Outils élémentaires d'analyse pour les Équations aux Dérivées Partielles
Fiche & Méthodes

d'après le cours MA102 – ENSTA Paris

A. Wayoff

2022–2023

Table des matières

1 Topologie des espaces vectoriels normés

Dans les espaces vectoriels normés, la convergence des suites et la continuité des applications s'énoncent de la même manière que pour les suites réelles et les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la valeur absolue est simplement remplacée par la norme de l'espace vectoriel.

Définition 1.1 (Norme). Une application $u \mapsto \|u\|$ d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes (pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \text{ (homogénéité)}$$
$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)}$$
$$\|u\| = 0 \implies u = 0 \text{ (séparation)}$$

Définition 1.2 (Applications continues). Soient E et F deux espaces vectoriels normés munis respectivement des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ et soit $f\colon E \to F$ une application.

(i) On dit que f est *continue en* $u_0 \in E$ si et seulement si $\lim\limits_{u \to u_0} \|f(u) - f(u_0)\|_F = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall u \in \mathbb{R},\ \|u - u_0\|_E \leqslant \eta \implies \|f(u) - f(u_0)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

(ii) f est une application *continue sur* E si elle est continue en tout $u_0 \in E$.

Lorsque l'application $f \colon E \to F$ est linéaire, on a le critère de continuité suivant.

Proposition 1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés munis respectivement des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Pour que l'application linéaire $f \colon E \to F$ soit continue sur E, il faut et il suffit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que,*

$$\|f(u)\|_F \leqslant C\|u\|_E \ \forall u \in E.$$

Définition 1.3 (Convergence d'une suite & Suite de Cauchy).

(i) Soit E un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_E$. Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E *converge* vers $u \in E$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u - u_n\|_E = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \text{ tel que } n \geqslant N \implies \|u - u_n\|_E \leqslant \varepsilon.$$

(ii) On dit que la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E est une *suite de Cauchy* lorsque,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \text{ tel que } n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N \implies \|u_n - u_m\|_E \leqslant \varepsilon.$$

On montre facilement qu'une suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et en fait dans n'importe quel espace vectoriel de dimension finie, mais pas toujours dans un espace vectoriel de dimension infinie. Les espaces vectoriels normés dans lesquels les suites de Cauchy sont convergentes sont dits *complets*. Un espace vectoriel normé complet est aussi appelé un *espace de Banach*.

Proposition 1.2.

— *Toute suite de Cauchy est bornée.*

— *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

— *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.*

♦ **Exemple.** L'espace vectoriel $\mathscr{C}^0\big([a\,;b]\big)$ des fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ est complet pour la norme de la *convergence uniforme* $\|u\|_\infty = \sup_{x\in[a\,;b]} |u(x)|$, mais n'est pas complet pour la norme de la *convergence en moyenne* $\|u\|_1 = \int_a^b |u(x)| \,\mathrm{d}x$. Cet exemple illustre une particularité des espaces de dimension finie : contrairement au cas de la dimension finie, deux normes ne sont pas nécessairement équivalentes. ◊

Dans le cas des applications *linéaires*, le critère de continuité en un point équivaut à la continuité sur tout l'espace.

Exercice 2 Q2 TD 1 : application contractante $\implies$ continue.

Quand on veut montrer la complétude d'un espace, il ne suffit pas que toute les suites convergent mais que la limite soit dans l'espace.

Proposition 1.3 (Série de Neumann). *Si $\|T\| < 1$, alors*

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

2 Utilisation de l'intégrale de Lebesgue

2.1 Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue prolonge la notion d'intégrale de Riemann : elle donne un sens à $\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x$ pour une classe de fonctions beaucoup plus large. Les deux propositions suivantes permettent d'utiliser les résultats usuels de la théorie de l'intégrale de Riemann pour évaluer des intégrales de Lebesgue ou tester l'intégrabilité d'une fonction.

Proposition 2.1 (Riemann-intégrabilité et Lebesgue-intégrabilité). *Soit $[a\,;b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $u\colon [a\,;b] \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Si u est Riemann-intégrable sur $[a\,;b]$, alors u est Lebesgue-intégrable sur $[a\,;b]$ et les deux intégrales coïncident.*

En revanche, il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue qui ne sont pas Riemann-intégrables. Par exemple, la fonction définie sur $[0\,;1]$ qui vaut 1 sur les nombres rationnels et 0 ailleurs est Lebesgue-intégrable et son intégrale vaut 0, mais n'est pas Riemann-intégrable.

Proposition 2.2 (Intégrale de Riemann absolument convergente et intégrale de Lebesgue). *Soient $]a\,;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non) et $u\colon\ ]a\,;b[\ \to \mathbb{C}$ une fonction localement Riemann-intégrable (c'est-à-dire Riemann intégrable sur tout intervalle compact $[c\,;d] \subset\ ]a\,;b[$). L'intégrale de Riemann généralisée de $|u|$ sur $]a\,;b[$ converge (autrement dit l'intégrale sur un compact $[c\,;d]$ admet une limite lorsque $c \to a$ et $d \to b$) si et seulement si u est Lebesgue-intégrable sur $]a\,;b[$. Et dans ce cas, l'intégrale de Riemann généralisée de u et l'intégrale de Lebesgue de u sont égales.*

Par exemple, sur $]0\,;1]$, $1/x^\alpha$ est LEBESGUE-intégrable si et seulement si $\alpha < 1$, et dans ce cas
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}.$$
Le passage de RIEMANN à LEBESGUE fait apparaître une nouvelle expression : « presque partout » qui signifie « partout sauf sur un ensemble négligeable ». Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une famille d'intervalles $]a_j\,;b_j[\, \subset \mathbb{R}$, avec $j \in \mathbb{J} \subset \mathbb{N}$, telle que $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{J}}]a_j\,;b_j[$ et $\sum_{j\in\mathbb{J}}(b_j - a_j) < \varepsilon$. Si A est un ensemble fini ou dénombrable de points, il est négligeable.

