Друзья останутся без подарков?

Условие: n друзей собрались и решили отправить письма Деду Морозу. У каждого есть 1 конверт и 1 письмо. Потом ребята всё перемешали и стали класть письма в конверты. Сколько в среднем писем попадёт в свой конверт?

Решение: Задачу можно переформулировать так: какое матожидание количества неподвижных точек при перестановке n элементов.

Обозначим через $!n$ количество перестановок без неподвижных точек. Из формулы включения и исключения не сложно вывести, что

$$!n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Вычислим количество перестановок при которых k точек будут неподвижными. Для этого выберем эти k точек которые будут стоять на своем месте (C_n^k способов), а затем расставим оставшиеся $n-k$ не по своим местам. Так как каждая из оставшихся точек должна стоять не на своем месте, то количество их расстановок равно $!(n-k)$.

Выходит вероятность того, что в случайной перестановке будут ровно k неподвижных точек равна $p_k = \frac{C_n^k \cdot !(n-k)}{n!}$. Следовательно искомое матожидание равно

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot k = \frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot !(n-k)}{n!}$$