di *Lift* (ortogonale alla velocità incidente) e nella componente di *Drag* (parallela alla velocità incidente). Posso quindi scrivere le espressioni di lift e drag e le forze nelle componenti assiali:

$$\begin{cases} L = F_t \cos \alpha_\infty - F_a \sin \alpha_\infty \\ D = F_t \sin \alpha_\infty + F_a \cos \alpha_\infty \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} L = L(\sin \alpha_\infty - D \cos \alpha_\infty) \\ D = L \cos \alpha_\infty + D \sin \alpha_\infty \end{cases} \quad (2.10)$$

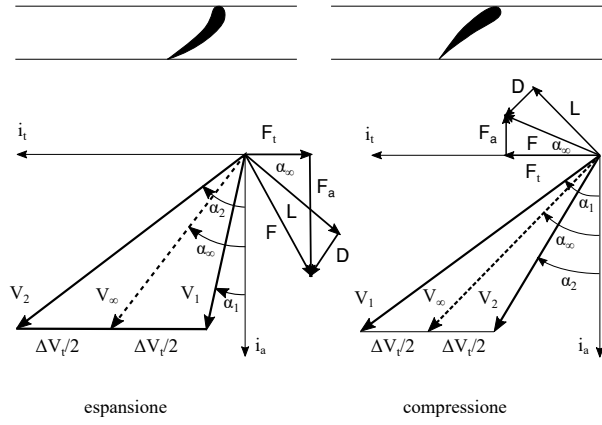


Figura 2.6

2.2.4 Adimensionalizzazione delle forze

Posso a questo punto definire c_d e c_L :

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho c V_\infty^2} \quad (2.11)$$

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho c V_\infty^2} \quad (2.12)$$

Il coefficiente di forza c_F sarà definito come:

$$c_F = \frac{F_t}{\frac{1}{2}\rho c V_\infty^2} = \frac{s V_a (V_{t1} - V_{t2})}{\frac{1}{2}c V_\infty^2} = \dots$$

Usando le relazioni $V_a = V_\infty \cos \alpha_\infty$ e $V_{t1,2} = \tan \alpha_{1,2}$ (vedi Figura 2.7) si

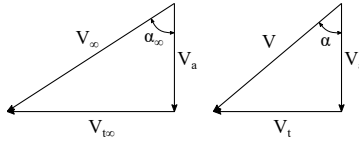


Figura 2.7

espande ulteriormente la relazione ottenendo

$$c_F = 2 \frac{s}{c} \cos^2(\alpha_\infty) (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \quad (2.13)$$

Allo stesso modo posso espandere c_P

$$c_P = \frac{F_a}{\frac{1}{2} \rho c V_\infty^2} = \frac{s \Delta p_0 - F_t \tan \alpha_\infty}{\frac{1}{2} \rho c V_\infty^2} = \frac{s \Delta p_0}{\frac{1}{2} \rho c V_\infty^2} - c_F \tan \alpha_\infty \quad (2.14)$$

Ricordando la relazione del coefficiente di perdita

$$t = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{2} \rho c V_2^2}$$

Posso scrivere

$$c_P = \left(\frac{s}{c} \right) y \left(\frac{V_2}{V_\infty} \right)^2 - c_F \tan \alpha_\infty$$

E quindi

$$c_P = \left(\frac{s}{c} \right) y \frac{\cos^2 \alpha_\infty}{\sin^2 \alpha_2} - 2 \left(\frac{s}{c} \right) (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \sin \alpha_\infty \cdot \cos \alpha_\infty \quad (2.15)$$

Ho così ottenuto tutte le relazioni per passare da coefficienti di portanza e resistenza a coefficienti di forza e pressione.

Nel caso di fluido ideale non viscoso il drag è nullo, in questo caso allora il Lift sarà uguale a 2 e dipenderà solo dalla geometria della schiera.

Ipotesi di perdite nulle $\Delta p_0 = 0$

$$\begin{cases} F_a = s \rho V_{\infty t} (V_{2t} - V_{1t}) \\ F_t = s \rho V_a (V_{1t} - V_{2t}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Come ho fatto con le forze, posso esprimere quindi i coefficienti adimensionali secondo i diversi sistemi di coordinate.

Posso trovare allora

$$\begin{cases} c_L = c_F \cos \alpha_\infty - c_P \sin \alpha_\infty \\ c_D = c_F \sin \alpha_\infty + c_P \cos \alpha_\infty \end{cases} \quad (2.17)$$

Sostituendo c_F e c_P ottengo

$$\begin{cases} c_L = 2 \frac{s}{c} (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \cos \alpha_\infty - c_D \tan \alpha_\infty \\ c_D = \frac{s}{c} y \frac{\cos^3 \alpha_\infty}{\cos \alpha_2} \end{cases} \quad (2.18)$$

Sotto le ipotesi di flusso a potenziale non c'è generazione di forze. Si introduce quindi una rotazione nel flusso per modellare matematicamente il profilo (teorema di Kutta-Jukowsky). In questo modo sull'estradosso la velocità sarà maggiore di V_∞ mentre nell'intradosso sarà minore. Si calcola quindi la circuitazione. Con L è indicata la forza, con Σ la forza della circuitazione.

$$\Sigma = \oint \bar{v} \cdot d\bar{l} \quad L = \rho \sigma V_\infty \quad (2.19)$$

In questo modo, anche senza avere la precisione che si avrebbe in una simulazione fluidodinamica del profilo, riesco a modellare in maniera snella anche una schiera di pale. Avrò semplicemente l'integrale all'ingresso e all'uscita della schiera su un volume di controllo.

