Transformée de Laplace

Exercice 23. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on note, lorsqu'elle converge, $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $\mathscr{L}(f)$ est la transformée de **Laplace** de f.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur transformée de **Laplace** en précisant son domaine de définition :

a) $t \mapsto 1$. **b)** $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. **c)** $t \mapsto t^n$.

2. On suppose que f est bornée. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Théorème de la valeur finale. On suppose qu'il existe un réel ℓ non nul tel que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$. Déterminer un équivalent de $\mathscr{L}(f)$ en 0.

On suppose f continue uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe $p_0 > 0$ tel que, pour pour tout $p > p_0$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie et continue sur $]p_0, +\infty[$.

5. Théorème de la valeur initiale. On note $\ell = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$. Déterminer la limite de $p \mapsto p\mathscr{L}(f)(p)$ en $+\infty$.