ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A1 1996

Epreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée 2 heures

Les théorèmes seront énoncés avec rigueur

Aucun résultat ne sera pris en compte
s'il n'est accompagné de calculs intermédiaires

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

L'usage des calculatrices est interdit

Pour α réel et n entier strictement positif, on considère les intégrales généralisées :

$$I_{n,\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{(\sin t)^n}{t^\alpha}\, dt$$

Une intégrale généralisée est dite semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

I

n = 1

1.1 Etude de la convergence de $I_{1,\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{(\sin t)}{t^\alpha}\, dt$

1.1.1. $\alpha > 1$ Etudier la convergence absolue de l'intégrale.

1.1.2 $0 < \alpha \leq 1$

. Montrer que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ converge (on pourra utiliser une intégration par partie pour l'étude au voisinage de l'infini).

. On considère la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

Montrer que $\frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq |u_n| \leq \frac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}$

. Que peut-on en déduire sur la convergence de

$\int_0^\infty \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt$ et $I_{1,\alpha}$?

1.1.3 $\alpha \leq 0$. On considère la suite $v_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

Etudier la limite de $|v_{n+1} - v_n|$ et en déduire la nature de l'intégrale $I_{1,\alpha}$.

1.2 a et b étant deux réels, on considère l'intégrale

$$J_{a,b} = \int_0^\infty t^b \sin(t^a) dt$$

soit :

D_1 l'ensemble des couples (a,b) tels que $J_{a,b}$ soit absolument convergente,

D_2 l'ensemble des couples (a,b) tels que $J_{a,b}$ soit semi-convergente,

D_3 l'ensemble des couples (a,b) tels que $J_{a,b}$ soit divergente.

A tout couple (a,b) on associe dans le plan un point M de coordonnées (a,b).
Représenter graphiquement les domaines D_1, D_2, D_3 dans un même système d'axes.

II

$\boxed{n = 3 ; \alpha = 2}$

2.1 Etudier la convergence de $I_{3,2}$

2.2 2.2.1 Soit $f :\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \to \Re$ ($\Re$ désigne l'ensemble des nombres réels),

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

étudier le sens de variation de f.

2.2.2 Soit $F_{a,b}(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$,

étudier la parité de $F_{a,b}$.

Montrer que la limite de $F_{a,b}(x)$ est $ln\ \frac{b}{a}$ quand x tend vers zéro.

(ln désigne le logarithme népérien)

2.3 Soit $I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt.$

Montrer que $I(\varepsilon) = kF_{1,3}(\varepsilon)$ où k est une constante que l'on déterminera.

En déduire la valeur de $I_{3,2}$

III

$\boxed{\alpha = n}$

On pose $A_n = I_{n,n} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt.$

On admet que $A_1 = \frac{\pi}{2}$.

3.1 x étant un réel strictement positif, calculer $\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt$.

3.2 Etudier la convergence de l'intégrale A_n pour n supérieur ou égal à 2 .

3.3 Calculer A_2 .

3.4 Exprimer A_4 en fonction de A_2 et en déduire la valeur de A_4 .