

# Esercizi sui sistemi formali

*Tutorato di Fondamenti di Informatica*

*20/03/2024*

**Martin Gibilterra**

Università di Catania

✉ [martingibilterra@gmail.com](mailto:martingibilterra@gmail.com)

🐙 [github.com/w8floosh](https://github.com/w8floosh)

🌐 [linkedin.com/in/w8floosh](https://www.linkedin.com/in/w8floosh)

# Derivabilità e ammissibilità

Si consideri il seguente sistema formale  $\mathcal{D}$  i cui giudizi sono stringhe sull'alfabeto  $\{a, b\}$ .

$$(Ax) \quad \frac{}{aaa}$$

$$(R) \quad \frac{w}{waa}, w \in \{a\}^+$$

$$(R') \quad \frac{b}{waa}$$

Discutere la derivabilità e l'ammissibilità di  $R'$  in  $\mathcal{D}$ .

# È cambiato qualcosa?

Posto  $\mathcal{CL}'$  uguale a  $\mathcal{CL}$  con l'aggiunta della regola in basso, gli insiemi dei teoremi di  $\mathcal{CL}'$  e  $\mathcal{CL}$  sono identici? Perché?

$$(CONG) \quad \frac{M=N \quad P=Q}{MP=NQ}$$

## 2.2 $\mathcal{CL}$ : un esempio di sistema formale

**Definizione 2.11** (Il sistema formale  $\mathcal{CL}$ ) Chiamiamo sistema formale  $\mathcal{CL}$  il sistema formale così definito:

- $S = \{k, s, (, ), =\}$  (alfabeto);
- $W = \{P = Q \mid P, Q \in \tau\}$  dove  $\tau$  è l'insieme dei termini così definito:
  1.  $k \in \tau, d \in \tau$ ;
  2. se  $P, Q \in \tau$  allora  $(PQ) \in \tau$ ;
  3. nient'altro è un termine;
- $Ax$ : per ogni  $P, Q, R \in \tau$  i seguenti sono schemi di assioma:
  - $((kP)Q) = P \quad (Azk)$ ;
  - $P = P$  (assioma di riflessività);
  - $((sP)Q)R = ((PR)(QR)) \quad (Axs)$ ;
  - nient'altro è un assioma. (Si noti che uno schema di assioma è un modo per descrivere un numero eventualmente infinito di assiomi con un'unica espressione).
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$  dove:
  - $R_1 = \{(P = Q, Q = P) \mid P, Q \in \tau\} \subseteq W^2$   
ovvero:  $\frac{P=Q}{Q=P}$ ;
  - $R_2 = \{(P = Q, Q = R, P = R) \mid P, Q, R \in \tau\} \subseteq W^3$   
ovvero:  $\frac{P=Q, Q=R}{P=R}$  (TRANS);
  - $R_3 = \{(R = R', (PR) = (QR), (PR) = (QR')) \mid P, Q, R, R' \in \tau\}$   
ovvero:  $\frac{R=R' \quad (PR)=(QR)}{(PR)=(QR')}$  (CONGR1);
  - $R_4 = \{(R = R', (RP) = (RQ), (RP) = (R'Q)) \mid P, Q, R, R' \in \tau\}$   
ovvero:  $\frac{R=R' \quad (RP)=(RQ)}{(RP)=(R'Q)}$  (CONGR2).

**Suggerimento:** Se la regola CONG è derivabile in  $\mathcal{CL}$ , cosa si può dire sui teoremi di  $\mathcal{CL}$ ?

# Aggiungi un posto a tavola

Dimostrare

$$(ksk)(kkk) = sk$$

aggiungendo la seguente regola a  $\mathcal{CL}$ :

$$(CONG) \quad \frac{M=N \quad P=Q}{MP=NQ}$$

$(ksk)(kkk) = sk$  si può derivare senza la regola CONG?

## 2.2 $\mathcal{CL}$ : un esempio di sistema formale

**Definizione 2.11 (Il sistema formale  $\mathcal{CL}$ )** Chiamiamo sistema formale  $\mathcal{CL}$  il sistema formale così definito:

- $S = \{k, s, (, ), =\}$  (alfabeto);
- $W = \{P = Q \mid P, Q \in \tau\}$  dove  $\tau$  è l'insieme dei termini così definito:
  1.  $k \in \tau, d \in \tau$ ;
  2. se  $P, Q \in \tau$  allora  $(PQ) \in \tau$ ;
  3. nient'altro è un termine;
- $Ax$ : per ogni  $P, Q, R \in \tau$  i seguenti sono schemi di assioma:
  - $((kP)Q) = P \quad (Axk)$ ;
  - $P = P$  (assioma di riflessività);
  - $((sP)Q)R = (P)R(QR) \quad (Axs)$ ;
  - nient'altro è un assioma. (Si noti che uno schema di assioma è un modo per descrivere un numero eventualmente infinito di assiomi con un'unica espressione).
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$  dove:
  - $R_1 = \{(P = Q, Q = P) \mid P, Q \in \tau\} \subseteq W^2$   
ovvero:  $\frac{P=Q}{Q=P}$ ;
  - $R_2 = \{(P = Q, Q = R, P = R) \mid P, Q, R \in \tau\} \subseteq W^3$   
ovvero:  $\frac{P=Q \quad Q=R}{P=R}$  (TRANS);
  - $R_3 = \{(R = R', (P)R) = (Q)R, (P)R = (Q)R'\} \mid P, Q, R, R' \in \tau\}$   
ovvero:  $\frac{R=R' \quad (P)R=(Q)R}{(P)R'=(Q)R}$  (CONGR1);
  - $R_4 = \{(R = R', (R)P) = (RQ), (R)P = (R'Q)\} \mid P, Q, R, R' \in \tau\}$   
ovvero:  $\frac{R=R' \quad (R)P=(RQ)}{(R)P'=(R'Q)}$  (CONGR2).

