

PHYSIQUE QUANTIQUE – FORMULAIRE DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE

d'après le cours PA101 – ENSTA Paris

A. WAYOFF

2022 – 2023

- ▷ **Coordonnées généralisées** pour un système de N particules repérées par un vecteur position $\vec{r}_{k=1,\dots,N}$ et comportant ℓ degrés de liberté : ensemble de ℓ quantités indépendantes $\mathbf{q} := \{q_1, \dots, q_\ell\}$ telles que

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_\ell) \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, \ell \rrbracket^2 \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad (\text{indépendance}).$$

- ▷ **Lagrangien** d'un système de N particules de masse $m_{k=1,\dots,N}$ repérées par un vecteur position $\vec{r}_{k=1,\dots,N}$ et soumises à des forces qui dérivent en totalité d'un potentiel $V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt} \right)^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

- ▷ **Équations de LAGRANGE** pour un système dont les particules peuvent être décrites par les coordonnées généralisées $\mathbf{q} := \{q_1, \dots, q_\ell\}$ et les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}} := \{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell\}$ et sont soumises à des forces qui dérivent en totalité d'un potentiel $V = V(q_1, \dots, q_\ell)$

$$\forall i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

- ▷ **Impulsions** pour un système de N particules repérées par un vecteur position $\vec{r}_{k=1,\dots,N} = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_\ell)$ et comportant ℓ degrés de liberté :

$$\forall i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket \quad p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

- ▷ **Hamiltonien** d'un système décrit par les coordonnées généralisées $\mathbf{q} := \{q_1, \dots, q_\ell\}$ et les impulsions correspondantes $\mathbf{p} := \{p_1, \dots, p_\ell\}$

$$\mathcal{H} := \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

- ▷ **Équations de HAMILTON** pour un système décrit par les coordonnées généralisées $\mathbf{q} := \{q_1, \dots, q_\ell\}$ et les impulsions correspondantes $\mathbf{p} := \{p_1, \dots, p_\ell\}$

$$\forall i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket \quad \begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}.$$

- ▷ **Crochets de POISSON** en variables canoniques (\mathbf{q}, \mathbf{p}) pour deux fonctions $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ et $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$\{f, g\} := \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j}.$$

- ▷ **Équation fondamentale de la mécanique classique** : pour toute fonction $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\}.$$