Physique quantique – Formulaire de mécanique analytique

d'après le cours PA101 de Davide Boschetto – ENSTA Paris

A. Wayoff

23 octobre 2022

- **Coordonnées généralisées** pour un système de N particules repérées par un vecteur position $\overrightarrow{r_{k=1,\ldots,N}}$ et comportant ℓ degrés de liberté : ensemble de ℓ quantités indépendantes $\mathbf{q} := \{q_1, \ldots, q_\ell\}$ telles que

$$\forall k \in [\![1, N]\!] \quad \overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{r_k}(q_1, \ldots, q_\ell) \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1, \ell]\!]^2 \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad \text{(indépendance)}.$$

- **Lagrangien** d'un système de N particules de masse $m_{k=1,\ldots,N}$ repérées par un vecteur position $\overrightarrow{r_{k=1,\ldots,N}}$ et soumises à des forces qui dérivent en totalité d'un potentiel $V = V(\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_N})$

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_k}}{\mathrm{d}t} \right)^2 - V\left(\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right).$$

- **Équations de Lagrange** pour un système dont les particules peuvent être décrites par les coordonées généralisées $\mathbf{q} := \{q_1, \ldots, q_\ell\}$ et les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}} := \{\dot{q_1}, \ldots, \dot{q_\ell}\}$ et sont soumises à des forces qui dérivent en totalité d'un potentiel $V = V(q_1, \ldots, q_\ell)$

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!] \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

- **Impulsions** pour un système de N particules repérées par un vecteur position $\overrightarrow{r_{k=1,\ldots,N}} = \overrightarrow{r_k}(q_1, \ldots, q_\ell)$ et comportant ℓ degrés de liberté :

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!] \quad p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_i}}.$$

- **Hamiltonien** d'un système décrit par les coordonnées généralisées $\mathbf{q} := \{q_1, \ldots, q_\ell\}$ et les impulsions correspondantes $\mathbf{p} := \{p_1, \ldots, p_\ell\}$

$$\mathcal{H} := \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q_i} - \mathcal{L}.$$

- **Équations de Hamilton** pour un système décrit par les coordonées généralisées $\mathbf{q} := \{q_1, \ldots, q_\ell\}$ et les impulsions correspondantes $\mathbf{p} := \{p_1, \ldots, p_\ell\}$

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!] \quad \begin{cases} \dot{p_i} &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \dot{q_i} &= +\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}.$$

- **Crochets de Poisson** en variables canoniques $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ pour deux fonctions $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ et $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$\{f, g\} := \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j}.$$

- **Équation fondamentale de la mécanique classique** : pour toute fonction $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\}.$$