

Physique numérique Exercice 4

Armand Le Douarec, Maxime Chatelin
armand.ledouarec@epfl.ch, maxime.chatelin@epfl.ch

15 avril 2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Calculs analytiques	2
3	Implémentation en C++	6
3.1	Définition des constantes et des structures de données	6
3.2	Cas sans variation : $\epsilon_r(r) = 1$, $\rho_{\text{lib}}(r) = \epsilon_0$	6
3.3	Cas avec variation de $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$	8
3.4	Vérification de $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{lib}}$	9
4	Résultats facultatifs	11
5	Conclusion	13

1 Introduction

Cette étude se concentre sur l'analyse numérique du comportement électrostatique d'un cylindre diélectrique en présence de charges libres. En utilisant la méthode des éléments finis, nous cherchons à déterminer la distribution du potentiel électrostatique, du champ électrique et du champ de déplacement dans un milieu à symétrie cylindrique. La permittivité relative du matériau varie radialement, ce qui complexifie l'analyse. L'objectif est d'évaluer la précision et la stabilité de la méthode numérique en comparant les résultats obtenus avec des solutions analytiques lorsque celles-ci sont disponibles. Cette approche permet de modéliser des phénomènes électrostatiques complexes et de démontrer l'efficacité des méthodes numériques dans ce contexte. L'étude met également en lumière l'impact de la discrétisation sur la fidélité des résultats, soulignant l'importance des techniques avancées d'intégration numérique et de résolution de systèmes linéaires.

2 Calculs analytiques

(a) Équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$

L'équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$ en électrostatique est donnée par l'équation de Poisson :

$$\nabla \cdot (\epsilon_r(\vec{x}) \nabla \phi(\vec{x})) = -\frac{\rho_{\text{lib}}(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (1)$$

où $\epsilon_r(\vec{x})$ est la permittivité relative du milieu, $\rho_{\text{lib}}(\vec{x})$ est la densité de charges libres, et ϵ_0 est la permittivité du vide.

(b) Forme variationnelle du problème

La forme variationnelle du problème peut être obtenue en multipliant l'équation de Poisson par une fonction de test $v(\vec{x})$ et en intégrant sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} v(\vec{x}) \nabla \cdot (\epsilon_r(\vec{x}) \nabla \phi(\vec{x})) d\vec{x} = - \int_{\Omega} v(\vec{x}) \frac{\rho_{\text{lib}}(\vec{x})}{\epsilon_0} d\vec{x} \quad (2)$$

En utilisant le théorème de la divergence (ou théorème de Green), nous obtenons :

$$- \int_{\Omega} \epsilon_r(\vec{x}) \nabla v(\vec{x}) \cdot \nabla \phi(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} v(\vec{x}) \epsilon_r(\vec{x}) \nabla \phi(\vec{x}) \cdot \vec{n} dS = - \int_{\Omega} v(\vec{x}) \frac{\rho_{\text{lib}}(\vec{x})}{\epsilon_0} d\vec{x} \quad (3)$$

où \vec{n} est le vecteur normal sortant sur la frontière $\partial\Omega$.

En imposant les conditions aux limites de Dirichlet ($\phi(\vec{x}) = V_0$ sur $\partial\Omega$, donc $\nabla \phi(\vec{x}) = 0$), le terme de frontière disparaît, et nous obtenons la forme variationnelle :

$$\int_{\Omega} \epsilon_r(\vec{x}) \nabla v(\vec{x}) \cdot \nabla \phi(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} v(\vec{x}) \frac{\rho_{\text{lib}}(\vec{x})}{\epsilon_0} d\vec{x} \quad (4)$$

(c) Cas cylindrique, symétrie radiale

Pour un cylindre de rayon R et longueur L_z , en utilisant des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et en supposant que le problème est symétrique en θ et z , nous avons $\phi(r)$, $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$.

