دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

کنترل خطی

پاسخ تمرین ۲

نام و نام خانوادگی	آرمین حسین خلج
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۲۱۶۷۷۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۴

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۲
۱.۱ الف ۲
۲.۱ ب ۳

۲ سوال دوم ۳

۳ سوال سوم ۵
۱.۳ بخش اول ۵
۲.۳ بخش دوم ۵
۳.۳ بخش سوم ۶

۴ سوال چهارم ۶

۱ سوال اول

۱.۱ الف

فرمول کلی میسون به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta} \tag{۱}$$

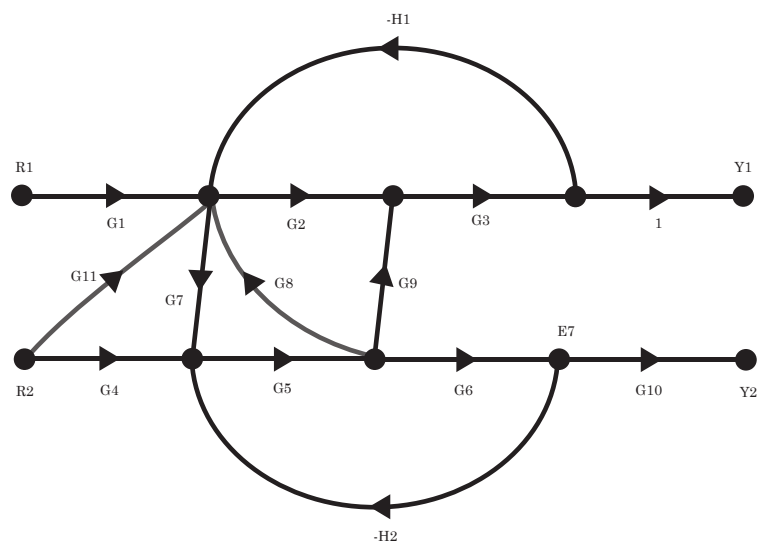
که در آن:

- T : تابع انتقال کل سیستم
- P_k : بهرهٔ مسیر پیشرو kام
- Δ : تعیین‌کننده کلی سیستم، برابر است با

$$\Delta = 1 - (\text{Sum of individual loop gains}) + (\text{Sum of gain products of two non-touching loops}) - \cdots$$

- Δ_k : همان Δ است ولی با حذف حلقه‌هایی که با مسیر پیشرو kام همبستگی دارند.

[1]



شکل ۱: SFG سوال ۱

[1] SFG : Signal Flow Graph

$$L_1 = -G_2G_3H_1,$$
$$L_2 = -G_5G_6H_2,$$
$$L_3 = G_7G_5G_8,$$
$$L_4 = -G_7G_5G_9G_3H_1,$$

مسیرهای پیشرو از R_2 به Y_1 :

$$P_1 = G_{11}G_2G_3,\ P_2 = G_4G_5G_9G_3,\ P_3 = G_{11}G_7G_5G_9G_3,\ P_4 = G_4G_5G_8G_2G_3$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_2),$$

$$=> \Delta = 1 - G_7G_5G_8 + G_2G_3H_1 + G_5G_6H_2 + G_7G_5G_9G_3H_2 + G_2G_3G_5G_6H_1H_2$$

در نهایت با قاعدهٔ میسون تابع تبدیل مورد نظر خواهد بود:

$$\frac{Y_1}{R_2} = \frac{\sum_{k=1}^{4} P_k\,\Delta_k}{\Delta} = \frac{(G_{11}G_2G_3)(-G_5G_6H_2) + (G_4G_5G_9G_3)(1) + (G_{11}G_7G_5G_9G_3)(1) + (G_4G_5G_8G_2G_3)(1)}{1 - G_7G_5G_8 + G_2G_3H_1 + G_5G_6H_2 + G_7G_5G_9G_3H_2 + G_2G_3G_5G_6H_1H_2}$$

حال مسیرهای پیشرو از E_7 به E_4 را مشخص میکنیم :

$$P_1 = -G_5G_9G_3H_2,\ P_2 = -G_5G_8G_2G_3H_2,$$

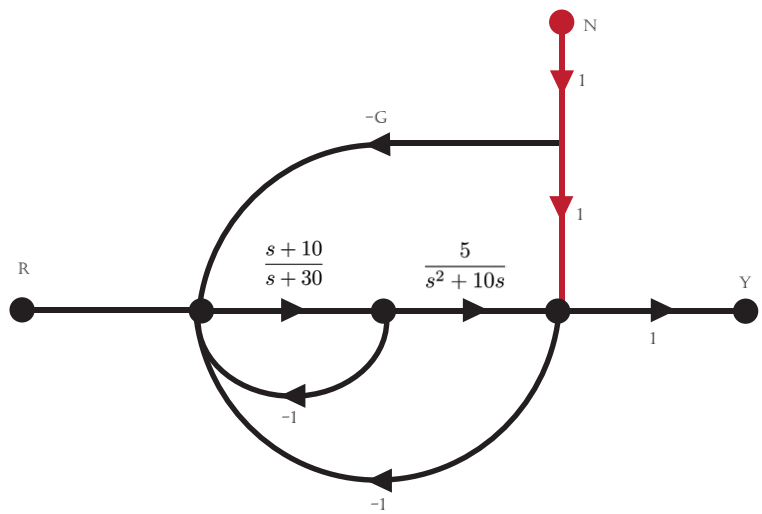
۲.۱ ب

مانند قسمت الف داریم:

