Laboratoire POems
UMR 7231 CNRS-ENSTA-Inria

Unité de Mathématiques Appliquées
de l'ENSTA Paris

Homogénéisation numérique de problèmes à interface fractale

Armand Wayoff
Promotion : 2025

Stage effectué du 13 mai au 9 août 2024
à l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA Paris

Soutenance de PRe, 30 août 2024

Plan

Problème type, Difficultés et Objectif

Trouver $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \text{conditions de saut} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \text{l'espace } \mathcal{H} \text{ est à définir}, \\ A \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}), \\ \text{le réseau d'interfaces } \Gamma \text{ est fractal} \end{array}.$$

Problème type, Difficultés et Objectif

Trouver $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \text{conditions de saut} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \text{l'espace } \mathcal{H} \text{ est à définir}, \\ A \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}), \\ \text{le réseau d'interfaces } \Gamma \text{ est fractal} \end{array}.$$

Motivation

Modélisation de l'accumulation et de la libération de contraintes mécaniques dans les réseaux de failles géologiques.

Problème type, Difficultés et Objectif

Trouver $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \text{conditions de saut} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \text{l'espace } \mathcal{H} \text{ est à définir,} \\ A \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}), \\ \text{le réseau d'interfaces } \Gamma \text{ est fractal} \end{array}.$$

Difficultés

La géométrie fractale de Γ entraîne

- des échelles spatiales non séparées ;
- une géométrie non périodique ;
- un espace des solutions $\mathcal{H}$ qui dépend de la géométrie fractale ;

Les méthodes d'homogénéisation classiques ne sont pas adaptées

Problème type, Difficultés et Objectif

Trouver $u\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \text{conditions de saut} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \text{l'espace } \mathcal{H} \text{ est à définir}, \\ A \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}), \\ \text{le réseau d'interfaces } \Gamma \text{ est fractal} \end{array}.$$

Objectif

Développer une méthode d'approximation particulière, adaptée à la géométrie de Γ

Problème type, Difficultés et Objectif

Trouver $u\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \text{conditions de saut} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \text{l'espace } \mathcal{H} \text{ est à définir,} \\ A \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}), \\ \text{le réseau d'interfaces } \Gamma \text{ est fractal} \end{array}.$$

Objectif

Développer une méthode d'approximation LOD, adaptée à la géométrie de Γ

Construction d'un opérateur d'interpolation $\Pi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{S}$ tel que

$$\|v - \Pi v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\, h \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \|\Pi v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

pour l'espace $\mathcal{S}$ des éléments finis $\mathbb{P}_1$ sur un maillage adapté au réseau Γ.

Définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne peuplé d'interfaces Γ_j, $j \in \mathbb{N}$ deux à deux disjointes, affine par morceaux et de dimension $d-1$.

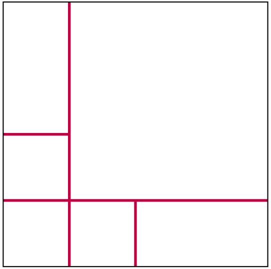
Réseau d'interfaces d'ordre k : $\Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j \xrightarrow[k\to\infty]{} \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ (objet fractal).

Définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne peuplé d'interfaces Γ_j, $j \in \mathbb{N}$ deux à deux disjointes, affine par morceaux et de dimension $d-1$.

Réseau d'interfaces d'ordre k : $\Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j \xrightarrow[k\to\infty]{} \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ (objet fractal).

k désigne une échelle spatiale $\quad$ k *grand* $\iff$ *petite* échelle



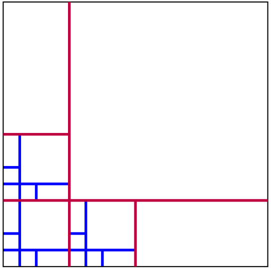
Exemple en 2D : $\Gamma^{(1)} = \Gamma_1$

Définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne peuplé d'interfaces Γ_j, $j \in \mathbb{N}$ deux à deux disjointes, affine par morceaux et de dimension $d - 1$.

Réseau d'interfaces d'ordre k : $\quad \Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j \xrightarrow[k\to\infty]{} \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \quad$ (objet fractal).

> k désigne une échelle spatiale $\qquad$ k *grand* $\Longleftrightarrow$ *petite* échelle



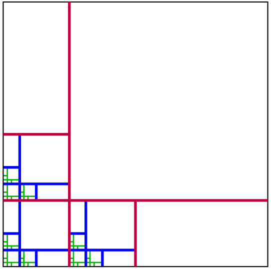
Exemple en 2D : $\Gamma^{(2)}$ et Γ_1, Γ_2

Définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne peuplé d'interfaces Γ_j, $j \in \mathbb{N}$ deux à deux disjointes, affine par morceaux et de dimension $d-1$.

Réseau d'interfaces d'ordre k : $\Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j \xrightarrow[k\to\infty]{} \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ (objet fractal).

k désigne une échelle spatiale $\qquad$ k *grand* $\Longleftrightarrow$ *petite* échelle



Exemple en 2D : $\Gamma^{(3)}$ et Γ_1, Γ_2, Γ_3

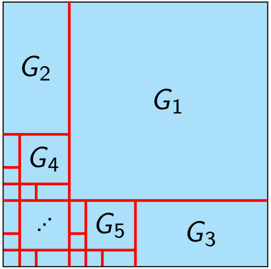
Définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne peuplé d'interfaces Γ_j, $j \in \mathbb{N}$ deux à deux disjointes, affine par morceaux et de dimension $d-1$.

Réseau d'interfaces d'ordre k : $\quad \Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j \xrightarrow[k\to\infty]{} \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \quad$ (objet fractal).

Partitionnement d'ordre k, $\Omega^{(k)}$: $\quad \Omega \setminus \Gamma^{(k)} = \bigcup_{G \in \Omega^{(k)}} G.$

Nombre fini de cellules $G \in \Omega^{(k)}$, deux à deux disjointes, ouvertes, simplement connexes, sans fissures et étoilées :



Définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne peuplé d'interfaces Γ_j, $j \in \mathbb{N}$ deux à deux disjointes, affine par morceaux et de dimension $d-1$.

Réseau d'interfaces d'ordre k : $\Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j \xrightarrow[k\to\infty]{} \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ (objet fractal).

