

Travaux Pratiques n°G3: Circuits RCL

Groupe n°22: Armand Le Douarec

21 Septembre 2024

1 Introduction

Les oscillations harmoniques, qu'elles soient libres ou forcées, sont des phénomènes observés dans divers domaines de la physique. Elles se manifestent tant dans l'aéronautique [1] que dans la construction de ponts. L'étude de ces phénomènes, devenue essentielle, se retrouve ici dans le contexte des circuits RCL. L'effondrement du pont de Tacoma [2] illustre parfaitement l'importance de ce sujet. L'analyse de ces circuits permet ainsi d'aborder des problèmes mécaniques variés en simulant les paramètres spécifiques de chaque situation.

Différents aspects de ces oscillations seront abordés, d'abord les oscillations libres puis les oscillations forcées et enfin une légère comparaison des filtres basiques constructibles à partir de ce circuit.

2 Théorie

Un circuit RCL est constitué de trois dipôles, une résistance R , une capacité C et enfin une inductance L . Le montage est celui illustré sur la Fig.(1) avec U_{in} la tension du signal d'entrée et U_{out} la tension de sortie. Pour construire l'équation qui caractérise le circuit RCL donné, les équations tension-courant de la résistance, de la capacité et de l'inductance sont nécessaires. Elles sont respectivement:

$$U_R = RI_R \quad CU_C = \int I_C dt \quad U_L = -L \frac{dI_L}{dt} \quad (1)$$

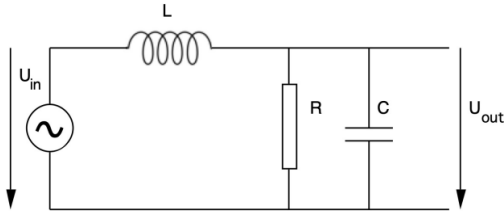


Figure 1: Représentation du circuit RCL étudié

A partir de ces équations ainsi que des lois de Kirchhoff, s'établit l'équation attendue qu'est l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$\ddot{U}_{out} + \frac{\dot{U}_{out}}{RC} + \frac{U_{out}}{LC} = \frac{U_{in}}{LC} \quad (2)$$

Pour la suite des calculs, il est judicieux d'effectuer les simplifications suivantes pour mieux décrire le comportement du circuit. Ce sont la pulsation harmonique $w_0 = \sqrt{1/(LC)}$ en s^{-1} , le coefficient d'amortissement $\lambda = 1/(2RC)$ en s^{-1} et enfin la perturbation sinusoïdale $p \sin(\Omega t) = U_{in}$ d'amplitude p et de fréquence Ω . L'équation (2) devient alors:

$$(2) \Rightarrow U_{out} + 2\lambda \dot{U}_{out} + w_0^2 \ddot{U}_{out} = p \sin(\Omega t) \quad (3)$$

Les solutions de l'équation dépendent à présent des coefficients w_0 et λ . On remarque une analogie avec l'oscillateur mécanique qui est facilement simulable à l'aide ce circuit.

Solutions

Les solutions de l'équation (3) sont trois et se différencient par les valeurs des paramètres λ et w_0 . Elles sont la somme de deux expressions décrivant le régime permanent et le régime transitoire. Elles sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_{out}(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi(\Omega)) + C e^{-\lambda t} \cos(wt - \phi) & , \lambda^2 < w_0^2, \text{ (sous-critique)} \\ U_{out}(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi(\Omega)) + e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t) & , \lambda^2 = w_0^2, \text{ (critique)} \\ U_{out}(t) = \underbrace{A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi(\Omega))}_{\text{régime permanent}} + \underbrace{e^{-\lambda t} (C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt})}_{\text{régime transitoire}} & , \lambda^2 > w_0^2, \text{ (surcritique)} \end{array} \right. \quad (4)$$

où les constantes C , C_1 , C_2 et ϕ sont déterminées par les conditions initiales et $w^2 = w_0^2 - \lambda^2$. Les fonctions de gain $A(\Omega) (\equiv U_{out}/U_{in})$ et de phase $\psi(\Omega)$ sont données par:

$$A(\Omega) = \frac{p}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \quad \psi(\Omega) = \arctan \left(\frac{2\lambda\Omega}{w_0^2 - \Omega^2} \right) \quad (5)$$

Oscillations libres

Dans le cas d'oscillations libres, $p = 0$. Par conséquent, la solution ne comprend plus que l'expression du régime transitoire. Une impulsion doit être donnée au circuit pour analyser son retour au régime stable. Le comportement du circuit est alors semblable à celui d'un oscillateur mécanique en mouvement soumis à une force de frottement au système (ici analogue à λ).