La forme variationnelle devient :

$$\int_0^R \epsilon_r(r) \frac{dv(r)}{dr} \frac{d\phi(r)}{dr} r dr = \int_0^R v(r) \frac{\rho_{\text{lib}}(r)}{\epsilon_0} r dr \quad (5)$$

(d) Discrétisation éléments finis linéaires

Pour discrétiser le problème en utilisant la méthode des éléments finis linéaires, nous divisons le domaine $[0, R]$ en N intervalles $[r_k, r_{k+1}]$ avec $h_k = r_{k+1} - r_k$. Les fonctions de base linéaires $\psi_i(r)$ sont définies comme :

$$\psi_i(r) = \begin{cases} \frac{r-r_{i-1}}{h_{i-1}}, & \text{si } r_{i-1} \leq r \leq r_i \\ \frac{r_{i+1}-r}{h_i}, & \text{si } r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Le potentiel $\phi(r)$ est approximé par :

$$\phi(r) \approx \sum_{i=1}^N \phi_i \psi_i(r) \quad (7)$$

En substituant cette approximation dans la forme variationnelle et en utilisant les fonctions de base comme fonctions de test, nous obtenons le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^N \phi_j \int_0^R \epsilon_r(r) \frac{d\psi_i(r)}{dr} \frac{d\psi_j(r)}{dr} r dr = \int_0^R \psi_i(r) \frac{\rho_{\text{lib}}(r)}{\epsilon_0} r dr \quad (8)$$

Les éléments de la matrice A_{ij} sont calculés comme suit :

$$A_{ij} = \int_0^R \epsilon_r(r) \frac{d\psi_i(r)}{dr} \frac{d\psi_j(r)}{dr} r dr \quad (9)$$

Pour les éléments diagonaux ($i = j$), cela devient :

$$A_{ii} = \int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \epsilon_r(r) \left(\frac{1}{h_{i-1}^2} + \frac{1}{h_i^2} \right) r dr \quad (10)$$

Pour les éléments hors diagonale ($j = i \pm 1$), cela devient :

$$A_{i,i+1} = - \int_{r_i}^{r_{i+1}} \epsilon_r(r) \frac{1}{h_i^2} r \, dr \quad (11)$$

Les termes du membre de droite b_i sont calculés comme suit :

$$b_i = \int_0^R \psi_i(r) \frac{\rho_{\text{lib}}(r)}{\epsilon_0} r \, dr \quad (12)$$

(e) Champs $\vec{E}(r)$ et $\vec{D}(r)$

Le champ électrique $\vec{E}(r)$ et le champ de déplacement $\vec{D}(r)$ sont donnés par :

$$\vec{E}(r) = -\nabla\phi(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} \vec{e}_r \quad (13)$$

$$\vec{D}(r) = \epsilon_r(r) \vec{E}(r) = -\epsilon_r(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \vec{e}_r \quad (14)$$

En utilisant la représentation en éléments finis, nous avons :

$$\frac{d\phi(r)}{dr} \approx \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{d\psi_i(r)}{dr} \quad (15)$$

Aux points milieux des intervalles $r_{k+1/2} = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}$, nous obtenons :

$$\vec{E}(r_{k+1/2}) = - \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{d\psi_i(r_{k+1/2})}{dr} \vec{e}_r \quad (16)$$

$$\vec{D}(r_{k+1/2}) = -\epsilon_r(r_{k+1/2}) \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{d\psi_i(r_{k+1/2})}{dr} \vec{e}_r \quad (17)$$

(f) Cas analytique : $\epsilon_r(r) = 1$, $\rho_{\text{lib}}(r) = \rho_0$

Pour le cas simple où $\epsilon_r(r) = 1$ et $\rho_{\text{lib}}(r) = \rho_0$ est constant, l'équation de Poisson devient :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad (18)$$

En intégrant une fois, nous obtenons :

$$r \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r^2 + C_1 \quad (19)$$

En intégrant une deuxième fois, nous obtenons :

$$\phi(r) = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (20)$$

En utilisant les conditions aux limites $\phi(R) = V_0$ et $\phi(0)$ fini, nous obtenons :

$$\phi(r) = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} R^2 + V_0 \quad (21)$$

En particulier, on a :

$$\phi(0) = V_0 + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} R^2 \quad (22)$$

Dans le cas où $V_0 = 0$:

$$\phi(0) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} R^2 \quad (23)$$

Et si l'on travaille avec des unités sans ϵ_0 , ou que $\epsilon_0 = 1$:

$$\phi(0) = \frac{\rho_0}{4} R^2 \quad (24)$$

Par exemple, avec $\rho_0 = 1$ et $R = 0.05$:

$$\phi(0) = \frac{1}{4} \cdot (0.05)^2 = 0.000625 \quad (25)$$

3 Implémentation en C++

L'implémentation des calculs numériques a été réalisée en langage C++. Nous avons évalué numériquement les champs $E(r)$ et $D(r)$ à partir des équations issues de la méthode des éléments finis, et comparé ces résultats aux solutions analytiques.