Partitionnement d'ordre k, $\Omega^{(k)}$: $\Omega \setminus \Gamma^{(k)} = \bigcup_{G\in\Omega^{(k)}} G.$

Nombre fini de cellules $G \in \Omega^{(k)}$, deux à deux disjointes, ouvertes, simplement connexes, sans fissures et étoilées :

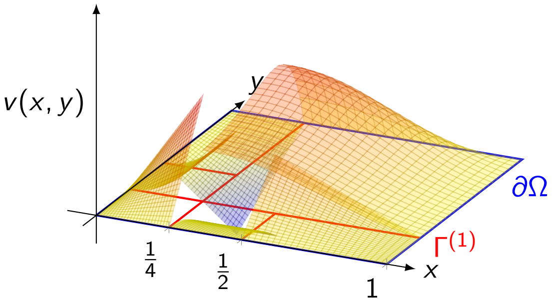
$$G = \left\{ p_G + rs \;\middle|\; s \in \mathbb{S}^{d-1}, 0 \leqslant r \leqslant \rho_G(s) \right\} \qquad R_G = \max_{s\in\mathbb{S}^{d-1}} \rho_G(s), \quad r_G = \min_{s\in\mathbb{S}^{d-1}} \rho_G(s).$$

Les partitions $\Omega^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont de *forme régulière* dans le sens où

$$\exists \gamma \geqslant 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{R_G}{r_G} \leqslant \gamma \quad \forall G \in \Omega^{(k)}.$$

Espaces fonctionnels

$$\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega) = \left\{ v : \overline{\Omega} \setminus \Gamma^{(k)} \to \mathbb{R} \;\middle|\; v_{|G} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{G}\right) \quad \forall G \in \Omega^{(k)} \text{ et } v_{|\partial\Omega} \equiv 0 \right\}.$$



Exemple d'une fonction de $v \in \mathcal{C}^1_{1,0}(\Omega)$ en 2D

Espaces fonctionnels

$$\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega) = \left\{ v : \overline{\Omega} \setminus \Gamma^{(k)} \to \mathbb{R} \;\middle|\; v_{|G} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{G}\right) \quad \forall G \in \Omega^{(k)} \text{ et } v_{|\partial\Omega} \equiv 0 \right\}.$$

Définition. Produit scalaire et norme sur $\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega)$

$$\langle v\,,w\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\int_{\Omega\setminus\Gamma^{(k)}} \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x}_{\text{semi-norme } H^1 \text{ brisée}} + \sum_{j=1}^{k} (1+\mathrm{c})^j C_j \underbrace{\int_{\Gamma_j} [\![v]\!][\![w]\!]\,\mathrm{d}\Gamma_j}_{\text{norme } L^2 \text{ pondérée des sauts}}, \qquad v, w \in \mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega),$$

avec la norme associée $\|v\|_k = \langle v\,,v\rangle_k^{1/2}$.

- $C_j > 0$ est une constante géométrique correspondant à la *vitesse de fracturation* ;
- $\mathrm{c} > 0$ est une *constante de matériau* ;
- $(1+\mathrm{c})^j$ modélise la *résistance exponentielle* aux sauts à travers Γ_j lorsque j augmente.

Espaces fonctionnels

$$\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega) = \left\{ v : \overline{\Omega} \setminus \Gamma^{(k)} \to \mathbb{R} \;\middle|\; v_{|G} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{G}\right) \quad \forall G \in \Omega^{(k)} \text{ et } v_{|\partial\Omega} \equiv 0 \right\}.$$

Définition. Produit scalaire et norme sur $\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega)$

$$\langle v\,,\, w\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega\setminus\Gamma^{(k)}} \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k} (1+\mathrm{c})^j C_j \int_{\Gamma_j} [\![v]\!][\![w]\!]\,\mathrm{d}\Gamma_j, \quad v, w \in \mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega),$$

avec la norme associée $\|v\|_k = \langle v\,,\, v\rangle_k^{1/2}$.

Définition. Espace de Hilbert k-échelle

$$\mathcal{H}_k \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega)}^{\|\cdot\|_k} \qquad \left(\mathcal{H}_k, \|\cdot\|_k\right) \text{ est complet}$$

Espaces fonctionnels

$$\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega) = \left\{ v : \overline{\Omega} \setminus \Gamma^{(k)} \to \mathbb{R} \;\middle|\; v_{|G} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{G}\right) \quad \forall G \in \Omega^{(k)} \text{ et } v_{|\partial\Omega} \equiv 0 \right\}.$$

Définition. Produit scalaire et norme sur $\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega)$

$$\langle v\,,w\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega\setminus\Gamma^{(k)}} \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k} (1+\mathrm{c})^j C_j \int_{\Gamma_j} [\![v]\!][\![w]\!]\,\mathrm{d}\Gamma_j, \quad v, w \in \mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega),$$

avec la norme associée $\|v\|_k = \langle v\,,v\rangle_k^{1/2}$.

Définition. Espace de Hilbert k-échelle

$$\mathcal{H}_k \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega)}^{\|\cdot\|_k} \qquad \left(\mathcal{H}_k, \|\cdot\|_k\right) \text{ est complet}$$

Proposition. Produit scalaire sur l'espace asymptotique fractal $\mathcal{H}$

$$\langle v\,,w\rangle = \int_{\Omega\setminus\Gamma} \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{\infty} (1+\mathrm{c})^j C_j \int_{\Gamma_j} [\![v]\!][\![w]\!]\,\mathrm{d}\Gamma_j \quad v, w \in \mathcal{H}.$$

Formulations variationnelles

$$\boxed{\textit{Trouver } u \in \mathcal{H} \textit{ tel que } a(u, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{H}}$$

$$a(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega\setminus\Gamma} A\nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \mathrm{c})^j C_j \int_{\Gamma_j} B [\![v]\!] [\![w]\!] \, \mathrm{d}\Gamma_j, \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

où $A \colon \Omega \setminus \Gamma \to \mathbb{R}^{d\times d}$ et $B \colon \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \to \mathbb{R}$ ont des propriétés bien choisies.

Formulations variationnelles

$$\boxed{\textit{Trouver } u \in \mathcal{H} \textit{ tel que } a(u,v) = (f,v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{H}}$$

$$\boxed{\textit{Trouver } u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k \textit{ tel que } a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{H}_k}$$

$$\boxed{\textit{Trouver } u_{\mathcal{S}_k} \in \mathcal{S}_k \textit{ tel que } a_k(u_{\mathcal{S}_k}, v) = (f,v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k}$$

$$a_k(v_k, w_k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega\setminus\Gamma^{(k)}} A\nabla v_k \cdot \nabla w_k \, \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k} (1+\mathrm{c})^j C_j \int_{\Gamma_j} B[\![v_k]\!][\![w_k]\!] \, \mathrm{d}\Gamma_j, \quad \forall v_k, w_k \in \mathcal{H}_k/\mathcal{S}_k$$

où $A \colon \Omega \setminus \Gamma \to \mathbb{R}^{d\times d}$ et $B \colon \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \to \mathbb{R}$ ont des propriétés bien choisies.