Les résistances internes de l'inductance R_L et du générateur de fonction R_G non négligeables doivent être considérées dans l'expression du coefficient d'amortissement. En série, la résistance interne résultante est $R_{in} = R_G + R_L$. Le coefficient d'amortissement devient alors:

$$\lambda' = \lambda + R_{in}/(2L) \quad (6)$$

Dans le cas d'oscillations forcées, la résistance interne du générateur est prise en compte par le logiciel. Par conséquent, $R_{in} = R_L$ pour les oscillations forcées.

Oscillations forcées

Dans ce type d'oscillation le régime permanent importe et une nouvelle donnée fondamentale apparaît, Ω_r , la pulsation résonante représentant la fréquence à laquelle le gain du système est maximal. L'expression de cette fréquence est donnée par $\Omega_r = \sqrt{w_0^2 - 2\lambda^2}$ (peut être calculée comme maximum de $A(\Omega)$). Pour décrire la finesse de la résonance, il est judicieux d'utiliser le facteur de qualité de la résonance Q donné par l'expression $Q = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_r}$; ainsi que la largeur de raie $\Delta\Omega$ donnée par $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 = \frac{2\lambda\Omega_r}{Q}$ où Ω_1 et Ω_2 sont les fréquences telles que le gain A évalué en ces dernières vaut $A_{max}/\sqrt{2}$. A partir d'un diagramme de Bode du gain $G(\Omega)$ et de la phase $\phi(\Omega)$ du signal obtenu, le pic G_{max} et la finesse de résonance $\Delta\Omega$ ainsi que le coefficient d'amortissement expérimental λ_{exp} peuvent être obtenus pour en déduire la nature du filtre, notamment grâce à l'équation:

$$\lambda_{exp} = \Omega_r \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{G_{max}^2}{G_{max}^2 - 1}} - 1 \right)} \quad \text{avec } G_{max} = G(\Omega_r) \quad (7)$$

3 Résultats

Dans cette étude, les valeurs constantes des composantes du système étaient $L = 0.05$ H, $C = 0.01$ μ F et les résistances internes du générateur et de l'inductance sont $R_G = (50.0 \pm 0.1) \Omega$ et $R_L = (207.0 \pm 0.3) \Omega$ mesurées à l'aide du multimètre.

Oscillations libres

Dans l'étude des oscillations libres, différentes valeurs de la résistance ont été testées pour chaque régime transitoire. Le générateur de fonction produisait un signal carré de fréquence de l'ordre de $f \simeq 100$ Hz et un oscilloscope digital a permis d'effectuer les mesures. La résistance critique a été trouvée en $R_{cr} = 1240 \Omega$. La résistance interne à prendre en compte est ici $R_{in} = R_G + R_L = (257.0 \pm 0.4) \Omega$. De plus, la tension du signal mesurée est relevée à une période $\Delta t = 0.4[\mu s]$.