3.1 Définition des constantes et des structures de données

Nous définissons d'abord les constantes physiques utilisées dans la première étape de la simulation, ainsi que les structures de données permettant de stocker les informations relatives aux champs $E(r)$ et $D(r)$.

```
// Constantes physiques
R = 0.05
r1 = 0.015
epsilon_a = 1
epsilon_b = 4
rho0 = 1
uniform_rho_case = 1
VR = 0
N1 = 1000
N2 = 10000
```

3.2 Cas sans variation : $\epsilon_r(r) = 1$, $\rho_{\text{lib}}(r) = \epsilon_0$

Pour cette première vérification, nous avons considéré un cas simple où la permittivité relative est constante et égale à 1 dans tout le domaine, et la densité de charges libres est uniformément égale à ϵ_0 .

Nous avons résolu numériquement le problème avec les paramètres suivants :

- $V_0 = 0$
- $R = 0.05 \text{ m}$
- $r_1 = 0.015 \text{ m}$
- $N_1 = N_2 = N$ (diverses valeurs testées)

Le potentiel analytique au centre du cylindre est donné par :

$$\phi(0) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} R^2 = 0.000625$$

Nous avons ensuite comparé le potentiel numérique obtenu en $r = 0$ avec cette valeur théorique. La Fig.(1) présente le potentiel électrostatique $\phi(r)$ en fonction du rayon r .

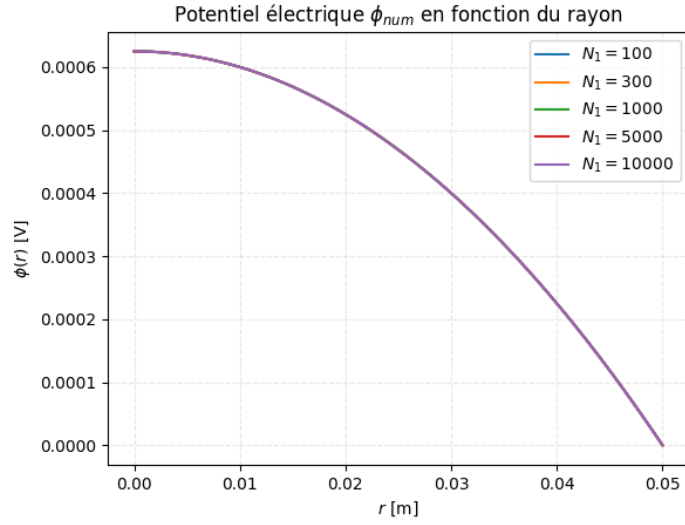


FIGURE 1 – Potentiel électrostatique $\phi(r)$ pour le cas test.

La Fig.(1) montre que la variation du paramètre N (avec $N = N_1 = N_2$) n'a qu'un impact négligeable sur la forme globale de la solution, tant celle-ci est proche de l'analytique. D'après l'équation (21), la solution exacte $\phi(r)$ est une fonction quadratique, ce qui est parfaitement vérifié graphiquement. La solution numérique obtenue respecte donc bien les conditions analytiques. En particulier, la valeur obtenue au centre du cylindre est $\phi_{\text{num}}(0) \approx 0.000625$, en excellent accord avec la valeur théorique. Enfin, la Fig.(2) illustre la convergence de la solution numérique vers la solution analytique en $r = 0$ lorsque N augmente.

