

Proyecto I Bimestre

1. Objetivos

1.1.- Desarrollar un algoritmo capaz de calcular con precisión el ancho de un pasillo, dado que existen dos escaleras que están inclinadas desde las paredes.

1.2.- Aplicar fórmulas matemáticas para determinar la relación entre los valores conocidos y el valor que se desea calcular, con el fin de obtener una ecuación que permita encontrar el ancho de la habitación (W).

2. Introducción

En el estudio de la geometría aplicada y la ingeniería civil, la determinación precisa de dimensiones en estructuras físicas es una tarea fundamental. Un ejemplo clásico de este tipo de problemas es el cálculo del ancho de un pasillo utilizando la intersección de dos escaleras que se inclinan desde paredes opuestas. Este tipo de análisis no solo es relevante en el diseño arquitectónico y la construcción, sino que también encuentra aplicaciones en situaciones cotidianas, como la optimización del uso del espacio en interiores.

En este proyecto, nos enfocaremos en resolver el problema de calcular el ancho de un pasillo (W) cuando se conocen las longitudes de dos escaleras (x_1) y (x_2) y la altura (H) a la que estas se cruzan. A través de un enfoque geométrico y el uso de principios de trigonometría, derivaremos una fórmula que permita encontrar (W) de manera eficiente y precisa.

El objetivo principal es desarrollar una comprensión profunda de la relación entre las variables involucradas y proporcionar una herramienta útil para profesionales y estudiantes en campos relacionados. Además, este proyecto servirá como un ejemplo ilustrativo de cómo aplicar conceptos matemáticos para resolver problemas prácticos en el mundo real.

3. Metodología

3.1. Descripción de la solución

Para abordar la solución al problema planteado, es fundamental desarrollar un marco gráfico e hipotético que permita derivar una ecuación que dependa exclusivamente de las variables H , x_1 , x_2 y W . El objetivo es resolver esta ecuación mediante algún método numérico eficiente. Las consideraciones iniciales establecen que todas las medidas deben ser no negativas y que una escalera siempre debe ser mayor o igual a la otra. Matemáticamente, esto se expresa como $x_1, x_2, H, W > 0$ y $x_1 \leq x_2$.

Una vez obtenida la ecuación que relaciona x_1 , x_2 , H y W , se aplica el método de Bisección para encontrar la solución W en la ecuación $f(W) = 0$. Para asegurar la efectividad del método es crucial realizar un análisis completo de los límites que afectan a las variables x_1 , x_2 , H y W .

Para la implementación práctica, se desarrolla una interfaz que permite visualizar cómo varía el ancho del pasillo al ajustar los valores de x_1 , x_2 y H . Esta interfaz proporciona una herramienta intuitiva y eficaz para comprender el impacto de los cambios en las dimensiones de las escaleras y la altura de intersección sobre el ancho del pasillo.

3.2. Desarrollo matemático

Consideremos el siguiente gráfico:

