Esercizi sui sistemi formali

Tutorato di Fondamenti di Informatica
20/03/2024

Martin Gibilterra

Università di Catania
martingibilterra@gmail.com
github.com/w8floosh
linkedin.com/in/w8floosh

Derivabilità e ammissibilità

Si consideri il seguente sistema formale $\mathcal{D}$ i cui giudizi sono stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$.

$$(Ax) \quad \frac{}{aaa}$$

$$(R) \quad \frac{w}{waa}, w \in \{a\}^+$$

$$(R') \quad \frac{b}{waa}$$

Discutere la derivabilità e l'ammissibilità di R' in $\mathcal{D}$.

È cambiato qualcosa?

Posto $\mathcal{CL}'$ uguale a $\mathcal{CL}$ con l'aggiunta della regola in basso, gli insiemi dei teoremi di $\mathcal{CL}'$ e $\mathcal{CL}$ sono identici? Perché?

$$(CONG) \qquad \frac{M=N \qquad P=Q}{MP=NQ}$$

2.2 $\mathcal{CL}$: un esempio di sistema formale

Definizione 2.11 (Il sistema formale $\mathcal{CL}$) *Chiamiamo sistema formale $\mathcal{CL}$ il sistema formale così definito:*

- $S = \{k, s, (,), =\}$ *(alfabeto);*
- $W = \{P = Q | P, Q \in \tau\}$ *dove* τ *è l'insieme dei termini così definito:*
  1. $k \in \tau, d \in \tau$;
  2. *se* $P, Q \in \tau$ *allora* $(PQ) \in \tau$;
  3. *nient'altro è un termine;*
- Ax: *per ogni* $P, Q, R \in \tau$ *i seguenti sono schemi di assioma:*
  - $((kP)Q) = P \quad (Axk)$;
  - $P = P$ *(assioma di riflessività);*
  - $(((sP)Q)R) = ((PR)(QR)) \quad (Axs)$;
  - *nient'altro è un assioma. (Si noti che uno schema di assioma è un modo per descrivere un numero eventualmente infinito di assiomi con un'unica espressione).*
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ *dove:*
  - $R_1 = \{(P = Q, Q = P) | P, Q \in \tau\} \subseteq W^2$ *ovvero:* $\frac{P=Q}{Q=P}$;
  - $R_2 = \{(P = Q, Q = R, P = R) | P, Q, R \in \tau\} \subseteq W^3$ *ovvero:* $\frac{P=Q \quad Q=R}{P=R} \quad (TRANS)$;
  - $R_3 = \{(R = R', (PR) = (QR), (PR) = (QR')) | P, Q, R, R' \in \tau\}$ *ovvero:* $\frac{R=R' \quad (PR)=(QR)}{(PR)=(QR')} \quad (CONGR1)$;
  - $R_4 = \{(R = R', (RP) = (RQ), (RP) = (R'Q)) | P, Q, R, R' \in \tau\}$ *ovvero:* $\frac{R=R' \quad (RP)=(RQ)}{(RP)=(R'Q)} \quad (CONGR2)$.

Aggiungi un posto a tavola

Dimostrare $(ksk)(kkk) = sk$ aggiungendo la seguente regola a $\mathcal{CL}$:

$$(CONG) \quad \frac{M = N \qquad P = Q}{MP = NQ}$$

$(ksk)(kkk) = sk$ si può derivare senza la regola $CONG$?

2.2 $\mathcal{CL}$: un esempio di sistema formale

Definizione 2.11 (Il sistema formale $\mathcal{CL}$) *Chiamiamo sistema formale $\mathcal{CL}$ il sistema formale così definito:*

- $S = \{k, s, (,), =\}$ *(alfabeto);*
- $W = \{P = Q | P, Q \in \tau\}$ *dove* τ *è l'insieme dei termini così definito:*
  1. $k \in \tau, d \in \tau$;
  2. *se* $P, Q \in \tau$ *allora* $(PQ) \in \tau$;
  3. *nient'altro è un termine;*
- Ax: *per ogni* $P, Q, R \in \tau$ *i seguenti sono schemi di assioma:*
  - $((kP)Q) = P \quad (Axk)$;
  - $P = P$ *(assioma di riflessività);*
  - $(((sP)Q)R) = ((PR)(QR)) \quad (Axs)$;
  - *nient'altro è un assioma. (Si noti che uno schema di assioma è un modo per descrivere un numero eventualmente infinito di assiomi con un'unica espressione).*
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ *dove:*
  - $R_1 = \{(P = Q, Q = P) | P, Q \in \tau\} \subseteq W^2$ *ovvero:* $\frac{P=Q}{Q=P}$;
  - $R_2 = \{(P = Q, Q = R, P = R) | P, Q, R \in \tau\} \subseteq W^3$ *ovvero:* $\frac{P=Q \quad Q=R}{P=R} \quad (TRANS)$;
  - $R_3 = \{(R = R', (PR) = (QR), (PR) = (QR')) | P, Q, R, R' \in \tau\}$ *ovvero:* $\frac{R=R' \quad (PR)=(QR)}{(PR)=(QR')} \quad (CONGR1)$;
  - $R_4 = \{(R = R', (RP) = (RQ), (RP) = (R'Q)) | P, Q, R, R' \in \tau\}$ *ovvero:* $\frac{R=R' \quad (RP)=(RQ)}{(RP)=(R'Q)} \quad (CONGR2)$.