L'étude de convergence de $\phi(0)$ a pour paramètre le nombre de mailles N et a été effectuée en échelle log-log :

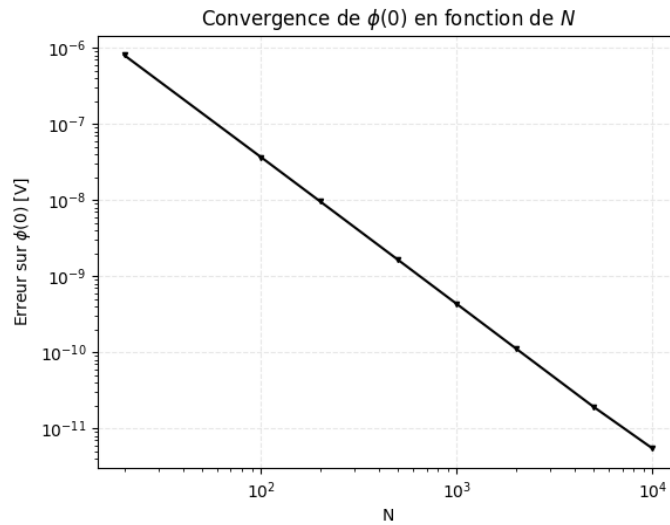


FIGURE 2 – Convergence de $\phi(0)$ en fonction de N en échelle log-log.

La pente observée sur la Fig.(2) est de 2. On en déduit que la méthode numérique implémentée présente un comportement parfaitement cohérent avec les attentes théoriques pour des éléments finis linéaires. Ce résultat confirme d'une part la justesse de la discrétisation adoptée et d'autre part la qualité de l'assemblage de la matrice de rigidité et du second membre. Par ailleurs, cette convergence quadratique valide également l'utilisation de la règle du point milieu pour l'intégration des éléments locaux dans ce contexte, ainsi que le bon traitement des conditions aux limites.

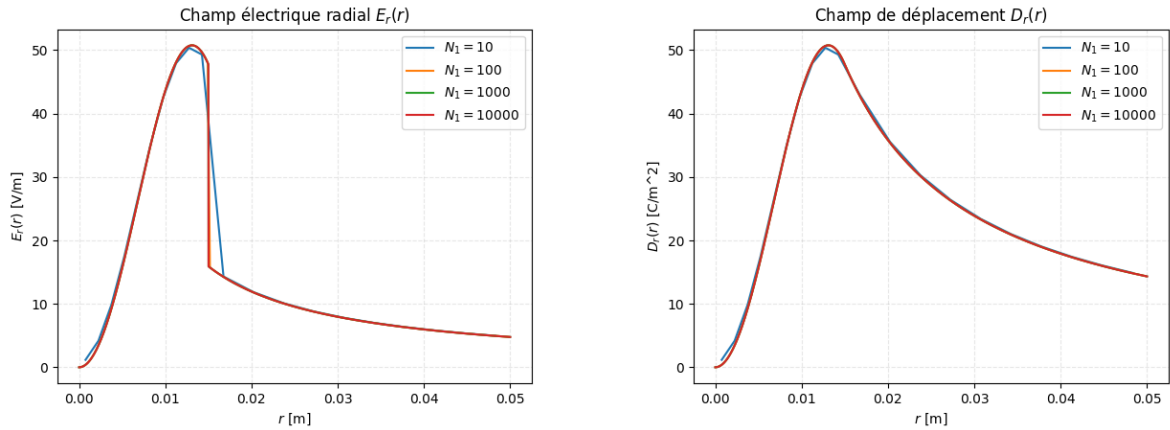
3.3 Cas avec variation de $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$

Les paramètres physiques sont les mêmes que pour le cas précédent. En revanche, on considère à présent le cas où :

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq r < r_1 \\ 4 & \text{pour } r_1 \leq r \leq R \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_{\text{lib}}(r)}{\epsilon_0} = \begin{cases} \rho_0 \sin\left(\frac{\pi r}{r_1}\right) & \text{pour } 0 \leq r < r_1 \\ 0 & \text{pour } r_1 \leq r \leq R \end{cases}$$

avec $\rho_0 = 10^4 \text{ V/m}^2$.

Les résultats numériques pour le potentiel $\phi(r)$ (Fig.(4a)), le champ électrique $E(r)$ (Fig.(3a)) et le champ $D(r)$ (Fig.(3b)) sont présentés. Plusieurs configurations ont été étudiées en faisant varier la valeur de N_1 , tandis que N_2 est maintenu constant : $N_2 = 10000$.



(a) Champ électrique $E(r)$.