2.2 Critères d'intégrabilité

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{L}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions LEBESGUE-intégrables sur Ω. La proposition suivante nous montre que l'intégrabilité au sens de LEBESGUE n'est pas une affaire de signe.

PROPOSITION 2.3.

(i) Une fonction $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega)$ si et seulement si
$$\int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

(ii) Si $|u| \leqslant v$ presque partout dans Ω avec $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, alors $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

THÉORÈME 2.1 (Convergence dominée). *Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

*(i) **Convergence simple :** $(u_n)_n$ converge presque partout vers une fonction $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, soit*
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega;$$

*(ii) **Domination :** $(u_n)_n$ est « dominée », au sens où il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que*
$$|u_n(x)| \leqslant v(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Alors u appartient à $L^1(\Omega)$ et
$$\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

THÉORÈME 2.2 (Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale). *Soient X et Λ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (bornés ou non) et $u\colon X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ une fonction. Il s'agit d'étudier les propriétés de la fonction suivante (lorsqu'elle est bien définie) :*
$$\lambda \mapsto U(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \int_X u(x,\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Si

(i) pour presque tout $x \in X$, la fonction $\lambda \mapsto u(x,\lambda)$ est continue sur Λ ;

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(X)$ telle que
$$|u(x,\lambda)| \leqslant v(x) \text{ pour presque tout } x \in X \text{ et pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Alors la fonction U est continue sur Λ.

Si

(i) pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto u(x,\lambda)$ appartient à $L^1(X)$;

(ii) pour presque tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$, la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ existe ;

(iii) il existe une fonction $v \in L^1(X)$ telle que
$$\left|\frac{\partial u}{\partial \lambda}(x,\lambda)\right| \leqslant v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in X \text{ et pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Alors la fonction $\lambda \mapsto U(\lambda)$ est dérivable sur Λ et
$$U'(\lambda) = \int_X \frac{\partial u}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

REMARQUES 2.1.

— Les hypothèses doivent peuvent être vérifiées pour presque tout $x \in X$ par contre, il ne suffirait pas que, pour chaque λ, les hypothèses soient satisfaites sauf sur un sous-ensemble de Λ, fût-il réduit à un point, qui dépend de λ.

— La dérivabilité est une propriété locale. Pour prouver que U est dérivable dans Λ, il suffit de montrer que U est dérivable dans tout intervalle compact $[c\,;d] \subset \Lambda$. Il suffira donc de trouver des fonctions positives sommables v_{cd} qui majorent $\partial u/\partial\lambda$ en module lorsque λ parcourt $[c\,;d]$.

Proposition 2.4 (Limites sur les bornes d'une intégrale). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{+n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{+1/n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On retrouve ce résultat dans le TD 5 exercice 3 :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

si $f \in L^1(\mathbb{R})$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est continue et bornée.

Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appartient à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et vérifie $g' = f$.

Exo 3 TD 3

L'intégrale d'une fonction continue est une fonction dérivable de sa borne.

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \implies \int_{x-1}^{x+1} f(s)\,\mathrm{d}s \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).$$

2.3 L'espace fonctionnel L^1

L'ensemble $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est un espace vectoriel pour l'addition des fonctions et la multiplication par un scalaire. Il est naturel de la munir de la norme de la convergence en moyenne définie par

$$\|u\|_1 \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |u(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{pour } u \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

Cependant, $\|\cdot\|_1$ ne constitue pas une norme sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$ car $\|u\|_1 = 0$ n'implique pas que la fonction u est nulle, mais seulement que u est nulle presque partout. Pour pallier ce défaut, on abandonne l'espace $\mathcal{L}^1$ et on travaille avec l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^1$ pour la relation d'équivalence d'égalité presque partout. La structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ se transmet à l'ensemble des classes d'équivalence et on note $L^1(\Omega)$ le nouvel espace vectoriel.

Théorème 2.3 (Complétude de L^1). *L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ muni de la norme de la convergence en moyenne est complet.*

2.4 Intégrales multiples

Soient X un domaine de $\mathbb{R}^n$, Y un domaine de $\mathbb{R}^m$ et une fonction $u\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Considérons d'une part l'intégrale

$$I_{X\times Y} = \int_{X\times Y} u(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

qui existe et est finie si u est intégrable sur $X \times Y$, autrement dit lorsque $\int_{X\times Y} |u(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$, et d'autre part les deux intégrables itérées

$$I_{X(Y)} = \int_X \left(\int_Y u(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_{Y(X)} = \int_Y \left(\int_X u(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Dire que $I_{X(Y)}$ existe et est finie signifie deux choses. D'une part l'intégrale « intérieure » a un sens pour presque tout x, ce qui s'écrit

pour presque tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto u(x,y)$ appartient à $L^1(Y)$.

D'autre part l'intégrale « extérieure » a un sens, ce qui signifie que

la fonction $x \mapsto \int_Y u(x,y)\,\mathrm{d}y$ appartient à $L^1(X)$.