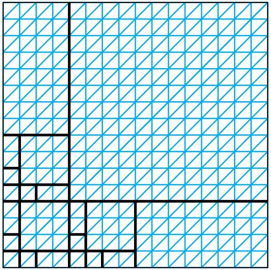
Formulations variationnelles

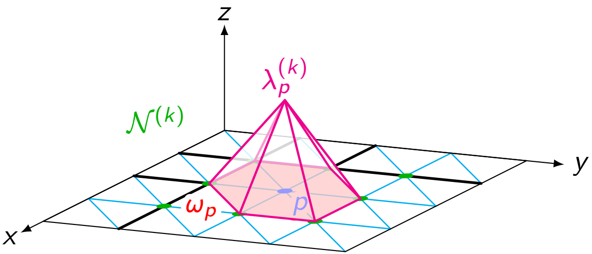
$$\boxed{\textit{Trouver } u \in \mathcal{H} \textit{ tel que } a(u, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{H}}$$

$$\boxed{\textit{Trouver } u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k \textit{ tel que } a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{H}_k}$$

$$\boxed{\textit{Trouver } u_{\mathcal{S}_k} \in \mathcal{S}_k \textit{ tel que } a_k(u_{\mathcal{S}_k}, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k}$$

$$\mathcal{S}_k = \mathrm{Vect}\left\{\lambda_p^{(k)} \,\middle|\, p \in \mathcal{N}^{(k)}\right\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}^{(k)} = \bigcup_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{N}_G^{(k)}.$$





Formulations variationnelles

$$\boxed{\textit{Trouver } u \in \mathcal{H} \textit{ tel que } a(u, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{H}}$$

$$\boxed{\textit{Trouver } u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k \textit{ tel que } a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{H}_k}$$

$$\boxed{\textit{Trouver } u_{\mathcal{S}_k} \in \mathcal{S}_k \textit{ tel que } a_k(u_{\mathcal{S}_k}, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k}$$

Proposition

Les trois problèmes sont bien posés.

Théorème. Convergence de la solution $u_{\mathcal{H}_k}$ vers la solution u

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_{\mathcal{H}_k}\| = 0.$$

Théorème. Convergence de la solution $u_{\mathcal{S}_k}$ vers la solution u

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \|u - u_{\mathcal{S}_k}\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u_{\mathcal{H}_k} - u_{\mathcal{S}_k}\| < \varepsilon.$$

Plan

1. Présentation du problème
2. **Difficultés de la méthode EF classiques**
3. La méthode LOD
4. Projecteurs
5. Expériences numériques

Difficultés de la méthode EF classiques

En supposant que la solution u du problème est suffisamment régulière, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CL09, Théo. 2.4] :

$$\exists C \text{ indépendante de } h_k \text{ et telle que } \|u - u_{\mathcal{S}_k}\| \leqslant C\, h_k \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega\setminus\Gamma)}.$$

- Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique.

Difficultés de la méthode EF classiques

En supposant que la solution u du problème est suffisamment régulière, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CL09, Théo. 2.4] :

$$\exists C \text{ indépendante de } h_k \text{ et telle que } \left\| u - u_{\mathcal{S}_k} \right\| \leqslant C\, h_k \left\| \nabla^2 u \right\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}.$$

- Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique.
- Cependant, l'hypothèse de régularité de la solution n'est pas réaliste pour le problème que nous considérons.

Difficultés de la méthode EF classiques

En supposant que la solution u du problème est suffisamment régulière, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CL09, Théo. 2.4] :

$$\exists C \text{ indépendante de } h_k \text{ et telle que } \left\| u - u_{\mathcal{S}_k} \right\| \leqslant C\, h_k \left\| \nabla^2 u \right\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}.$$

- Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique.
- Cependant, l'hypothèse de régularité de la solution n'est pas réaliste pour le problème que nous considérons.
- L'estimation est inutile car $\nabla^2 u$ pourrait osciller à une petite échelle ε, soit $\left\| \nabla^2 u \right\|_{L^2(\Omega)} \approx \varepsilon^{-2}$.

Difficultés de la méthode EF classiques

En supposant que la solution u du problème est suffisamment régulière, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CL09, Théo. 2.4] :

$$\exists C \text{ indépendante de } h_k \text{ et telle que } \left\| u - u_{\mathcal{S}_k} \right\| \leqslant C\, h_k \left\| \nabla^2 u \right\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}.$$

- Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique.
- Cependant, l'hypothèse de régularité de la solution n'est pas réaliste pour le problème que nous considérons.
- L'estimation est inutile car $\nabla^2 u$ pourrait osciller à une petite échelle ε, soit $\left\| \nabla^2 u \right\|_{L^2(\Omega)} \approx \varepsilon^{-2}$.
- Donc à moins que $h_k \lesssim \varepsilon$, l'espace d'éléments finis $\mathcal{S}_k$ ne permet pas de saisir la comportement de la solution.

Difficultés de la méthode EF classiques

En supposant que la solution u du problème est suffisamment régulière, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CL09, Théo. 2.4] :

$$\exists C \text{ indépendante de } h_k \text{ et telle que } \|u - u_{\mathcal{S}_k}\| \leqslant C\, h_k \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega\setminus\Gamma)}.$$

- Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique.
- Cependant, l'hypothèse de régularité de la solution n'est pas réaliste pour le problème que nous considérons.
- L'estimation est inutile car $\nabla^2 u$ pourrait osciller à une petite échelle ε, soit $\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega)} \approx \varepsilon^{-2}$.
- Donc à moins que $h_k \lesssim \varepsilon$, l'espace d'éléments finis $\mathcal{S}_k$ ne permet pas de saisir la comportement de la solution.

Difficultés de la méthode EF classiques

En supposant que la solution u du problème est suffisamment régulière, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CL09, Théo. 2.4] :

$$\exists C \text{ indépendante de } h_k \text{ et telle que } \|u - u_{\mathcal{S}_k}\| \leqslant C\, h_k \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega\setminus\Gamma)}.$$

- Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique.
- Cependant, l'hypothèse de régularité de la solution n'est pas réaliste pour le problème que nous considérons.
- L'estimation est inutile car $\nabla^2 u$ pourrait osciller à une petite échelle ε, soit $\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega)} \approx \varepsilon^{-2}$.
- Donc à moins que $h_k \lesssim \varepsilon$, l'espace d'éléments finis $\mathcal{S}_k$ ne permet pas de saisir la comportement de la solution.

Si l'on souhaite garder des maillages relativement grossiers, il faut développer une méthode d'approximation particulière.

