Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Численные методы: аппроксимация функций

Сардарян Армен, группа 301
5 семестр, 2019 год

1 Метод наименьших квадратов

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана некоторая функция $f(\cdot)$, причём её значения $\{y_i = f(x_i)\}$ в узлах сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ известны с погрешностями $\{\varepsilon_i\}$, то есть вместо набора значений $\{y_i\}$ имеем набор $\{\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i\}$. (Далее под $\{y_i\}$ будем понимать заданные значения функции, т.е. с погрешностями, вводя обозначение $\tilde{y}_i$ лишь в случае необходимости). Пусть, кроме того, на $[a, b]$ определены функции $\varphi_j(\cdot) \in \Phi, \quad j = \overline{0, m}$.

Введём в рассмотрение обобщённый полином

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x).$$

Пусть a – вектор коэффициентов полинома $P_m(\cdot)$, y – вектор значений функции $f(\cdot)$ и, наконец, $\varphi(\cdot)$ – вектор-функция, составленная из значений $\{\varphi_i(x)\}$:

$$\begin{aligned}
&a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T, \\
&y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T, \\
&\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))^T,
\end{aligned}$$

Введём также функции

$$\sigma(a, y) = \sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2, \quad \delta(a, y) = \sqrt{\frac{\sigma(a, y)}{n+1}}.$$

Функцию $\delta(a, y)$ назовём *среднеквадратичным уклонением* обобщённого полинома $P_m(\cdot)$ от функции $f(\cdot)$ на системе узлов $\{x_i\}$. Поставим задачу: *найти обобщённый полином $\bar{P}_m(\cdot) = \bar{a}^T \varphi(\cdot)$, для которого среднеквадратичное уклонение минимально*:

$$\delta(\bar{a}, y) = \min_a \delta(a, y).$$

Поставленную здесь задачу называют *линейной задачей метода наименьших квадратов* или просто методом наименьших квадратов (МНК). Если искомый полином существует, то будем называть его *многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения*.

Простейший подход к решению задачи – использование необходимых условий в задаче поиска экстремума для дифференцируемой функции:

$$\frac{\partial\sigma(a,y)}{\partial a_k}\Big|_{a=\bar{a}} = 0, \quad k = \overline{0,m}. \tag{1.1}$$

В дополнение к уже введённым ранее обозначениям примем также следующее:

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0), & \varphi_1(x_0), & \dots & \varphi_m(x_0), \\ \varphi_0(x_1), & \varphi_1(x_1), & \dots & \varphi_m(x_1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n), & \varphi_1(x_n), & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Для определения параметров искомого полинома в соответствии с формулой (1.1) имеем СЛАУ:

$$Ha = b, \quad \text{где } H = Q^T Q, \; b = Q^T y. \tag{1.2}$$

Остаётся для определения параметров полинома $\bar{P}_m(x)$ решить систему линейных алгебраических уравнений (1.2). В предположении линейной независимости функций $\{\varphi_i\}$ матрица H системы (1.2) неособая и задача имеет единственное решение.

2 Задача

Для указанной функции $f(x) = x - sin(x)$ по методу наименьших квадратов построить алгебраический полином наилучшего среднеквадратичного приближения третьей степени по пяти узлам x_i и значениям функции $f(x_i)$ в этих узлах. Построить графики исходной функции и полинома. Отрезок аппроксимации $[1, 1]$.