Et $I_{Y(X)}$ s'interprète de la même façon. Le théorème suivant établit quels sont les liens entre les trois intégrales $I_{X\times Y}$, $I_{X(Y)}$ et $I_{Y(X)}$.

Théorème 2.4 (Fubini).

(i) Si $u \geqslant 0$ presque partout, alors on a toujours $I_{X\times Y} = I_{X(Y)} = I_{Y(X)}$, au sens où si l'une d'elles est infinie, les autres le sont aussi, et si l'une d'elles est finie, les autres le sont aussi et prennent la même valeur.

(ii) Si $u \in L^1(X \times Y)$, les trois intégrales $I_{X\times Y}$, $I_{X(Y)}$ et $I_{Y(X)}$ sont

finies et coïncident.

Mode d'emploi. Ce théorème s'utilise généralement en deux temps. On applique tout d'abord (i) à $|u|$ pour montrer que $u \in L^1(X \times Y)$. On peut alors appliquer (ii) à u : on est en droit d'intervertir les deux intégrales.

Méthode 2.1.

— Lorsque l'intégrande est positive, on peut permuter les intégrales.

— On ne peut appliquer le théorème de Fubini que sur des pavés. Ainsi lorsque l'on doit intégrer sur un domaine plus compliqué, il est judicieux d'utiliser la fonction indicatrice (cf. exo 1 TD 4).

Remarque 2.1. Pour calculer l'intégrale double d'une fonction u sur un sous-ensemble A de $X \times Y$, on se ramène au cas de l'intégration de la fonction $u_A \stackrel{\text{def}}{=} u \times \mathbf{1}_A$. Le terme $I_{Y(X)}$ devient

$$\int_{\pi(A)} \left(\int_{A_y} u(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

où A_y est la « tranche » $\{x \in X \mid (x, y) \in A\}$, et où $\pi(A)$ est la projection de A sur Y.

Une conséquence importante de ce théorème concerne le produit de convolution dans L^1 :

Proposition 2.5. *On appelle produit de convolution des fonctions f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction notée $f * g$ définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y)\, \mathrm{d}y.$$

On a $f * g = g * f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}$.

2.5 Changement de variable

La formule de changement de variable permet de réexprimer une intégrale de la forme $\int_\Omega u(x)\, \mathrm{d}x$ lorsque le domaine d'intégration Ω, ouvert de $\mathbb{R}^d$, apparaît comme l'image d'un autre ouvert $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ par une transformation

$$\Phi : \begin{array}{l} \widetilde{\Omega} \longrightarrow \Omega \\ \tilde{x} \longmapsto x = \Phi(\tilde{x}) = \big(\Phi_1(\tilde{x}), \ldots, \Phi_d(\tilde{x})\big) \end{array}$$

Nous supposons que Φ est un $\mathscr{C}^1$-*difféomorphisme*, c'est-à-dire une bijection telle que Φ et Φ^{-1} sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^1$. On peut alors définir le *jacobien* de Φ (déterminant de la matrice jacobienne) par

$$J_\Phi(\tilde{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \tilde{x}_d}(\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_d}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_d}{\partial \tilde{x}_d}(\tilde{x}) \end{vmatrix}.$$

En pratique, on utilise le critère suivant pour vérifier qu'une transformation Φ est un $\mathscr{C}^1$-*difféomorphisme* : si $\Phi\colon \widetilde{\Omega} \to \Omega$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $J_\Phi(\tilde{x}) \neq 0$ pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{\Omega}$, alors Φ est un $\mathscr{C}^1$-*difféomorphisme.*

Théorème 2.5. *Soit u une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On a l'égalité*

$$\int_\Omega u(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\widetilde{\Omega}} u\big(\Phi(\tilde{x})\big)\, |J_\Phi(\tilde{x})|\, \mathrm{d}\tilde{x}$$

dans les deux cas suivants :

(i) $u \geqslant 0$ presque partout (les deux intégrales pouvant être finies ou infinies) ;

(ii) $u \in L^1(\Omega)$, ce qui équivaut à dire que $u \circ \Phi\, |J_\Phi| \in L^1(\widetilde{\Omega})$ (dans ce cas, les deux intégrales sont finies).

2.5.1 Changement de variable polaire

Il est souvent utile, pour se trouver dans les conditions d'application du théorème, de retirer des domaines d'intégration des ensembles de mesure nulle, ce qui ne change aucune des intégrales. Par exemple, les coordonnées polaires ne fournissent pas de difféomorphisme du plan sur un ouvert. Par contre, si on retire du plan l'origine et le demi-axe des x négatif, on obtient un difféomorphisme de $]0\,;+\infty[\, \times\,]{-\pi}\,;\pi[$ sur l'ouvert ainsi obtenu, et donc la formule classique (le jacobien étant égal à r)

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta,$$

valable pour u positive ou sommable.
Lorsqu'il faut montrer l'intégrabilité d'une fonction faisant intervenir une norme, penser au changement de variable polaire.

2.6 Formule de Stokes

Cette formule, appelée aussi formule de Green–Ostrogradski ou théorème de la divergence, généralise aux dimensions supérieures à 1 la formule fondamentale de l'intégration

$$\int_a^b u'(x)\,\mathrm{d}x = u(b) - u(a).$$

Théorème 2.6. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $V\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs dont chaque composante V_i appartient à $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$. On a alors*

$$\int_\Omega \nabla \cdot V\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} V \cdot n\,\mathrm{d}\sigma,$$

où $n = n(x)$ désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ et $\nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial V_d}{\partial x_d} = \mathrm{Tr}(J_V)$ la divergence de V.