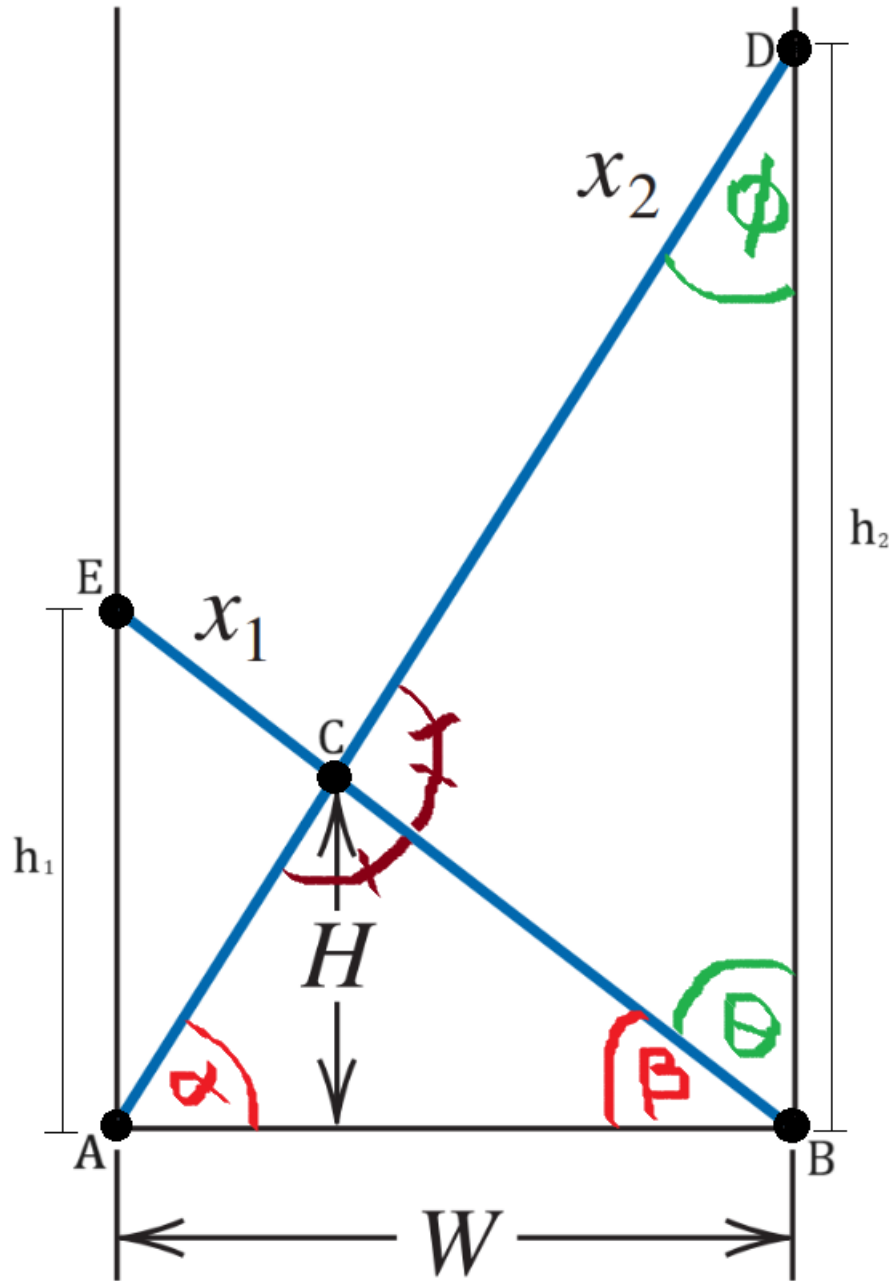


Figura 1: Gráfico del problema con todas las hipótesis desarrolladas.

Para resolver el problema primero escribimos las hipótesis más importantes que desarrollamos en el gráfico. Primero las relaciones trigonométricas:

$$\sin(\phi) = \frac{W}{x_2} \quad (1)$$

$$\sin(\beta) = \frac{H}{CB} \quad (2)$$

$$\sin(\beta) = \frac{h_1}{x_1} \quad (3)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{h_2}{x_2}, \cos(\alpha) = \frac{W}{x_2}, \sin(\beta) = \frac{W}{x_1} \quad (4)$$

Luego, escribimos las relaciones entre los ángulos $\alpha, \beta, \hat{1}$ y $\hat{2}$:

$$\begin{aligned} \hat{1} + \alpha + \beta &= 180^\circ = \hat{1} + \hat{2} \\ \rightarrow \alpha + \beta &= \hat{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Con todas estas hipótesis pasamos a trabajar el problema, apliquemos ley de senos al triángulo BCD:

$$\frac{h_2}{\sin(\hat{2})} = \frac{CB}{\sin(\phi)} = \frac{CD}{\sin(\theta)}$$

De la expresión anterior al tomar la primera igualdad podemos despejar el seno del ángulo dos:

$\sin(\hat{2}) = \frac{h_2 \sin(\phi)}{CB}$ y utilizando la ecuación (1) obtenemos que:

$$\sin(\hat{2}) = \frac{h_2 W}{x_2 CB} \quad (6)$$

También sabemos que $\sin(\hat{2}) = \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ y haciendo uso de las ecuaciones (3) y (4) obtenemos que:

$$\sin(\hat{2}) = \frac{h_2 W}{x_2 x_1} + \frac{W h_1}{x_2 x_1} = \frac{W(h_1 + h_2)}{x_1 x_2} \quad (7)$$

Además, notamos que las ecuaciones (2) y (3) son iguales, de donde encontramos el valor de CB:

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{x_1} &= \frac{H}{CB} \\ \rightarrow CB &= \frac{H x_1}{h_1} \end{aligned} \quad (8)$$

Reemplazamos la ecuación (8) en la ecuación (6) y obtenemos:

$$\sin(\hat{2}) = \frac{h_2 W h_1}{x_2 H x_1} \quad (9)$$

Por último, las ecuaciones (7) y (9) son iguales, por tanto nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{W(h_1 + h_2)}{x_1 x_2} &= \frac{h_2 W h_1}{x_2 H x_1} \\ H(h_1 + h_2) - h_1 h_2 &= 0 \end{aligned}$$

Y usando el hecho de que $h_1 = \sqrt{x_1^2 - w^2}$ y $h_2 = \sqrt{x_2^2 - w^2}$ obtenemos que:

$$f(W) = H \left(\sqrt{x_1^2 - w^2} + \sqrt{x_2^2 - w^2} \right) - \sqrt{(x_1^2 - w^2)(x_2^2 - w^2)} = 0 \quad (10)$$

Esta última ecuación es justo lo que buscábamos y para verificar que es la expresión correcta realizamos la gráfica con los valores de ejemplo propuesto en el GitHub.