Plan

Trouver $u_k \in \mathcal{S}_k$ *tel que* $a(u_k, v_k) = (f, v_k)$ *pour tout* $v_k \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$

$$\textit{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k \textit{ tel que } a(u_k, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$$

$$a(u_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k.$$

Trouver $u_k \in \mathcal{S}_k$ *tel que* $a(u_k, v_k) = (f, v_k)$ *pour tout* $v_k \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$

$$a(u_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k.$$

Première décomposition

Soit $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$ une projection. Pour tout $u \in \mathcal{H}$, on peut écrire

$$u = \underbrace{\Pi_k u}_{\in \operatorname{Im} \Pi_k = \mathcal{S}_k} + \underbrace{(\mathrm{I} - \Pi_k) u}_{\in \operatorname{Ker} \Pi_k \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}_k} \qquad u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$$

$$\textit{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k \textit{ tel que } a(u_k, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$$

$$a(u_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k.$$

Première décomposition

Soit $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$ une projection. Pour tout $u \in \mathcal{H}$, on peut écrire

$$u = \underbrace{\Pi_k u}_{\in \operatorname{Im} \Pi_k = \mathcal{S}_k} + \underbrace{(\mathrm{I} - \Pi_k) u}_{\in \operatorname{Ker} \Pi_k \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}_k} \qquad u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$$

Tentons d'approcher $u_{\mathcal{S}_k}$ et d'estimer l'erreur d'approximation.

Trouver $u_k \in \mathcal{S}_k$ *tel que* $a(u_k, v_k) = (f, v_k)$ *pour tout* $v_k \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$

$$a(u_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k.$$

Première décomposition

Soit $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$ une projection. Pour tout $u \in \mathcal{H}$, on peut écrire

$$u = \underbrace{\Pi_k u}_{\in \operatorname{Im} \Pi_k = \mathcal{S}_k} + \underbrace{(\mathrm{I} - \Pi_k) u}_{\in \operatorname{Ker} \Pi_k \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}_k} \qquad u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$$

Tentons d'approcher $u_{\mathcal{S}_k}$ et d'estimer l'erreur d'approximation. On a

$$a(u_{\mathcal{S}_k} - u_k, v_k) = -a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k.$$

On en déduit par coercivité et continuité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ que

$$\mathtt{a}\|u_{\mathcal{S}_k} - u_k\| \leqslant a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k) \leqslant \mathtt{U}\|u_{\mathcal{V}_k}\| \qquad \mathtt{a}\|u_{\mathcal{V}_k}\| \leqslant a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k) \leqslant \mathtt{U}\|u_{\mathcal{S}_k} - u_k\|$$

On en déduit par coercivité et continuité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ que

$$\mathtt{a}\|u_{\mathcal{S}_k}-u_k\| \leqslant a(u_{\mathcal{V}_k},v_k) \leqslant \mathtt{U}\|u_{\mathcal{V}_k}\| \qquad \mathtt{a}\|\underbrace{u_{\mathcal{V}_k}}_{\text{contient trop d'énergie}}\| \leqslant a(u_{\mathcal{V}_k},v_k) \leqslant \mathtt{U}\|u_{\mathcal{S}_k}-u_k\|$$

$$\|u_{\mathcal{V}_k}\|^2 = \underbrace{\|\nabla u_{\mathcal{V}_k}\|^2_{L^2(\Omega\backslash\Gamma)}}_{\approx\varepsilon^{-1}} + \text{terme de saut.}$$

En réalité, l'estimation est trop grossière.

On en déduit par coercivité et continuité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ que

$$\mathsf{a}\|u_{\mathcal{S}_k} - u_k\| \leqslant a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k) \leqslant \mathtt{U}\|u_{\mathcal{V}_k}\| \qquad \mathsf{a}\|\underbrace{u_{\mathcal{V}_k}}_{\text{contient trop d'énergie}}\| \leqslant a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k) \leqslant \mathtt{U}\|u_{\mathcal{S}_k} - u_k\|$$

$$\|u_{\mathcal{V}_k}\|^2 = \underbrace{\|\nabla u_{\mathcal{V}_k}\|^2_{L^2(\Omega\setminus\Gamma)}}_{\approx \varepsilon^{-1}} + \text{terme de saut.}$$

En réalité, l'estimation est trop grossière. Changeons l'espace de GALERKIN.

L'idée

Nous aimerions, dans l'idéal, que le terme $a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k)$, $v_k \in \mathcal{S}_k$ soit nul.

Nouvel espace de GALERKIN : $\mathcal{W}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathcal{S}_k \mid a(v,w) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_k\}$ $\quad \mathcal{W}_k = \mathcal{V}_k^{\perp_a}$

Ce nouvel espace $\mathcal{W}_k$ mène à une nouvelle décomposition de la solution u sous la forme

$$u = u_{\mathcal{W}_k} + \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k} \quad \text{avec} \quad a(u_{\mathcal{W}_k}, \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}) = 0.$$

Pourquoi est-ce que cela fonctionne ?

Réécrivons donc une formulation variationnelle, cette fois dans $\mathcal{W}_k$

$$\textit{trouver } \widetilde{u}_k \in \mathcal{W}_k \textit{ tel que } a(\widetilde{u}_k, v_k) = (f\,, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{W}_k$$

Pourquoi est-ce que cela fonctionne ?

Réécrivons donc une formulation variationnelle, cette fois dans $\mathcal{W}_k$

$$\textit{trouver } \widetilde{u}_k \in \mathcal{W}_k \textit{ tel que } a(\widetilde{u}_k, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{W}_k$$

En particulier, comme $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$, on a $a(u, v_k) = (f, v_k)$ pour tout $v_k \in \mathcal{W}_k$ et

$$a(\widetilde{u}_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k.$$

Pourquoi est-ce que cela fonctionne ?

Réécrivons donc une formulation variationnelle, cette fois dans $\mathcal{W}_k$

$$\textit{trouver } \widetilde{u}_k \in \mathcal{W}_k \textit{ tel que } a(\widetilde{u}_k, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{W}_k$$

En particulier, comme $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$, on a $a(u, v_k) = (f, v_k)$ pour tout $v_k \in \mathcal{W}_k$ et

$$a(\widetilde{u}_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k.$$

Reprenons la nouvelle décomposition qui mène à

$$a(u_{\mathcal{W}_k} - \widetilde{u}_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k,$$

car $a(\widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}, v_k) = 0$ pour tout $\mathcal{W}_k$ par définition de $\mathcal{W}_k$.

Pourquoi est-ce que cela fonctionne ?

Réécrivons donc une formulation variationnelle, cette fois dans $\mathcal{W}_k$

$$\textit{trouver } \widetilde{u}_k \in \mathcal{W}_k \textit{ tel que } a(\widetilde{u}_k, v_k) = (f, v_k) \textit{ pour tout } v_k \in \mathcal{W}_k$$

En particulier, comme $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$, on a $a(u, v_k) = (f, v_k)$ pour tout $v_k \in \mathcal{W}_k$ et

$$a(\widetilde{u}_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k.$$

Reprenons la nouvelle décomposition qui mène à

$$a(u_{\mathcal{W}_k} - \widetilde{u}_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k,$$

car $a(\widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}, v_k) = 0$ pour tout $\mathcal{W}_k$ par définition de $\mathcal{W}_k$. On en déduit que

$$\|u_{\mathcal{W}_k} - \widetilde{u}_k\| = 0 \quad \text{et} \quad u_{\mathcal{W}_k} = \widetilde{u}_k.$$

Récapitulatif

Nous avons obtenu deux décompositions :

1. $u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$ avec $u_{\mathcal{S}_k} = \Pi_k u$ et $u_{\mathcal{V}_k} = (\mathrm{I} - \Pi_k) u$;
2. $u = u_{\mathcal{W}_k} + \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}$ tel que $a(u_{\mathcal{W}_k}, \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}) = 0$.

