Méthode 0.1

$$\frac{1}{\rho(S)} = \limsup |a_n|^{1/n} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Définition 0.1 – Fonction analytique. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

- Soit $z_0 \in \Omega$, la fonction f est développable en série entière en z_0 s'il existe une série entière S telle que $\rho(S) > 0$ et $f(z) = S(z - z_0)$.
- La fonction f est *analytique* dans Ω si elle est développable en série entière autour de tout $z \in \Omega$.

L'analyticité entraîne la continuité et la dérivabilité.

Définition 0.2 – Connexité. Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit *connexe* si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Si z_0 et z_1 sont deux points de Ω, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$.

(ii) Si A et B sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$, alors l'un des deux ouverts A ou B est vide.

Remarque 0.1 Attention au calcul des zéros d'une fonction. Par exemple, prenons la fonction $f : z \mapsto \sin(1/z)$. *A priori*, les zéros de f ne sont pas uniquement les zéros de la fonction analogue définie sur $\mathbb{R}$. Il se trouve que c'est le cas mais pour s'en convaincre, il faut repasser par l'écriture du sinus complexe et de z sous sa forme algébrique.

Théorème 0.1 – Zéros isolés. Soient Ω **connexe** et f une fonction **analytique dans** Ω. Si $Z(f)$ a un point d'accumulation $z^\star \in \Omega$, alors $f \equiv 0$ dans Ω.

Méthode 0.2 Pour montrer qu'une fonction est constante sur un domaine, il est judicieux d'utiliser le théorème de zéros isolés (ou le théorème de Liouville).

Théorème 0.2 – Prolongement analytique. Soit $\mathcal{O}$ et Ω deux ouverts de $\mathbb{C}$, tels que $\mathcal{O} \subset \Omega$ et Ω est connexe, et soit f une fonction analytique dans $\mathcal{O}$. Alors il existe au plus une fonction g analytique dans Ω telle que $f = g$ dans $\mathcal{O}$. Dans ce cas, la fonction g est appelée le prolongement analytique de f à l'ouvert Ω.

Théorème 0.3 – CNS de $\mathbb{C}$-dérivabilité. La fonction f est dérivable en z_0 si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) et vérifie les relations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0.$$

Dans ce cas, $f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$. On pose $\tilde{f}(x,y) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$ avec P et Q à valeurs réelles. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Définition 0.3 – Fonction holomorphe.

$$f \text{ holomorphe dans } \Omega \iff f \text{ dérivable en tout } z \in \Omega.$$

Théorème 0.4 – Conservation de l'holomorphie par dérivation.

$$f \in H(\Omega) \implies f^{(n)} \in H(\Omega)\ \forall n \geqslant 1.$$

- $f'(z) = \frac{1}{2}\left(\partial_x \tilde{f}(x,y) - \mathrm{i}\partial_y \tilde{f}(x,y)\right)$
- Si $\nabla f \equiv 0$ sur un ouvert Ω **connexe**, alors $f \equiv 0$ sur Ω.
- La fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ n'est dérivable nulle part.

Proposition 0.1 – . Soient Ω un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Les conditions suivantes sont équivalentes : $f = \text{cste}, \mathrm{Re}(f) = \text{cste}, \mathrm{Im}(f) = \text{cste}, f(\overline{z}) = f(z)$.

Méthode 0.3 Paramétrage d'une ellipse dans $\mathbb{C}$: $g(t) = a\cos(t) + \mathrm{i}b\sin(t)$.

Lemme 0.1 d'estimation

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \mathrm{long}(\gamma) \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|$$

Théorème 0.5 – Cauchy. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_N$ le bord orienté du compact $\overline{\Omega}$. Alors,

$$f \in H(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \implies \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \implies \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Proposition 0.2 – Formule de Cauchy. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ borné, γ multi-lacet bord orienté de $\overline{\Omega}$ et $f \in H(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$. Alors,

$$\forall a \in \Omega, f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Méthode 0.4 Calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Identifier les parties imaginaires avec $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

Théorème 0.6 – Liouville. Soit f une fonction **entière** telle qu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leqslant C(1 + |z|^p)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est un polynôme de degré $\leqslant p$.