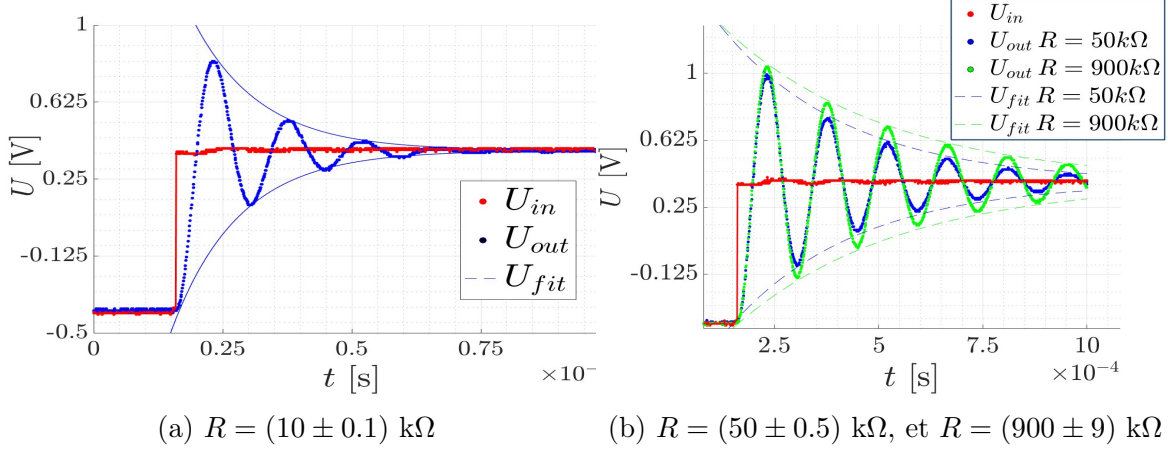


Figure 2: Graphes $U[V]$ en fonction de $t[s]$ pour différentes valeurs de R en régime sous-critique

Pour le régime sous-critique, $R > R_{cr}$, les Fig.(2a) et Fig.(2b) montrent la réponse du signal pour des résistances allant de 10 kΩ à 900 kΩ. De plus, un fit exponentiel a été effectué pour analyser l'enveloppe de chaque oscillation en régime sous-critique, permettant ainsi de trouver expérimentalement λ_{exp} grâce au coefficient du fit. Les coefficients seront notés dans le Tab.(1). Pour le régime critique, $R = R_{cr}$, la Fig.(3). présente la réponse du signal avec un fit exponentiel pour mesurer $\lambda_{exp}(=w_0) = 40 [\text{ms}^{-1}]$.

Pour le régime surcritique, la Fig.(4) la réponse du signal pour des résistances allant de 100 Ω à 800 Ω.

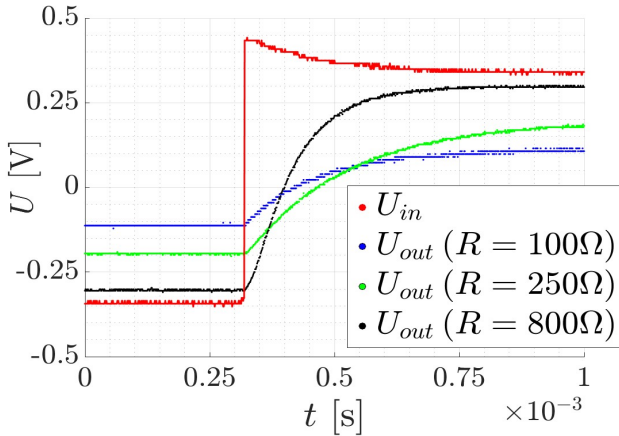


Figure 4: Régime surcritique pour les résistances $R = 100 \Omega$, 250Ω et 800Ω

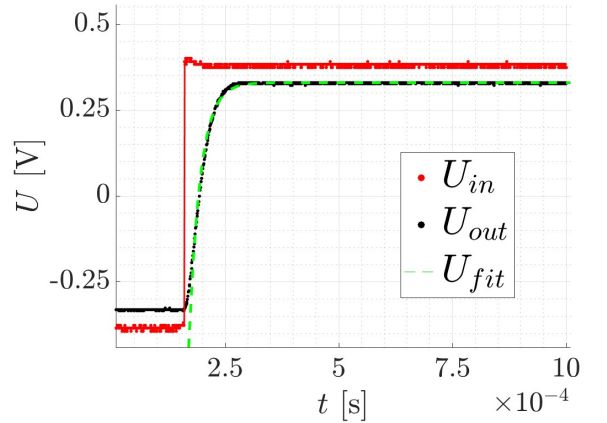


Figure 3: Régime critique $R = 1240 \Omega$ et $\lambda_{exp} = (9 \pm 1) \text{ ms}^{-1}$

R [kΩ]	λ [ms ⁻¹]	λ_{th} [s ⁻¹]	$\lambda_{th,corr}$ [ms ⁻¹]	ϵ_{th} [%]	ϵ_{corr} [%]
10 ± 0.1	7.8 ± 1.3	5000 ± 300	7570 ± 300	56	3
50 ± 0.5	3.3 ± 0.4	1000 ± 60	3570 ± 60	230	7
900 ± 9	2.6 ± 0.3	55 ± 3	2625 ± 7	460	0

Table 1: Valeurs de λ_{exp} comparées aux valeurs théoriques, avec calcul de l'erreur en régime sous-critique