Récapitulatif

Nous avons obtenu deux décompositions :

1. $u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$ avec $u_{\mathcal{S}_k} = \Pi_k u$ et $u_{\mathcal{V}_k} = (\mathrm{I} - \Pi_k)u$;
2. $u = u_{\mathcal{W}_k} + \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}$ tel que $a(u_{\mathcal{W}_k}, \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}) = 0$.

Proposition

On a ainsi approché $u_{\mathcal{S}_k}$ dans le sens où $\Pi_k \widetilde{u}_k = u_{\mathcal{S}_k}$.

Récapitulatif

Nous avons obtenu deux décompositions :

1. $u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$ avec $u_{\mathcal{S}_k} = \Pi_k u$ et $u_{\mathcal{V}_k} = (\mathrm{I} - \Pi_k)u$;
2. $u = u_{\mathcal{W}_k} + \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}$ tel que $a(u_{\mathcal{W}_k}, \widetilde{u}_{\mathcal{V}_k}) = 0$.

Proposition

On a ainsi approché $u_{\mathcal{S}_k}$ dans le sens où $\Pi_k \widetilde{u}_k = u_{\mathcal{S}_k}$.

Remarque. [BLB22, p.337]

L'objectif essentiel de méthodes multi-échelles n'est paradoxalement pas de capturer précisément les petites échelles de la solution, mais principalement de capturer les *grandes* échelles.

Proposition. Décomposition a-orthogonale

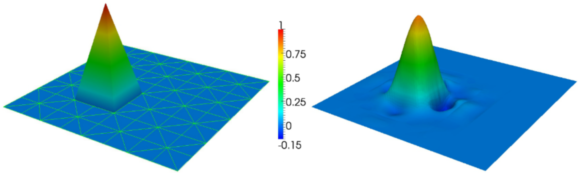
L'*espace d'éléments finis multi-échelles* $\mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}$ est défini comme le complément orthogonal de $\mathcal{V}_k = \operatorname{Ker} \Pi_k$ dans $\mathcal{H}$, *i.e.*

$$\mathcal{H} = \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{V}_k, \quad a(w, v) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}, v \in \mathcal{V}_k.$$

$$\mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} = \{v - \mathcal{C}_k v \mid v \in \mathcal{H}\} = \{v - \mathcal{C}_k v \mid v \in \mathcal{S}_k\} = \operatorname{Vect}\{(\mathrm{I} - \mathcal{C}_k)\lambda_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}^{(k)}\}.$$

où $\mathcal{C}_k : \mathcal{H} \to \mathcal{V}_k$ est la *projection orthogonale* de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}_k$,

$$\dim \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} = \dim \mathcal{S}_k$$



À gauche : fonction de base nodale . À droite : fonction de base modifiée [AH15]

Proposition. Décomposition *a*-orthogonale

L'*espace d'éléments finis multi-échelles* $\mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}$ est défini comme le complément orthogonal de $\mathcal{V}_k = \operatorname{Ker} \Pi_k$ dans $\mathcal{H}$, *i.e.*

$$\mathcal{H} = \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{V}_k, \quad a(w, v) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}, v \in \mathcal{V}_k.$$

$$\mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} = \{v - \mathcal{C}_k v \mid v \in \mathcal{H}\} = \{v - \mathcal{C}_k v \mid v \in \mathcal{S}_k\} = \operatorname{Vect}\{(\mathrm{I} - \mathcal{C}_k)\lambda_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}^{(k)}\}.$$

où $\mathcal{C}_k : \mathcal{H} \to \mathcal{V}_k$ est la *projection orthogonale* de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}_k$,

$$\dim \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} = \dim \mathcal{S}_k$$

$$\underbrace{\mathcal{H}}_{\substack{\text{espace des}\\ \text{solutions}}} = \underbrace{\mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}}_{\substack{\text{espace grossier}\\ \text{corrigé}}} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\mathcal{V}_k}_{\substack{\text{caractéristiques}\\ \text{haute fréquence}}}.$$

Formulation variationnelle discrète *multi-échelles*

$$\boxed{\textit{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} \textit{ tel que } a(u_k, v) = (f\,, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}}.$$

Formulation variationnelle discrète *multi-échelles*

$$\boxed{\textit{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} \textit{ tel que } a(u_k, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}}.$$

Théorème

Sous certaines hypothèses sur la projection $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$, le problème discret admet une unique solution $u_k \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}$ donnée par

$$u_k = (\mathrm{I} - \mathcal{C}_k)\Pi_k u,$$

où $u \in \mathcal{H}$ désigne l'unique solution du problème à interfaces fractales.
De plus, sous certaines hypothèses géométriques, il existe une constante C indépendante de h_k telle que

$$\|u - u_k\| \leqslant C\, h_k \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Formulation variationnelle discrète *multi-échelles*

$$\boxed{\textit{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}} \textit{ tel que } a(u_k, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}}.$$

Théorème

Sous certaines hypothèses sur la projection $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$, le problème discret admet une unique solution $u_k \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ donnée par

$$u_k = (\mathrm{I} - \mathcal{C}_k)\Pi_k u,$$

où $u \in \mathcal{H}$ désigne l'unique solution du problème à interfaces fractales.
De plus, sous certaines hypothèses géométriques, il existe une constante C indépendante de h_k telle que

$$\|u - u_k\| \leqslant C\, h_k \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque

La solution u_k est égale à la projection de la solution u sur l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$.