2.6.1 Formules de Green

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn \cdot e_i\,\mathrm{d}\sigma.$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}\sigma.$$

3 Propriétés des distributions

L'idée première des distributions est de remplacer les difficultés que l'on pouvait rencontrer sur le comportement d'une certaine fonction f par un lissage qui est fait en l'intégrant contre une fonction qui est extrêmement régulière. On étudie alors plus simplement la fonction f mais on étudie une forme linéaire pour laquelle la régularité de l'espace des fonctions test, les fonctions φ, va nous rendre un certain nombre de services ; on peut non seulement étendre le calcul différentiel à ces nouveaux objets, mais on obtient un calcul beaucoup plus facile à manier qu'il ne l'était sur les fonctions.

Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω de classe $\mathscr{C}^\infty$ et dont le support est un compact inclus dans Ω.

Définition 3.1 (Distribution). Une forme linéaire $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution si elle est continue, ce qui signifie que pour tout compact K inclus dans Ω, il existe une constante $C_K > 0$ et un entier m_K tels que

$$|T(\varphi)| \leqslant C_K \sup_{|\alpha| \leqslant m_K} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \mathrm{Supp}(\varphi) \subset K,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ désigne un multi-indice d'ordre $|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et on note

$$\partial^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Lorsque l'entier m_K peut être choisi indépendamment de K on dit que la distribution T est *d'ordre fini*, et la plus petite valeur de m_K possible est appelée l'*ordre* de T.
L'ensemble des distributions définies sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on utilise la notation du crochet de dualité $\langle T, \varphi \rangle$ plutôt que $T(\varphi)$ pour désigner l'image d'une fonction φ par une distribution T.

♦ **Exemples.** Les distributions généralisent la notion de fonction. Plus précisément, la proposition suivante montre que les fonctions peuvent être considérées comme des distributions si elles sont localement intégrables sur Ω, c'est-à-dire intégrables sur tout compact inclus dans Ω. ♢

Proposition 3.1. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, la forme linéaire $T_f\colon \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est une distribution. De plus, si f et g sont deux fonctions localement intégrables sur Ω telles que $T_f = T_g$, alors f et g sont égales presque partout sur Ω.*

L'ensemble des distributions est bien plus vaste que celui des fonctions localement intégrables et beaucoup de distributions courantes ne s'identifient pas à des fonctions. C'est le cas par exemple de la masse de Dirac δ_a définie pour $a \in \Omega$ par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

ou de la valeur principale de $1/x$ définie par

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon\,;+\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

En général on ne peut pas multiplier deux distributions, mais pour une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution fT par la formule

$$\langle fT, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle T, f\varphi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a par exemple : $x\mathrm{vp}(1/x) = 1$.

La proposition suivante exprime une propriété essentielle de $\mathcal{D}'(\Omega)$: une distribution est toujours dérivable.

Proposition 3.2 (Dérivation au sens des distributions). *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La forme linéaire*

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

est une distribution que l'on appelle dérivée partielle de T par rapport à la variable x_i.

Par exemple, la dérivée de δ_a est la distribution δ_a' définie par $\langle \delta_a', \varphi \rangle = -\langle \delta_a, \varphi' \rangle = -\varphi'(a)$. La dérivée de la fonction $\log|x|$ n'est autre que $\mathrm{vp}(1/x)$.

La dérivation au sens des distributions prolonge la dérivation usuelle des fonctions : si f est une fonction dérivable sur $\overline{\Omega}$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ s'identifie à la distribution $\dfrac{\partial T_f}{\partial x_i}$.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il existe donc n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty\,; a_1]$, $[a_i\,; a_{i+1}]$ pour $i \in [\![1\,; n-1]\!]$ et $[a_n\,; +\infty[$. La dérivée au sens des distributions de la fonction f est donnée par la formule (dite des sauts),

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^{n} \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)\delta_{a_i}$$

où $\{f'\}(x) = f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, $f(a_i^+) = \lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ et $f(a_i^-) = \lim\limits_{x \to a_i^-} f(x)$. Par exemple, la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside qui vaut 1 si $x > 0$ et 0 si $x < 0$ est la masse de Dirac δ_0.

Il est naturel de s'étonner du fait que la dérivation soit toujours possible, et cet étonnement devrait grandir au vu du théorème ci-dessous.

Théorème 3.1. *Si une suite T_j d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers T (au sens des distributions), alors la suite $\partial^\alpha T_j$ converge vers $\partial^\alpha T$. On peut en particulier dériver terme à terme toute série convergente au sens des distributions.*

Division dans l'ensemble des distributions.

(i) Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $(x-a)T = 0$ sont de la forme $T = k\delta_a$ où k est une constante réelle.

(ii) Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $(x-a)(x-b)T = 0$ sont de la forme $T = k_a\delta_a + k_b\delta_b$ où k_a et k_b sont deux constantes réelles.

(iii) Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $(x-a)^2T = 0$ sont de la forme $T = k_1\delta_a + k_2\delta_a'$ où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

Distribution à dérivée nulle. Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $T' = 0$ sont les distributions associées aux fonctions constantes.

Pour tout $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T' = U$.