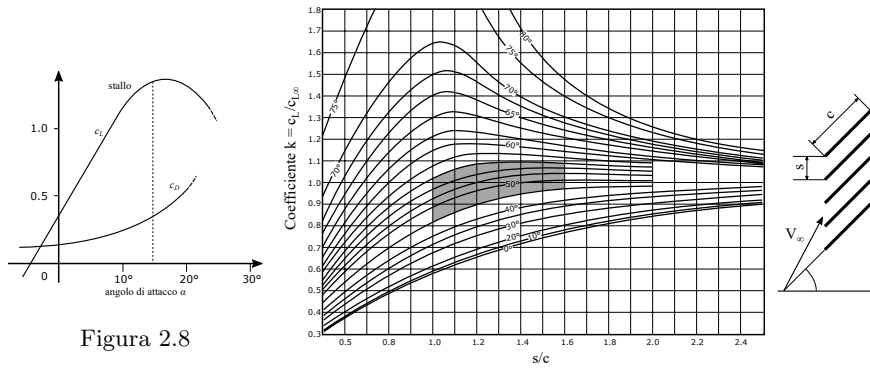


Figura 2.8

Figura 2.9

Abbiamo poi la possibilità di correlare il comportamento del profilo isolato tra angolo di attacco e coefficienti di lift e di drag (Figura 2.8). Per quanto riguarda il c_L si avrà una parte sostanzialmente lineare mentre il coefficiente di drag è via via crescente. Si arriva infine ad un punto di stallo. Le schiere lavorano nella parte lineare ma posso valutare le prestazioni tentando di correlare quello che succede su un profilo a quello che succede su una schiera di assegnata solidità.

Statisticamente si diagramma anche cosa succede tra il rapporto coefficiente di lift e coefficiente di lift di profilo isolato e l'angolo di attacco rispetto al rapporto solidità su corda (Figura 2.9). Il range di solidità a quale si fa riferimento varia tra 1 e 1.5 – 1.6 non si va oltre a 2. L'angolo di schiera è tra i 45 – 52 gradi. In questo range il coefficiente c_L/c_{L_∞} è molto vicino all'unità.

In fase di progettazione si usano i dati del profilo isolato e si corregge il coefficiente secondo questi diagrammi. In contesto industriale si simula direttamente una schiera.

2.3 Ugelli e diffusori

Le definizioni sono note e stranote. Posso rappresentare queste trasformazioni

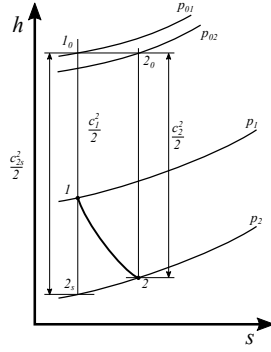


Figura 2.10: Ugello

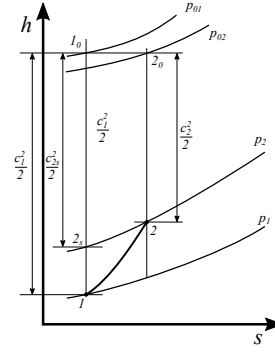


Figura 2.11: Diffusore

sul piano $h - s$ con una trasformazione non isoentropica.

$$\eta_{is} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_{2s}^2 - c_1^2} \quad (2.20)$$

Nel caso di ugelli per $Ma < 0.3$ posso scrivermi tutte le grandezze

$$\begin{cases} p_{01} = p_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 \rightarrow c_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_{01} - p_1) \\ p_{02} = p_2 + \frac{1}{2}\rho c_{2s}^2 \rightarrow c_{2s}^2 = \frac{2}{\rho}(p_{01} - p_1) \\ p_{02} = p_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \rightarrow c_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_{02} - p_2) \end{cases} \quad (2.21)$$

Sostituendo queste relazioni nell'espressione del rendimento si ottiene

$$\eta_{is} = \frac{p_{02} - p_2 - (p_{01} - p_1)}{p_{01} - p_2 - (p_{01} - p_1)} = \frac{p_{02} - p_2 - (p_{01} - p_1)}{p_1 - p_2} = 1 - \frac{\Delta p_0}{p_1 - p_2} \quad (2.22)$$

Δp_0 rappresenta la perdita tra ingresso e uscita.

Per i diffusori si consideri sempre $Ma < 0.3$ si possono usare le stesse espressioni, si ottiene un rendimento isoentropico come segue.

$$\eta_{is} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})} = \frac{c_1^2 - c_{2s}^2}{c_1^2 - c_2^2} \quad (2.23)$$

L'utilizzo di un rendimento isoentropico è meno espressivo nel caso di un diffusore, ha maggior significato fisico un'altra cosa, qual'è l'entità di Δp recuperabile della parte eccedente la pressione statica in ingresso.

$$\eta_{is} = \frac{p_{01} - p_1 - (p_{01} - p_2)}{p_{01} - p_1 - (p_{02} - p_2)} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta p_0}{p_2 - p_1}} \quad (2.24)$$

Definendo il coefficiente di recupero di pressione come

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{p_{01} - p_1} \quad (2.25)$$

Cerchiamo però il legame tra coefficiente di recupero e rendimento isoentropico. Rimanipolando le formule si ottiene

$$\frac{1}{\eta_{is}} = \frac{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})}{p_2 - p_1} = \frac{p_{01} - p_1 - (p_{02} - p_2)}{p_2 - p_1} = \frac{1}{c_p} - \frac{p_{02} - p_2}{p_2 - p_1} \quad (2.26)$$

Posso definire un coefficiente di pressione ideale:

$$c_{pi} = \frac{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})}{p_{01} - p_1} \quad (2.27)$$

Esprimendo secondo A_1 e A_2 , aree di ingresso e uscita del diffusore

$$c_{pi} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2} = 1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{A_R^2} \quad (2.28)$$

A questo punto ottengo un rapporto

$$\frac{c_p}{c_{pi}} = \dots = \eta_{is} \quad (2.29)$$

Il diffusore funziona bene finchè il rapporto tra sezione di uscita e sezione di ingresso è molto piccolo. In figura sono rappresentate le tipiche curve di un diffusore.

2.4 Schiere palari

Le schiere di pale possono essere di espansione, in cui si ha un'accelerazione del flusso e quindi un comportamento simile ad un ugello. Nelle schiere di compressione si ha invece una trasformazione della velocità in pressione.