Formulation variationnelle discrète *multi-échelles*

$$\boxed{\textit{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}} \textit{ tel que } a(u_k, v) = (f, v) \textit{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}}.$$

Théorème

Sous certaines hypothèses sur la projection $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$, le problème discret admet une unique solution $u_k \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ms}}$ donnée par

$$u_k = (\mathrm{I} - \mathcal{C}_k)\Pi_k u,$$

où $u \in \mathcal{H}$ désigne l'unique solution du problème à interfaces fractales.
De plus, sous certaines hypothèses géométriques, il existe une constante C indépendante de h_k telle que

$$\|u - u_k\| \leqslant C\, h_k \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Construisons un tel opérateur Π_k

Plan

Objectif

- Construire $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$ tel que

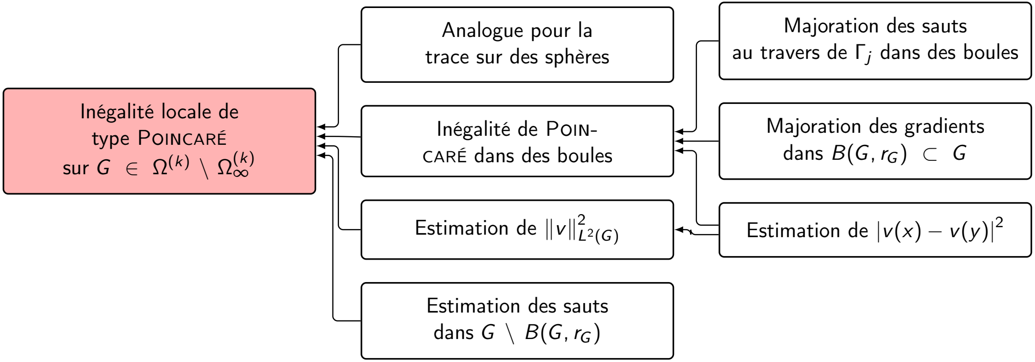
$$\exists c, c' > 0 \quad \|v - \Pi_k v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(1 + \frac{1}{c}\right) c\, {d_k}^2 \|v\|^2, \quad \text{et} \quad \|\Pi_k v\| \leqslant c' \|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Objectif

- Construire $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$ tel que

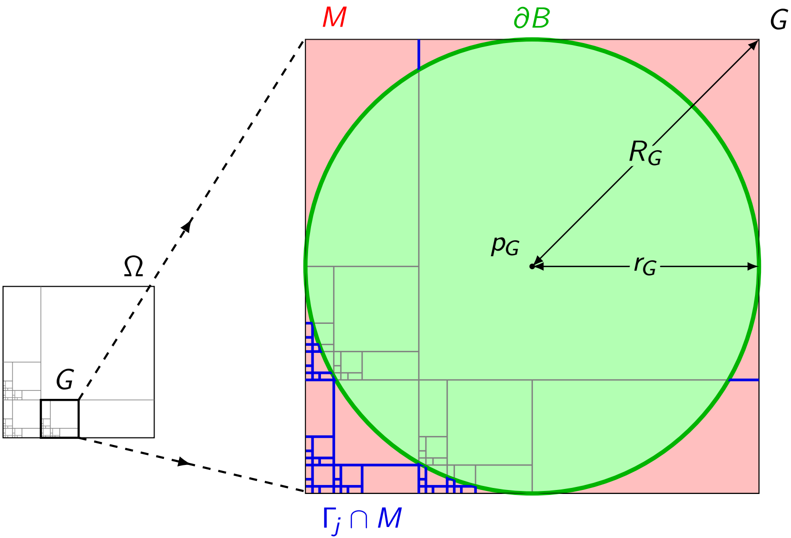
$$\exists c, c' > 0 \quad \|v - \Pi_k v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(1 + \frac{1}{c}\right) c\, {d_k}^2 \|v\|^2, \quad \text{et} \quad \|\Pi_k v\| \leqslant c' \|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

- Inégalité de type Poincaré : estimer $\left\| v - \fint_G v\,\mathrm{d}x \right\|^2_{L^2(G)}$ pour $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega^{(k)}_\infty$