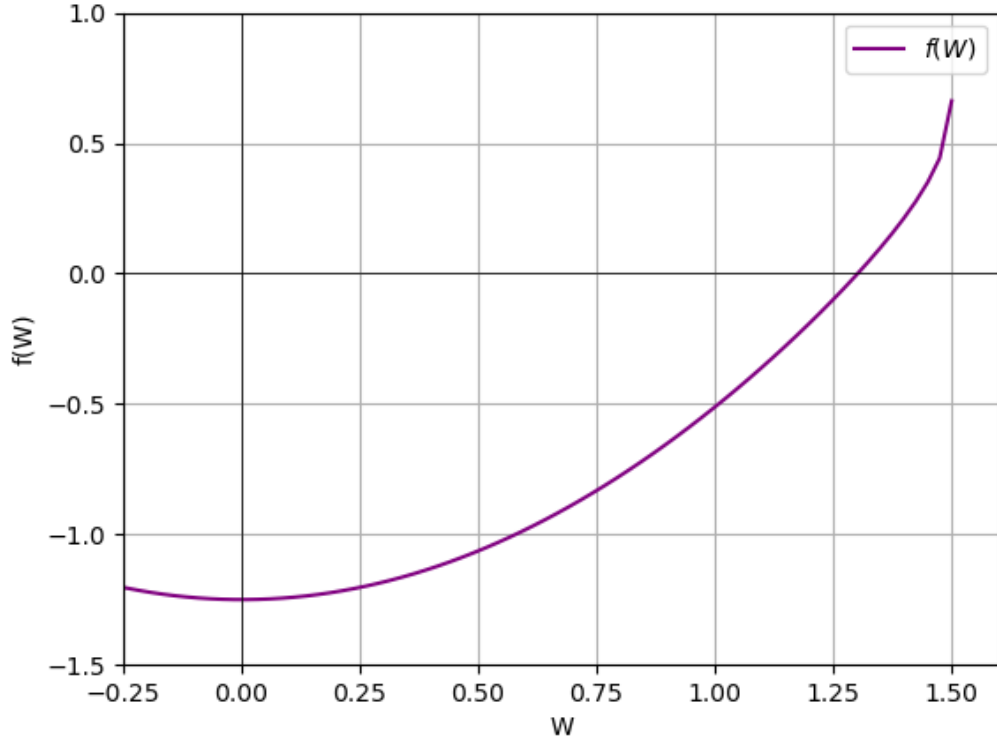


Figura 2: Curva asociada a $f(W)$ cuando $x_1 = 1.5, x_2 = 2$ y $H = 0.5$.

Como se puede observar en la figura, el corte está bastante cerca de 1.302 lo cual demuestra que la ecuación (10) es correcta. Para nuestro problema, sabemos que x_1 y x_2 no tienen condiciones límites de manera matemáticas mas que $x_1 \leq x_2$, sino únicamente las físicas, es decir, no existen escaleras demasiado grandes ni demasiado pequeñas. Pero el caso del valor H es diferente pues este si depende de los tamaños de las escaleras, veamos los casos límites cuando el ancho del pasillo es muy pequeño y cuando se aproxima al tamaño de la escalar más pequeña, es decir, cuando tiende a cero y cuando tiende a x_1 . Para ello, primero operaremos un poco la expresión de la ecuación (10).

$$\begin{aligned}
 H \left(\sqrt{x_1^2 \left(1 - \frac{w^2}{x_1^2}\right)} + \sqrt{x_2^2 \left(1 - \frac{w^2}{x_2^2}\right)} \right) - \sqrt{x_1^2 \left(1 - \frac{w^2}{x_1^2}\right) x_2^2 \left(1 - \frac{w^2}{x_2^2}\right)} &= 0 \\
 H \left(x_1 \sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{x_1^2}\right)} + x_2 \sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{x_2^2}\right)} \right) - x_1 x_2 \sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{x_1^2}\right) \left(1 - \frac{w^2}{x_2^2}\right)} &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

a) Caso $W \rightarrow 0$:

Como $W \rightarrow 0$ se tiene que $\frac{W^2}{x_1^2} = \frac{W^2}{x_2^2} = 0$, con lo cual nuestra expresión de la ecuación (11) se reduce a:

$$\begin{aligned}
 H(x_1 + x_2) - x_1 x_2 &= 0 \\
 \rightarrow H_{max} &= \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Por tanto, logramos determinar el valor máximo que puede tomar la altura medida desde el suelo hasta donde se intersecan las escaleras y vemos que para los datos del Github este valor corresponde a 0.8571.

b) **Caso $W \rightarrow x_1$:**

Como $W \rightarrow x_1$ se tiene que $\frac{W}{x_1} \rightarrow 1$, con lo cual nuestra expresión de la ecuación (11) se reduce a:

$$H\left(\sqrt{(x_2^2 - w^2)}\right) = 0$$

Y puesto que $x_2^2 - w^2 \neq 0$, tenemos que si $W = x_1$ entonces $H_{min} = 0$.

Para verificar que lo que decimos es cierto, vamos a realizar la gráfica de la altura en función del ancho del pasillo, esto es: $H = \frac{\sqrt{(x_1^2 - w^2)} \sqrt{(x_2^2 - w^2)}}{(\sqrt{x_1^2 - w^2} + \sqrt{x_2^2 - w^2})}$