2.4.1 Schiere di espansione

Il rendimento isoentropico di queste schiere è espressa come

$$\eta_{is} = 1 - \frac{\Delta p_0}{p_1 - p_2} \quad (2.30)$$

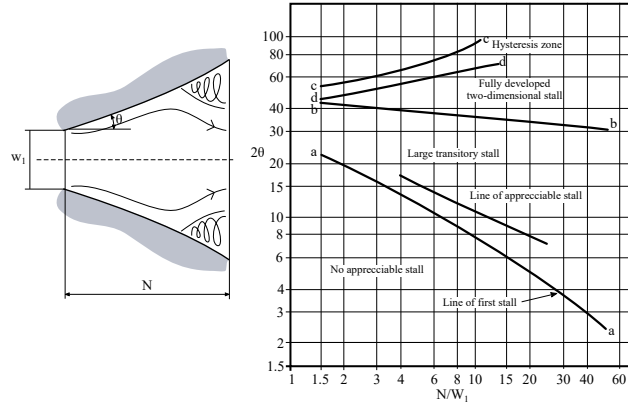
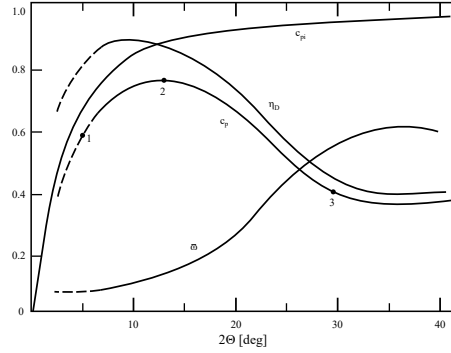


Figura 2.12: Zone di stallo

Figura 2.13: Tipiche curve di performance per un diffusore bidimensionale con $L/W_1 = 0.8$

Sappiamo però che la perdita di pressione tra ingresso e uscita può essere scritta nei termini della forza assiale sviluppata

$$p_1 - p_2 = \frac{F_a}{s} \quad (2.31)$$

Ma la forza assiale può essere scritta come

$$F_a = -F_t \tan \alpha_\infty + s \Delta p_0$$

E quindi posso scrivere il rendimento isoentropico come

$$\eta_{is} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta p_0 s}{F_t \tan \alpha_\infty}} \quad (2.32)$$

2.4.2 Schiere di compressione

In questo caso posso scrivere il rendimento isoentropico come

$$\eta_{is} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta p_0}{p_2 - p_1}} \quad (2.33)$$

Seguendo un percorso simile a prima posso scrivere le seguenti relazioni

$$p_2 - p_1 = -\frac{F_a}{s} \quad (2.34)$$

$$F_a = -F_t \tan \alpha_\infty + s \Delta p_0$$

$$\eta_{is} = 1 - \frac{\Delta p_0 s}{F_t \tan \alpha_\infty} \quad (2.35)$$

Ora vado ad utilizzare tutte le relazioni viste precedentemente. La forza tangenziale è espressa secondo il coefficiente di forza, la differenza di pressione totale V infinito e V2.

$$\begin{cases} F_t = c_F \frac{1}{2} \rho c V_\infty^2 \\ V_\infty = \frac{V_a}{\cos \alpha_\infty} \Delta p_0 = y \frac{1}{2} \rho V_2^2 \\ V_2 = \frac{V_a}{\cos \alpha_2} \end{cases} \rightarrow \frac{\Delta p_0 s}{F_t \tan \alpha_\infty} = \frac{y}{c_F \tan \alpha_\infty} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_\infty}{\delta \cdot \cos^2 \alpha_2} \quad (2.36)$$

Andando a considerare poi tutte le relazioni tra i coefficienti di forza, di pressione, di lift e di drag posso esprimere il rendimento isoentropico in funzione dei parametri di lift e di drag. Vedo che per rendere elevato il rendimento della schiera devo cercare il massimo del rapporto c_L/c_D , che rappresenta l'efficienza del profilo.

Con tutte le sostituzioni ottengo

$$\begin{cases} c_P = \left(\frac{s}{c}\right) y \left(\frac{V_2}{V_\infty}\right)^2 - c_F \tan \alpha_\infty \\ c_L = c_F \cos \alpha_\infty - c_P \sin \alpha_\infty \\ c_D = c_F \sin \alpha_\infty + c_P \cos \alpha_\infty \\ c_L = 2 \left(\frac{s}{c}\right) (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \cos \alpha_\infty - c_D \tan \alpha_\infty \\ c_D = \left(\frac{s}{c}\right) y \frac{\cos^3 \alpha_\infty}{\cos \alpha_2} \end{cases} \rightarrow \eta_{is} = 1 - \frac{2c_D}{c_L \sin(2\alpha_\infty)} \quad (2.37)$$

Il rapporto c_L/c_D posso considerarlo costante, in condizione di funzionamento ottimo è un'affermazione banale, è ovvio che nell'intorno di questo punto possa essere considerato costante.

Esiste un tratto significativo di funzionamento in cui il rapporto c_L/c_D rimane costante. In queste condizioni posso derivare il rendimento rispetto all'angolo α , derivando per α posso vedere il rendimento nelle condizioni di massimo.

$$\frac{\partial \eta_{is}}{\partial \alpha_\infty} = 0, \quad \frac{c_D}{c_L} = \text{cost.} \quad (2.38)$$

$$\eta_{is,max} = 1 - \frac{2c_D}{c_L} \quad (2.39)$$

Il valore di α_∞ ottimale è quello di 45 gradi.