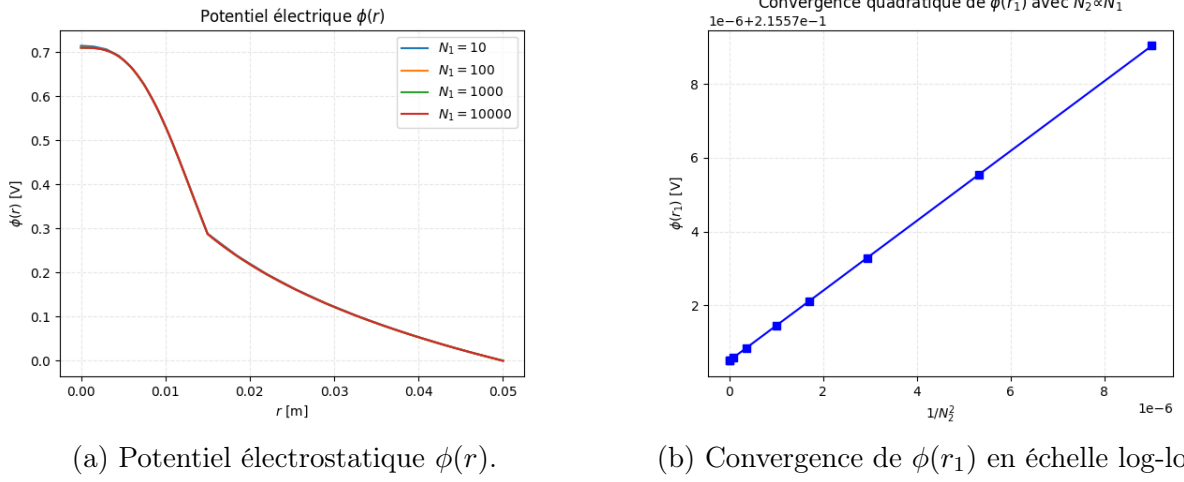
(b) Champ $D(r)$.

FIGURE 3 – Évolution de $E(r)$ et $D(r)$ en fonction de r pour différentes valeurs de N_1 .

Sur la Fig.(3), les champs calculés numériquement concordent bien avec les prédictions théoriques. En effet, on observe une augmentation des champs E et D dans l'intervalle $[0, r_1]$, ce qui est en accord avec le théorème de Gauss. Dans l'intervalle $[r_1, R]$, ces champs décroissent, conformément, là encore, à la théorie. La principale différence apparaît en $r = r_1$: comme attendu, la solution numérique pour D , notée $D_{\text{num}}(r)$, reste continue, tandis que celle pour E , $E_{\text{num}}(r)$, présente une discontinuité, ce qui est cohérent avec le comportement attendu du champ électrique. Par ailleurs, les différentes configurations testées (selon les valeurs de

N_1) montrent une bonne précision. Seul le cas $N_1 = 10$ présente une légère erreur au niveau de la discontinuité de $E_{num}(r)$, mais celle-ci devient négligeable dès que N_1 augmente.

De plus, l'étude de convergence de $\phi(r_1)$ en fonction de N_1 (avec N_2 proportionnel à N_1) est présentée sur la Fig.(4b) en échelle log-log.



(a) Potentiel électrostatique $\phi(r)$.

(b) Convergence de $\phi(r_1)$ en échelle log-log.

FIGURE 4 – Évolution du potentiel électrostatique et de sa convergence en $r = r_1$ selon N_1 .

La Fig.(4a) présente une solution numérique $\phi_{num}(r)$ cohérente avec la théorie. En effet, on observe numériquement que la fonction obtenue pour $\phi_{num}(r)$ correspond à l'intégrale de $E_{num}(r)$ dont les conditions aux bords sont satisfaites. Quant à la Fig.(4b), elle confirme la convergence quadratique attendue. Ceci est attendu étant donné l'utilisation d'éléments finis linéaires sur un problème suffisamment régulier. La convergence est donc optimale pour ce schéma numérique.

3.4 Vérification de $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib}$

Nous avons vérifié numériquement la relation de Maxwell $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib}$ en utilisant une approximation par différences finies centrées aux points milieux des milieux des intervalles. Les résultats sont présentés sur la Fig.(5).

