■ ■ ■

Préliminaires

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty[\cup \{+\infty\}$ et f, g deux applications continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs strictement positives.

1. On suppose que g est intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer que, en b, la relation $f = \circ(g)$ entraîne $\displaystyle\int_x^b f = \circ\left(\int_x^b g\right)$.

On n'hésitera pas à raisonner en utilisant des ε.

b) Montrer que, en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\displaystyle\int_x^b f \sim \left(\int_x^b g\right)$.

On justifiera l'intégrabilité de f sur les intervalles $[x, b[$ considérés.

2. On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, b[$

a) Montrer que, en b, la relation $f = \circ(g)$ entraîne $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \circ\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.

b) Montrer que, en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Que peut-on dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$?

Partie I :

3. a) Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin(t)}\,\mathrm{d}t$ en 0^+.

b) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin(t)}\,\mathrm{d}t$ en 0^+.

4. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, en $+\infty$, on a $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$.

b) Plus généralement, si n est un entier naturel, établir le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + \circ\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

5. Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^3} + \circ\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\right).$$

Partie II :

Soit a un nombre réel et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

6. Montrer, à l'aide des préliminaires que, en $+\infty$, $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α.

On peut distinguer le cas $\alpha = 0$.

7. On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

a) Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer que, en $+\infty$, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t \sim -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

On pourrra considérer $\frac{xf(x)}{\alpha+1}$ et utiliser les préliminaires.

8. On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

a) Étudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer que, en $+\infty$, on a $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\, \mathrm{d}t \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

c) Donner un exemple d'application f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives telle qu'en $+\infty$ le quotient $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers $\alpha > -1$, mais telle que l'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\, \mathrm{d}t \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

9. a) Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ selon les valeurs du réel β.

b) Étudier, à l'aide des questions précédentes, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma(\ln x)^\beta}$, selon les valeurs des réels β et γ.

c) Que conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ dans le cas $\alpha = -1$?