

سوال 1. فرض کنید سری $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ همگراست و $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ را ثابت کنید سری های زیر و آرا هستند.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k \quad \text{I}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k - b_k \quad \text{II}$$

سوال 2. در مورد آرای و آراهای سری های زیر تحقیق کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! (3n)!}{n! (4n)!} \quad \text{IV} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \quad \text{I}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n} \quad \text{II}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{III}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{IV}$$

سوال 3. همگرا یا آرای هر یک از دنباله های زیر را تعیین کنید (جاذب است)

$$h_n = \left\{ \frac{(2n)! (3n)!}{n! (4n)!} \right\} \quad \text{IV}$$

$$a_n = \left\{ \frac{2^n}{e^{2n}} \right\} \quad \text{I}$$

$$b_n = \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\} \quad \text{II}$$

$$c_n = \left\{ \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right\} \quad \text{III}$$

$$d_n = \left\{ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n \times 2} \right\} \quad \text{IV}$$

سوال ۲. فرض کنید $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 1$ ، $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$ نشان دهید که $\{a_n\}$ همگراست و حد آن را بیابید.

~~سوال ۳. فرض کنید a_n دنباله ای باشد که $a_n \geq 0$ و $a_{n+1} \leq a_n$ برای هر n باشد. نشان دهید که $\{a_n\}$ همگراست.~~

سوال ۵. دنباله a_n را به دنباله ای نامیده می‌گویند که هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{N} (\forall m, n \geq k, |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

حال اثبات کنید که هر دنباله در \mathbb{R} همگراست اگر و تنها اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود داشته باشد.

سوال ۴. فرض کنید $P(n)$ و $Q(n)$ درجه‌های n با ضرایب حقیقی بزرگ P و Q باشند و $a_n = \frac{Q(n)}{P(n)}$ باشد. فرض کنید n^q و n^p ضرایب جلات P و Q باشند و فرض کنید $a_n = \frac{Q(n)}{P(n)}$ باشد. نشان دهید:

$$P > Q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ I}$$

$$P = Q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{c}{b}, \text{ II}$$

$$P < Q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty, \text{ III}$$

سوال ۷. مقادیر $P > 0$ را چنان تعیین کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n^P} - \sqrt[n]{n^{P-1}})$ همگرا باشد.