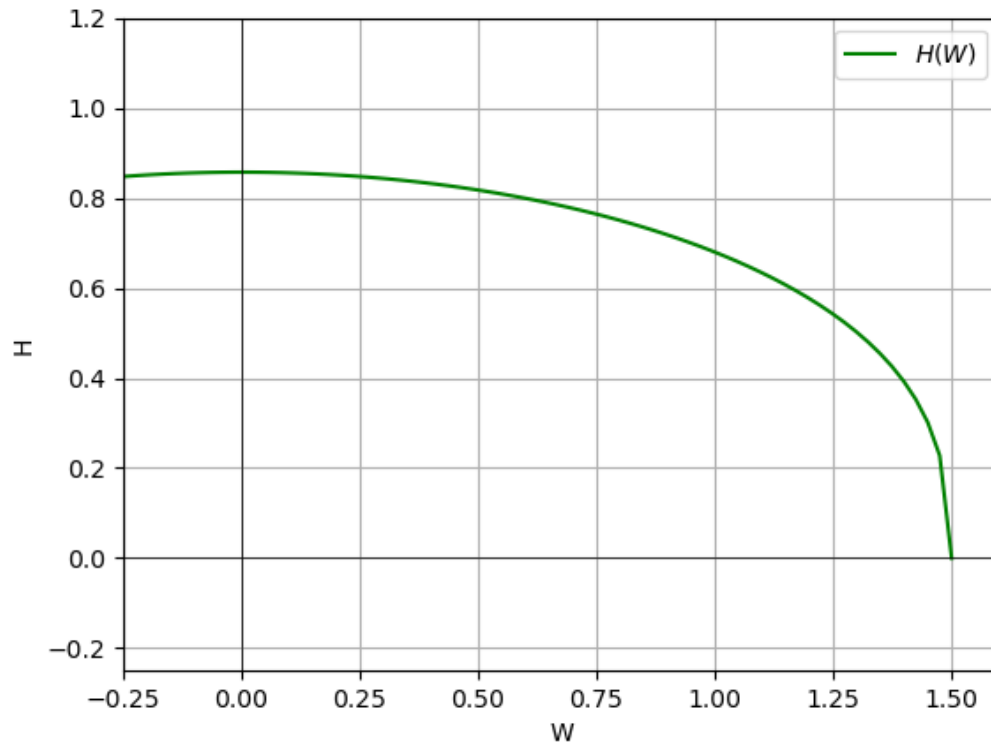


Figura 3: Curva asociada a H en función de W

De aquí podemos observar que la altura alcanza un valor máximo cuando W se acerca a cero y a medida que W crece H disminuye hasta llegar a ser cero cuando $W = x_1$. Por tanto, podemos afirmar que la altura donde se intersecan las escaleras no puede pasar de un valor máximo, y este valor viene dado por la ecuación (12).

3.3. Diagrama de flujo/pseudocódigo

Pseudocódigo

FUNCIÓN equation(x)

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 2$

$H = 0.5$

RETORNAR $H * (\text{RAÍZ_CUADRADA}(x_1^2 - x^2) + \text{RAÍZ_CUADRADA}(x_2^2 - x^2)) - \text{RAÍZ_CUADRADA}((x_1^2 - x^2))$

- x^2) * ($x^2 - x^2$))

FIN FUNCIÓN

FUNCIÓN sign(x)

SI $x > 0$ ENTONCES

RETORNAR 1

SINO SI $x < 0$ ENTONCES

RETORNAR -1

SINO

RETORNAR 0

FIN SI

FIN FUNCIÓN

FUNCIÓN bisection(a, b, equation, tol, N)

i = 1

AFIRMAR $a < b$, “a no es menor que b, el intervalo no es válido.” AFIRMAR $\text{equation}(a) * \text{equation}(b) < 0$, “La función no cambia de signo en el intervalo.”

Fa = equation(a)

p = a # para evitar fallo en $i == 0$

PARA i DESDE 1 HASTA N+1 HACER

p = $a + (b - a) / 2$

FP = equation(p)

SI $FP == 0$ O $(b - a) / 2 < \text{tol}$ ENTONCES

RETORNAR p, a, b, i

FIN SI

SI $\text{sign}(Fa) * \text{sign}(FP) > 0$ ENTONCES

a = p

Fa = FP

SINO

b = p

FIN SI

FIN PARA

IMPRIMIR “Solución no encontrada, número de iteraciones insuficiente para la tolerancia dada.”

