*****

ENSAIT 1996 — MATHÉMATIQUES 1

L'objet du problème est l'étude et le calcul des intégrales généralisées:

$$\boxed{I_{n,\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{sin^n(t)}{t^\alpha} dt}$$

I

1.1. Étude de la convergence de $I_{1,\alpha} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt$

1.1.1. $\alpha > 1$

Au voisinage de l'∞

on a $|\dfrac{sin(t)^n}{t^\alpha}| \leq |\dfrac{1}{t^\alpha}|$ et d'après le critère de comparaison on a la convergence de $I_{1,\alpha}$ au voisinage de l'∞.

Au voisinage de 0

On a $\dfrac{sin(t)}{t^\alpha} \sim_0 \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ d'où on a convergence pour $1 < \alpha < 2$ et divergence pour $\alpha \geq 2$

1.1.2. $0 < \alpha \leq 1$

• **Convergence de** $I_{1,\alpha} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt$**:**

• Au voisinage de 0:

$\dfrac{sin(t)}{t^\alpha} \sim_0 \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{1-\alpha} = 0$ donc $t \mapsto \dfrac{sin(t)}{t^\alpha}$ est prolongeable par continuité au voisinage de 0.

• Au voisinage de ∞:

$$\int_1^X \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt = [\frac{-cos(t)}{t^\alpha}]_1^X - \int_1^X \alpha \frac{(cos(t))}{t^{\alpha+1}} dt$$

or $|\dfrac{(cos(t))}{t^{\alpha+1}}| \leq \dfrac{1}{|t|^{\alpha+1}}$ et $\alpha + 1 > 1$ d'où la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^X \alpha \frac{(cos(t))}{t^{\alpha+1}} dt$ donc on a la convergence de $\displaystyle\int_1^X \frac{(cos(t))}{t^{\alpha+1}} dt$ et comme $\displaystyle\lim_{X\to\infty} [\frac{-cost}{t^\alpha}]_1^X = cos(1)$ on a la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt$

• Soit $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt$

$$|u_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{sin(t)}{t^\alpha}| dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{sin(t)}{t^\alpha}| dt \leq \frac{1}{n^\alpha \pi^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |sin(t)| dt = \frac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}$$

D'autre part en posant $u = t - n\pi$

$$|u_n| = |\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt| = |\int_0^{\pi} \frac{(sin(u + n\pi)}{(u + n\pi)^\alpha} du| > \frac{2}{(\pi + n\pi)^\alpha} = \frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha}$$

d'où l'encadrement $\dfrac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq |u_n| \leq \dfrac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}$

et de l'encadrement

• $\dfrac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \dfrac{|sint|}{t^\alpha} \leq \dfrac{2}{n^\alpha\pi^\alpha}$ sur l'intervalle $]n\pi,(n+1)\pi[\ni t$

on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|sint|}{t^\alpha}dt$ est de même nature que la série de Riemann $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ qui diverge car $0<\alpha\leq 1$ donc

$$\boxed{I_{1,\alpha} \text{ est semi-convergente.}}$$

1.1.3. $\alpha \leq 0$. $\nu_n = \displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt.$

$|\nu_{n+1}-\nu_n| = |\displaystyle\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt - \int_\pi^{n\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt| = |\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt| = |u_n| \leq \frac{2}{n^\alpha\pi^\alpha}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

$I_{1,\alpha} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt + \int_\pi^{n\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt = \int_0^\pi \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt + \nu_n.$

La suite $w_n = \nu_{n+1}-\nu_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt = \int_0^\pi \frac{sin(u+n\pi)}{(u+n\pi)^\alpha}dt = (-1)^n\int_0^\pi \frac{sin(u)}{(u+n\pi)^\alpha}du$ est le terme général d'une série alternée:

En effet,

• $(-1)^n w_n$ est positif.

• w_n est décroissante.

• w_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

donc d'après le critère (le théorème) des séries altérnées on a la série de terme général w_n est convergente.

Soit S_n la somme partielle de cette série on a

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n w_k = w_1+w_2+\ldots+w_n = \nu_{n+1}-\nu_1 = \nu_{n+1} = \int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{sin(t)}{t^\alpha}dt$

et comme S_n est convergente on a la convergence de $I_{1,\alpha}$.

1.2.

• a et b deux réels, on considère l'intégrale: $J_{a,b} = \displaystyle\int_0^\infty t^b sin(t^a)dt.$

• $J_{0,b} = \displaystyle\int_0^\infty t^b sin(1)dt$ est une intégrale de Riemann divergente.

• $J_{a,0} = \displaystyle\int_0^\infty sin(t^a)dt$

On suppose $a>0$, et on pose $u=t^a$, d'où $J_{a,0} = \displaystyle\int_0^\infty sin(u)\frac{1}{a}u^{\frac{1}{a}-1}du.$

Pour $a>1$, une intégration par parties donne la convergence.