Remarque 0.2 En particulier, si f est bornée, alors f est constante.

Théorème 0.7 – . Si $\rho(S^+)\rho(S^-) > 1$ alors la série de Laurent

$$S(z) = S^+(z) + S^-\left(\frac{1}{z}\right)$$

converge dans la couronne

$$\mathcal{C} = \left\{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{\rho(S^-)} < |z| < \rho(S^+)\right\}$$

vers une fonction holomorphe : $S \in H(\mathcal{C})$.

Théorème 0.8 – . Soient r_1, r_2 tels que $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ et $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$. Si $f \in H(\mathcal{C})$, alors f est développable en série de Laurent :

$$f(z) = S^+(z) + S^-\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\rho(R^+) \geqslant r_2$ et $\rho(S^-) \geqslant \frac{1}{r_1}$.

Lemme 0.2 Soit $f \in H(\dot{D}(z_0, r))$. On suppose que $(z - z_0)f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \ell \in \mathbb{C}$.

- si $\ell = 0$: z_0 est une singularité fictive,
- si $\ell \neq 0$: z_0 est un pôle d'ordre 1 (simple).

Par exemple, si la fonction f a un pôle simple en 0, elle s'écrit sous la forme $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z} + h(z)$ avec h analytique.

Théorème 0.9 – des résidus. Soient Ω ouvert **borné** de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, de bord orienté γ. On pose $\mathcal{P} = \{z_1, \ldots, z_p\} \subset \Omega$ et soit $f \in H(\Omega \setminus \mathcal{P}) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{j=1}^p \mathrm{Res}(f, z_j).$$

Méthode 0.5 Calcul de l'ordre d'un résidu
Soit z_0 un pôle de f. Son ordre p est tel que

$$(z-z_0)^p f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \ell \neq 0$$

ou bien tel que

$$\lim_{z\to z_0} f^{(p)}(z) = \ell \neq 0.$$

Si quel que soit l'entier p, la fonction $(z-z_0)^p f(z)$ n'est pas bornée dans le disque pointé $\dot{D}(z_0,r)$, alors f admet une **singularité essentielle** en z_0.

Méthode 0.6 Calcul de résidus

- $(z-z_0)f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \ell \neq 0 \iff z_0$ pôle **simple** et $\mathrm{Res}(f,z_0)=\ell$.
- Si f a un pôle **double** :

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big((z-z_0)^2 f(z)\big).$$

- Si f a un pôle d'ordre p,

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(p-1)!}\big((z-z_0)^p f(z)\big)^{(p-1)}.$$

Méthode 0.7

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = \overline{\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})}$$

1 est une singularité essentielle de $z\mapsto \sin\frac{1}{1-z}$.
z_0 pôle simple. $f=\frac{u}{v}$.

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}.$$

Lemme 0.3 Jordan
Soit f telle que $(z-a)f(z)$ tende vers 0 lorsque z tend vers a. L'intégrale

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

prise le long d'un cercle de rayon infiniment petit décrit autour de a tend vers 0.

L'intégrale d'une dérivée sur un lacet est nulle. On en déduit par exemple que la fonction $z\mapsto\frac{1}{z}$ n'admet pas de dérivée dans $\mathbb{C}^\star$.

Définition 0.4 – Primitive d'une fonction holomorphe. Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$, ouvert et soit $f\in H(\Omega)$. On appelle *primitive* F de f une fonction telle que $F'=f$. Si Ω est **connexe**, la fonction F est unique à une constante additive près.

Définition 0.5 – Ouvert étoilé. On dit que Ω est un *ouvert étoilé* s'il existe $a\in\Omega$ tel que pour tout $z\in\Omega$, $[a,z]\subset\Omega$.

Lemme 0.4 Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ un **ouvert étoilé** et soit $f\in H(\Omega)$. Alors il existe $F\in H(\Omega)$ telle que $F'(z)=f(z)$ pour tout $z\in\Omega$.

