Stanislas
DS n°01

Correction
Devoir Surveillé
4h

PSI
05 septembre 2020

[D'après Épreuve commune - Saint-Cyr - 1995]

Remarques

1. *Avec* n'est pas un quantificateur. Seuls ont droit de cité *Pour tout* et *Il existe.*

2. La croissance de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ peut être justifiée sans dériver.

3. Lors d'un calcul de limite, on justifiera toujours l'existence avant de faire apparaître le symbole lim. On ne peut mener un calcul avec ce symbole sans justifications lourdes et nombreuses.

4. Les calculs de développements limités de la première partie sont à reprendre dans leur intégralité.

5. Les récurrences peuvent être fusionnées et une seule récurrence suffit pour montrer la première question.

6. On rappelle que, pour u réel, $\sqrt{u^2} = |u|$. Il faut ensuite discuter du signe de u si on souhaite supprimer les valeurs absolues.

7. La formule de Taylor-Young indique une propriété *locale*, on ne pourra que très rarement en déduire des inégalités.

8. Les hypothèses des théorèmes (Taylor reste intégral, Rolle, Intégrations par parties,...) doivent être explicitement vérifiées.

9. Lors de la dérivée du polynôme $B_{n+1}(1-X)$, il faut évoquer la dérivée de fonctions composées.

10. Ne pas oublier que la question **1.** peut servir dans la preuve de la question **2.** !

11. On écrit polynôme et fonction polynomiale (notez les apparitions et disparitions de l'accent circonflexe !).

12. Les calculs de $B_1, \dots, B_4$ doivent être effectués sur la copie.

13. Les résultats sur les polynômes de Bernoulli sont très classiques.

14. La somme des cosinus est un calcul très classique.

15. La question **III.3** qui repose sur une intégration par partie est très classique.

Partie I : Étude de suites

1. a) On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, les réels c_n et λ_n sont bien définis et $c_n = \cos\frac{\pi}{2^n} > 0$ et $\lambda_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.
Initialisation. D'après l'initialisation, $c_1 = \cos\frac{\pi}{2} > 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $c_n = \cos\frac{\pi}{2^n}$ et $\lambda_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$. Comme $c_n > 0$, alors c_{n+1} et λ_{n+1} sont bien définis. De plus, d'après la définition,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} \\ &= \left|\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right| \\ &= \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \text{ car } \frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= 2^n \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= 2^{n+1} \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= 2^{n+1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

b) Comme $\sin x \sim_0 x$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \pi$.

2. Comme la fonction sinus est de classe $\mathscr{C}^3$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|\sin(x) - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6} \sup_{t\in[0,x]} |\cos(t)| \leqslant \frac{|x|^3}{6}.$$

Ainsi, en appliquant cette inégalité en $\frac{\pi}{2^n}$, puis en multipliant par 2^n,

$$|\lambda_n - \pi| \leqslant \frac{\pi^3}{6 \cdot 2^{2n}}.$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction sinus étant de classe $\mathscr{C}^{2p+2}$ sur $\mathbb{R}$, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}).$$

Ainsi, comme $\frac{1}{2^n} \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors

$$\lambda_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2kn}} + o\left(\frac{1}{2^{2p}}\right).$$

4. a) Comme (λ_n) et (λ_{n+1}) convergent vers π, d'après le théorème d'addition des limites, $(\lambda_n^{(1)})$ converge vers π.
D'après les développements limités précédents,

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + o\left(4^{-n}\right) \\
\lambda_{n+1} &= \pi - \frac{\pi^3}{24 \cdot 4^n} + o\left(4^{-n}\right) \\
\frac{-\lambda_n + 4\lambda_{n+1}}{3} &= \pi + o\left(4^{-n}\right).
\end{aligned}$$

b) En utilisant le développement limité à l'ordre supérieur, on obtient

$$3\lambda_n^{(1)} = \pi + \frac{\pi^5}{5!}\left(-4^{-2n} + 4 \cdot 4^{-2n+2}\right) + o(4^{-2n}).$$

Ainsi,

$$\lambda_n^{(1)} - \pi \sim -\frac{\pi^5}{5!4^{2n+1}}.$$

5. a) D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{(1)} &= \pi - \frac{\pi^5}{5!4^{-2n+1}} + o(4^{-2n}) \\
\lambda_{n+1}^{(1)} &= \pi - \frac{\pi^5}{5!4^{-2n+3}} + o(4^{-2n}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$16\lambda_{n+1}^{(1)} - \lambda_n^{(1)} = 15\pi + o(4^{(-2n)}).$$