Completa la dimostrazione

La seguente sequenza di fbf dimostra $\{k = sk\} \vdash_{CL} P = Q$.

1. ??	(ipotesi)
2. ??	(Axr)
3. $kP = skP$	(Axr)
4. $kPQ = kPQ$	(Axr)
5. $kPQ = skPQ$	$(CONGR2)$(3. e 4.)
6. ??	(Axk)
7. ??	(SYM)(5.)
8. $skPQ = P$	??
9. $skPQ = kQ(PQ)$	(Axs)
10. $kQ(PQ) = Q$	(Axk)
11. $skPQ = Q$	$(TRANS)$(9. e 10.)
12. $P = skPQ$	??
13. ??	??

Assiomi e regole:

(Axk) $\dfrac{}{kMN = M}$

(Axs) $\dfrac{}{sMNR = MR(NR)}$

(Axr) $\dfrac{}{M = M}$

$(CONGR2)$ $\dfrac{R = R' \quad RM = RN}{RM = R'N}$

(SYM) $\dfrac{M = N}{N = M}$

$(TRANS)$ $\dfrac{M = N \quad N = R}{M = R}$

Completa la dimostrazione

Soluzione

La seguente sequenza di fbf dimostra $\{k = sk\} \vdash_{CL} \ P = Q$.

1. $k = sk$	(ipotesi)
2. $kP = kP$	(Axr)
3. $kP = skP$	$(CONGR2)$(1. e 2.)
4. $kPQ = kPQ$	(Axr)
5. $kPQ = skPQ$	$(CONGR2)$(3. e 4.)
6. $kPQ = P$	(Axk)
7. $skPQ = kPQ$	(SYM)(5.)
8. $skPQ = P$	$(TRANS)$(7. e 6.)
9. $skPQ = kQ(PQ)$	(Axs)
10. $kQ(PQ) = Q$	(Axk)
11. $skPQ = Q$	$(TRANS)$(9. e 10.)
12. $P = skPQ$	(SYM)(8.)
13. $P = Q$	$(TRANS)$(12. e 11.)

Assiomi e regole:

(Axk) $\quad \dfrac{}{kMN=M}$

(Axs) $\quad \dfrac{}{sMNR=MR(NR)}$

(Axr) $\quad \dfrac{}{M=M}$

$(CONGR2)$ $\quad \dfrac{R=R' \quad RM=RN}{RM=R'N}$

(SYM) $\quad \dfrac{M=N}{N=M}$

$(TRANS)$ $\quad \dfrac{M=N \quad N=R}{M=R}$

Pensa! Che cosa possiamo dire sull'insieme di ipotesi $\{k = sk\}$?

Il sistema formale di Garfield

Garfield il gatto vuole creare un sistema formale che gli permetta di comporre le sue lasagne preferite, perciò ha inventato il sistema formale $\mathcal{G}$ che permette di creare delle lasagne complesse a partire da una singola fetta di pasta.

$\Sigma = \{f, r, p, b\}$
(alfabeto degli ingredienti)

$S = \left\{ frX \mid X \in \Sigma / \{f, r\} \right\}$
(insieme degli strati possibili)

$W = \left\{ Lf \mid L \in \bigcup_{i=1}^{n} W_i, W_i = \{Y \mid Y \in S^i\}, n \in \mathbb{N} \right\}$
(insieme delle fbf)

Assiomi e regole:

$(Axf) \quad \dfrac{}{f}$

$(ADDr) \quad \dfrac{f \quad r}{fr}$

$(ADDX) \quad \dfrac{X \quad fr}{frX}$

$(ADDS) \quad \dfrac{X \quad L}{LX}$

$(END) \quad \dfrac{L \quad f}{Lf}$

Il sistema formale di Garfield

Riflessioni

Il sistema formale creato da Garfield può essere semplificato? Ci sono delle regole eliminabili?

Nella regola END, viene usato f come ipotesi. E’ possibile rimuovere questa ipotesi? Giustificare la risposta.

Una lasagna vuota (solo due fette di pasta una sopra l’altra) è valida secondo questo sistema formale?