$$\frac{E_4}{E_7} = \frac{\sum_{k=1}^{2} P_k\,\Delta_k}{\Delta} = \frac{(-G_5G_9G_3H_2)(1) + (-G_5G_8G_2G_3H_2)(1)}{1 - G_7G_5G_8 + G_2G_3H_1 + G_5G_6H_2 + G_7G_5G_9G_3H_2 + G_2G_3G_5G_6H_1H_2}$$

۲ سوال دوم

هدف کم‌کردن یا حذف اثر اغتشاش $N(s)$ روی خروجی $Y(s)$ با کمینه یا صفر کردن تابع انتقال $T_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$ است . میتوانیم SFG شکل را رسم نموده و از طریق فرمول میسون $T_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$ را بدست اورده :



شکل ۲: SFG سیستم

برای اینکه نویز در خروجی حذف شود باید $T_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$ کمینه یا صفر شود لذا نیازی به محاسبه Δ نیست و درواقع باید حاصل ضرب P_k Δ_k در فرمول میسون برابر صفر شود .

مسیرهای پیشرو از $Noise$ به Y به‌صورت زیر است :

$$P_1 = 1 \times 1,\ P_2 = -G \times \frac{s+10}{s+30} \times \frac{5}{s^2+10s}$$

$$P_1K_1 + P_2K_2 = 0 = 1 \times \left(1 + \frac{s+10}{s+30}\right) + (-G \times \frac{s+10}{s+30} \times \frac{5}{s^2+10s})(1)$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{2s}{5}(s+20)$$

۳ سوال سوم

۱.۳ بخش اول

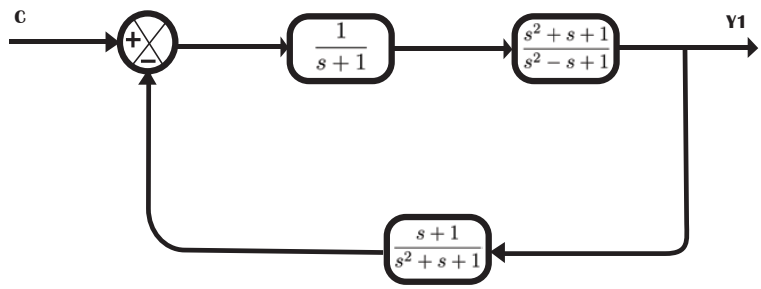
الف) با توجه به شکل ۴ داریم :

$$[-Y_1(\frac{s+1}{s^2+s+1})+C]G_1 = Y_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_1}{C} = \frac{G_1}{1+G_1\left(\frac{s+1}{s^2+s+1}\right)} = \frac{s^2+s+1}{s^3+s+2} \Rightarrow \quad G_1 = \frac{s^2+s+1}{s^3+1}$$

که حالا میتوانیم به دلخواه تابع G_1 را به دو تابع تبدیل جدا از هم تبدیل کنیم :

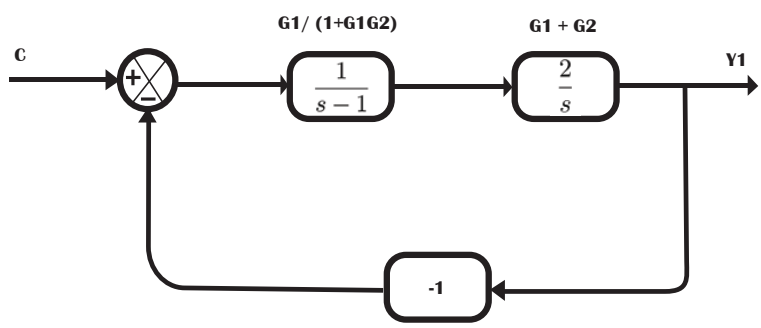
$$G_2 = \frac{1}{s+1} \quad , \quad G_3 = \frac{s^2+s+1}{s^2-s+1}$$



شکل ۳: نمودار بلوکی

۲.۳ بخش دوم

ب) با توجه به قسمت قبلی میتوانیم شکل نمودار را ساده کنیم پس داریم :



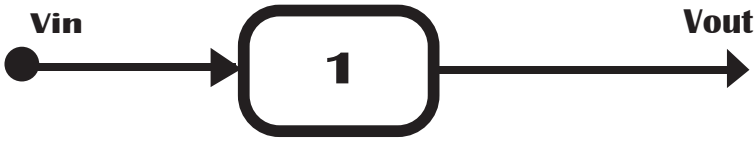
شکل ۴: نمودار بلوکی

$$\Rightarrow \quad Y_1 = (Y_1.C)(\frac{1}{s-1})(\frac{2}{s})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Y_1}{C} = \frac{2}{s^2 - s - 2}$$