Oscillations forcées

Dans le cas des oscillations forcées, la valeur de la résistance interne du circuit varie. En effet, $R_{in} = R_L = (207.0 \pm 0.3) \Omega$. Le générateur de fonction maintient une tension U_{in} à haute fréquence avec une amplitude maximale de 0.5 V pour analyser le gain et la phase du signal. Les mesures sont effectuées à partir des paramètres suivants: les fréquence allant de 2 kHz à 30 kHz avec des incréments de 200 par décade. Les valeurs des résistances du circuit mesuré sont 10 k Ω , 50 k Ω et 900 k Ω . La pulsation harmonique du système vaut ici $w_0 = (7100 \pm 200)$ Hz. Pour chaque valeur de la résistance, les valeurs de Ω_r , $\Delta\Omega$, Q , et λ_{exp} ont été mesurées à partir des graphes sur Fig.(5a), Fig.(5b) et calculées et comparées aux valeurs théoriques dans le tableau (2). λ_{exp} sera calculé à l'aide de l'équation (7). Dans les calculs de Ω_{th} , une conversion s'effectue de rad.s⁻¹ en Hz par un facteur 2π , pour comparer les valeurs expérimentales et théoriques de la fréquence de résonance.

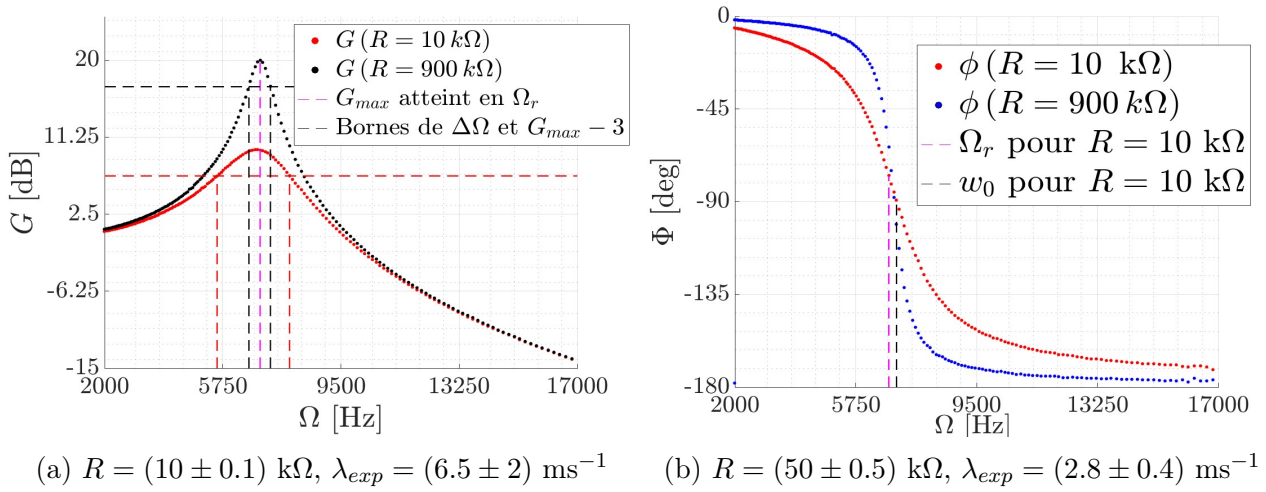


Figure 5: Diagramme de Bode du gain G [dB] et graphe de la phase ϕ [deg] en fonction de Ω [Hz] pour deux valeurs de $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $R = 900 \text{ k}\Omega$ en régime souscritique

R [k Ω]	λ_{exp} [ms ⁻¹]	Ω_r [Hz]	λ_{thcorr} [s ⁻¹]	Ω_{rth} [Hz]	$\epsilon_{\lambda_{corr}}$ [%]	ϵ_{Ω_r} [%]
10 ± 0.1	7155 ± 30	6777 ± 20	7070 ± 300	6910 ± 200	1	2
50 ± 0.5	3146 ± 2	6935 ± 3	3070 ± 60	7072 ± 200	2	2
900 ± 9	2191 ± 4	6935 ± 3	2125 ± 7	7093 ± 200	3	2

Table 2: Valeurs de λ_{exp} et Ω_r comparées aux valeurs théoriques, avec calcul de l'erreur

Enfin, la dernière mesure du circuit repose sur l'inversement de la capacité C et de l'inductance L dans le montage avec l'usage d'une résistance de 10 k Ω . La comparaison du montage original avec de celui-ci se trouve sur les Fig.(6a) et Fig.(6b). Les valeurs du gain et de toutes les autres caractéristiques du circuit inversé: Ω_r , $\Delta\Omega$, Q , et λ_{exp} sont égales à celles de l'original.