Secondo la solita convenzione si studiano i triangoli di velocità della schiera in movimento (Figura 2.14). I triangoli invece di essere chiusi sul vettore velocità vengono rappresentati partendo dallo stesso punto di origine. Posso

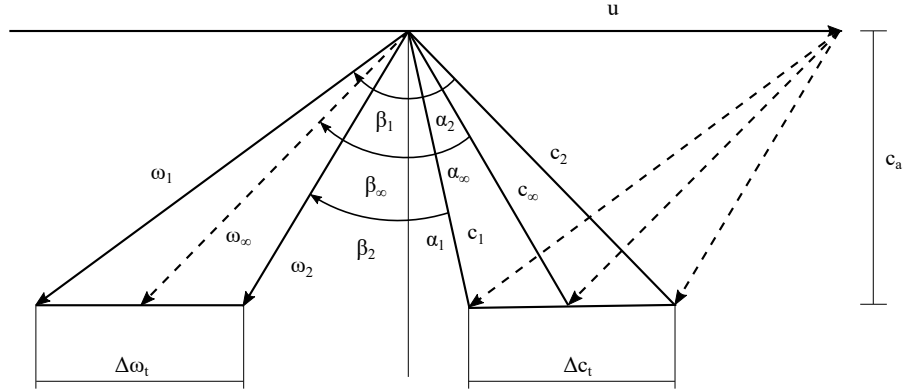


Figura 2.14: Schiere in movimento (compressore)

quindi calcolare la forza tangenziale data dalla variazione delle velocità relative tra ingresso e uscita.

$$\Delta c_t = c_{2t} - c_{1t} = \omega_{1t} - \omega_{2t} = |\Delta \omega_t|$$

$$F_t = s \rho c_a (\omega_{1t} - \omega_{2t}) \quad (2.40)$$

Partendo dalle relazioni di potenza, portata in massa e forza tangenziale definisco il lavoro unitario.

$$\begin{cases} P = F_t \cdot u \\ \dot{m} = \rho s c_a \\ F_t = c_F \frac{1}{2} \rho c \omega_\infty^2 = \frac{c_F \frac{1}{2} \rho c c_a^2}{\cos^2 \beta_\infty} \end{cases} \Rightarrow L_u = \frac{F_t \cdot u}{\rho s c_a} \quad (2.41)$$

Ottenendo infine

$$L_u = \frac{c_F \delta}{2 \cos^2 \beta_\infty} \cdot c_a \cdot u \quad (2.42)$$

Sostituendo la relazione della forza tangenziale ottengo il lavoro unitario in funzione del coefficiente di forza, della solidità della schiera della velocità assiale e periferica.

Con questa espressione si può ora adimensionalizzare il lavoro

$$\begin{cases} \lambda = \frac{L_u}{\omega^2 D^2} = \frac{L_u}{4u^2} \\ \phi = \frac{Q}{\omega D^3} \propto \frac{c_a}{u} \\ \lambda = \frac{c_F \delta}{8 \cos^2 \beta_\infty} \cdot \frac{c_a}{u} = \frac{c_F \delta}{8 \cos^2 \beta_\infty} \cdot \phi \end{cases} \quad (2.43)$$

L'ultima espressione rappresenta la cifra di funzionamento della macchina in quanto ovviamente il lavoro viene fatto esclusivamente dalle parti rotoriche.

Si può quindi scrivere il rendimento isoentropico sia nel caso di compressione che di espansione.

Compressione

Espansione

$$\eta_{is} = \frac{L_u - \frac{\Delta p_0}{\rho}}{L_u} = 1 - \frac{\frac{\Delta p_0}{\rho}}{L_u} \quad (2.44) \quad \eta_{is} = \frac{L_u}{L_u + \frac{\Delta p_0}{\rho}} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{\Delta p_0}{\rho}}{L_u}} \quad (2.45)$$

Utilizzando le relazioni note

$$\begin{cases} \Delta p_0 = y \frac{1}{2} \rho \omega_2^2 \\ L_u = \frac{c_F \delta}{2 \cos^2 \beta_\infty} \cdot c_a \cdot u \\ \omega_2 = \frac{c_a}{\cos \beta_2} \\ \phi = \frac{c_a}{u} \end{cases}$$

Si ottengono le espressioni

Compressione

Espansione

$$\eta_{is} = 1 - \frac{y}{c_F} \cdot \frac{\cos^2 \beta_\infty}{\delta \cos^2 \beta_2} \cdot \phi \quad (2.46)$$

$$\eta_{is} = \frac{1}{1 + \frac{y}{c_F} \cdot \frac{\cos^2 \beta_\infty}{\delta \cos^2 \beta_2} \cdot \phi} \quad (2.47)$$

Ora vediamo cosa succede mettendo assieme parte statorica e parte rotorica. Il rendimento di uno stadio assumerà l'espressione

$$\Delta p_0 = \Delta p_{0,stat} + \Delta p_{0,rot} \quad (2.48)$$

2.5 Equilibrio radiale

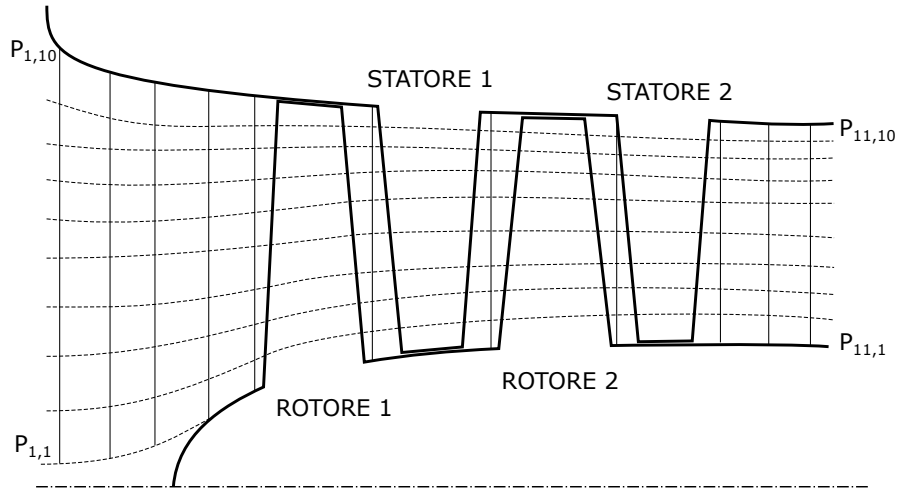


Figura 2.15: Reticolo di calcolo quasi-3D per un compressore assiale bistadio

Con questo abbiamo trattato cosa succede nell'attraversamento della schiera in termini macroscopici. Abbiamo già detto che per effettuare queste considerazioni bisogna partire dal presupposto che non vi sia un deflusso significativo in direzione radiale. Devo assicurarmi che non vi sia trasmissione di forze tra sezioni circolari della macchina.

