Convexité & Normes p

■ ■ ■

Partie I : Convexité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est *convexe* si

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ \forall\ t \in [0,1],\ f\left(tx + (1-t)y\right) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$

La fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

1. Montrer que les fonctions affines sont convexes.

2. Montrer que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe toujours au-dessous de chacune de ses cordes.

3. Montrer, par une récurrence soigneuse, l'inégalité de **Jensen** : si f est convexe, alors

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in I^n,\ \forall\ (\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in [0,1]^n,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\ \Rightarrow\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right].$$

4. Croissance du taux d'accroissement. Pour tout $x_0 \in I$, on pose $\tau_{x_0} : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

a) On suppose que, pour tout $x_0 \in I$, f_{x_0} est croissante. En utilisant la croissance de φ_{x_0} sur $x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$ (réels à choisir convenablement), montrer que f est convexe.

b) On suppose que f est convexe. En utilisant l'inégalité de convexité en $x_0 < x = \lambda x_0 + (1-\lambda)y < y$, montrer que φ_{x_0} est croissante sur $]x_0, +\infty[\cap I$.
On montre de manière analogue que φ_{x_0} est croissante sur $I \backslash \{x_0\}$.

5. Caractérisation dérivable.

a) On suppose que f est une fonction dérivable sur I. En utilisant la croissance du taux d'accroissement, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.

b) En déduire que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe toujours au-dessus de ses tangentes.

6. Caractérisation deux fois dérivable. On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.

7. a) En déduire que les fonctions exp et sin sont convexes et que la fonction ln est concave, sur des ensembles à préciser.

b) En déduire que

$$e^x \geqslant 1 + x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$
$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin(x) \leqslant x,\ \forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
$$\ln(1+x) \leqslant x,\ \forall\ x \in]-1, +\infty[.$$

8. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\ n \geqslant 2,\ \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Partie II : Inégalités de Holder

Soient p, $q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Les inégalités de **Holder** que nous allons établir généralisent les inégalités de **Cauchy-Schwarz**.

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x = (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $y = (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de réels strictement positifs et f, g sont des fonctions continues sur un intervalle borné I dans $\mathbb{R}_+^*$. On notera $\mathscr{L}^p(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f continues sur I telles que $|f|^p$ soit intégrable sur I.

9. Montrer que pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\ln(uv) \leqslant \ln\left\{\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q\right\}.$$

10. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

11. Montrer que

$$\left|\int_I fg\right| \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_I |g|^p\right)^{1/p}.$$

En déduire que le produit d'une fonction $\mathscr{L}^p$ par une fonction $\mathscr{L}^q$ est dans $\mathscr{L}^1$ (on rappelle que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Partie III : Inégalité de Minkowski

On reprend les notations précédentes. On note $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} |a_i|^p\right)^{1/p}$ et $\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$.

12. Montrer que si a et b sont des réels, alors

$$|a+b|^p \leqslant (|a|+|b|)\,|a+b|^{p-1}.$$

13. a) En étudiant $\|x+y\|_p^p$, montrer que

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

b) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

c) Déterminer $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p$.

14. a) En étudiant $\|f+g\|_p^p$, montrer que

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

b) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mathscr{L}^p(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé.

d) Déterminer $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$.