Définition 3.2 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$). Une suite (T_n) de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

3.1 Exemple de fonction test

$$\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

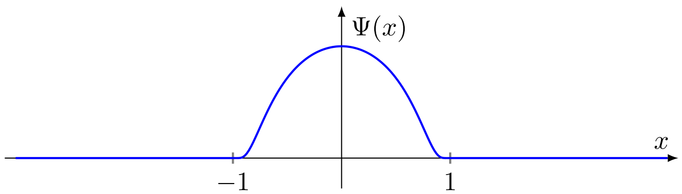


Figure 1 – Graphe de la fonction Ψ

3.2 Exercice 3 TD 5 – Valeur principale

$$\log|x| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log|x| = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon\,;\varepsilon]} f$$

Si φ est intégrable au voisinage de 0, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon\,;\varepsilon]} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi$$

4 Transformation de Fourier

4.1 Le cas des fonctions intégrables

Définition 4.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (avec $d \geqslant 1$), on appelle *transformée de Fourier* de f la fonction $\mathcal{F}f$ (souvent noté $\widehat{f}$) définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \text{où } x\cdot\xi = \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j.$$

Corollaire 4.1. *On déduit de cette définition que*

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}.$$

♦ **Exemple.** La gausienne est un « invariant » de la transformation de Fourier :

$$\text{si } f(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2/2}, \text{ alors } \mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{-|\xi|^2/2}.$$

♢

Théorème 4.1 (Riemann–Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\mathcal{F}f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d) \text{ et } \lim_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0.$$

La transformation de Fourier « échange régularité et décroissance à l'infini », ce qui s'exprime par les deux propriétés suivantes,

(i) Si $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant m$, alors

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \mathcal{F}f(\xi).$$

En particulier, $\mathcal{F}f$ tend vers 0 à l'infini plus vite que $1/|\xi|^m$.

(ii) On note $f_\alpha(x) = (-\mathrm{i}x)^\alpha f(x)$; si on suppose que $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant m$, alors $\mathcal{F}f \in \mathscr{C}^m(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}f_\alpha.$$

Proposition 4.1 (Convolution des fonctions). *Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\mathcal{F}(f*g) = (2\pi)^{d/2}(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g).$$

La transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ est définie par

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors on a la formule de réciprocité $f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$.

Quand on résout une équation différentielle de transformation de Fourier, utiliser sa continuité sur $\mathbb{R}$ et sa décroissance en l'infini pour déterminer / éliminer certaines solutions.

4.2 Le cas des fonctions de carré intégrable

— Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega)$ constitué des fonctions $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $|u|^2$ est intégrable sur Ω est un espace Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u\,\overline{v}\,\mathrm{d}x,$$

la norme associée étant définie par

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x.$$

— L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

— La transformation de Fourier, définie initialement dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, se prolonge à $L^2(\mathbb{R}^d)$: si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers u dans $L^2(\Omega)$, alors $\mathcal{F}u$ est défini comme la limite de $(\mathcal{F}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cette propriété reste vraie pour la transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$.

Théorème 4.2. *La transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont l'inverse est la transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$.*
*Pour tout u et v dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on a l'**identité de Parseval** :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\,\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}u(\xi)\,\overline{\mathcal{F}v(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

*L'**identité de Plancherel** revient à prendre $u = v$ dans cette égalité :*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Formule de réciprocité. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$.

— L'expression habituelle de $\mathcal{F}u$ valable pour $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ne s'applique pas en général pour $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, puisque $L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Par contre, on peut prolonger cette définition en passant à la limite sur le domaine d'intégration : si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{A\to+\infty} \int_{]-A\,;+A[^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x)\,\mathrm{d}x,$$

la limite étant prise dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

— Quand on doit montrer une inégalité, essayer de repérer si sa strcuture correspond à la formule de Cauchy–Schwarz.

5 Espaces de Hilbert

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Espace vectoriel } \big(E(\mathbb{K}),+,\cdot\big) \arrow[dl, "\text{norme } N"'] \arrow[dr, "\text{produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle"] & \\
\text{Espace vectoriel normé } (E,N) \arrow[d, "\text{complétude}"] & & \text{Espace préhilbertien } \big(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\big) \arrow[d, "\text{complétude pour la norme associée}"] \\
\text{Espace de Banach} & & \text{Espace de Hilbert}
\end{tikzcd}$$

Définition 5.1. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle *produit scalaire* $(u,v)_H$ sur H une forme sesquilinéaire, hermitienne et définie positive, c'est-à-dire telle que

(i) $(\lambda u+\lambda' u', \mu v+\mu' v')_H = \lambda\overline{\mu}(u,v)_H + \lambda'\overline{\mu}(u',v)_H + \lambda\overline{\mu'}(u,v')_H + \lambda'\overline{\mu'}(u',v')_H$,

(ii) $(v,u) = \overline{(u,v)_H}$,

(iii) $(u,u) \geqslant 0$ et $\big\{(u,u) = 0 \implies u = 0\big\}$,

pour tout $u, u', v, v' \in H$ et $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{C}$.

La quantité $\|u\|_H = \sqrt{(u,u)_H}$ définit alors une norme sur H, et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u,v)| \leqslant \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u,v \in H.$$

Définition 5.2. Un *espace de Hilbert* H est un espace vectoriel muni d'un *produit scalaire* et qui est *complet* pour la norme associée.