On choisira donc $\alpha = -\frac{1}{15}$.

b) En utilisant les définitions,

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{1}{45}\left(\lambda_n - 20\lambda_{n+1} + 64\lambda_{n+2}\right).$$

c) Comme la fonction sinus est de classe $\mathscr{C}^7$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right| \leqslant \frac{|x^7|}{7!}.$$

Ainsi, en posant

$$r_n = \lambda_n - \pi + \frac{\pi^3}{3!4^n} - \frac{\pi^5}{5!16^n},$$

alors $|r_n| \leqslant \frac{\pi^7}{7!4^{3n}}$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{45}(1 - 20 + 64) &= \pi \\
\frac{\pi^3}{3! \cdot 45 \cdot 4^n}\left(1 - \frac{20}{4} + \frac{64}{16}\right) &= 0 \\
\frac{\pi^5}{5! \cdot 46 \cdot 16^n}\left(1 - \frac{5}{4} + \frac{4}{16}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| &\leqslant \frac{1}{45}\left(r_n + 20r_{n+1} + 64r_{n+1}\right) \\
&\leqslant \frac{\pi^7}{45 \cdot 7! \cdot 4^{3n}}\left(1 + \frac{20}{64} + \frac{1}{64}\right) \\
&\leqslant \frac{\pi^7}{45 \cdot 7! \cdot 4^{3n}} \frac{64 + 20 + 1}{64} \\
&\leqslant \frac{17 \cdot \pi^7}{576 \cdot 7! \cdot 4^{3n}}.
\end{aligned}$$

Partie II : Polynômes de Bernoulli

1. Comme la fonction f est continue, alors f admet une primitive. De plus, comme F est une primitive de f, alors il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda.$$

Comme F est continue, alors elle est intégrable et

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \lambda.$$

Ainsi, F est déterminée de manière unique par

$$F = G - \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. a) En effectuant une récurrence sur n, comme B_n est une fonction polynomiale, elle est continue et, d'après la question précédente, il existe une unique fonction B_{n+1} telle que $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
De plus, comme B_n est une fonction polynomiale, d'après l'expression trouvée à la question précédente, B_{n+1} est également une fonction polynomiale.
Montrons par récurrence que B_n est de degré n et de coefficient dominant égal à $\frac{1}{n!}$.
Initialisation. D'après la définition, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $B_n = \frac{X^n}{n!} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k X^k$. Alors,

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \int_0^x B_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \int_0^t B_n(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{b}_k\,\mathrm{d}t + C,
\end{aligned}$$

où C est une constante.

b) En utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1, \\
B_1 &= X - \frac{1}{2}, \\
B_2 &= \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}, \\
B_3 &= \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}, \\
B_4 &= \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}.
\end{aligned}$$

3. Comme $B'_{n+1} = B_n$, alors en intégrant cette relation,

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. a) On remarque que $C_0 = B_0(1-X) = 1$.
De plus, d'après les dérivées des fonctions composées,

$$\begin{aligned}
C'_{n+1}(X) &= (-1)^{n+1}(-1)B'_{n+1}(1-X) \\
&= (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X).
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la formule de changement de variable,

$$\int_0^1 C_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, (C_n) satisfait la même relation de récurrence et la même valeur initiale que (B_n). Comme cette relation définit une unique suite de polynômes, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n = C_n.$$

b) Les graphes de B_n ont donc

- Si n est pair, une symétrie axiale d'axe $x = \frac{1}{2}$.
- Si n est impair, une symétrie centrale de centre $(1/2, 0)$.

Si n est impair et supérieur ou égal à 3, alors

$$B_n(0) = C_n(0) = -C_n(1) = -B_n(1).$$

Or, d'après la question précédente, $B_n(0) = B_n(1)$. Ainsi,

$$B_n(0) = B_n(1) = 0.$$

Enfin, par symétrie, $B_n(1/2) = -B_n(1/2) = 0$.