# Completa la dimostrazione

La seguente sequenza di fbf dimostra  $\{k = sk\} \vdash_{CL} P = Q$ .

- |                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| 1. ??              | (ipotesi)         |
| 2. ??              | (Axr)             |
| 3. $kP = skP$      | (Axr)             |
| 4. $kPQ = kPQ$     | (Axr)             |
| 5. $kPQ = skPQ$    | (CONGR2)(3. e 4.) |
| 6. ??              | (Axx)             |
| 7. ??              | (SYM)(5.)         |
| 8. $skPQ = P$      | ??                |
| 9. $skPQ = kQ(PQ)$ | (Axs)             |
| 10. $kQ(PQ) = Q$   | (Axx)             |
| 11. $skPQ = Q$     | (TRANS)(9. e 10.) |
| 12. $P = skPQ$     | ??                |
| 13. ??             | ??                |

## Assiomi e regole:

- |          |                                   |
|----------|-----------------------------------|
| (Axx)    | $\overline{kMN=M}$                |
| (Axs)    | $\overline{sMNR=MR(NR)}$          |
| (Axr)    | $\overline{M=M}$                  |
| (CONGR2) | $\frac{R=R' \quad RM=RN}{RM=R'N}$ |
| (SYM)    | $\frac{M=N}{N=M}$                 |
| (TRANS)  | $\frac{M=N \quad N=R}{M=R}$       |

# Completa la dimostrazione

## Soluzione

La seguente sequenza di fbf dimostra  $\{k = sk\} \vdash_{CL} P = Q$ .

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| 1. $k = sk$        | (ipotesi)          |
| 2. $kP = kP$       | (Axi)              |
| 3. $kP = skP$      | (CONGR2)(1. e 2.)  |
| 4. $kPQ = kPQ$     | (Axi)              |
| 5. $kPQ = skPQ$    | (CONGR2)(3. e 4.)  |
| 6. $kPQ = P$       | (Axi)              |
| 7. $skPQ = kPQ$    | (SYM)(5.)          |
| 8. $skPQ = P$      | (TRANS)(7. e 6.)   |
| 9. $skPQ = kQ(PQ)$ | (Axi)              |
| 10. $kQ(PQ) = Q$   | (Axi)              |
| 11. $skPQ = Q$     | (TRANS)(9. e 10.)  |
| 12. $P = skPQ$     | (SYM)(8.)          |
| 13. $P = Q$        | (TRANS)(12. e 11.) |

### Assiomi e regole:

- |          |                                   |
|----------|-----------------------------------|
| (Axi)    | $\overline{kMN=M}$                |
| (Axi)    | $\overline{sMNR=MR(NR)}$          |
| (Axi)    | $\overline{M=M}$                  |
| (CONGR2) | $\frac{R=R' \quad RM=RN}{RM=R'N}$ |
| (SYM)    | $\frac{M=N}{N=M}$                 |
| (TRANS)  | $\frac{M=N \quad N=R}{M=R}$       |

**Pensa!** Che cosa possiamo dire sull'insieme di ipotesi  $\{k = sk\}$ ?

# Il sistema formale di Garfield

Garfield il gatto vuole creare un sistema formale che gli permetta di comporre le sue lasagne preferite, perciò ha inventato il sistema formale  $\mathcal{G}$  che permette di creare delle lasagne complesse a partire da una singola fetta di pasta. Il suo sistema formale è definito correttamente?

$\Sigma = \{f, r, p, b\}$   
(alfabeto degli ingredienti)

$S = \{frX \mid X \in \Sigma / \{f, r\}\}$   
(insieme degli strati possibili)

$W = \left\{ Lf \mid L \in \bigcup_{i=1}^n W_i, W_i = \{Y \mid Y \in S^i\}, n \in \mathbb{N} \right\}$   
(insieme delle fbf)

Assiomi e regole:

$(Ax f) \quad \frac{}{f}$

$(ADD r) \quad \frac{f}{fr}$

$(ADD X) \quad \frac{X}{frX}$

$(ADD S) \quad \frac{X}{LX} L$

$(END) \quad \frac{L}{Lf} f$

# Il sistema formale di Garfield

## Correzione

Il sistema non è definito correttamente, in quanto le regole e gli assiomi non sono composti dalle fbf definite in  $W$ . Inoltre, nella definizione della lasagna parziale  $L$ , non veniva esplicitato il fatto che l'ingrediente  $I$  in ciascuno strato può variare.

$$\Sigma = \{f, r, p, b\}$$

(alfabeto degli ingredienti)

$$\Theta = \{fI \mid I \in \Sigma / \{f, r\}\}$$

(insieme degli strati possibili)

$$W_m = \left\{ \theta = (\theta_{1_{i_1}} \theta_{2_{i_2}} \dots \theta_{m_{i_m}}) \in \Theta^m \mid i_k \in \Sigma / \{f, r\}, k = 1, \dots, m \right\}$$

(insieme delle lasagne parziali con  $m$  strati)

$$W = \left\{ Lf \mid L \in \bigcup_{j=1}^n W_j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(insieme delle fbf)

Assiomi e regole:

$$(AxI) \quad \overline{fI}$$

$$(ADD) \quad \frac{\theta \quad Lf}{L\theta f}$$



# Il sistema formale di Garfield

## Riflessioni

Il sistema formale creato da Garfield può essere semplificato? Ci sono delle regole eliminabili?

Una lasagna vuota ( $ff$ ) è una fbf?

Se  $n = \infty$ , qual è la cardinalità dell'insieme delle conseguenze  $Con_{\mathcal{G}}(\emptyset)$ ?