♦ **Exemple.** L'espace ℓ^2 constitué des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$(u,v)_{\ell^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,\overline{v_n}.$$

◊

Théorème 5.1. *Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ tel que K est convexe, fermé et non vide. Alors, pour tout $u \in H$, il existe un unique élément de K noté, noté $P_K u$, tel que*

$$\|u - P_K u\|_H \leqslant \|u - v\|_H \quad \forall v \in K.$$

De plus, $P_K u$ est caractérisé par

$$P_K u \in K \text{ et } (P_K u - u, P_K u - v)_H \leqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Proposition 5.1. *Si E est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H, il existe un opérateur de* projection orthogonale *P de H sur E tel que pour tout $u \in H$, $\|Pu\|_H \leqslant \|u\|_H$ et Pu est caractérisé par*

$$Pu \in E \text{ et } u - Pu \in E^\perp = \big\{v \in H \;\big|\; (v,w)_H = 0,\ \forall w \in E\big\}.$$

De plus H se décompose sous la forme $H = E \oplus E^\perp$.

Caractérisation de la densité. Il s'ensuit qu'un sous-espace F de H (non nécessairement fermé) est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 5.2 (Riesz). *Soit ℓ une forme anti-linéaire continue sur H. Il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\ell(v) = (u,v),\ \forall v \in H.$$

5.1 Remarques à trier

- Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace *préhilbertien.*
- Un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire est un espace de Hilbert.
- Un espace de Banach muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert. Un orthogonal est toujours fermé (cf. démo caratérisation de la densité).
- Le produit scalaire est continu.
- L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
- Comment montre-t-on qu'une suite converge quand on ne connaît pas sa limite : on montre que c'est une suite de Cauchy dans un espace complet.
- Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, il n'est pas vrai que, de toute suite bornée, on puisse extraire une sous-suite convergente.
- Tout EVN de dimension finie est complet.

6 Espaces de Sobolev

Les espaces L^2 et les espaces de Sobolev H^m jouent un rôle essentiel dans l'analyse des équations aux dérivées partielles. D'un point de vue physique, ils sont liés à la notion d'*énergie* : ils contiennent les états d'énergie finie d'un système physique. D'un point de vue mathématique, ils fournissent un cadre naturel pour établir le caractère bien posé d'un problème aux dérivées partielles.

Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, nous avons défini l'espace $L^2(\Omega)$ contenant les fonctions dont le carré du module est intégrable. Dans les *espaces de Sobolev*, non seulement les fonctions mais aussi toutes leurs dérivées jusqu'à un certain ordre vérifient cette propriété :

Définition 6.1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $H^m(\Omega)$ l'espace suivant

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } |\alpha| \leqslant m \right\},$$

où ∂^α est à prendre au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$).
Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Proposition 6.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha u \, \overline{\partial^\alpha v} \, \mathrm{d}x.$$

- Dans le cas où $m = 1$, le produit scalaire dans $H^1(\Omega)$ s'écrit

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(u\overline{v} + \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \right) \mathrm{d}x,$$

  où $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_d)^\top$ désigne le gradient de u.
- La notion de restriction d'une fonction $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ sur le bord $\partial\Omega$ de Ω se prolonge au cas des fonctions de $H^1(\Omega)$
- En dimension $d \geqslant 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues. Comme pour tout fonction mesurable, on ne peut donc parler de la valeur ponctuelle d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ que « presque partout » dans Ω. En particulier, il n'est pas clair de savoir si on peut définir la « valeur au bord », ou « trace » de v sur le bord $\partial\Omega$ car $\partial\Omega$ est un ensemble négligeable ou de mesure nulle. Fort heureusement pour les problèmes aux limtes que nous étudions, il y a tout de même un moyen pour définir la trace $v|_{\partial\Omega}$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Ce résultat essentiel est la théorème de trace.

Théorème 6.1 (de trace). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$. L'application γ de restriction sur le bord des fonctions régulières sur $\overline{\Omega}$ se prolonge en une application linéaire continue, notée encore γ et appelée* trace, *de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\partial\Omega)$. Il existe donc une constante C telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,*

$$\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

On en déduit les formules de Green suivantes, en omettant la notation γ.

- Pour tout u, v dans $H^1(\Omega)$ et tout $i \in [\![1\,;d]\!]$, on a

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, \mathrm{d}\sigma$$

  où $n_i = n \cdot e_i$ est la i-ème composante de la normale extérieure n.
- Pour tout u dans $H^2(\Omega)$ et v dans $H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}\sigma.$$

— Pour tout u et v dans $H^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \big\{(\Delta u)v - u(\Delta v)\big\}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}v - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

On rappelle que $\partial u/\partial n$ désigne $\nabla u \cdot n$ et $\mathrm{d}\sigma$ la mesure de surface sur $\partial\Omega$.

— L'image de la trace est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

— Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet. On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ dont les éléments sont limites (dans $H^1(\Omega)$) de suites de $\mathcal{D}(\Omega)$. On admet la caractérisation suivante de $H_0^1(\Omega)$ par la trace.