Si consideri l'elementino di fluido $dz - d\theta$ su cui agiscono le forze di pressione. Si calcoli l'equilibrio delle forze

$$\left(p + \frac{dp}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta dz + pr d\theta dz - 2p dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = r \frac{dp}{dr} dr d\theta dz \quad (2.49)$$

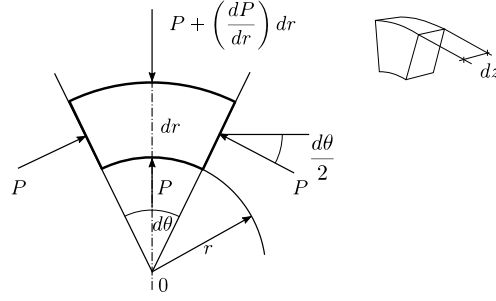


Figura 2.16: Equilibrio radiale

Linearizzando e trascurando i termini del secondo ordine si ottiene un termine che sarà equilibrato dalle forze centrifughe agenti sull'elemento. Perché il moto non abbia componenti radiali deve quindi accadere che

$$\rho r d\theta dr dz \cdot \frac{V_t^2}{r} = r \frac{dp}{dr} dr d\theta dz \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V_t^2}{r} \quad (2.50)$$

2.5.1 Termodinamica

Vediamo cosa succede da un punto di vista termodinamico. Scriviamo l'entalpia di ristagno considerando che $V_r = 0$

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = h + \frac{1}{2}(V_t^2 + V_a^2) \quad (2.51)$$

Posso ora differenziare lungo il raggio ottenendo

$$\frac{dh_0}{dr} = \frac{dh}{dr} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr} \quad (2.52)$$

Considero ora il primo principio della termodinamica nella seguente forma

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp \quad (2.53)$$

Mettendo assieme le equazioni 2.52 e 2.53 ottengo

$$\frac{dh_0}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr} \quad (2.54)$$

Considerando poi l'equazione 2.50 si ottiene

$$\frac{dh_0}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{V_t^2}{r} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr} \quad (2.55)$$

Ottengo un'espressione in cui non ho più una pressione ma solo i valori delle velocità, entalpia ed entropia al variare del raggio. Ora posso scrivere l'equazione complessiva che rappresenta il legame da imporre per avere un flusso bidimensionale.

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r)} \quad (2.56)$$

Questa equazione ci consente di affrontare due problematiche tipiche della progettazione delle macchine:

1. Problema diretto (o problema di verifica): nota la geometria di una macchina e la distribuzione radiale dell'angolo α_∞ , determinare la distribuzione radiale di tutte le grandezze del flusso e termodinamiche;
2. Problema inverso (o problema di progetto): assegnata una certa distribuzione di una grandezza termodinamica o fluidodinamica trovare qual'è la geometria della schiera che la realizza.

2.5.2 Ipotesi semplificative

Posso fare un'ulteriore osservazione che semplifica la vita in fase di progettazione preliminare. Impongo

$$\begin{cases} \frac{dh_0}{dr} = 0 \\ \frac{ds}{dr} = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Ho imposto che h_0 e la dissipazione siano costanti lungo il raggio. In questo modo ottengo la relazione semplificata

$$\boxed{V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r) = 0} \quad (2.58)$$

2.6 Condizione di vortice libero

Queste due osservazioni sono abbastanza realistiche. Facendo queste assunzioni sulle distribuzioni delle velocità tangenziali posso fare delle osservazioni sulle velocità assiali. Ad esempio posso costruire la macchina imponendo le condizioni di vortice libero, una delle tipiche condizioni imposte tra V_a e V_t ($V_t \cdot r = \text{cost.}$). Questo significa che considerando un mantello i generico.

$$V_t \cdot r = V_{ti} \cdot r_i \Rightarrow V_a = \text{cost.} \quad (2.59)$$

Imponendo queste condizioni si ottiene una velocità assiale costante lungo il raggio (vedi Eq. 2.58). Vediamo cosa succede dal punto di vista dell'entalpia

considerando il rapporto tra una sezione generica e una sezione i . Sapendo che $h_0 = \text{cost.}$ si scrive

$$h + \frac{V^2}{2} = h_i + \frac{V_i^2}{2} \Rightarrow h = h_i + \frac{V_i^2 - V^2}{2} \quad (2.60)$$

E quindi

$$\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{1}{2h_i}(V_{ti}^2 - V_t^2 + \cancel{V_a^2} - \cancel{V_a^2}) = 1 + \frac{1}{2h_i} \left(1 - \frac{V_t^2}{V_{ti}^2} \right) \quad (2.61)$$

Ma facendo un'ulteriore, semplicissima considerazione

$$V_t \cdot r = V_{ti} \cdot r_i \Rightarrow \frac{V_t}{V_{ti}} = \frac{r_i}{r}$$

Posso scrivere la 2.61 nel modo seguente

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{1}{2h_i} \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right)} \quad (2.62)$$

Rimanipolandola ulteriormente posso scriverla nella forma

$$\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{ti}^2 \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right) \quad (2.63)$$

Si possono ora diagrammare nelle condizioni di vortice libero tutte le espressini utili a livello termodinamico. Queste curve possono essere disegnate al variare del numero di Mach.

$$\begin{cases} h = \frac{a^2}{\gamma - 1} \\ M_{ti} = \frac{V_{ti}}{a_i} \\ \frac{h}{h_i} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{ti}^2 \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right) \\ \frac{p}{p_i} = \left(\frac{h}{h_i} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{cases} \quad (2.64)$$

In Figura 2.17 è rappresentata la variazione di pressione al variare del numero di Mach.

