■ ■ ■

Partie I : Étude de suites

Pour un calcul célèbre, Archimède considéra les relations de récurrence :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \text{ et } \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}}.$$

1. On suppose dans cette question que $c_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$.

a) Montrer que les suites $(c_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ sont bien définies et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$c_n = \cos\frac{\pi}{2^n},\ \lambda_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}.$$

b) Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

2. En utilisant, avec précision, une formule de Taylor appliquée à la fonction sinus, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|\pi - \lambda_n| \leqslant \frac{\pi^3}{6\cdot 4^n}.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel p donné, λ_n admet, lorsque n tend vers l'infini, le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{4^n} + \cdots + (-1)^p\frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\cdot\frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right).$$

4. Pour tout entier n supérieur à 1, on pose $\lambda_n^{(1)} = \frac{-\lambda_n+4\lambda_{n+1}}{3}$.

a) Montrer que $\left(\lambda_n^{(1)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\lambda_n^{(1)} - \pi = o\left(\frac{1}{4^n}\right).$$

b) Déterminer un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$.

5. a) Montrer qu'il existe un réel α (que l'on déterminera) tel que la suite $(\lambda_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par $\lambda_n^{(2)} = \alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)}$ vérifie, lorsque n tend vers l'infini,

$$\lambda_n^{(2)} - \pi = o\left(\frac{1}{16^n}\right).$$

b) Déterminer $(\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\lambda_n^{(2)} = \beta\lambda_n + \gamma\lambda_{n+1} + \delta\lambda_{n+2}$.

c) Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor appliquée à la fonction sinus, que pour tout n supérieur à 1,

$$\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \leqslant \frac{17\pi^7}{576\cdot 7!}\cdot\frac{1}{4^{3n}}.$$

Partie II : Polynômes de Bernoulli

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions ci-dessous définissent une unique fonction F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$F' = f,\ \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et exprimer F à l'aide de $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. a) Montrer que les conditions :

$$B_0 = 1,\ B'_{n+1} = B_n \text{ et } \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 0$$

définissent une unique suite de fonctions polynomiales. Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.

b) Expliciter, sous forme canonique, les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.

3. Montrer, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$B_n(0) = B_n(1).$$

4. Pour tout n entier naturel, on pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

a) Montrer que la suite (C_n) vérifie les conditions de la question **2.** définissant la suite (B_n) et en déduire que, pour tout entier naturel n, $B_n = C_n$.

b) Qu'en déduire pour les graphes des B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair supérieur ou égal à 3, de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

5. Soit m un entier naturel.

a) Montrer que les polynômes B_{2m+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.
On pourra procéder par récurrence sur m et utiliser le théorème de Rolle.

b) En déduire que les polynômes $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ sont de signes constants sur $[0,1]$.

Partie III : Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1. Montrer que pour N entier naturel non nul :

$$\forall\ t \in]0,1[,\ 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

Pour tout entier naturel n strictement positif, on pose :

$$\forall\ t \in]0,1[,\ \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction φ_n est prolongeable par continuité à $[0,1]$ et que le prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$.

3. Montrer (en utilisant éventuellement une intégration par parties) que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. Pour k et n entiers strictement positifs, on définit :

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire selon la parité de n, l'epression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k.

5. a) En utilisant les questions précédentes, trouver, pour N entier naturel, une expression de

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,\mathrm{d}t$$

en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et de $B_{2m}(0)$.

c) Donner les valeurs de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

6. Montrer, pour tout m entier naturel non nul, la majoration :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant 2$$

et en déduire la majoration $|B_{2m}(0)| \leqslant \frac{4}{(4\pi^2)^m}$.

Pour toute la suite du problème, les fonctions considérées seront supposées définies sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivables.

Partie IV : Formule sommatoire d'Euler

1. Montrer pour m entier strictement supérieur à 0 (formule sommatoire à l'ordre m) :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} B_{2k}(0)\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer, en utilisant la partie **II**, que pour m entier naturel,

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4}{(4\pi^2)^{m+1}} \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(2m+2)}(x)\right|$$

3. Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision régulière de pas $h = \frac{1}{n}$ de l'intervalle $[0,1]$ (on a donc $x_i = \frac{i}{n} = ih$ pour $i \in [\![0,n]\!]$). Rappeler l'expression $T(h)$ obtenue par application de la méthode des trapèzes à la fonction f pour cette subdivision.

4. Expliciter la formule sommatoire à l'ordre 2 pour les fonctions $f_i : t \mapsto f(x_i + ht)$ lorsque $i \in [\![0, n-1]\!]$.
En déduire l'existence des réels a_2 et a_2 et d'une fonction r tels que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = T(h) + a_1h^2 + a_2h^4 - r(h)$$

avec $|r(h)| \leqslant \frac{h^6}{16\pi^6} \cdot \left\|f^{(6)}\right\|$, où $\left\|f^{(6)}\right\| = \sup\limits_{[0,1]} \left|f^{(6)}\right|$.

Partie V : Accélération de Romberg

On reprend la méthode utilisée dans la partie **I** et on définit T_0, T_1, T_2 en posant :

$$\begin{aligned} T_0(h) &= T(h) \\ T_1(h) &= \frac{-T_0(h) + 4T_0\left(\frac{h}{2}\right)}{3} \\ T_2(h) &= \frac{-T_1(h) + 16T_1\left(\frac{h}{2}\right)}{15}. \end{aligned}$$

1. Montrer que pour $k = 0$, 1 ou 2, lorsque h tend vers 0,

$$T_k(h) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = o(h^{2k+1}).$$

2. a) Exprimer $T_2(h)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $r(h)$, $r\left(\frac{h}{2}\right)$ et $r\left(\frac{h}{4}\right)$.

b) En déduire la majoration :

$$\left|T_2(h) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{17}{9216} \cdot \frac{h^6}{\pi^6} \left\|f^{(6)}\right\|.$$

3. On se propose d'appliquer la méthode décrite ci-dessus à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ de façon à calculer une valeur approchée de $\ln(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que $\left\|f^{(6)}\right\| = 720$.

On pourrait alors montrer qu'il suffit de choisir $n = 12$ pour que $T_2(h)$ soit une approximation de $\ln(2)$ à la précision de 10^{-12} (En supposant les erreurs d'arrondis négligeables).