R [k Ω]	$\Delta\Omega$ [Hz]	Q
10 ± 0.1	2300 ± 4	2.9 ± 0.8
50 ± 0.5	1002 ± 6	6.9 ± 0.3
900 ± 9	682 ± 5	10.2 ± 0.4

Table 3: Valeurs de $\Delta\Omega$ et Q

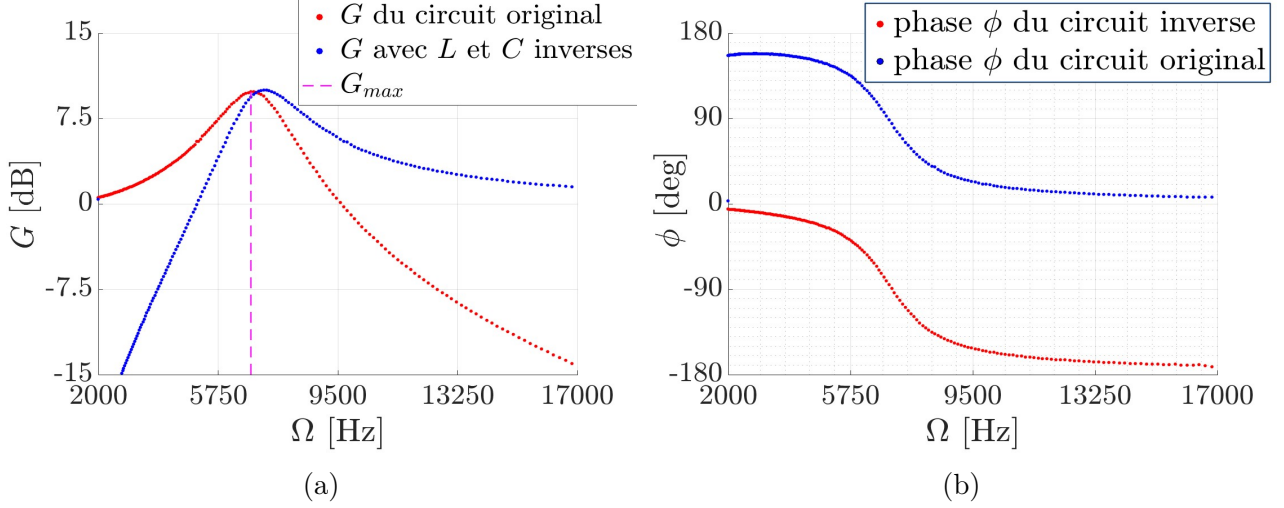


Figure 6: Diagramme de Bode du gain G [dB] et graphe de la phase ϕ [deg] en fonction de Ω [Hz] avec $R = 10 \text{ k}\Omega$ en régime du circuit original et de celui avec L et C échangés

4 Discussion

4.1 Oscillations libres

Malgré un signal d'entrée d'amplitude non nulle, la forme carrée et la très faible fréquence f du signal permettent de simuler une légère impulsion appliquée au système avant son retour au repos. Il s'agit du phénomène recherché pour les oscillations libres. En régime sous-critique, les Fig.(2a) et Fig.(2b) présentent la diminution de la résistance du système (toujours plus élevée que la résistance critique) entraînant la diminution de l'amplitude du signal de sortie avant son retour à une position d'équilibre. Comme le suggère l'expression même du coefficient d'amortissement, la baisse de la résistance provoque l'augmentation de λ , et donc de la pulsation w du signal qui diminue jusqu'à ne plus osciller.

Quant au coefficient λ , sa mesure est effectuée à l'aide d'un fit exponentiel sur l'enveloppe de l'oscillation. La forte imprécision de la valeur λ_{exp} mesurée s'explique ainsi par les incertitudes de mesures, du fit mais aussi le faible nombre de données utilisées pour la production du fit. Pour améliorer ce point, augmenter la fréquence d'échantillonnage ou moyenner les mesures de λ_{exp} pour la même résistance sont des solutions optimales.