—Ejemplo de implementacion

a = 0

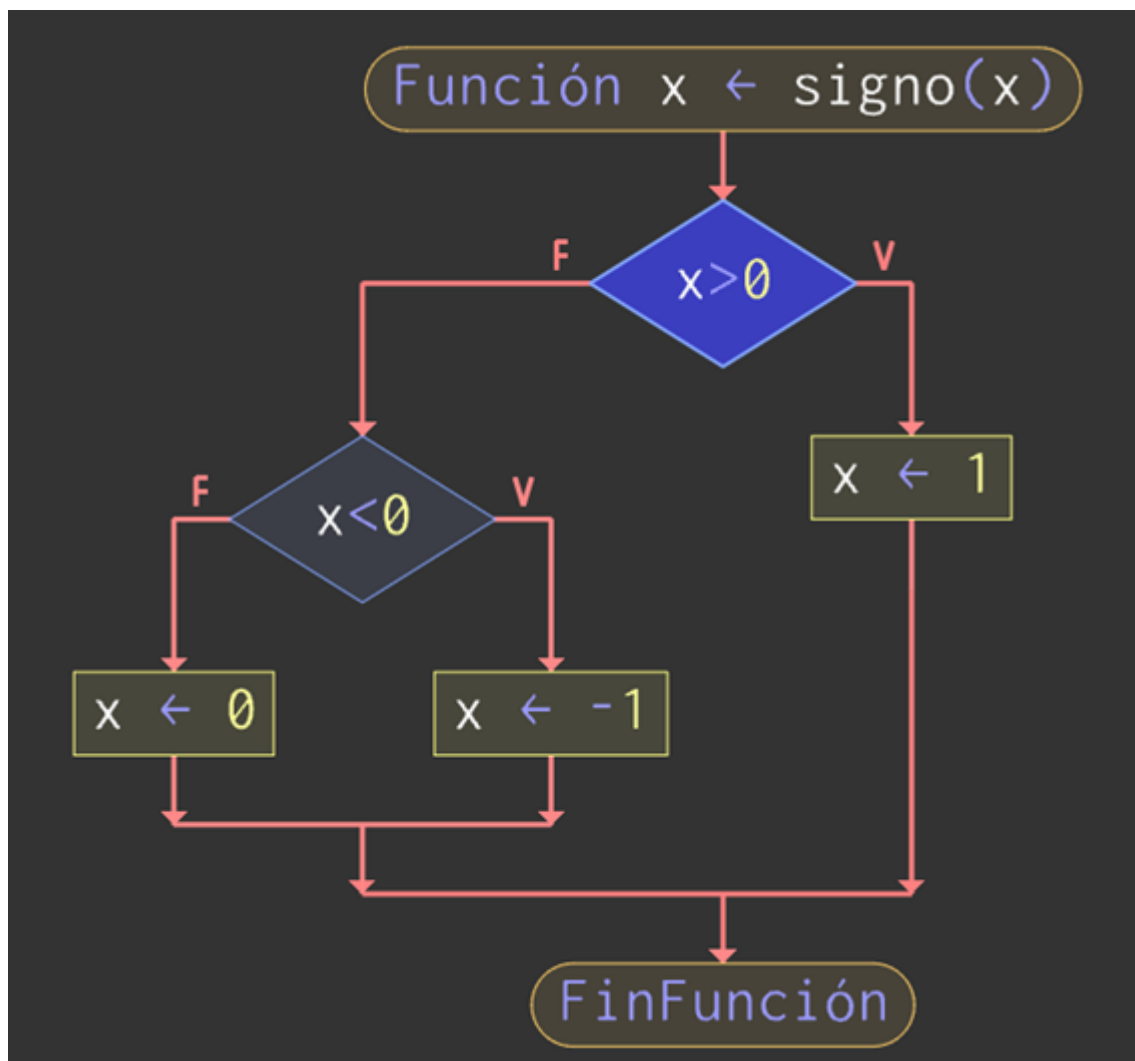
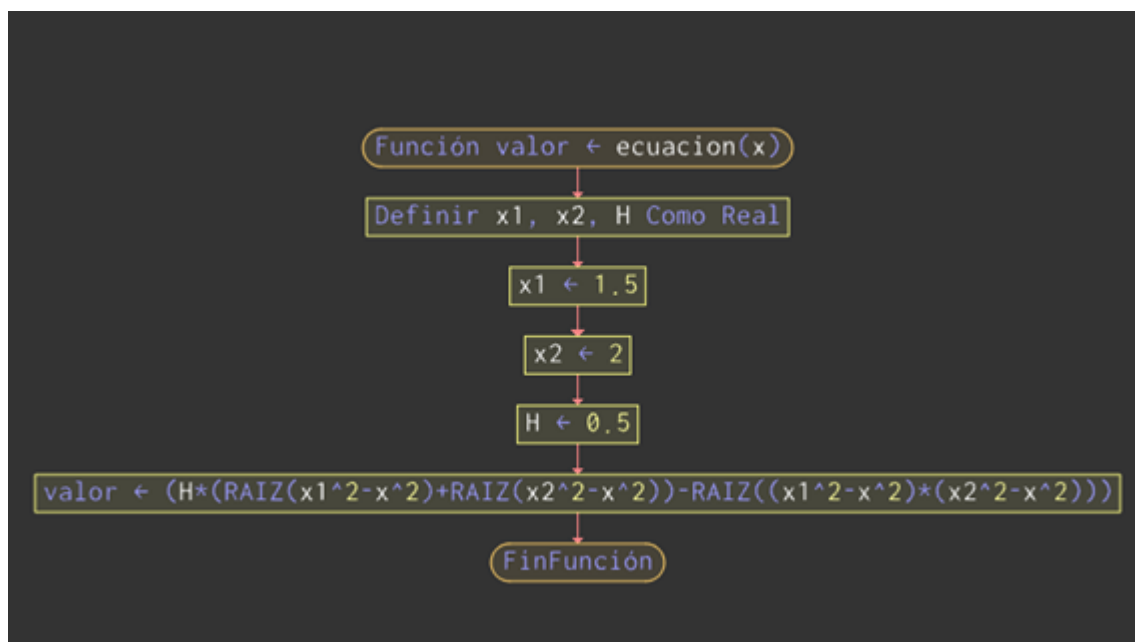
b = 1.5