Proposition 6.2 (Caractérisation de $H_0^1(\Omega)$). *Si $\Omega \in \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^1$, alors*

$$H_0^1(\Omega) = \big\{v \in H^1(\Omega) \;\big|\; v_{|\partial\Omega} = 0\big\}.$$

Dans le cas particulier unidimensionnel ($d = 1$), si I est un intervalle ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}$, on a $H^1(I) \subset \mathscr{C}^0(\overline{I})$, et l'on peut trouver une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\overline{I}} |u(x)| \leqslant C\|u\|_{H^1(I)} \text{ pour tout } u \in H^1(I).$$

On a de plus la formule d'intégration par parties pour les fonctions de $H^1(I)$:

Proposition 6.3 (Intégration par parties). *Pour tout u et v dans $H^1(I)$,*

$$\int_x^y u'v\,\mathrm{d}t = -\int_x^y uv'\,\mathrm{d}t + u(y)v(y) - u(x)v(x), \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Il est très important en pratique de savoir si **les fonctions régulières sont denses dans l'espace de Sobolev** $H^1(\Omega)$. Cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev qui apparaît ainsi très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complété par les limites de suites de fonctions régulières dans la norme de l'énergie $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Cela permet de démontrer facilement de nombreuses propriétés en les établissant d'abord sur les fonctions régulières puis en utilisant un argument de « densité ».

6.1 Remarques

Les fonctions de $H^m(\Omega)$ ne sont pas toujours continues ou régulières (cela dépend de m et de la dimension d). Plus m est grand, plus les fonctions de $H^m(\Omega)$ sont régulières, c'est-à-dire dérivables au sens usuel.

7 Formulations variationnelles

De nombreux problèmes aux dérivées partielles linéaires peuvent s'écrire sous la forme variationnelle (appelée « principe des travaux virtuels en mécanique »), c'est-à-dire sous la forme

$$(\textsc{fv}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ a(u,v) = \ell(v) \text{ pour tout } v \in H, \end{cases}$$

où

▷ H est un espace de Hilbert,

▷ $a(\cdot,\cdot)$ est une forme sesquilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$,

▷ $\ell(\cdot)$ est une forme anti-linéaire de H dans $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant fournit une condition suffisante pour qu'un tel problème soit bien posé au sens de Hadamard c'est-à-dire qu'il admet une unique solution qui dépend continûment de la « donnée » $\ell(\cdot)$. Il s'agit d'une généralisation d'un théorème de Riesz : c'est exactement ce dernier si $a(\cdot,\cdot)$ est hermitienne puiqu'elle définit alors un produit scalaire.

Théorème 7.1 (Lax–Milgram). *On suppose que*

(i) la forme $a(\cdot,\cdot)$ est continue, *au sens où il existe $C_a > 0$ tel que*

$$|a(u,v)| \leqslant C_a\|u\|_H\|v\|_H \text{ pour tout } u, v \in H;$$

(ii) la forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive, *au sens où il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$|a(u,u)| \geqslant \alpha\|u\|_H^2 \text{ pour tout } u \in H;$$

(iii) la forme $\ell(\cdot)$ est continue, *au sens où il existe $C_\ell > 0$ tel que*

$$|\ell(v)| \leqslant C_\ell\|v\|_H \text{ pour tout } v \in H.$$

Alors le problème (fv) admet une unique solution qui dépend continû-

ment de la « donnée » $\ell(\cdot)$, au sens où il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_H \leqslant C \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_H}.$$

Remarque 7.1. Lors de la vérification des hypothèses d'application du théorème de Lax–Milgram, ne pas oublier de préciser que l'espace de travail est bien un espace de Hilbert.

Le problème de Dirichlet pour le Laplacien. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in L^2(\Omega)$. Le problème de Laplacien

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

En effet, prendre $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ revient à écrire $-\Delta u + u = f$ au sens des distributions et prendre $u \in H_0^1(\Omega)$ revient à dire que $u_{|\partial\Omega} = 0$ au sens de la trace.

Méthode 7.1. L'approche variationnelle pour étudier le système est constituée de trois étapes :

1. **Établissement d'une formulation variationnelle.**
   Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Un espace raisonnable pour V est l'espace $H_0^1(\Omega)$.
   Évidemment, nous avons fait un certain nombre de choix pour arriver à la formulation variationnelle ; d'autres choix nous auraient conduit à d'autres formulations variationnelles possibles. La justification de (ref) s'effectuera donc *a posteriori* : tout d'abord, la deuxième étape consiste à vérifier que (ref) admet bien une unique solution, puis la troisième étape que la solution de (ref) est aussi une solution du problème aux limites (ref) (dans un sens à préciser).
2. **Résolution de la formulation variationnelle.**
   Appliquer le théorème de Lax–Milgram.
3. **Équivalence avec l'équation.**
   La troisième étape (la plus délicate) consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (ref) on a bien résolu le problème aux limites (ref), et à préciser dans quel sens la solution de (ref) est aussi une solution de (ref). En d'autres termes, il s'agit d'interpréter la formulation variationnelle et de retourner à l'équation. Pour cela on procède aux mêmes intégrations par parties qui ont conduit à la formulation variationnelle, mais en sens inverse, en les justifiant soigneusement.

Le problème de Neumann pour le Laplacien. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in L^2(\Omega)$. Le problème de Laplacien

$$(\text{E}) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

En effet, prendre $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ revient à écrire $-\Delta u + u = f$ au sens des distributions et si l'on suppose que $u \in H^2(\Omega)$, une intégration par parties conduit à $(\partial u/\partial n)_{|\partial\Omega} = 0$ au sens de la trace.

Proposition 7.1. *Si $u \in H^2(\Omega)$, alors u satisfait (FV) si et seulement si u satisfait (E).*

Les deux problèmes précédents entrent dans le cadre du théorème de Lax–Milgram.