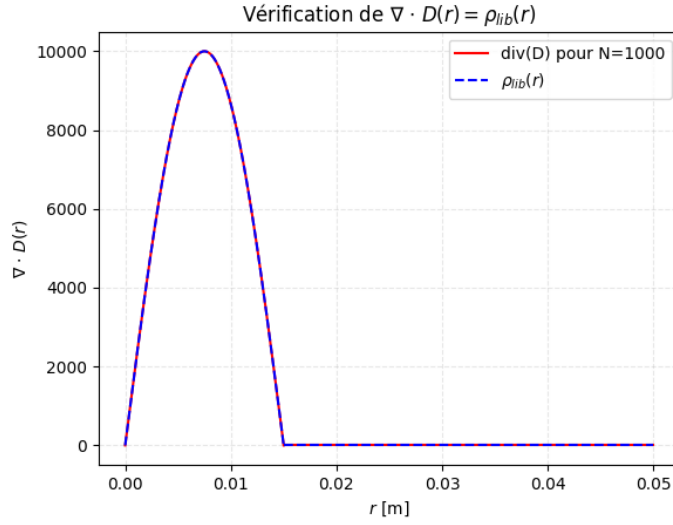


FIGURE 5 – Comparaison entre $\frac{dD}{dr}$ et ρ_{lib} .

On en déduit ainsi que la divergence du champ D est en accord avec la densité de charges libres imposée.

En utilisant le théorème de la divergence (i.e. $\iiint \nabla \cdot \vec{D} dV = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S}$), la loi de Maxwell et la surface latérale d'un cylindre, la charge libre totale peut être calculée :

$$Q_{\text{lib}} = \iiint \rho_{\text{lib}} dV = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi R L_z D(R) \quad (26)$$

où $D(R)$ désigne la composante radiale du champ \vec{D} évaluée en $r = R$.

De manière similaire, l'expression de la charge totale Q_{tot} est donnée par :

$$Q_{\text{tot}} = \epsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi\epsilon_0 R L_z E(R) \quad (27)$$

où $E(R)$ désigne la composante radiale du champ \vec{E} évaluée en $r = R$.

Le champ de polarisation \vec{P} est défini par : $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$. Pour $r < r_1$, on a $\epsilon_r = 1$, ce qui implique que $\vec{P} = 0$. Cependant, pour $r > r_1$, on a $\epsilon_r = 4$, ce qui conduit à un champ \vec{P} non nul. Les charges libres interagissant avec les charges de polarisation, on comprend que l'ensemble des charges Q_{pol} se trouve à la surface intérieure du cylindre, soit pour $r = r_1$. Les charges de polarisation sont finalement obtenues par la différence entre la charge totale et la charge libre : $Q_{\text{pol}} = Q_{\text{tot}} - Q_{\text{lib}}$.

Les valeurs numériques obtenues pour un maillage fin ($N_1 = 1000$) sont les suivantes :

$$\begin{cases} Q_{\text{lib}}/\epsilon_0 &= 4,50 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \\ Q_{\text{tot}}/\epsilon_0 &= 1,126 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \\ Q_{\text{pol}}/\epsilon_0 &= -3,39 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{cases} \quad (28)$$