2.7 Vortice forzato

Questo tipo di condizione non si realizza nella progettazione della macchina o nel suo funzionamento. Viene utilizzata per mitigare le problematiche relative

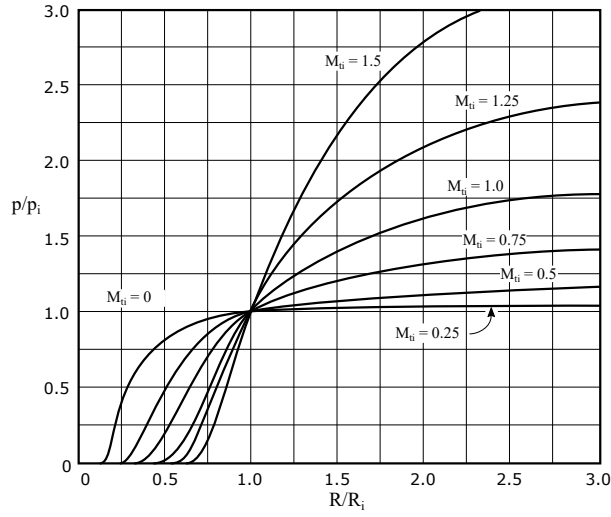


Figura 2.17: Pressione in funzione del raggio per un flusso a vortice libero

al vortice libero introducendo una distribuzione di velocità diversa da quella prevista dal vortice libero. Condizione di vortice forzato:

$$\boxed{\frac{V_t}{r} = \text{cost.}} \quad (2.65)$$

Questo significa che il deflusso della macchina si comporta effettivamente come un moto rigido, il rapporto tra velocità tangenziale e raggio si mantiene costante. Si ricordano le equazioni di partenza, ovvero quella di equilibrio radiale e le ipotesi semplificative

$$\begin{cases} \frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r) \\ \frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = 0 \end{cases}$$

Allora considerando la generica sezione i

$$\frac{V_t}{r} = \frac{V_{ti}}{r_i} \Rightarrow V_t = V_{ti} \frac{r}{r_i}$$

Introducendo questa legge e sostituendo a V_{ti} si ottiene

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left(\frac{V_a^2}{2} \right) + \frac{V_{ti}}{r_i} \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{ti}}{r_i} r^2 \right) = 0}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, risolvibile analiticamente. Infatti

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V_a^2}{2} \right) = -2 \left(\frac{V_{ti}}{r_i} \right)^2 \cdot r \Rightarrow \left(\frac{V_a^2}{2} \right) = -2V_{ti}^2 \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 + C \quad (2.66)$$

Devo andare allora a determinare la costante C . Posso dire che nella sezione i -esima la velocità assiale e raggio avranno il valore corrispondente.

$$\begin{cases} V_a = V_{ai} \\ r = r_i \end{cases} \Rightarrow C = \frac{V_{ai}^2}{2} + V_{ti}^2$$

Sapendo che

$$\frac{V_{ti}}{V_{ai}} = \tan \alpha_i$$

Posso scrivere la 2.66 nella forma completa

$$\boxed{\left(\frac{V_a}{V_{ai}} \right)^2 = 1 - 2 \tan^2 \alpha_i \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - 1 \right]} \quad (2.67)$$

Posso proseguire e andare a determinare anche l'andamento dell'entalpia in funzione del raggio. Scrivo l'entalpia totale

$$h = h_i \frac{V_i^2 - V^2}{2}$$

$$\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{1}{2h_i} (V_{ti}^2 - V_t^2 + V_{ai}^2 - V_a^2)$$

Utilizzando poi la 2.65 e raccogliendo i termini V_{ti} e V_{ai} ottengo

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i} \left[1 - \left(\frac{V_t}{V_{ti}} \right)^2 \right] + \frac{V_{ai}^2}{2h_i} \left[1 - \left(\frac{V_a}{V_{ai}} \right)^2 \right]} \quad (2.68)$$

Posso fare delle ulteriori considerazioni ricordando la 2.67 e le seguenti espressioni

$$\begin{cases} \frac{V_t}{V_{ti}} = \frac{r}{r_i} \\ \frac{V_{ti}}{V_{ai}} \tan \alpha_i \end{cases}$$

Con alcuni passaggi algebrici si perviene a

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i} \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - 1 \right]} \quad (2.69)$$

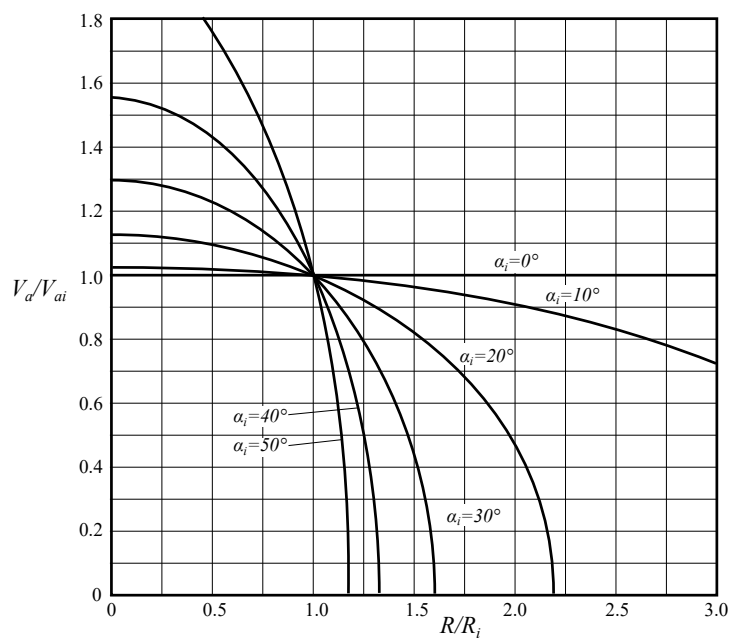


Figura 2.18: Velocità assiale in funzione del raggio per un flusso a vortice forzato