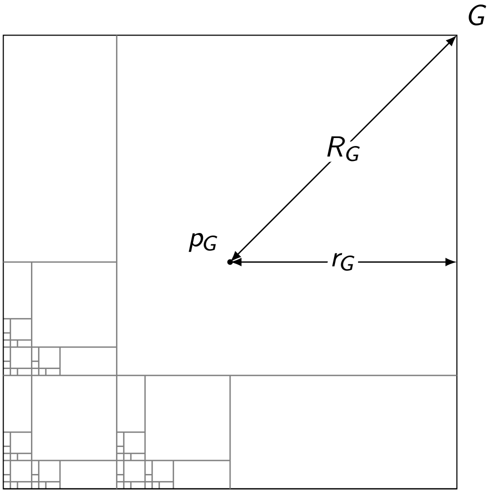
Inégalité locale de type Poincaré

Stratégie Verfürth



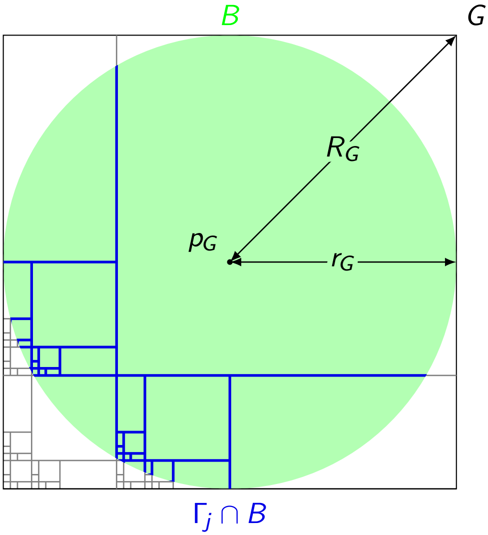
Inégalité locale de type POINCARÉ

Stratégie VERFÜRTH



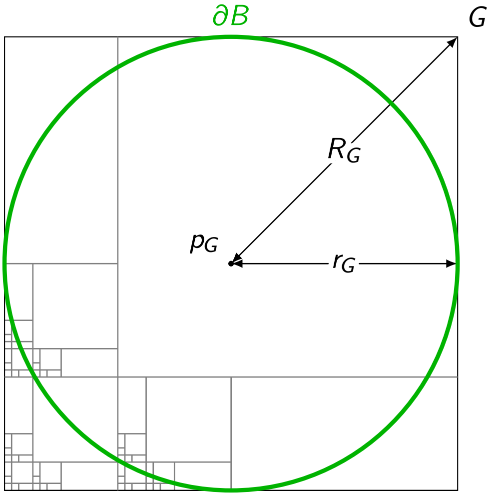
Inégalité locale de type Poincaré

Stratégie Verfürth



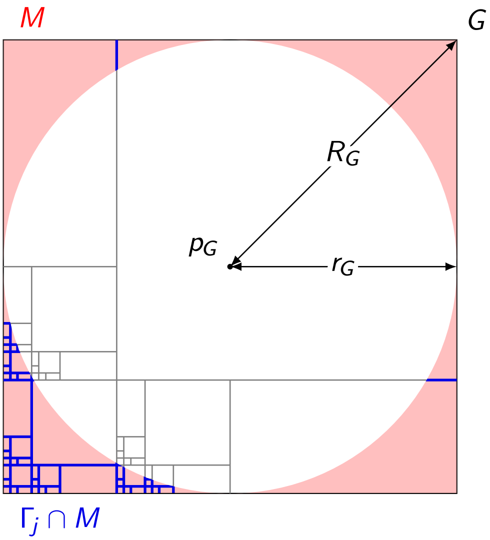
Inégalité locale de type Poincaré

Stratégie Verfürth



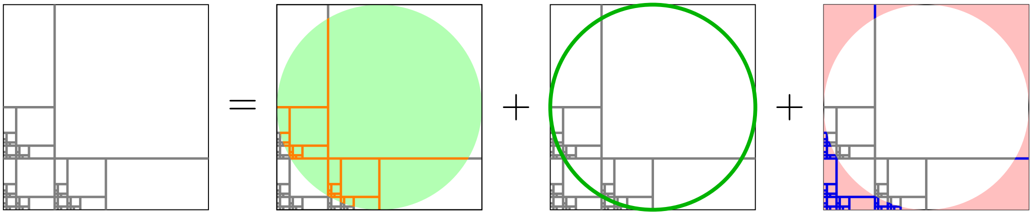
Inégalité locale de type Poincaré

Stratégie Verfürth



Inégalité locale de type Poincaré

Stratégie Verfürth



$$\left\| v - \fint_G v \,\mathrm{d}x \right\|^2_{L^2(G)} \leqslant \left\| v - \fint_B v \,\mathrm{d}x \right\|^2_{L^2(B)} + C R_G \left\| v - \fint_B v \,\mathrm{d}x \right\|^2_{L^2(\partial B)}$$

$$+ C R_G \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(R_G \|\nabla v\|^2_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})} + \sum_{j=k+1}^{K} (1 + c)^{j-k} C_{k,j} \|[\![v]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_j \cap (G \setminus B))} \right)$$

Inégalité locale de type POINCARÉ

Stratégie VERFÜRTH

Proposition

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour toute cellule $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, l'inégalité de POINCARÉ locale

$$\left\| v - \fint_G v \, \mathrm{d}x \right\|_{L^2(G)}^2 \leqslant C \left(1 + \frac{1}{\mathrm{c}}\right) d_k \left(d_k \|\nabla v\|_{L^2(G\setminus\Gamma)}^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+\mathrm{c})^{j-k} C_{k,j} \|[\![v]\!]\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right)$$

est vérifiée pour tout $v \in \mathcal{H}$ avec une constante C ne dépendant que de la dimension d et de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$.

Projecteur Π_k pour la méthode LOD

Définition. Projecteur Π_k

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$.

Projecteur Π_k pour la méthode LOD

Définition. Projecteur Π_k

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$.

Définition. Projecteur $\Pi_{\mathcal{H}_k}$

$$\Pi_{\mathcal{H}_k} : \begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}_k \\ v_{|G} & \longmapsto & \begin{cases} \underset{v_k \in H^1(G)}{\arg\min} \left\{ \|\nabla(v - v_k)\|_{L^2(G \setminus \Gamma)} \;\middle|\; \int_G (v - v_k)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}, & \text{pour } G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)} \\ v_{|G}, & \text{pour } G \in \Omega_\infty^{(k)} \end{cases} \end{array}$$

Définition. Projecteur $\Pi_{\mathcal{S}_k}$

$$\Pi_{\mathcal{S}_k} : \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_k & \longrightarrow & \mathcal{S}_k \\ v & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p \in \mathcal{N}^{(k)}} \left(\fint_{\omega_p} v\,\mathrm{d}x \right) \lambda_p^{(k)} \end{array}$$

avec $\omega_p = \operatorname{supp} \lambda_p^{(k)}$ pour $p \in \mathcal{N}^{(k)}$.

Projecteur Π_k pour la méthode LOD

Définition. Projecteur Π_k

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$.

$$v \in \mathcal{H} \xrightarrow{\text{troncature}} \Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k \xrightarrow{\text{quasi-interpolation}} \Pi_{\mathcal{S}_k}(\Pi_{\mathcal{H}_k} v) \in \mathcal{S}_k$$

Définition. Projecteur $\Pi_{\mathcal{H}_k}$

$$\Pi_{\mathcal{H}_k} : \begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}_k \\ v_{|G} & \longmapsto & \begin{cases} \underset{v_k \in H^1(G)}{\arg\min} \left\{ \|\nabla(v - v_k)\|_{L^2(G\setminus\Gamma)} \;\middle|\; \int_G (v - v_k)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}, & \text{pour } G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)} \\ v_{|G}, & \text{pour } G \in \Omega_\infty^{(k)} \end{cases} \end{array}$$

Définition. Projecteur $\Pi_{\mathcal{S}_k}$

$$\Pi_{\mathcal{S}_k} : \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_k & \longrightarrow & \mathcal{S}_k \\ v & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p \in \mathcal{N}^{(k)}} \left(⨍_{\omega_p} v\,\mathrm{d}x \right) \lambda_p^{(k)} \end{array}$$

avec $\omega_p = \operatorname{supp} \lambda_p^{(k)}$ pour $p \in \mathcal{N}^{(k)}$.

Projecteur Π_k pour la méthode LOD

Définition. Projecteur Π_k

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \to \mathcal{S}_k$.

$$v \in \mathcal{H} \xrightarrow{\text{troncature}} \Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k \xrightarrow{\text{quasi-interpolation}} \Pi_{\mathcal{S}_k}\left(\Pi_{\mathcal{H}_k} v\right) \in \mathcal{S}_k$$

Théorème. Approximation et Stabilité

Sous certaines conditions sur la géométrie de Γ, il existe une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d, la régularité γ de $\Omega^{(k)}$, la régularité σ de $\mathcal{T}^{(k)}$, de constantes géométriques δ et C_Γ, la constante de matériau c telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|v - \Pi_k v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c h_k \|v\| \quad \text{et} \quad \|\Pi_k v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|v\| \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

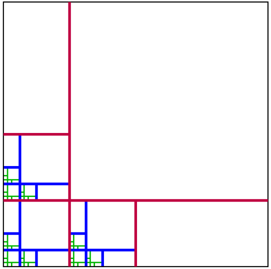
Nous avons construit un projecteur
permettant d'appliquer la méthode LOD

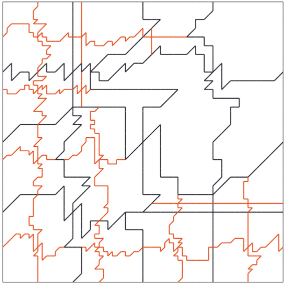
Plan

Expériences numériques

(avec une autre méthode que LOD mais aussi construite à partir de Π_k)

$$k = 1, \ldots, k_{\max}, \quad \Omega =]0\,;1[^2 \subset \mathbb{R}^2, \quad c = 1, \quad A = \mathrm{I} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad B = 1.$$





Réseau d'interfaces d'inspiration géologique qui sort du cadre théorique [KPY22, Fig. 2]

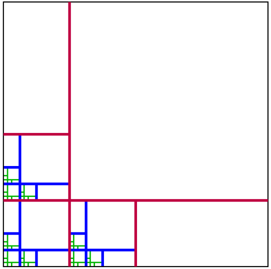
Conclusion

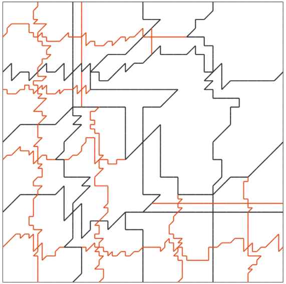
- La méthode numérique est robuste à la géométrie fractale du réseau d'interfaces ;
- La précision de discrétisation est atteinte en quelques étapes ;
- La méthode fonctionne au-delà du cadre des hypothèses théoriques.

