ВКвадратное уравнение

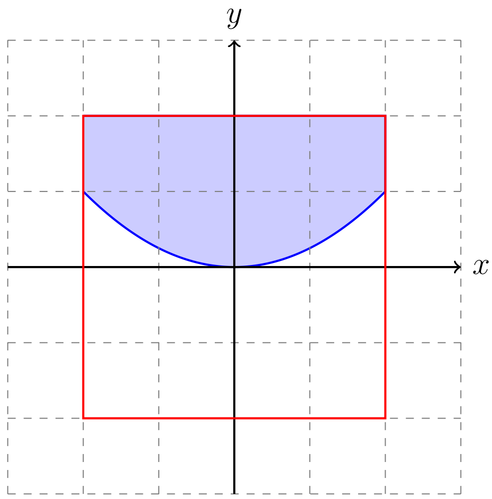
Условие: Вася пишет функцию $f(x) = x^2 + bx + c$, причем коэффициенты b, c он выбирает наугад из квадрата с вершинами, лежащими в точках $(2;2), (-2;2), (2;-2), (2,2)$. Найдите вероятность того, что корни окажутся мнимыми.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Решение: Чтобы корни Васиного квадратного трехчлена оказались мнимыми, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант оказался отрицательным, т. е.

$$D(f) = b^2 - 4c < 0 \iff c > \frac{b^2}{4}. \qquad (*)$$

Начертим график $g(x) = \frac{x^2}{4}$ синим цветом на рисунке справа. Понятно, что все точки (b, c) удовлетворяющие $(*)$ должны лежать выше данного графика. А так как Вася выбирает внутри квадрата с вершинами, лежащими в точках $(2;2), (-2;2), (2;-2), (2,2)$ (начерчен красным цветом), то интересующая нас область будет фигурой ограниченной этим квадратом и функцией g (закрашена синим цветом). Выходит искомая вероятность равна площади синей фигуры поделенной на площадь квадрата, что равна 16.



Чтобы найти площадь синей фигуры вычтем из половины площади квадрата площадь ограниченной g и Ox с -2 по 2. Последнее можно найти как интеграл g на интервале $(-2; 2)$:

$$\int_{-2}^{2} g(x) = \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{4} = \left|\frac{x^3}{12}\right|_{-2}^{2} = \frac{2^3}{12} - \frac{(-2)^3}{12} = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, площадь синей фигуры равна $\frac{16}{2} - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$. А значит ответ равен $\frac{20}{3} : 16 = \frac{5}{12}$