Exercice 1. ('16) [Centrale] Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Écrire une fonction `binomial(n, k)` qui renvoie $\binom{n}{k}$. Tracer, pour $n \in \{5, 8, 9\}$, les points $\left(\binom{n}{k}\right)_{2 \leqslant k \leqslant n-2}$.

2. Montrer que, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point de coordonnées (n, u_n). Afficher les 31 premiers termes $A_0, \ldots, A_{30}$. Conjecturer le comportement asymptotique de (u_n).

4. Démontrer rigoureusement la convergence de (u_n).

Soit $p \geqslant 2$ et $q \in \mathbb{N}$. On pose $S(p) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}}$.

5. Montrer l'existence de $S(p)$.

6. On note $S_N = \sum_{n=p}^{N} \binom{n}{p}^{-1}$. Tracer $(p-1)S_{200}(p)$ en fonction de p pour $p \in [\![2, 50]\!]$.

7. Exprimer $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \, \mathrm{d}t$ en fonction d'un coefficient binomial.

8. En déduire que $S(p) = \frac{p}{p-1}$.