Dans le tableau (1), la croissance de R à partir de R_{cr} implique une décroissance de λ qui ne semble absolument pas correspondre à la valeur théorique λ_{exp} . En effet, la croissance de l'erreur relative ϵ_{th} de λ_{exp} (56%, 230%, 460%) avec l'augmentation de R démontre l'importance de la prise en compte de la résistance interne des composants du circuit pour déterminer λ_{exp} . Le terme constant dans l'équation (6) $R_{in}/(2L)$ induit un décalage de 2570 Hz entre la valeur λ_{th} purement théorique et $\lambda_{th,corr}$. Cette différence devient fondamentale dès que la résistance R du circuit n'est plus de l'ordre de R_{rc} . Après considération, $\lambda_{th,corr}$ est très proche de λ_{exp} , l'erreur résultant est ainsi de l'ordre de 5 %, résultat satisfaisant les attentes de la théorie. La non-nullité (3%, 7%) de cette erreur relative s'explique sûrement par les incertitudes de mesure, de fits ainsi que par la résistance interne des autres composants du circuit comme les fils.

Pour le régime critique, le comportement du système est bien celui attendu sur la Fig.(3). Lorsque $R = R_{rc}$ la tension U_{out} converge au plus vite vers la tension d'entrée U_{in} . Par ailleurs, la valeur mesurée $\lambda_{exp} = (9 \pm 1) \text{ ms}^{-1}$ dans ce régime est tout à fait cohérente avec la valeur attendue étant donné que $w_0 = (7100 \pm 200) \text{ Hz}$ et qu'il faut toujours tenir compte des résistances internes. De plus, le fit effectué sur ce régime est moins précis que le précédent par manque de mesures, donc l'erreur admise est cohérente.

Enfin, le régime surcritique, présenté sur la Fig.(4), montre un retour sans oscillation vers la

position d'équilibre. La tendance du système à revenir à l'équilibre est bien corrélée au coefficient d'amortissement et donc de la résistance utilisée dans le montage. Cet amortissement s'avère suffisamment puissant selon la résistance pour ne pas laisser le système revenir à l'équilibre avant la prochaine impulsion du signal d'entrée. Les comportements observés sur ces trois régimes correspondent bien à ceux décrits par la théorie en particulier à l'équation (4).

Oscillations forcées

Dans ce type d'oscillation, le système se caractérise par son comportement lorsqu'il entre en résonance. La Fig.(5a) montre qu'avec l'utilisation toujours plus grande de résistance $R > R_{rc}$, le gain maximal G_{max} atteint en résonance croît alors que la fréquence Ω_r diminue, cette réaction s'explique par la diminution de λ_{exp} conforme à la théorie. Il en va de même pour le facteur de qualité de la résonance Q puisque la finesse de la résonance diminue ($\Delta\Omega$ décroît). Un cas particulier est la nullité du coefficient d'amortissement λ , possible lorsque ($RC \rightarrow \infty$), qui conduit à un gain $G_{max} = \infty$ lorsque le système entre en résonance. Un léger déphasage entre w_0 et Ω_r se remarque lorsque la résistance utilisée est de l'ordre de R_{rc} , ce qui est cohérent avec l'expression de la fréquence de pulsation. Dans le tableau (2), l'erreur relative ϵ_{Ω_r} reste constante (2 %) mais compte tenu du faible nombre de mesures, la valeur théorique ne peut pas être considérée comme très fiable, notamment car la valeur de Ω_r ne varie pas expérimentalement pour $R = 50 \text{ k}\Omega$ et $R = 900 \text{ k}\Omega$ ($\Omega_r = 6935 \text{ Hz}$), tandis que la valeur théorique change $\Omega_{r_{th}} : 7072 \text{ Hz} \rightarrow 7093 \text{ Hz}$, malgré l'incertitude de ces deux valeurs. D'un autre côté, la valeur λ_{exp} dans le tableau(2) calculée à partir de l'équation (7) est restée similaire que celle calculée à l'aide des fits, compte tenu des incertitudes. Cette constance affirme la précision du résultat. De plus, la valeur théorique attendue $\lambda_{th,corr}$ a varié, entraîné par la variation de la résistance interne du circuit (R_G pris en compte par le logiciel). Par conséquent, l'erreur relative ϵ_{th} de $\lambda_{th,corr}$ du tableau (2) de l'ordre de 4 % a diminué par rapport à celle du tableau (1) avec des erreurs de l'ordre de 2 %. En plus, d'une erreur plus faible, cette technique offre une incertitude bien plus faible passant d'un ordre de 500 Hz sur le tableau (1) à une incertitude bien plus précise de l'ordre de 10 Hz sur le tableau (2). Faut-il en conclure que la deuxième méthode est plus convenable? Cette conclusion est très probable mais pas certaine à cause du manque de mesures effectuées. La dernière expérience était l'inversion des dipôles L et C qui provoque un comportement symétrique à celui du circuit original sur la figure Fig.(6a). En effet, cette pseudo-symétrie se produit autour de la fréquence de résonance Ω_r . Alors que le circuit original, amplifiait légèrement, le signal dans les faibles fréquences et atténuait fortement les hautes fréquences, le circuit inversé atténue les faibles fréquences et amplifie les hautes fréquences. Il s'agit du comportement d'un filtre passe-haut pour le circuit original et d'un filtre passe-bas pour le circuit inversé. Une approximation de la pente de ces filtres dans leur phase d'atténuation est d'environ 20 dB par décade, ce sont des filtres du deuxième ordre. La fréquence de résonance Ω_r de ces deux circuits est égale et la phase est de 90° mais négative pour le circuit original et positive pour celui inversé.