3 Реализация на языке Matlab

```
s = 3;
n = 5;

x = linspace(-1, 1);
xi = linspace(-1, 1, n);

f = x - sin(x);

hold on
figure(1);
```

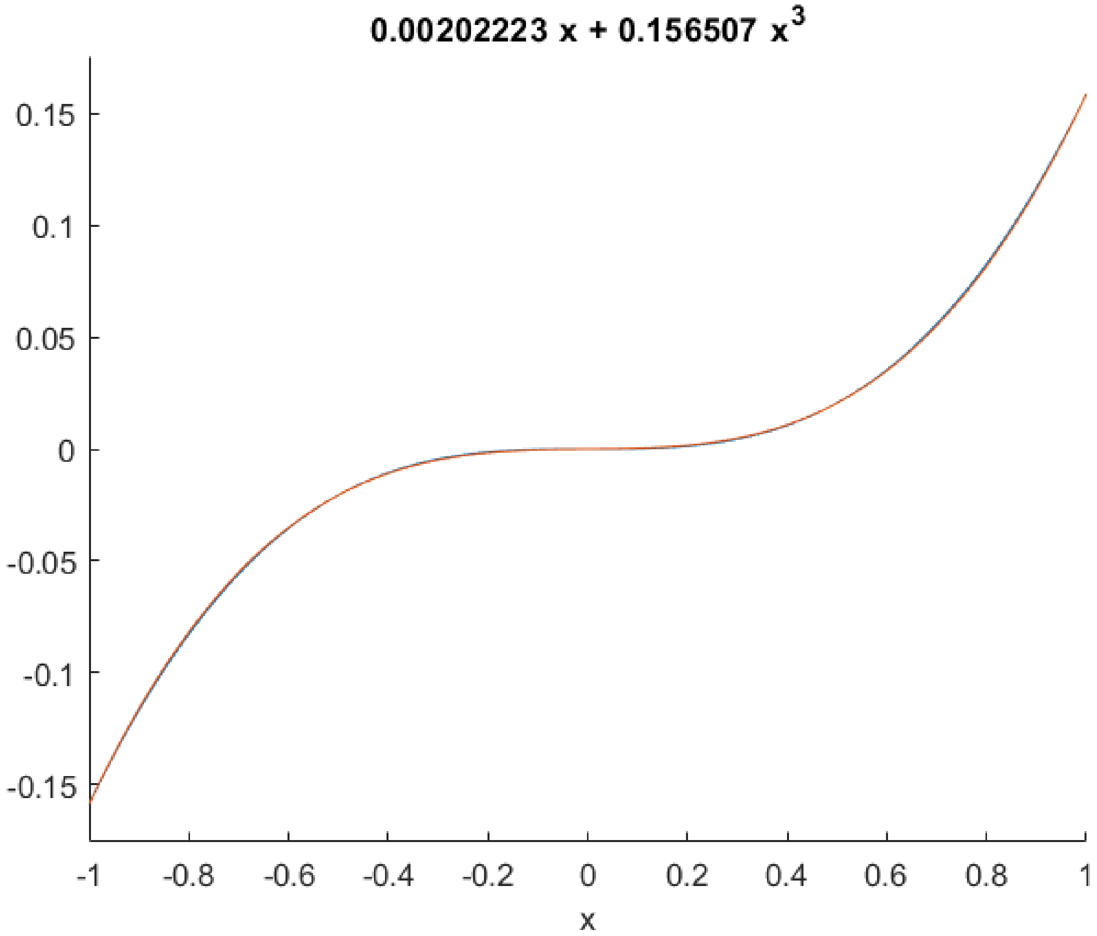
```
plot(x, f)

y = zeros(n, 1);
for i = 1:n
    y(i,1) = xi(i) - sin(xi(i));
end

Q = zeros(n, s);
for i = 1:n
    for j = 1:s+1
        Q(i,j) = xi(i)^(j-1);
    end
end
H = Q' * Q;
B = Q' * y;
a = H \ B;

syms x;

P = a(1) * x^0;
for i = 2:s+1
    P = P + a(i) * x^(i-1);
end

collect(P);
Polynom = vpa(P, 6)

hold on
p = ezplot(Polynom, [-1, 1]);
set(p);
```