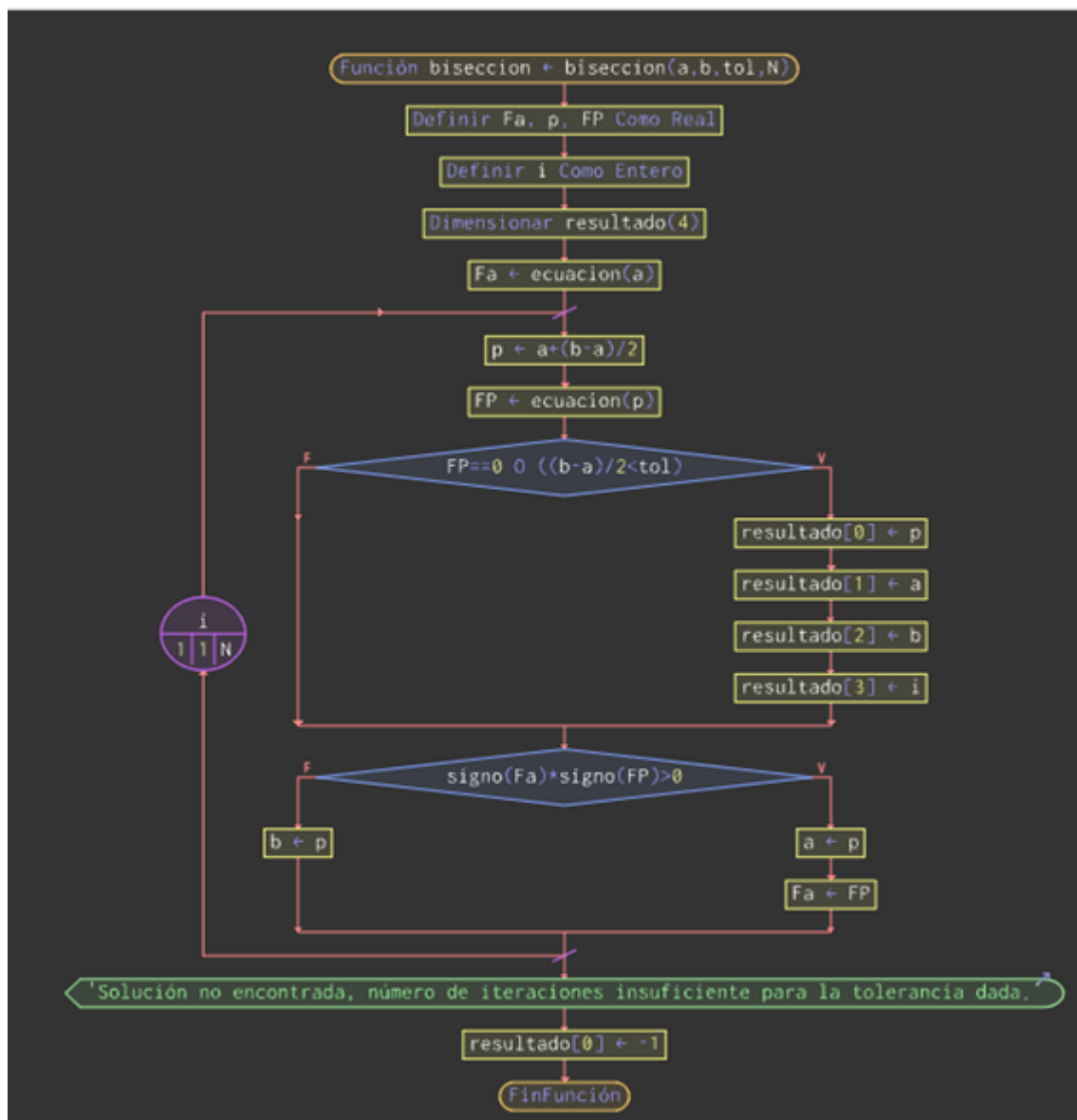
tol = 10^{-6}

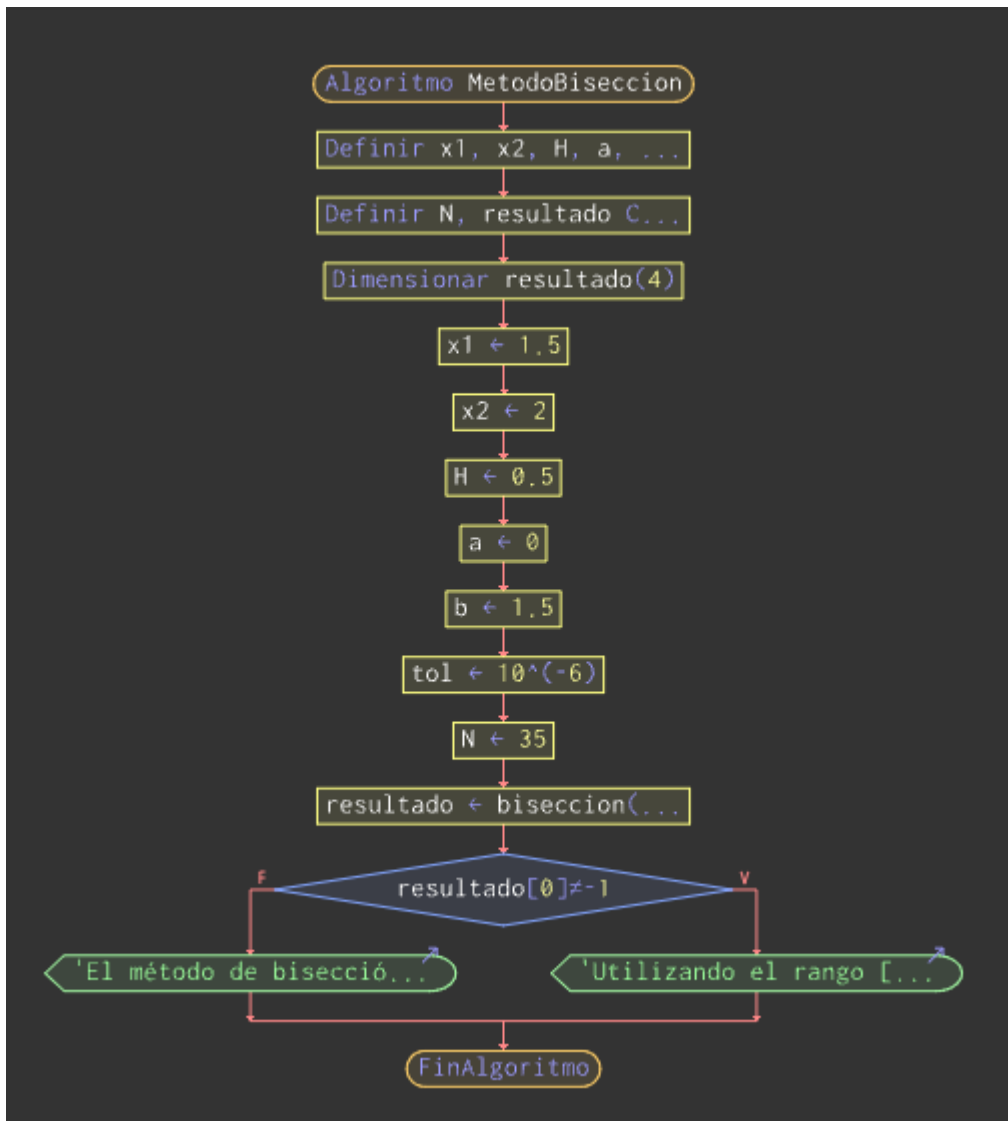
result = bisection(a, b, equation, tol, 35)