5. a) Procédons par récurrence sur n.
Initialisation. Comme $B_1 = X - \frac{1}{2}$, il ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.
Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que B_{2n-1} ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.
D'après la question précédente, $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1/2) = 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]0, 1/2[$ tel que $B_{2n+1}(\alpha) = 0$. Alors, comme B_{2n+1} est une fonction polynomiale, d'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in]0, \alpha[$ et $\delta \in]0, \alpha[$ tels que $B'_{2n+1}(\alpha) = B'_{2n+1}(\delta) = 0$. Ainsi, B_{2n} possède deux zéros distincts et, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta \in]\gamma, \delta[\subset]0, 1/2[$ tel que $B'_{2n}(\beta) = B_{2n-1}(\beta) = 0$. On obtient ainsi une contradiction.

b) Comme $B_0 = 1$, le résultat est vrai pour $m = 0$. Soit $m \geqslant 1$. Comme $(B_{2m} - B_{2m}(0))' = B_{2m-1}$, alors $B_{2m} - B_0$ est strictement monotone sur $]0, 1/2[$. Comme $B_{2m} - B_{2m}(0)$ s'annule en 0, alors elle garde un signe constant sur $[0, 1/2]$. De plus, pour tout $x \in [1/2, 1]$, $B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = B_{2m}(1-x) - B_{2m}(0)$ donc ce résultat est encore valable sur $[1/2, 1]$.

Partie III : Série de Riemann et nombres de Bernoulli

1. Pour tout $t \in]0, 1[$, $e^{2ik\pi t} \neq 1$. Ainsi, d'après la somme des termes d'une série géométrique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} e^{2ik\pi t} &= \frac{e^{2i(N+1)\pi} - 1}{e^{2i\pi} - 1} \\
&= e^{iN\pi} \frac{\sin(N+1)\pi t}{\sin \pi t}. \\
\sum_{k=0}^{N} \cos(2k\pi t) &= \cos(N\pi t) \frac{\sin((N+1)\pi t}{\sin(\pi t)}, \quad \text{en prenant les parties réelles,} \\
1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) &= 2\frac{\cos(N\pi t)\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} - 1 \\
&= \frac{\sin((2N+1)\pi t) + \sin(\pi t)}{\sin(\pi t)} - 1 \\
&= \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.
\end{aligned}$$

2. La fonction B_n étant polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 et, en utilisant la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \frac{B'_n(0)t + \frac{B''_n(0)}{2}t^2 + o(t^2)}{\pi t(1 + o(t))} \\
&= \frac{B'_n(0)}{\pi} + \frac{B''_n(0)}{2\pi}t + o(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{0} \varphi_n = \frac{B'_n(0)}{\pi}$ et φ_n est une fonction prolongeable par continuité en 0. De plus, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi_n(t) - \frac{B'_n(0)}{\pi}}{t} = \frac{B''_n(0)}{2\pi}$.
De plus, pour tout t non nul, $\varphi'_n(t) = \frac{B'_n(t)\sin(\pi t) - (B_n(t) - B_n(0))\pi\cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$.
Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 2 du numérateur, alors $\lim\limits_{t \to 0} \varphi'_n(t) = \frac{1}{2\pi}B''_n(0)$.
Ainsi, φ_n est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$.
Enfin, $\varphi_n(1-t) = (-1)^n \frac{B_n(t) - B_n(1)}{\sin(\pi t)}$. Comme, pour tout $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$, alors la fonction φ_n est bien prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Comme les fonctions $t\mapsto f(t)$ et $t\mapsto \sin(xt)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)\cos(x)-f(0)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(1)|+|f(0)|}{|x|} + \frac{1}{|x|}\int_0^1 \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. On utilise deux intégrations par parties successives pour obtenir

$$I_{n,k} = \frac{1}{4k^2\pi^2}(B_{n-1}(1)-B_{n-1}(0)-I_{n-2,k}).$$

Ainsi, $I_{0,k}=0$, $I_{1,k}=0$, $I_{2,k}=\frac{1}{4\pi^2}$ et, pour tout $n\geqslant 3$, $I_{n,k} = -\frac{1}{4k^2\pi^2}I_{n-2,k}$. Ainsi,

$$\forall\ p>0,\ I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}} \text{ et } I_{2p+1,k}=0.$$

5. a) D'après la définition de φ_{2m},

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (B_{2m}(t)-B_{2m}(0))\,\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (B_{2m}(t)-B_{2m}(0))\,\mathrm{d}t+\cdots\\ &\cdots + 2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 (B_{2m}(t)-B_{2m}(0))\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= -B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}.\end{aligned}$$

b) Comme la fonction φ_{2m} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, alors en utilisant les questions précédentes,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}(0).$$

c) D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = 2\pi^2B_2(0) = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = -2^3\pi^4B_4(0) = \frac{\pi^4}{90}.$$