Soient Ω un ouvert étoilé et f une fonction différentiable de Ω dans $\mathbb{C}$ telle que son gradient est nul dans Ω. Alors f est constante dans Ω.

Définition 0.6 – Détermination principale du log. On a défini une fonction $z\mapsto\log z$ telle que

- $\log z\in H(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-)$,
- $(\log z)'=\frac{1}{z}$,
- $\log z=\log x$ si $x>0$,
- $\log z=\log\rho+\mathrm{i}\theta$ si $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $-\pi<\theta<\pi$.

Soient $x\in\mathbb{R}_-$ et $\varepsilon>0$: $\log(x+\mathrm{i}\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\log|x|+\mathrm{i}\pi$ et $\log(x-\mathrm{i}\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\log|x|-\mathrm{i}\pi$

Le saut du log à travers sa coupure est donc égal à $2\mathrm{i}\pi$.

La fonction $z\mapsto\log z$ peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}_-^\star$ à partir de $\log(x+\mathrm{i}\varepsilon)\to\log|x|+\mathrm{i}\pi$.

Définition 0.7 – Détermination principale de $\sqrt{z}$. On pose $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $-\pi<\theta<\pi$. On définit la fonction $z\mapsto\sqrt{z}$ par

$$\sqrt{z}=\exp\left(\frac{1}{2}(\log\rho+\mathrm{i}\theta)\right)=\sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

Proposition 0.3 – .

- $z\mapsto\sqrt{z}\in H(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-)$,
- $\sqrt{z}=\sqrt{x}$ pour $z=x>0$,
- $(\sqrt{z})'=\frac{1}{2\sqrt{z}}$,
- $\mathrm{Re}\sqrt{z}\geqslant 0$.

Son saut à travers la coupure est égal à $2\mathrm{i}\sqrt{\rho}$.

Lemme 0.5 Soient $f\in H(\Omega)$ et $z_0\in\Omega$. Si $f'(z_0)\neq0$, alors f est localement inversible et f^{-1} est holomorphe.

Théorème 0.10 – . Soient $\Omega\in\mathbb{C}$ un ouvert **connexe** et $f\in H(\Omega)$ non constante.

(i) f est une application ouverte, i.e. que l'image d'un ouvert est un ouvert. En paticulier, $f(\Omega)=\widetilde{\Omega}$ est un ouvert.

(ii) Si f est injective sur Ω, alors f' ne s'annule jamais dans Ω, donc il existe un inverse global $f^{-1}\in H(\widetilde{\Omega})$.

$$\forall z\in\Omega\quad f^{-1}(f(z))=z,\ (f^{-1})'(f(z))=\frac{1}{f'(z)}.$$

Proposition 0.4 – . La TC conserve les angles et l'orientation.

Proposition 0.5 – . La TC transforme une fonction harmonique en une fonction harmonique.

Définition 0.8 – Fonction homographique. Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ tels que $ad-bc\neq0$. Une *fonction homographique* f est de la forme

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

Proposition 0.6 – . Une fonction homographique f réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$ dont la réciproque est la fonction homographique

$$f^{-1}(z)=-\frac{dz-b}{cz-a}.$$

Une fonction homographique est une composition des transformations élémentaires translation, rotation, homothétie, inversion.

Proposition 0.7 – . Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des droites et des cercles de $\mathbb{C}$. Une homographie transforme un élément de $\mathcal{F}$ (privé de $z^\star$) en un autre élément de $\mathcal{F}$ (privé de $\tilde{z}^\star$).

Définition 0.9 – Simple connexité. Un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$ connexe est *simplement connexe* si pour tout lacet $\gamma\subset\Omega$, l'intérieur du lacet γ est dans Ω.

Théorème 0.11 – Riemann. Si Ω est simplement connexe et si $\Omega\neq\mathbb{C}$ alors, il existe une TC qui transforme Ω en le disque unité.

- Attention aux erreurs de signe dans le parcourt des chemin.
-

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|$$
$$\frac{1}{|Re^{\mathrm{i}\theta}+1|}\leqslant\frac{1}{|R-1|}$$