экстрИмальные значения

Условие: Найдите экстремальные значения функции z, зависящей от x и y, для которой справедливо соотношение $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$, где $a = \mathrm{const}, a \neq 0$. Вы можете или решить данную задачу арифметически, или программно на языке Python, но разрешается использовать только библиотеку NumPy и стандартные библиотеки Python (math, functools, etc...).

Ответ: $0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}a$.

Решение: Раскроем скобки и перепишем соотношение в следующем виде:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 + 2\left(x^2+y^2\right)z^2 + z^4 = a^2\left(x^2+y^2\right) - a^2z^2 \iff$$
$$\iff z^4 + z^2\left(2x^2+2y^2+a^2\right) + \left(x^2+y^2\right)^2 - a^2\left(x^2+y^2\right) = 0.$$

Решая как квадратное уравнение от z^2 получаем, что

$$z^2 = \frac{-2x^2-2y^2-a^2+|a|\sqrt{a^2+8x^2+8y^2}}{2} \tag{$*$}$$

(Перед дискриминантом не может стоять минус, так как иначе при ненулевых a выражение стало бы отрицательным, а $z^2 > 0$.)

Найдем критические точки функции $z(x,y)$ вычислив z_x, z_y и приравняв к нулю.

$$\begin{cases} \left(z^2\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x^2-2y^2-a^2+|a|\sqrt{a^2+8x^2+8y^2}}{2}\right) \\ \left(z^2\right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x^2-2y^2-a^2+|a|\sqrt{a^2+8x^2+8y^2}}{2}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 2z_xz = x\left(\frac{4a}{\sqrt{a^2+8x^2+8y^2}}-2\right) \\ 2z_yz = y\left(\frac{4a}{\sqrt{a^2+8x^2+8y^2}}-2\right) \end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что $z_x = z_y = 0$ только тогда, когда либо $x = y = 0$, либо

$$\frac{4a}{\sqrt{a^2+8x^2+8y^2}} - 2 = 0 \iff x^2+y^2 = \frac{3}{8}a^2$$

Не сложно понять, что $z(x,y)$ радиально симметрична относительно оси $z = 0$. Следовательно у z нет седловых точек. Значит каждая из критических точек это точка экстремума. Выходит достаточно найти значения в полученных критических точек.

Вычислим z в точке $(0,0)$ и в точке (x_0, y_0), где $x_0^2 + y_0^2 = \frac{3}{8}a^2$.

1. Подставим $(0,0)$ в исходное равенство и получим
$$z^4(0,0) + a^2z^2(0,0) = 0 \implies z(0,0) = 0.$$

2. Подставим (x_0, y_0) в $(*)$ и получим
$$z^2(x_0,y_0) = \frac{-\frac{3}{4}a^2 - a^2 + |a|\sqrt{a^2+3a^2}}{2} = \frac{1}{8}a^2 \implies z(x_0,y_0) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}a.$$