6. Comme, pour $k\geqslant 2$, $k^{2m}\geqslant 4^m$, alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{4^m} = 1+\frac{1}{16}\frac{4}{3} < 2.$$

Ainsi,

$$|B_{2m}(0)| \leqslant \frac{4}{(4\pi^2)^m}.$$

Partie IV : Formule sommatoire d'Euler

1. Démontrons cette formule par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n=1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'''(t)B_3(t)\,\mathrm{d}t &= \left[f''(t)B_3(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f''(t)B_2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= (f''(1)-f''(0))B_3(0) - \left[f'(t)B_2(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f'(t)B_1(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -(f'(1)-f'(0))B_2(0) + [f(t)B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)B_0(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -(f'(1)-f'(0))B_2(0) + (f(1)+f(0))\frac{1}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Hérédité. Soit $m > 0$. Supposons la propriété vraie à l'ordre m. En utilisant deux intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^{(2m+3)}(t)B_{2m+3}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[f^{(2m+2)}(t)B_{2m+3}(t)\right]_0^1 - \left[f^{(2m+1)}B_{2m+2}(t)\right]_0^1 + \\ &\quad + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\left(f^{(2m+1)}(1) - f^{(2m+1)}(0)\right)B_{2m+2}(0) + \\ &\quad + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

2. En utilisant une intégration par parties dont le crochet est nul,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{2m+1}(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|-\int_0^1 f^{(2m+2)}(t)(B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sup_{[0,1]}\left|f^{(2m+2)}\right| \cdot \int_{[0,1]} |B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{[0,1]}\left|f^{(2m+2)}\right| \cdot \left|\int_{[0,1]} B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\quad ,\ \text{car } B_{2m+1} - B_{2m+2}(0) \text{ est de signe constant} \\ &\leqslant |B_{2m+2}(0)| \sup_{[0,1]}\left|f^{(2m+2)}\right| \\ &\leqslant \frac{4}{(4\pi^2)^m}\sup_{[0,1]}\left|f^{(2m+2)}\right|,\end{aligned}$$

d'après la partie précédente.

3. D'après la méthode des trapèzes,

$$T(h) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2n} = \frac{f(0)+f(1)}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

4. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la formule sommatoire,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_i(t)\,\mathrm{d}t =&\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} - \frac{h}{12}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i)) + \cdots \\ &+ \frac{h^3}{720}(f'''(x_{i+1}) - f'''(x_i)) - \int_0^1 h^5 f^{(5)}(x_i + ht)B_5(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De plus, $\int_0^1 f_i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t =& nT(h) - \frac{h}{12}(f'(1) - f'(0)) + \frac{h^3}{720}(f'''(1) - f'''(0)) \\ &- h^5\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f^{(5)}(x_i + ht)B_5(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résulat annoncé avec $a_1 = \frac{f'(1)-f'(0)}{12}$ et $a_2 = \frac{f'''(1)-f'''(0)}{720}$. De plus, d'après les questions précédentes,

$$|r(h)| \leqslant h^6 \sup_{x\in[0,1]} f^{(6)} \cdot \frac{4}{(4\pi^2)^3}.$$

Partie V : Accélération de Romberg

1. D'après la partie précédente,

$$\begin{aligned}T(h) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= a_1h^2 + a_2h^4 + o(h^6) = o(h) \\ T_1(h) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= a_2\frac{-1+\frac{1}{4^3}}{3}h^4 + o(h^6) = o(h^3) \\ T_2(h) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{45}(-r(h) + 20r(h/2) - 64r(h/4)) = o(h^5).\end{aligned}$$

2. a) On a le résultat à la question précédente.

b) D'après la majoration obtenue sur r,

$$\left|T_2(h) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{h^6}{45\cdot 16\pi^6}\left(1 + \frac{20}{2^6} + \frac{64}{4^6}\right)\left\|f^{(6)}\right\| = \frac{17h^6}{9216\pi^6}\left\|f^{(6)}\right\|.$$

3. Comme $f^{(6)}(t) = \frac{6!}{(1+t)^7}$, alors $\left\|f^{(6)}\right\| = 6! = 720$. □