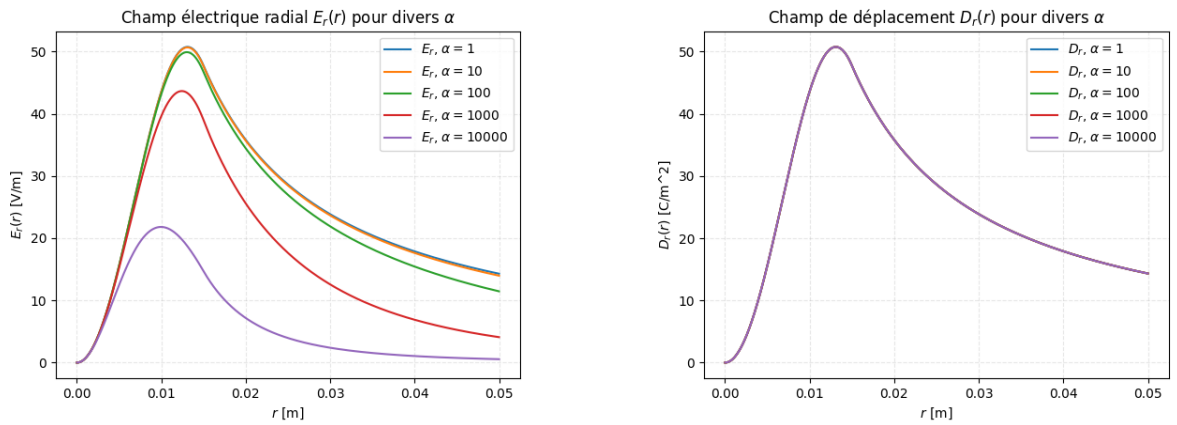
4 Résultats facultatifs

Cas avec $\epsilon_r(r) = 1 + \alpha r^2$

Nous avons exploré l'effet d'une permittivité radiale croissante du type :

$$\epsilon_r(r) = 1 + \alpha r^2$$

avec plusieurs valeurs de α , tout en conservant les anciens paramètres physiques et $\rho_0 = 10^4 \text{ V/m}^2$, $N_1 = 1000$, $N_2 = N_1$. Les résultats numériques montrent l'impact de α sur la distribution de $\phi(r)$ (Fig.(7)), $E(r)$ (Fig.(6a)) et $D(r)$ (Fig.(6b)).



(a) Champ $E(r)$ pour différentes valeurs de α . (b) Champ $D(r)$ pour différentes valeurs de α .

FIGURE 6 – Champs électriques $E(r)$ et de déplacement $D(r)$ en fonction de r pour plusieurs valeurs de α .

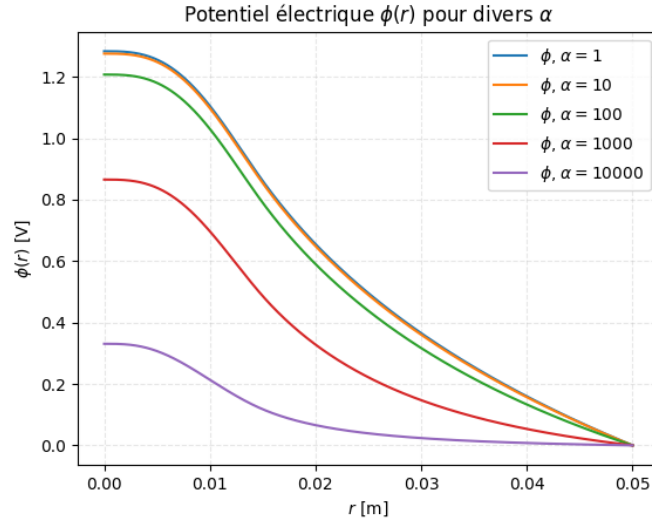


FIGURE 7 – Potentiel $\phi(r)$ pour différentes valeurs de α .

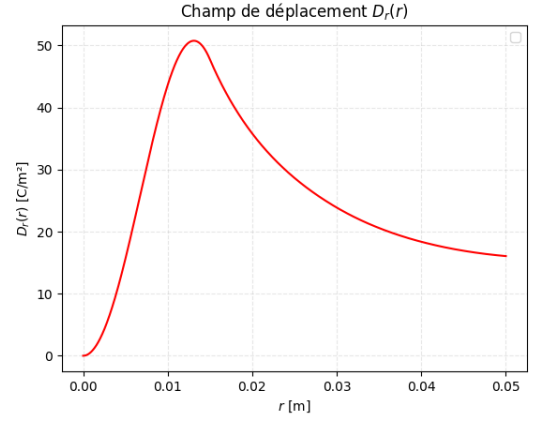
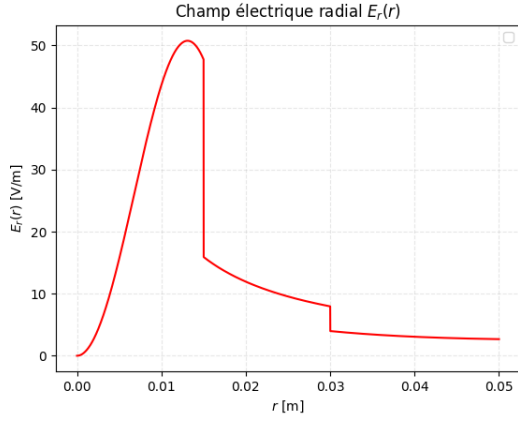
On observe ainsi que α n'influence pas $D(r)$ ce qui est bien conforme à la théorie. En revanche, pour $\phi(r)$ et $E(r)$, l'augmentation du paramètre α entraîne une diminution de $\phi(r)$ et $E(r)$, toujours conforme à la théorie.

