



دکتر رضا انتظاری ملکی

پاییز ۱۳۹۹

تمرین سری چهارم

تحلیل و طراحی الگوریتم ها

علیرضا مرادی - زهرا حسینی

تاریخ تحویل : ۳۰ آبان ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

قوانین

- در صورت مشاهده‌ی هرگونه تقلب، به ازای هر بار تقلب نمره‌ی کل آن تمرین صفر در نظر گرفته می‌شود و همچنین یک نمره (نمره منفی) از نمره‌ی کل تمرین‌ها کسر می‌شود.
- در صورت وجود هرگونه سوال از طریق گروه تلگرام یا تیمز مطرح کنید. (لطفا پی‌وی پیام ندهید.)
- ۱۰ درصد از نمره‌ی هر تمرین به تمیزی و نظم پاسخ‌های ارسالی شما تعلق گرفته است، لازم است به موارد زیر توجه کنید:

۱. خوانا و مرتب بنویسید.

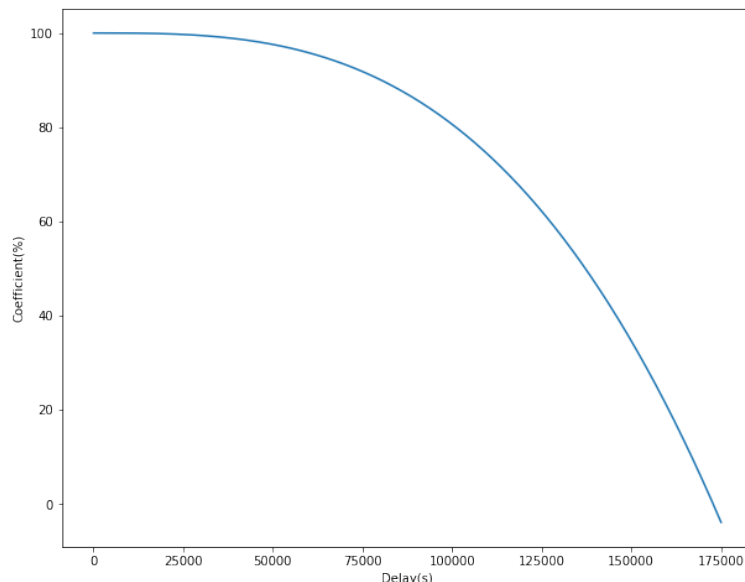
۲. از نرم افزارهایی جهت اسکن کردن تمرین‌های خود استفاده کنید و چک کنید که نور تصاویر مناسب هستند. مانند:

CamScanner, Microsoft Office Lens, Adobe Scan,...

۳. به طور عمودی عکاسی کنید.

۴. پاسخ هر سوال را به طور جداگانه در کوئرا اپلود کنید.

- محور افقی این نمودار مقدار تاخیر به ثانیه و محور عمودی ضریب اعمالی در نمره تمرین است



شکل ۱: نمودار تاخیر



سوالات

۱ Amortized Analysis (۲۰ نمره)

یک ساختمان داده طراحی کنید که یک مجموعه A از n عدد متمایز را نگه دارد که از دو عملیات زیر پشتیبانی می‌کنند:

- $\text{INSERT}(e, A)$: Insert integer e into A .
- $\text{REMOVE-BOTTOM-HALF}(A)$: remove the smallest $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ integers from A .

الگوریتم خود را به طور کامل شرح دهید و بدترین حالت پیچیدگی زمانی دو الگوریتم را بدست آورید. سپس یک تحلیل سرشکن انجام دهید که $\text{Insert}(e, A)$ و $\text{REMOVE-BOTTOM-HALF}(A)$ در حالت سرشکن در زمان $O(1)$ و 0 اجرا شوند.

۲ Operations Sequence (۲۰ نمره)

فرض کنید در حال انجام یک توالی از عملیات‌ها هستیم (عملیات ۱ و ۲ و ۳ و ...) بصورتی که عملیات i ام:

• هزینه ۱ دارد اگر i توانی از ۲ باشد.

• هزینه i دارد اگر i توانی از ۲ باشد.

برای مثال، جدول زیر هزینه چند عملیات اول را نشان می‌دهد:

operation number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
cost	1	2	1	4	1	1	1	8	1	...

بهترین حد بالا برای هزینه سرشکن برای هر عملیات را ارائه دهید.

۳ Stack with Array (۲۵ نمره)

فرض کنید می‌خواهیم یک stack را بصورت یک آرایه پیاده‌سازی کنیم و زمانی که stack پر شد سائز آن را دو برابر کنیم. حال اگر تعداد زیادی pop انجام دهیم و سائز stack خیلی کوچک شود، می‌خواهیم تا آن را resize کنیم تا کوچک شود. فرض کنید k تعداد عناصر و L سائز آرایه باشد. کدام یک از استراتژی‌های زیر منجر به هزینه سرشکن کمتری خواهد شد؟

• اگر استراتژی این باشد که وقتی $k = \frac{L}{2}$ شد سائز آرایه را نصف کنیم.

• اگر استراتژی این باشد که وقتی $k = \frac{L}{4}$ شد سائز آرایه را نصف کنیم.

هزینه سرشکن برای استراتژی بهتر را محاسبه کرده و اثبات کنید.

۴ Pear Data Structure (۲۵ نمره)

فرض کنید یک ساختمان داده‌ی جدید بنام pear تولید کرده‌ایم که از عملیات findSmallestGap و Insert و removeElement پشتیبانی می‌کند و تصمیم گرفتیم تا از تحلیل سرشکن برای بدست آوردن بدترین زمان اجرای یک توالی n تایی از عملیات بر روی یک pear خالی استفاده کنیم. یک تابع پتانسیل Φ برای pear تعریف کردیم به طوری که برای هر T pear داریم $\Phi(T) \geq 0$ و برای هر T خالی $\Phi(T) = 0$ است.

• یک عملیات Insert بر روی یک pear با n عنصر $\log n$ زمان می‌برد، و پتانسیل Φ این pear را به اندازه $\log n$ افزایش می‌دهد.

• یک عملیات findSmallestGap بر روی یک pear با n عنصر $x + \log^2 n$ زمان می‌برد، که x تعداد عناصر مشاهده شده توسط این عملیات است. پتانسیل Φ این pear به اندازه $x - 2$ کاهش می‌یابد.

• یک عملیات removeElement بر روی یک pear با n عنصر $\log n$ زمان می‌برد و پتانسیل Φ این pear را به اندازه ۳ افزایش می‌دهد.

Tightترین حد ممکن (as tight a bound as possible) برای بدترین زمان اجرای یک توالی از n عملیات بر روی یک pear که در ابتدا خالی است ارائه دهید.