5 Conclusion

Tous les modes d'oscillations ont été étudiés et ont permis de mettre en évidence les caractéristiques du circuit RCL. Dans chaque cas de figure, des mesures ont été effectuées pour estimer les erreurs des valeurs théoriques du circuit. L'ensemble des résultats ont été conformes à ceux attendus par la théorie. La considération de certains facteurs propre au montage utilisé ont été fondamental pour ces estimations, en particulier la précision des appareils de mesures utilisés et les résistances internes du circuit. Des propriétés cruciales des filtres passe-haut et passe-bas ont été présentées. Ainsi, les comportements oscillatoires ci-observés permettent de mieux comprendre la mécanique oscillatoire et donc répondre à de nouveaux problèmes.

6 Références

- [1] SKYbrary, Oscillation induite par le pilote:
<https://skybrary.aero/articles/pilot-induced-oscillation>
- [2] Wikipedia, Pont du détroit de Tacoma (1940):
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_détroit_de_Tacoma_\(1940\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_détroit_de_Tacoma_(1940))
- [3] EPFL, TP Physique, Traitement des erreurs de mesure, Moodle:
https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/3003789/mod_resource/content/2/Erreurs_2022.pdf
- [4] EPFL, TP2 expériences notices, G3. RLC Circuits:
https://www.epfl.ch/schools/sb/sph/wp-content/uploads/G3_RLC_Circuits.pdf

7 Incertitudes

Le multimètre possède une incertitude de ± 3 sur le dernier digit. Cette incertitude a été prise en compte dans la mesure de R_L . D'après les informations données par le fabricant, les machines employées ont pour incertitudes:

$$\frac{\Delta L}{L} = 0.05 \quad \frac{\Delta R}{R} = 0.01 \quad \frac{\Delta C}{C} = 0.01$$

De plus, par le calcul, les expressions suivantes sont les incertitudes des valeurs mesurées, l'ensemble des valeurs étant positives, l'inutilisation de valeurs absolues allège les expressions:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_{th} &= \lambda_{th} \left(\frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta R}{R} \right) \\ \Delta \lambda_{th, \text{corr.}} &= \Delta \lambda_{th} + \frac{1}{2L} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta R_{in}}{L} \right) \\ \Delta \omega_0 &= \frac{1}{2} \omega_0 \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta C}{C} \right) \\ \Delta \omega &= \frac{\omega_0 \Delta \omega_0 + \lambda \Delta \lambda}{\omega} \\ \Delta \Omega_r &= \frac{\omega \Delta \omega + 2\lambda \Delta \lambda}{\Omega_r} \end{aligned}$$

Pour l'équation (7), l'incertitude du calcul est la suivante:

$$\Delta \lambda_{exp} = \Delta \Omega_{r_{exp}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{G_{max}^2}{G_{max}^2 - 1}} - 1 \right)} + \left| \frac{-\Omega_{r_{exp}} G_{max} \Delta G_{max}}{8 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{G_{max}^2}{G_{max}^2 - 1}} - 1 \right)} \sqrt{\frac{G_{max}^2}{G_{max}^2 - 1}} (G_{max}^2 - 1)^2} \right|$$

Les incertitudes des valeurs expérimentales, lues sur les graphiques à l'aide du curseur, ont été choisies pour couvrir largement la valeur attendue.