Cas à trois cylindres concentriques

Enfin, nous avons modélisé un système à trois régions diélectriques de permittivités constantes $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$ et $\epsilon_3 = 6$, avec $N_1 = N_2 = N_3 = 10000$, et une densité de charge libre prenant la forme :

$$\rho_{\text{lib}}(r) = \begin{cases} \rho_0 \sin\left(\frac{\pi r}{r_1}\right) & \text{pour } 0 \leq r < r_1 \\ 0 & \text{pour } r_1 \leq r < r_2 \\ \rho_0 \left(\frac{r-r_2}{R-r_2}\right) & \text{pour } r_2 \leq r \leq R \end{cases}$$

Les distributions de $\phi(r)$ (Fig.(9)), $E(r)$ (Fig.(8a)) et $D(r)$ (Fig.(8b)) obtenues confirment les attentes physiques.



(a) Champ $E(r)$ pour le système à trois zones. (b) Champ $D(r)$ pour le système à trois zones.

FIGURE 8 – Champs électriques $E(r)$ et de $D(r)$ dans un système à trois zones.

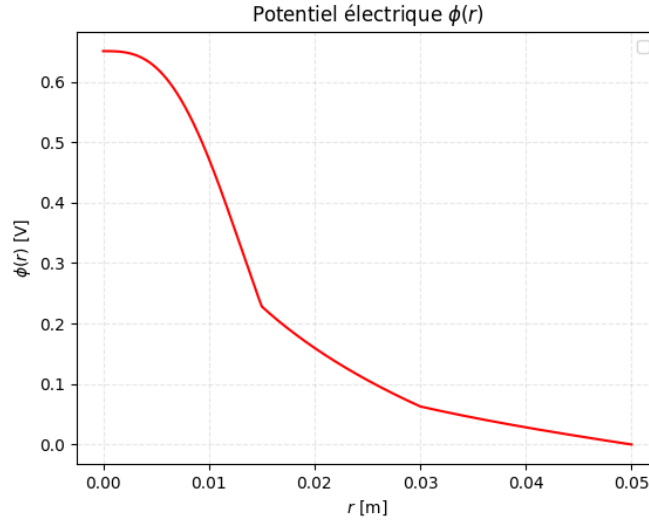


FIGURE 9 – Potentiel $\phi(r)$ pour le système à trois zones.

Les points de discontinuité du champ $E(r)$ visibles sur la Fig.(8a) sont cohérents avec la théorie tandis que le champ $D(r)$ est continu sur la Fig.(8b). Enfin, le champ $E(r)$ semble bien être la dérivée du potentiel $\phi(r)$ visible sur la Fig.(9).

5 Conclusion

Cette étude a permis de valider l'implémentation d'une méthode des éléments finis pour un problème d'électrostatique cylindrique, en exploitant la symétrie radiale pour simplifier le

traitement numérique. L'approche variationnelle utilisée a conduit à une formulation rigoureuse du problème, dont la discrétisation a été réalisée à l'aide d'éléments finis linéaires.

Les tests analytiques menés, notamment dans le cas d'un milieu homogène à densité de charge constante, ont permis de comparer les résultats numériques avec des solutions exactes, renforçant la confiance dans l'implémentation. Par ailleurs, le comportement des champs électrique $E(r)$ et $D(r)$, calculés à partir du potentiel, respecte les relations constitutives de l'électrostatique, témoignant de la bonne conservation des lois de Maxwell.

Enfin, les extensions facultatives, telles que l'introduction d'un profil de permittivité variable ou l'étude de systèmes à plusieurs zones, ont démontré la grande flexibilité de la méthode. Ces configurations plus complexes ont été traitées sans difficulté majeure, illustrant l'adaptabilité de l'approche par éléments finis à une grande variété de problèmes physiques, au-delà des cas analytiquement solvables.

En somme, cette étude confirme à la fois la solidité théorique et l'efficacité pratique de la méthode employée, ouvrant la voie à des applications plus ambitieuses en électromagnétisme ou en physique des milieux continus.