Pour $a \leq 1$ on a $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} sin(u)u^{\frac{1}{a}-1} du$ ne tend pas vers 0, d'où la divergence de l'intégrale.

Pour $a < 0$, on pose $u = t^{-a}$, et on est ramené à des intégrales du type précédent, ainsi on a convergence si et seulement si $a < -1$.

Pour $a = 0$ l'intégrale diverge.

donc la condition nécessaire et suffisante de convergence est $|a| > 1$.

Si $a > 0$ on pose $u = t^a$ $du = at^{a-1}dt$ d'où

$$J_{a,b} = \int_0^{\infty} t^b sin(t^a)dt = \int_0^{\infty} u^{\frac{b}{a}} sin(u) u^{\frac{a-1}{a}} du = \int_0^{\infty} \frac{sin(u)}{u^{\frac{1-a-b}{a}}} du.$$

Et on revient au cas précédent.

II

$$\boxed{n = 3;\ \alpha = 2}$$

2.1

Convergence de $I_{3,2}$

Au voisinage de 0:

La fonction f: $t \mapsto \dfrac{sin^3(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, \infty[$, et comme $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sin^3(t)}{t^2} = 0$ on a f est prolongeable par continuité.

Au voisinage de ∞:

on a $f(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$, $I_{3,2}$ est donc absolument convergente, donc convergente.

2.2.

2.2.1.

Soit f la fonction définie par:

f: $]0, \dfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ $f(t) = \dfrac{sin(t)}{t}$ d'où $f'(t) = \dfrac{tcos(t) - sin(t)}{t^2} = \dfrac{cos(t)}{t^2}(t - tan(t))$

Posons $\varphi(t) = t - tan(t)$ alors $\varphi'(t) = 1 - 1 - tan^2(t) = -tan^2(t) < 0$ $\varphi(t) = t - tan(t)$ est alors décroissante et comme $\varphi(0) = 0$ on a $\varphi(t) = t - tan(t) < 0$ d'où la décroissance de f:

d'où le tableau de variation de f.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
φ		$-\ -\ -$	
f	1	$\searrow$	$\frac{2}{\pi}$

2.2.2.

• Soit $F_{a,b}(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{sin(t)}{t^2} dt$,

$F_{a,b}(-x) = \displaystyle\int_{-ax}^{-bx} \frac{sin(t)}{t^2} dt$ posons $u = -x$

$F_{a,b}(-x) = -\int_{ax}^{bx} \frac{sin(-t)}{t^2}dt = \int_{ax}^{bx} \frac{sin(t)}{t^2}dt = F_{a,b}(x)$ donc $F_{a,b}$ est paire.

• $\lim_{x\to 0} F_{a,b}(x) = \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{sin(t)}{t^2}dt$

On pose $t = ux$ et alors $\int_{ax}^{bx} \frac{sin(t)}{t^2}dt = \int_a^b \frac{sin(xu)}{u^2x^2}xdu = \frac{1}{x}\int_a^b \frac{sin(xu)}{u^2}du$

Or $\frac{sin(xu)}{u^2} = \frac{xu}{u^2} + \frac{o(x^2u^2)}{u^2} = \frac{1}{u} + \psi(x,u)$ où $\psi(x,u)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

d'où $F_{a,b}(x) = \int_a^b \frac{1}{u}du + \Psi(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\Psi(x) = 0$ d'où

$$\boxed{\lim_{x\to 0} F_{a,b}(x) = [ln(u)]_a^b = ln(\frac{b}{a})}$$

2.3.

Soit $I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \frac{sin^3(t)}{t^2}dt$

• Au voisinage de 0:

La fonction f: $t \mapsto \frac{sin^3(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,\infty[$, et elle est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{t\to 0}\frac{sin^3(t)}{t^2} = 0$.

• Au voisinage de∞:

On a $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$, l'intégrale est donc absolument convergente.

On a $I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon)$ avec $\int_\varepsilon^\infty \frac{sin^3(t)}{t^2}dt = \int_\varepsilon^\infty (\frac{3}{4}\frac{sin(t)}{t^2} - \frac{sin(3t)}{4t^2})dt$, $\varepsilon > 0$

Les intégrales $\int_\varepsilon^\infty \frac{sin(t)}{t^2}dt$ et $\int_\varepsilon^\infty \frac{sin(3t)}{t^2}dt$ sont absolument convergentes, donc $I(\varepsilon) = \frac{3}{4}\int_\varepsilon^\infty \frac{sin(t)}{t^2}dt - \frac{1}{4}\int_\varepsilon^\infty \frac{sin(3t)}{t^2}dt$ et de plus on a $\int_\varepsilon^\infty \frac{sin(3t)}{t^2}dt = 3\int_{3\varepsilon}^\infty \frac{sin(u)}{u^2}du$, d'où $I(\varepsilon) = \frac{3}{4}\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{sin(t)}{t^2}dt$. Donc

$$\boxed{k = \frac{3}{4}}$$

Posons $\varphi(t) = \frac{sin(3t)}{t}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$.

φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive sur $[\varepsilon, 3\varepsilon]$(pour $\varepsilon > 0$), donc d'après la formule de la moyenne: $\exists\ c \in [\varepsilon, 3\varepsilon]$,t.q. $I(\varepsilon) = \frac{3}{4}\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}dt = \frac{3}{4}\varphi(c)\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{1}{t^2}dt = \frac{3}{4}\varphi(c)ln3$.

d'où $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi(c) = \varphi(0) = 1$ et alors

$$\boxed{I_{3,2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} I(\varepsilon) = \frac{3ln3}{4}.}$$

III

$$\boxed{\alpha = n}$$

$$A_n = I_{n,n} = \int_0^\infty (\frac{sin(t)}{t})^n dt \quad et \quad A_1 = I_{1,1} = \int_0^\infty \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

3.1. $x > 0$

$$\int_0^\infty \frac{sin(xt)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

ceci en posant $xt = u$

3.2.

On suppose $n \geq 2$ $A_n = I_{n,n} = \int_0^\infty (\frac{sin(t)}{t})^n dt$

• Au voisinage de ∞:

$|(\frac{sin(t)}{t})^n| \leq \frac{1}{t^n}$ donc on a convergence au voisinage de ∞ (d'après le critère de comparaison avec des intégrales de Riemann $n \geq 2$)

• Au voisinage de 0:

$\forall n \geq 2$

$$\lim_{t \to 0} (\frac{sin(t)}{t})^n = \lim_{t \to 0} |(\frac{sin(t)}{t})^n| = 1$$

donc la fonction $f : t \mapsto (\frac{sin(t)}{t})^n$ est prolongeable par continuité en 0. Ainsi $A_n = I_{n,n} = \int_0^\infty (\frac{sin(t)}{t})^n dt$ est absolument convergente donc convergente.

3.3.

Calcul de $A_2 = I_{2,2} = \int_0^\infty \frac{sin^2(t)}{t^2} dt$

Par des intégrations par parties (tous les termes convergent) on obtient:

$\int_0^\infty \frac{sin^2(xt)}{t^2} dt = [-\frac{1}{t} sin^2(xt)]_0^\infty + 2x \int_0^\infty \frac{cos(xt)sin(xt)}{t} dt = x \int_0^\infty \frac{sin(2xt)}{t} dt = x\frac{\pi}{2}$

donc pour $x = 1$ on a

$$\boxed{A_2 = I_{2,2} = \int_0^\infty \frac{sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}}$$

3.4.

Calcul de $A_4 = I_{4,4} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^4}dt$

Par des intégrations par parties successives (tous les termes convergent) on obtient:

$$A_4 = \int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^4}dt = +\int_0^{\infty} +\frac{4}{3}\frac{cos(t)sin^3(t)}{t^3}dt\frac{4}{3}(-\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{2t^2} - \frac{3}{2}\frac{cos^2(t)sin^2(t)}{t^2}dt) =$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{4cos^2(t)sin^2(t)}{t^2}dt) = -\frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{sin^2(2t)}{t^2}dt$$

• Calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^2}dt$

et comme

$$sin^4(t) = sin(t)sin^3(t) = sin(t)(\frac{3}{4}sin(t) - \frac{1}{4}sin(3t)) = \frac{3}{4}sin^2(t) - \frac{1}{4}sin(t)sin(3t)$$

Calculons d'abord :

$$\int_0^{\infty} \frac{sin(t)sin(3t)}{t^2}dt$$

par des intégrations par parties successives (tous les termes convergent) on obtient:

$$\int_0^{\infty} \frac{sin(t)sin(3t)}{t^2}dt = +\int_0^{\infty} \frac{cos(t)sin(3t)}{t}dt + 3\int_0^{\infty} \frac{sin(t)cos(3t)}{t}dt = \frac{3}{2}(\int_0^{\infty} \frac{sin(4t)}{t}dt +$$

$$\int_0^{\infty} \frac{sin(2t)}{t}dt) + \frac{1}{2}(\int_0^{\infty} \frac{sin(4t)}{t}dt + \int_0^{\infty} \frac{sin(-2t)}{t}dt) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}.$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^4}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{sin^4(t)}{t^4}dt = \frac{\pi}{2}}$$