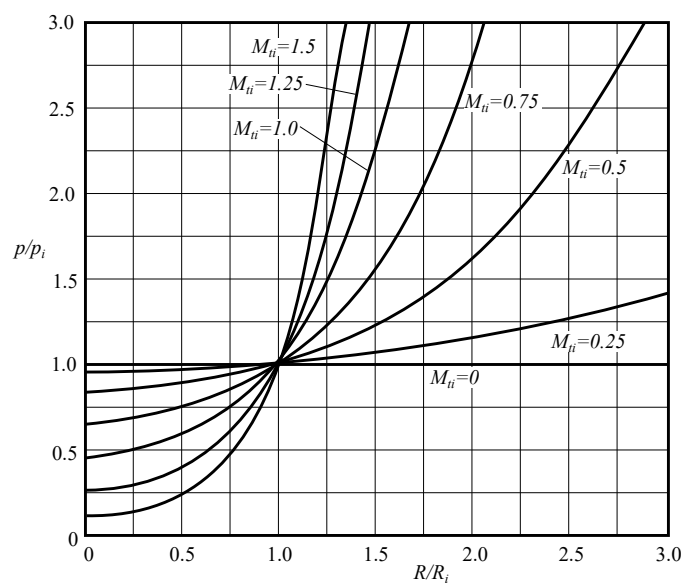


Figura 2.19

Questo significa che a seconda dell'angolo di incidenza della palettatura, la distribuzione delle velocità assiali non è più uniforme lungo il raggio. Si vede chiaramente nel diagramma in Figura 2.22. Naturalmente si può ricavare l'andamento delle pressioni e delle entalpie (Figura 2.19). Ricordando che

$$\frac{p}{p_i} = \frac{h}{h_i}^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.70)$$

Allora

$$\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{k-1}{2} M_{ti}^2 \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.71)$$

L'entalpia varia con il raggio in maniera quadratica con una costante che dipende dal numero di Mach tangenziale. Si vede che a raggio 0 le pressioni non sono nulle (al contrario del caso di vortice libero). Sebbene non faremo mai una macchina con vortice forzato sappiamo che nel caso il diametro all'albero sia particolarmente ridotto possiamo utilizzare una distribuzione diversa dal vortice libero.

2.7.1 A valle del vortice forzato

Cosa succede però a valle della palettatura dopo aver attraversato un vortice forzato? Abbiamo imposto a valle la condizione di entalpia totale costante al variare del raggio

$$\frac{dh_{01}}{dr} = 0$$

Sezione 1

$$\begin{cases} h_{01} = \text{cost.} \\ V_{t1} = K_1 \cdot r \end{cases}$$

Sezione 2

$$V_{t2} = K_2 \cdot r$$

Possiamo calcolare il lavoro scambiato come differenza di entalpia totale

$$\begin{aligned} h_{02} - h_{01} &= u(V_{t2} - V_{t1}) = \omega r(K_2 r - K_1 r) \\ &= \omega(K_2 - K_1)r^2 = \Delta h_{012} \end{aligned}$$

Ovvero $\Delta h \propto r^2 \Rightarrow h_{02} \neq \text{cost.}$ Via via che attraverso la macchina, a differenza del raggio in cui mi trovo cambia il lavoro scambiato dalla macchina, una condizione pressochè impossibile da mantenere.

Possiamo andare a vedere cosa succede calcolando il differenziale dell'entalpia rispetto al raggio

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta h_{012}}{dr} &= \frac{d(h_{02} - h_{01})}{dr} = \frac{dh_{02}}{dr} = \\
&= V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r) = 2\omega(K_2 - K_1)r = \\
&= \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{a2}^2}{2} \right) + K_2 \frac{d}{dr}(K_2 r^2)
\end{aligned}$$

Anche questa è un'equazione differenziale lineare di primo ordine, posso risolverla

$$V_{a2}^2 = -2 [K_2^2 - \omega(K_2 - K_1)] r^2 + C$$

La costante la calcolo integrando su tutta la sezione la portata in massa

$$\frac{\dot{m}}{2\pi\rho} = \int_{rh}^{rs} V_{a1} r dr = \int_{rh}^{rs} V_{a2} r dr$$

La portata entrante nella sezione uno deve essere uguale alla portata che

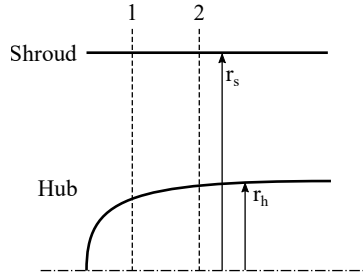


Figura 2.20

entra nella sezione 2 (integrale da r-hub a r-shroud in Figura 2.20).

2.8 Vortice generico

Spesso nella progettazione delle macchine assiali si usa una soluzione mista tra vortice libero e forzato. Si parla di vortice generico:

$$\begin{cases} V_{t1} = a \cdot r^n - \frac{b}{r} \\ V_{t2} = a \cdot r^n + \frac{b}{r} \end{cases} \quad (2.72)$$

Definizioni:

- $n = 0$: zero power blending
- $n = 1$: fast power blending

Il lavoro effettuato vale quindi

$$L_u = h_{02} - h_{01} = u(V_{t2} - V_{t1}) = 2 \cdot b \cdot \omega \quad (2.73)$$

Per $n = 1$ ho una palettatura a grado di reazione costante, posso scrivere

$$R = 1 - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2L_u} = 1 - \frac{V_{t2}^2 + \cancel{V_{a2}^2} - V_{t1}^2 - \cancel{V_{a2}^2}}{2L_u}$$

Considerando $V_{a2} \simeq V_{a1}$, non è del tutto vero ma assumiamo la differenza piccola

$$R = 1 - \frac{\cancel{(V_{t2} - V_{t1})} (V_{t2} + V_{t1})}{2u \cancel{(V_{t2} - V_{t1})}} = 1 - \frac{(V_{t2} + V_{t1})}{2u} = 1 - \frac{a}{\omega} = \text{cost.}$$

Ho dimostrato il grado di reazione costante.