Expériences numériques

(avec une autre méthode que LOD mais aussi construite à partir de Π_k)

$$k = 1, \dots, k_{\max}, \quad \Omega =]0\,;1[^2 \subset \mathbb{R}^2, \quad c = 1, \quad A = \mathrm{I} \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad B = 1.$$





Réseau d'interfaces d'inspiration géologique qui sort du cadre théorique [KPY22, Fig. 2]

Merci pour votre attention !

Bibliographie

- Assyr Abdulle and Patrick Henning, *A reduced basis localized orthogonal decomposition*, Journal of Computational Physics **295** (2015), 379–401.
- Xavier Blanc and Claude Le Bris, *Homogénéisation en milieu périodique... ou non - une introduction*, Mathématiques et Applications, Springer International Publishing, Cham, 2022 (fre).
- Patrick Ciarlet and Éric Lunéville, *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. Tome 1 : Concepts généraux*, Les Presses de l'ENSTA, 2009.
- Ralf Kornhuber, Joscha Podlesny, and Harry Yserentant, *Numerical homogenization of fractal interface problems*, ESAIM : M2AN **56** (2022), no. 4, 1451–1481.

Théorème. Formulation forte du problème

Trouver $u_k \colon \mathcal{H}_k \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u_k) = f & \text{dans } G \in \Omega^{(k)} \\ A\nabla u_k \cdot \nu_j = -(1+\mathrm{c})^j C_j B[\![u_k]\!] & \text{sur } \Gamma_j \in \Gamma^{(k)} \\ [\![A\nabla u_k \cdot \nu_j]\!] = 0 & \text{sur } \Gamma_j \in \Gamma^{(k)} \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

Proposition. Propriétés des espaces $\mathcal{H}_k$

- l'espace $\mathcal{H}_k$ est fermé, non vide et complet pour la norme $\|\cdot\|_k = \langle \cdot\,,\cdot\rangle_k^{1/2}$;
- les espaces $(\mathcal{H}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont emboîtés, *i.e.* $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{H}_j$;
- ces inclusions sont isométriques, *i.e.* pour $v \in \mathcal{H}_k$,

$$\|v\|_k = \|v\|_{k+1} = \cdots = \|v\|_{k+p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Théorème. Injections continues

L'espace $\mathcal{H}$ satisfait aux propriétés d'injections continues suivantes

$$\mathcal{H} \subset L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \subset H^s(\Omega)$$

pour tout $s \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right[$. En particulier, on peut énoncer l'inégalité type Poincaré suivante

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{\mathrm{P}}\|v\|$$

avec $C_{\mathrm{P}} = \left(1 + \frac{1}{c}\right)\operatorname{diam}(\Omega)\max\left\{\operatorname{diam}(\Omega), 1\right\}$.

Construction de l'espace fractal asymptotique $\mathcal{H}$

Définition

Soit $\mathcal{H}_\infty$ l'espace défini par $\mathcal{H}_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k$.

Proposition. Produit scalaire sur $\mathcal{H}_\infty$

On peut munir $\mathcal{H}_\infty$ du produit scalaire

$$\langle v\,,\,w\rangle_\infty \overset{\text{def}}{=} \langle v\,,\,w\rangle_{\max\{\sigma(v),\sigma(w)\}} \quad v, w \in \mathcal{H}_\infty$$

de norme associée $\|\cdot\|_\infty = \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_\infty^{1/2}$, où $\sigma : \mathcal{H}_\infty \to \mathbb{N}$ la fonction qui a un élément $v \in \mathcal{H}_\infty$ associe le plus petit entier $\sigma(v)$ tel que $v \in \mathcal{H}_{\sigma(v)}$.

Soient $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de $\mathcal{H}_\infty$,

$$(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \iff \|v_k - w_k\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

L'espace $\mathcal{H}$ est l'*espace quotient de $\mathcal{H}_\infty$ par la relation d'équivalence $\sim$*.

Construction de l'espace fractal asymptotique $\mathcal{H}$

Proposition. Produit scalaire sur $\mathcal{H}$

Soient $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}, w = (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$. La quantité

$$\|v\| \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \|v_k\|_k = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|_\infty$$

définit une norme sur $\mathcal{H}$. De plus, cette norme est associée au produit scalaire

$$\langle v\,, w\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \langle v_k\,, w_k\rangle_k = \lim_{k\to\infty} \langle v_k\,, w_k\rangle_\infty$$

dans le sens où $\|\cdot\| = \langle\cdot\,,\cdot\rangle^{1/2}$. $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ est complet.

Corollaire

Les espaces $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^1_{k,0}(\Omega)$ et $(\mathcal{H}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont denses dans $\mathcal{H}$.

Remarque

1. L'exposant « ms » signifie « multi-échelles » et indique que l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ contient également des informations aux petites échelles.
2. Comme $\dim \mathcal{S}_k^{\text{ms}} = \dim \mathcal{S}_k$, on peut voir l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ comme un espace d'éléments finis modifié et enrichi par les caractéristiques haute fréquence du problème :
$$\underbrace{\mathcal{H}}_{\substack{\text{espace des}\\ \text{solutions}}} = \underbrace{\mathcal{S}_k^{\text{ms}}}_{\substack{\text{espace grossier}\\ \text{corrigé}}} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\mathcal{V}_k}_{\substack{\text{caractéristiques}\\ \text{haute fréquence}}} .$$
3. Dit rapidement, les fonctions de $\mathcal{V}_k$ sont quelconques en dehors des nœuds, et « nulles » aux nœuds. Les fonctions de l'orthogonal $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ sont donc, *a contrario*, libres aux nœuds et, dans l'esprit au moins, solutions du problème en dehors des nœuds [BLB22, p.367].
4. Dit encore autrement, l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est de même dimension que $\mathcal{S}_k$, l'espace d'éléments finis classiques $\mathbb{P}_1$ associé au maillage $\mathcal{T}^{(k)}$, et il est un raffinement de celui-ci au sens où, tout en ayant ses degrés de liberté aux nœuds du maillage, il est « entre les nœuds » beaucoup plus adapté dans son approximation du problème oscillant considéré [BLB22, p.367].