IMPRIMIR “Al utilizar el rango [”, a, “”, b, “], en la iteración n°:”, result[3], “ se encontró que la raíz de f(x) dentro de la precisión de “, tol,” es: “, result[0]

Diagrama de Flujo







3.4. Detalles importantes de la implementación

A la hora de la implementación del código se debe de cumplir con ciertas restricciones:

1. Como se observo en el modelo matematico la altura Maxima (Hmax) debe igual ser a la formula que se menciona, es decir va a depender de los valores de X_1 y X_2 , si se ingresa un valor superior, el algoritmo no dara una respuesta , en lugar de eso surgira un mensaje de error.
2. Tambien para este ejercicio vamos a considerar que la Altura no puede ser un numero negativo es decir va a ser mayor que cero.
3. En algun punto los valores de x_1 y x_2 podrian llegar a ser igual sim embargo nunca pueden ser negativos.
4. Los valores maximos de las variables x podrias ser como maximo 30 m. Se tomo estas consideraciones ya que nos basamos en datos de la vida real, por tanto los valores de las diferentes variables estan considerados con la unidad de medida del sistema internacional (el metro).

Resultados

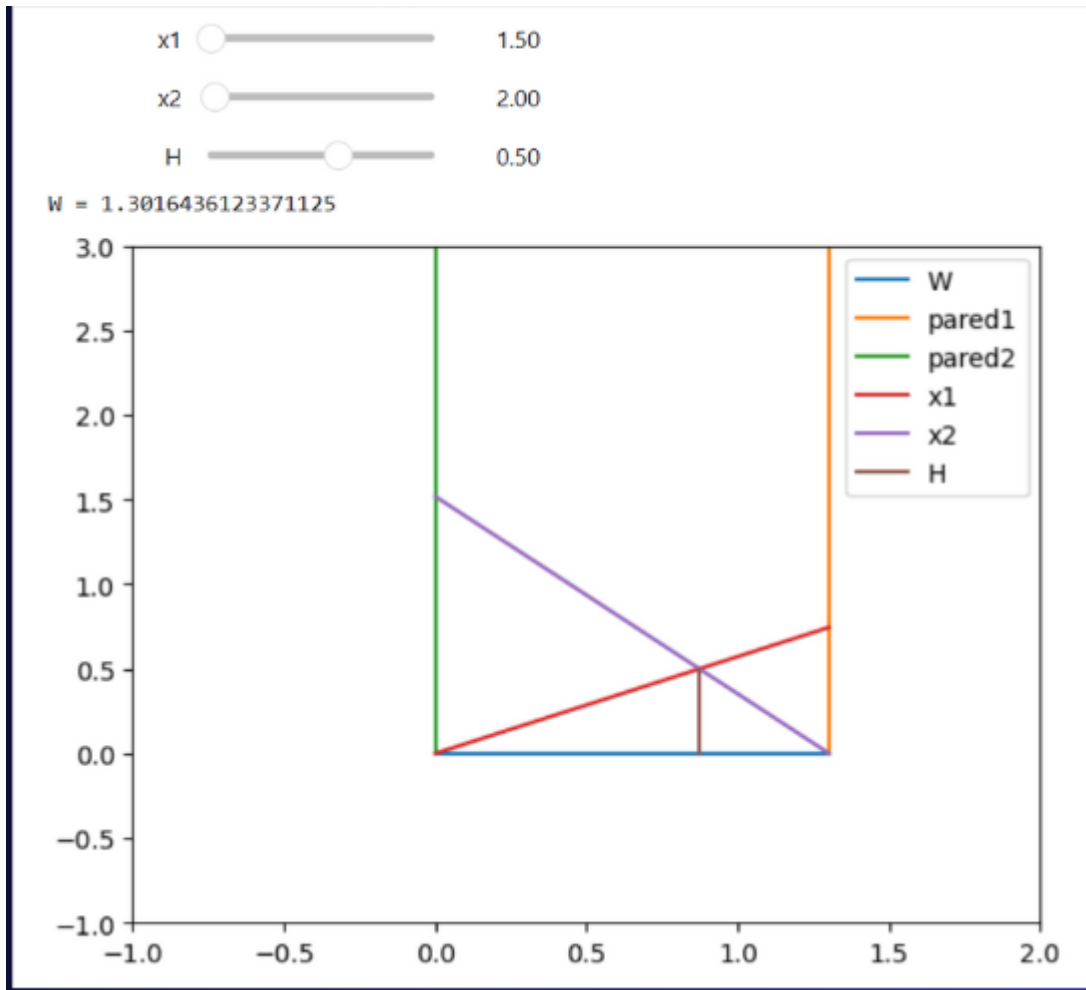
Con la implementación correcta del código y el hallar una ecuación $f(W)$ pudimos resolver con éxito el problema planteado.