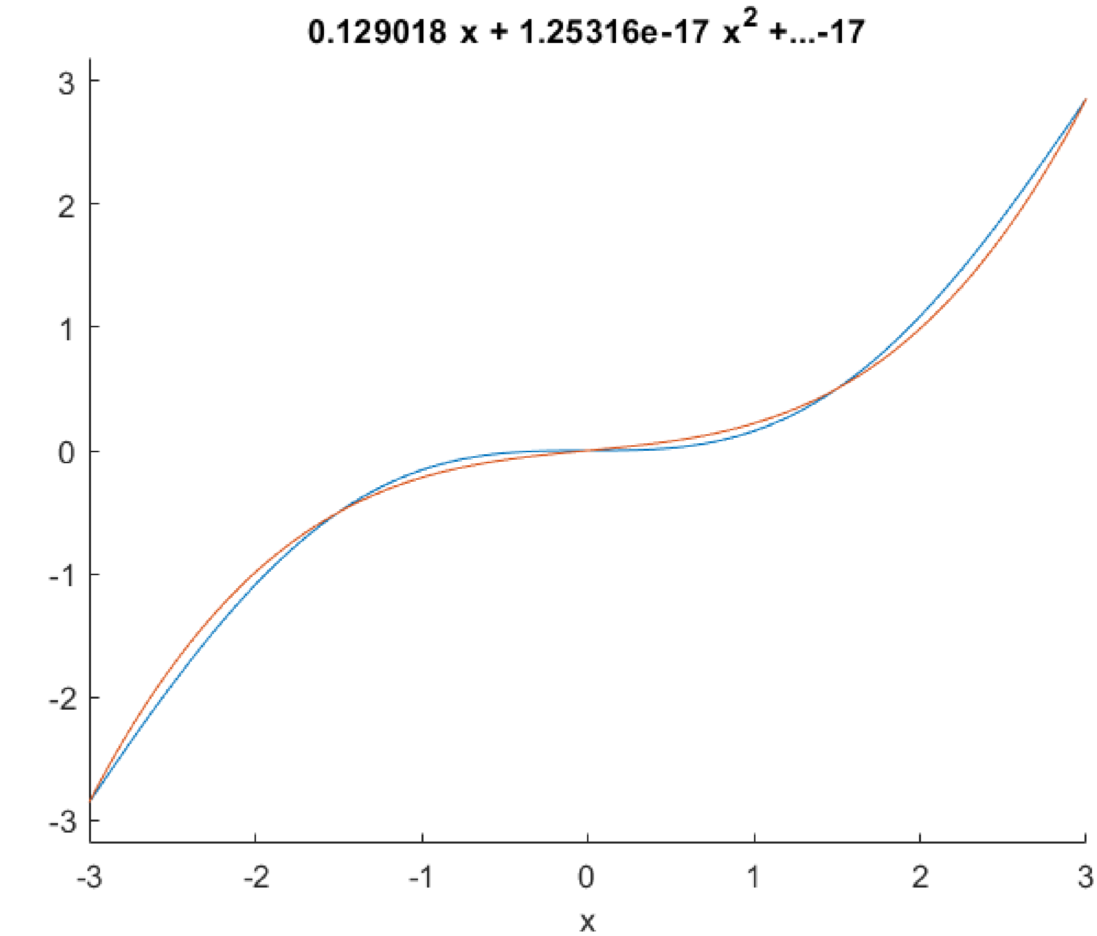
4 Результат работы программы

Если взять отрезок аппроксимации [-1, 1]:
$Polynom = 0.156507 * x^3 + 0.00202223 * x$
Если же взять отрезок [-3, 3]:
$Polynom = 0.0915491 * x^3 + 1.25316e - 17 * x^2 + 0.129018 * x - 5.63923e - 17$

5 График

Синим цветом график самой функции $f(x) = x - sin(x)$. Красным - полином наилучшего среднеквадратичного приближения третьей степени, построенный по пяти узлам и значениям функции в этих узлах. На первом рисунке отрезок аппроксимации взят $[-1, 1]$, на втором: $[-3, 3]$.


0.00202223 x + 0.156507 x^3
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x


0.129018 x + 1.25316e-17 x^2 +...-17
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
x