2.8.1 Angolo di palettatura costante

Immagino di voler costruire una macchina con angolo di palettatura costante, significa che il bordo di attacco è rettilineo e solo la coda cambia l'angolo.

$$\frac{V_t}{V_a} = \tan \alpha = \text{cost.}$$

Ci si chiede dunque come variano V_t e V_a al variare di r rispettando l'equilibrio radiale. Si avrà

$$\frac{V}{V_i} = \frac{V_a}{V_{ai}} = \frac{V_t}{V_{ti}} = \left(\frac{r_i}{r} \right)^{\sin \alpha}$$

Con le solite ipotesi semplificative si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V_a^2}{2} \right) + \frac{V_t}{r} \frac{d(rV_t)}{dr} = 0 \quad (2.74)$$

Sapendo inoltre che

$$\begin{cases} V_a = V \cos \alpha \\ V_t = V \sin \alpha \end{cases}$$

e facendo le opportune sostituzioni si perviene a

$$\boxed{\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \sin^2 \alpha = 0} \quad (2.75)$$

L'equazione differenziale è leggermente più complessa. La soluzione generica è di tipo esponenziale e bisogna sempre andare a determinare la costante generica. Si perviene alla seguente espressione.

$$y' + \phi(x)y + \psi(x) = 0$$

$$y = e^{-\int \phi(x)dx} \left[C - \int \psi(x) e^{\int \phi(x)dx} dx \right]$$

In questo caso abbiamo $\phi(x) = 0$

$$V = e^{-\int \frac{\sin^2 \alpha}{r} dr} \cdot C = r^{-\sin^2 \alpha} \cdot C$$

Sappiamo poi che per $r = r_i$, $V = V_i$ allora

$$C = \frac{V_i}{r_i^{-\sin^2 \alpha}}$$

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i \sin^2 \alpha} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^{2 \sin^2 \alpha} \right]} \quad (2.76)$$

Si tratta di una soluzione adottata per le macchine a vapore che possiedono delle palettature molto massicce, si ottiene un andamento delle velocità assiali come in Figura 2.21. Questa è una distribuzione che non ha limiti teorici, si può sempre fare una macchina a bordo d'ingresso rettilineo. Rappresenta un caso intermedio tra un vortice libero e un vortice forzato.

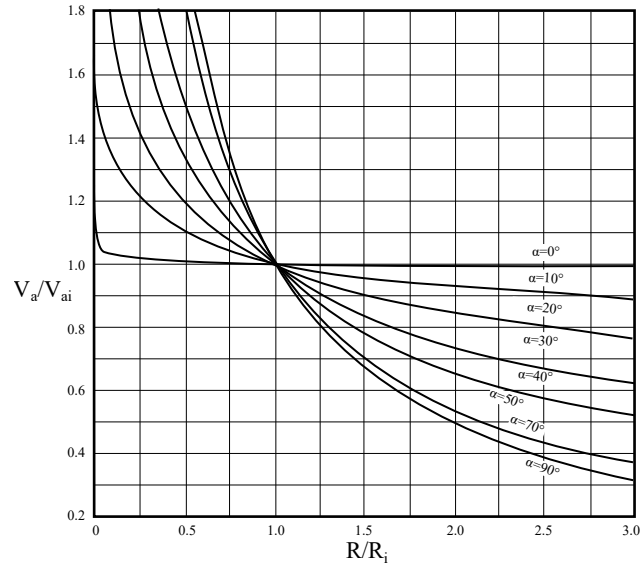


Figura 2.21

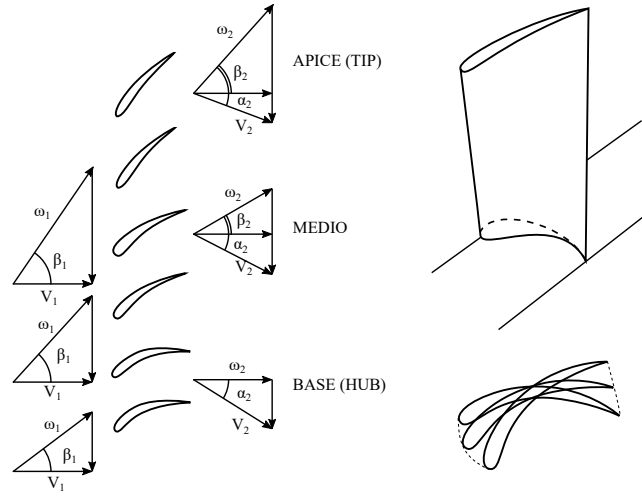


Figura 2.22: Profili e triangoli delle velocità per un rotore di turbo fan a vortice libero ($r_{TIP}/r_{HUB} = 2$)

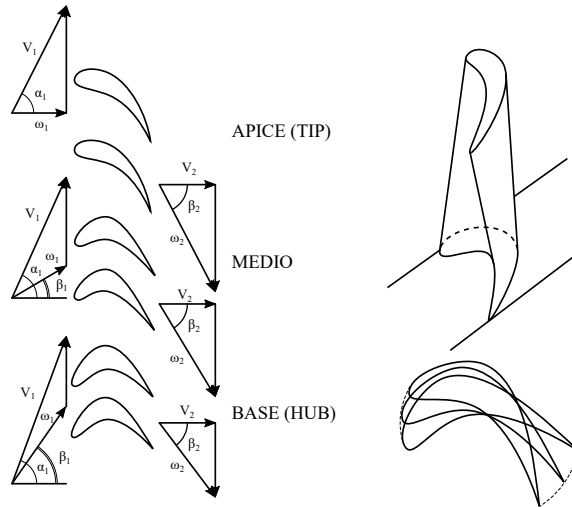


Figura 2.23: Profili e triangoli delle velocità per un rotore di uno stadio di bassa pressione di turbina a vapore o a gas ($r_{TIP}/r_{HUB} = 1.4$)

$$\Delta i_s = i_s - i_{s(s/c=0.75)} \quad (2.77)$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1(s/c = 0.75)} \quad (2.78)$$

$$\frac{Y_p}{Y_{p(i=0)}} \quad (2.79)$$