7.1 Outils

Inégalité de Poincaré. Soit Ω un ouvert vérifiant : il existe R et $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \neq 0$, tels que

$$\Omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; -R < \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i < R \right\}.$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

L'inégalité de Poincaré n'est pas vraie pour les fonctions de $H^1(\Omega)$. En effet, les fonctions constantes (non nulles) annulent le terme de droite dans l'inégalité mais pas le terme de gauche. L'hypothèse sous-jacente essentielle dans l'inégalité de Poincaré est que les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω.

Coercivité & Inégalité de Poincaré.

Soit $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$. Pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et $k_1, k_2 > 0$, on pose

$$a(u,v) = k_1 \int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + k_2 \int_{\Omega_2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

Montrons que $a(\cdot,\cdot)$ est coercive. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &\geqslant \underbrace{\min(k_1,k_2)}_{\overset{\text{def}}{=} K} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right) \\
&\geqslant K \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geqslant K\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + K(1-\theta) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \\
\text{inégalité de Poincaré} \quad &\geqslant \frac{K}{C}\theta \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x + K(1-\theta) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En choisissant $\theta = \frac{1}{C+1}$, on obtient

$$|a(u,u)| \geqslant K \frac{C}{C+1} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

8 Principaux espaces fonctionnels

Ci-dessous sont représentés la plus grande partie des espaces de fonctions ou de distributions introduits dans ce document (il manque encore H_0^1), k désignant un entier naturel. Une flèche $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ signifie que l'espace $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{B}$ et que l'inclusion est continue : si $u_j \to u$ dans $\mathcal{A}$, alors $u_j \to u$ dans $\mathcal{B}$. Bien entendu, la composée de deux flèches est une flèche (non représentée).

La régularité décroît en lisant le tableau du haut vers le bas, et la « petitesse à l'infini » décroît en lisant de gauche à droite.

Il n'y a pas d'inclusion entre les espaces L^1 et L^2 mais on a $L^2_{\mathrm{loc}} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, espaces qui prendraient place sur la verticale de droite.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rrr] \arrow[drr] \arrow[ddrr] \arrow[ddr] & & & \mathscr{C}^\infty \arrow[d] \\
& & H^k \arrow[d] & \mathscr{C}^k \arrow[ddl] \\
& L^1 \arrow[dr] & L^2 \arrow[d] & \\
& & L^1_{\mathrm{loc}} \arrow[d] & \\
& & \mathcal{D}' &
\end{tikzcd}$$

9 Remarques à trier

Un norme est toujours continue :

$$\|u_n - u + u\| \leqslant \|u_n - u\| + \|u\|$$

d'où

$$\|u_n\| - \|u\| \leqslant \|u_n - u\|$$

« On cherche un espace qui contient les espaces $\mathscr{C}_\mathrm{b}^0(\mathbb{R})$ et $H^1(\mathbb{R})$: $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ».

Topologie de moins en moins fine :

$$H^1 < L^2 < \mathcal{D}'$$

— En dimension 1, les fonctions de H^1 sont $\mathscr{C}^0$.

— Les fonctions de H^1 ne sont pas dérivables au sens classique.

— $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$ en général.

— Soit Ω un ouvert **borné** et régulier, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

— $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^k(\Omega)$.

— L'image de la trace est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

— $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$: cette exception se comprend aisément puisque l'espace entier $\mathbb{R}^d$ n'a pas de bord.

— La norme H^1 contrôle la pente contrairement à la norme L^2.

— Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $|\nabla v|^2 = \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$.

— Lorsque l'on veut relier une fonction et sa dérivée, penser au théorème fondamental de l'analyse (qui n'est pas applicable aux fonctions de H^1).

— Dans les espaces de Sobolev, les dérivées sont au sens des distributions.

— En dimension finie, $L^2 \subset L^1$.

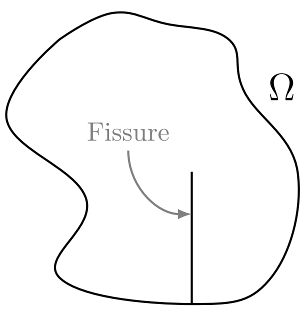
— Une fonction L^2 peut ne pas être bornée ($x \mapsto x^{-1/4}$).

— Ne pas oublier de s'assurer que les dérivées, les intégrales que l'on manipule ont un sens.

— $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

— L^p est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$

— La définition d'un ouvert de classe $\mathscr{C}^1$ n'exclut pas seulement les ouverts dont le bord n'est pas une surface régulière, mais elle exclut aussi les ouverts qui ne sont pas localement situé d'un seul côté de leur frontière. La figure contient deux exemples typiques d'ouverts non réguliers qui présentent une singularité irrémédiable, soit le long de la fissure, soit en un point de rebroussement. Ces exemples ne sont pas des « inventions mathématiques » : l'ouvert fissuré est typiquement utilisé pour étudier les problèmes de fissures en mécanique des structures. On peut néanmoins généraliser un peu la classe des ouverts réguliers aux ouverts « réguliers par morceaux », à condition que ces morceaux de frontières se « recollent » en formant des angles différents de 0 (cas d'un point de rebroussement) ou de 2π (cas d'une fissure).



Références

[1] Grégoire Allaire et François Alouges. *Polycopié du cours MAP431 – Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*. École polytechnique, 2015.

[2] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Laurent Bourgeois et Christophe Hazard. *Outils élémentaires d'analyse pour les Équations aux dérivées partielles*. ENSTA Paris.

[3] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse – Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les Éditions de l'École polytechnique, 2001.