Série de Fourier - Dente de Serra

Lucas Manique Leal, *Estudante, UNISINOS,* Samuel Armbrust Freitas, *Estudante, UNISINOS,*

***Abstract*—A série de Fourier é uma forma de representar qualquer função ou sinal periódico como uma soma de senos e cossenos. Neste trabalho é apresentada as Séries de Fourier que representa o sinal Dente de Serra nos tempos contínuo e discreto, além de uma aplicação no MatLab que permite variar algumas propriedades do sinal, como período, número de harmônicas e amplitude. A partir de uma análise aprofundada sobre o comportamento dos sinais foi possível verificar a evolução da forma de onda a partir do avanço na quantidade de termos utilizada.**

I. Introdução

A decomposição de funções matemáticas arbitrárias em termos de funções trigonométricas esteve presente na pauta de diversos estudiosos renomados durante o século XVIII, como L. Euler (1707-1783) e D. Bernoulli (1700-1782). Mais tarde, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) aprofundou seus estudos em séries infinitas com o objetivo de resolver a equação da onda. Em 1811, ele criou a Teoria matemática de condução do calor, em que explicitou os coeficientes de tais séries (que passaram a ser chamados de coeficientes de Fourier), além de expor a decomposição em senos e cossenos de diversas equações já conhecidas. Do ponto de vista da era moderna, os resultados de Fourier eram considerados informais, pela inexistência de definições concretas de funções e integrais até o início do século XIX. Mais tarde, o estudo destes fenômenos foi aprofundado e solidificou a teoria das séries de Fourier.

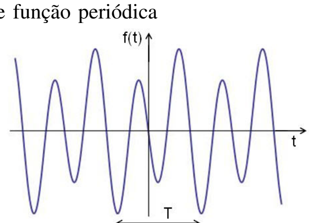
II. Funções Periódicas

Uma função é dita periódica se existe um número real positivo T, tal que:

$$f(x) = f(x+T)$$

Esta equação vale para todo x no domínio de f, onde T é chamado de período de f. O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento T.

Fig. 1. Exemplo de função periódica



O período T é o comprimento do intervalo em x necessário para a imagem da função se repetir. A freqüência F de uma função periódica é definida como o inverso de seu período:

$$F = \frac{1}{T}$$

Ela indica o número de repetições (ciclos) em cada intervalo unitário em x. Para x medido em segundos então a freqüência F é o número de ciclos por segundo (Hertz).

III. Série de Fourier

A Série de Fourier é uma alternativa para representar funções ou sinais periódicos através de somas de senos e cossenos. A forma geral da Série de Fourier é descrita pela seguinte equação:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{2n\pi x}{T}) + b_n sin(\frac{2n\pi x}{T}),$$

onde é possível verificar que todas as infinitas parcelas da função são periódicas de período T. Os elementos da série podem ser encontrados através das seguintes expressões:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$$

As equações acima são chamadas Fórmulas de Euler-Fourier e tem como finalidade o cálculo dos Coeficientes de Fourier.

IV. Onda Dente de Serra

A onda dente de serra (ou onda de serra) é um tipo de forma de onda não puramente senoidal. É assim chamado com base na sua semelhança com os dentes de uma serra com um ângulo de inclinação zero.

Em termos de geração audível, enquanto uma onda quadrada é construída utilizando apenas harmônicos ímpares, o som de uma onda dente de serra é áspero e claro e seu espectro contém harmônicos pares da frequência fundamental. Como contém todos os harmônicos inteiros, é uma das melhores formas de onda a serem usadas para a síntese de sons musicais. Esta é uma aplicação típica da Série de Fourier e pode ser descrita através da equação:

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{sin(2\pi kft)}{k},$$

onde A é a amplitude do sinal. Nas figuras abaixo, podemos perceber a o ajuste do gráfico da onda dente de serra de acordo com o incremento do número de termos da série:

Fig. 2. Forma de onda com um termo

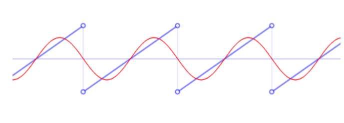


Fig. 3. Forma de onda com três termos

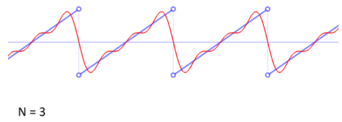
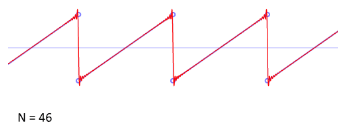


Fig. 4. Forma de onda com 46 termos



V. Script Série Fourier Contínua - Dente de Serra

O script proposto possui a entrada do usuário para três informações importantes à forma de onda esperada, sendo elas:

1) Quantidade de harmônicas
2) Amplitude do sinal
3) Período do sinal

Dentre as informações, temos que são definidas, então, uma variável de período (t), o coeficiente a0 da série de Fourier, seguido pelo cálculo da série, e posteriormente sua multiplicaçnao pela constante $\frac{Amplitude}{\pi}$ e sua subtração ao termo a0.

```
% Script Serie de Fourier Onda Dente de ...
    Serra Continua
clc
clear all

prompt = 'Quantas harmonicas?';
m = input(prompt);

prompt2 = 'Qual a amplitude?';
a = input(prompt2);

prompt3 = 'Qual a periodo?';
periodo = input(prompt3);

t = 0:periodo/1000:periodo*5;

a0 = a/2;

y = 0;
for i = 1:m
    y = y + ((1/i)*sin(i*((2*pi)/periodo)*t))
end

y = a/pi * y;

y = a0 - y;

plot(y)
grid
```

Esse script resulta em uma aproximação muito significativa a uma onda dente de serra original. Para tanto, apresenta-se dois exemplos, o primeiro com 60 harmônicas na figura 5 e o segundo com 1001 harmônicas na figura 6.