El resultado del problema planteado con los valores:

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = 2$$

$H=0.5$

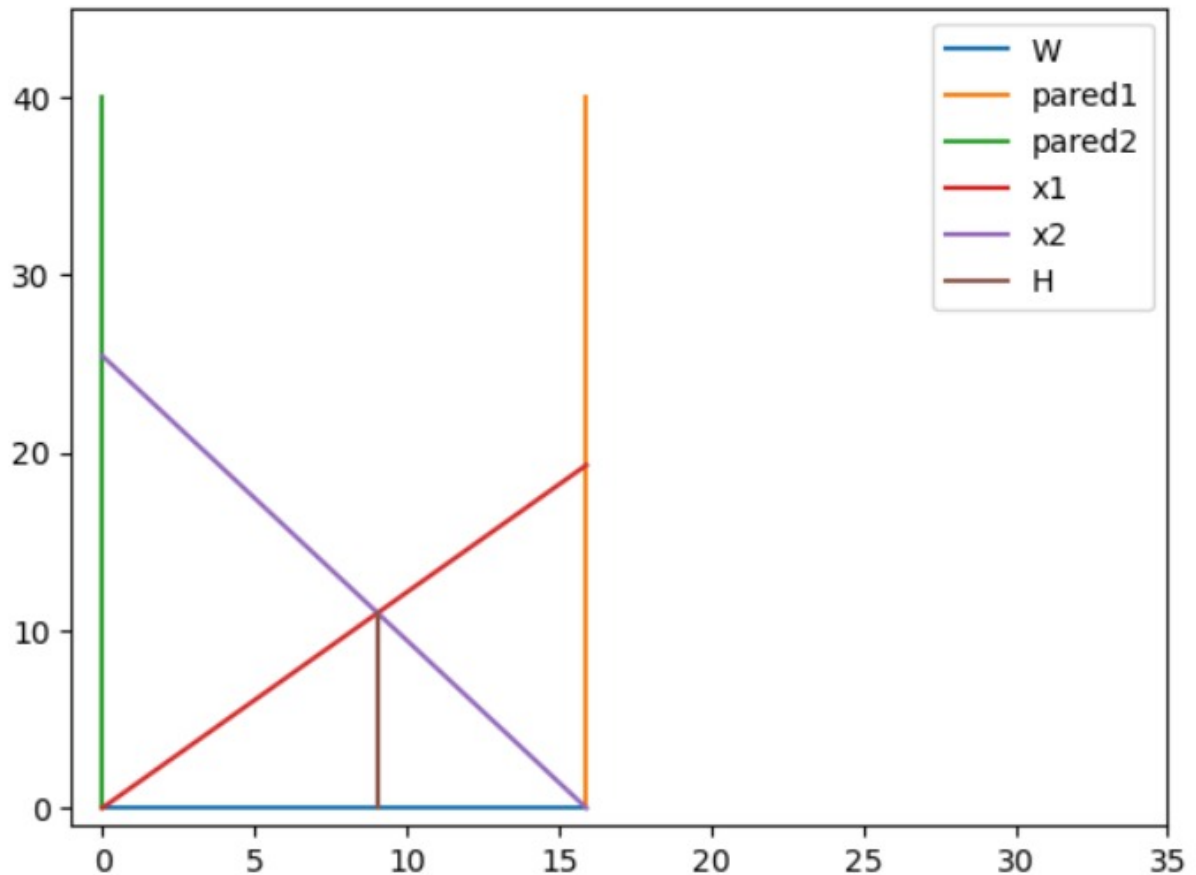


Ya que el programa esta implementado para que sea de manera dinamica, se puede poner otros valores para las variables.

En la siguiente imagen se observa el comportamiento de la grafica con otras variables.

x1 25.00
 x2 30.00
 H 10.97

W = 15.904736229595546



Conclusiones

1. Se pudo encontrar una función $f(W)$ dependiente de las variables x_1, x_2, H y W , tal que al aplicar el método de la bisección se determinó el valor exacto del ancho del pasillo.
2. Se pudo realizar la implementación del problema con una interfaz gráfica, logrando visualizar la variación del ancho del pasillo a medida que los valores de x_1, x_2 y H varían.
3. Se pudo encontrar los casos límite para H y en base a esos resultados se logró controlar la correcta ejecución sin errores tanto de la interfaz como del método de la bisección.