Em ambos os casos, utilizou-se uma amplitude de 5 unidades e frequências de 0.5 e 1, respectivamente. Com os dois exemplos é possível verificar que o script atende aos requisitos do trabalho, aproximando-se a medida que aumentamos o número de harmônicas, de uma onda dente de serra ideal.

Fig. 5. Série de Fourier Contínua com 60 harmônicas.

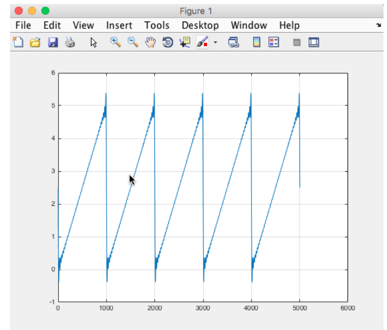
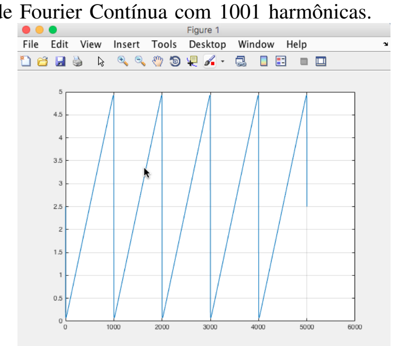


Fig. 6. Série de Fourier Contínua com 1001 harmônicas.



VI. Script Série Fourier Discreta - Dente de Serra

```
% Script Serie de Fourier Onda Dente de ...
    Serra Discreta
clc
clear all

prompt2 = 'Qual a amplitude?';
a = input(prompt2);

prompt3 = 'Qual a periodo?';
periodo = input(prompt3);

w = 2*pi/periodo;

n = 0:1:periodo*2

% definindo termos
ck = 0;
y = 0;

% definindo somatorio

for k = 1:periodo
    for m = 1:periodo
        ck = ck + (m * (exp(-1i*w*k*m)));
    end
    y = y + (ck * (exp(1i*w*k*n)));
    ck = 0;
end

y = (a/(periodo*periodo)) * y;

stem(n,y)
grid
```

$$x[n] = \frac{A}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} [m * e^{-jwkm}] * e^{jwkn}$$

No script da série de fourier discreta, seguiu-se a mesma estratégia indicando inicialmente as variáveis mais importantes aos cálculos. Dessa forma, definiu-se um valor de 5 unidades de amplitude, para 10 unidade de tempo que indicam o período do sinal, seguindo para a definição prévia da frequência fundamental Wo.

Em seguida, inicializa-se as variáveis de que serão utilizadas para o cálculos e o somatório de termos Ck é iniciado, seguindo pela definição de cada coeficiente e em seguida sua soma. Por fim, a série é multiplciada pelo valor da amplitude sobre o período ao quadrado e então é apresentada ao usuário via comando STEM. O resultado, também pode ser obtido na figura 9

Fig. 7. Série de Fourier Discreta com 10 termos.

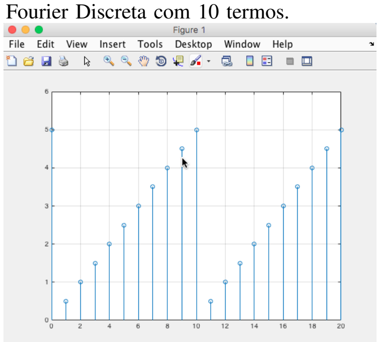


Fig. 8. Fluxograma Função Contínua.

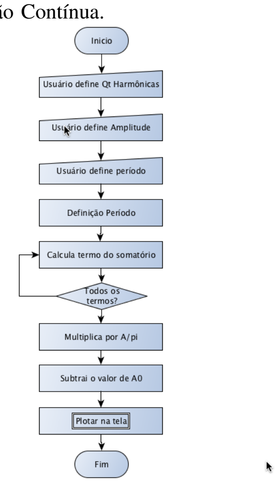
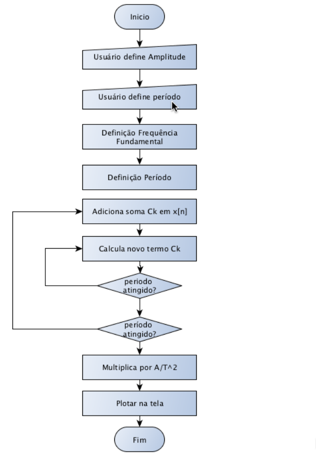


Fig. 9. Fluxograma Função Discreta.



VII. Conclusão

Para a criação do script, foi necessário transformar os sinais periódicos infinitos encontrados na bibliografia como equações matemáticas em funções do MatLab. Para isso, foram utilizados os conhecimentos adquiridos durante a disciplina de Sinais e Sistemas e foi possível identificar que qualquer somatório finito pode ser representado utilizando laços de repetição e acumulação de valores em uma variável.

A análise detalhada da atuação da Série de Fourier na composição de uma onda Dente de Serra possibilitou, ainda, identificar a influência de cada um dos elementos da função formadora na forma de onda gerada. Foi possível identificar que a precisão aumenta de forma significativa a medida que aumenta-se a resolução da série de Fourier e que seus conceitos são amplamente aplicáveis em sistemas digitais.