۳.۳ بخش سوم

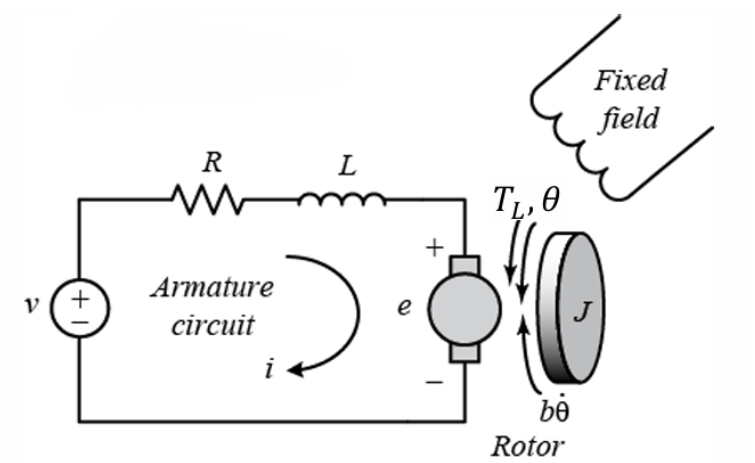
ج) در این قسمت چون ورودی مستقیم به خروجی وصله یعنی سیستم مستقل از عناصره :



شکل ۵: نمودار بلوکی

$$\Rightarrow \qquad \frac{V_{out}}{V_{in}} = 1$$

۴ سوال چهارم



شکل ۶: ماشین DC

در ابتدا پارامتر هایی که در فایل متلب بود رو مورد بررسی قرار میدهیم :

$J = 0.01$ (ممان اینرسی)

$b = 0.1$ (ضریب اصطکاک)

$K = 0.01$ (ثابت طراحی)

$R = 1$ (مقاومت آرمیچر)

$L = 0.5$ (اندوکتانس)

اکنون معادلات مغناطیسی و الکتریکی حاکم بر سیستم را مینویسیم :

$$\begin{cases} J\,\dfrac{d\omega(t)}{dt} + b\,\omega(t) = K\,i(t), \\ L\,\dfrac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + K\,\omega(t) = V(t). \end{cases}$$

که با توجه به مقادیر داخل فایل :

$$\begin{cases} 0.01\,\dfrac{d\omega(t)}{dt} + 0.1\,\omega(t) = 0.01\,i(t), \\ 0.5\,\dfrac{di(t)}{dt} + 1\,i(t) + 0.01\,\omega(t) = V(t). \end{cases}$$

حال معادلات را در حوزه لاپلاس میبریم و تابع تبدیل را بدست میاوریم :

$$Js\,\Omega(s) - J\,\omega(0) + b\,\Omega(s) = K\,I(s),$$

$$Ls\,I(s) - L\,i(0) + R\,I(s) + K\,\Omega(s) = V(s).$$

$$(Js + b)\,\Omega(s) = K\,I(s),$$

$$(Ls + R)\,I(s) + K\,\Omega(s) = V(s).$$

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{LJ\,s^2 + (Lb + RJ)\,s + \left(Rb + K^2\right)}.$$

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0.01}{0.005\,s^2 + 0.06\,s + 0.1001} = \frac{100}{50\,s^2 + 600\,s + 1001}.$$

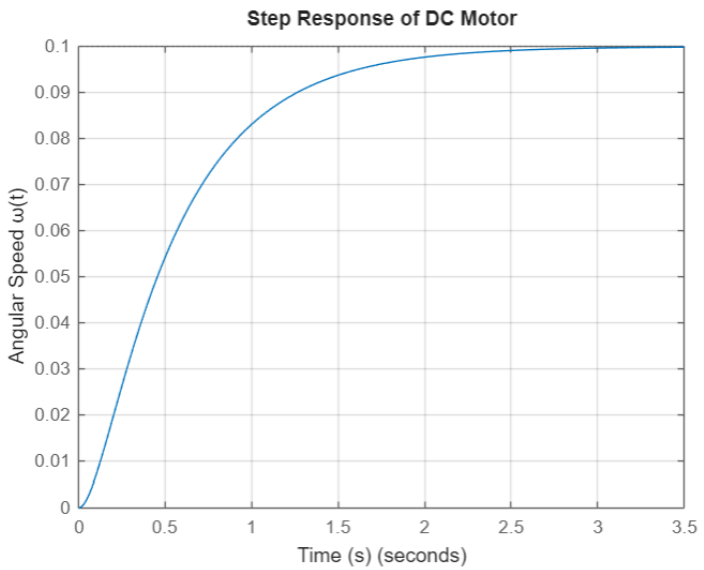
با توجه به تابع تبدیل میتوان مقادیر فرکانس طبیعی نامیرا و نسبت میرایی را حساب کرد :

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1001}{50}} \approx 4.474, \qquad 2\zeta\omega_n = 12, \Rightarrow \zeta \approx 1.34$$

چون $\zeta > 1$ شد، پس می‌توان فهمید که قطب‌ها حقیقی هستند و پاسخ پلهٔ این سیستم در حالت کلی به صورت زیر است:

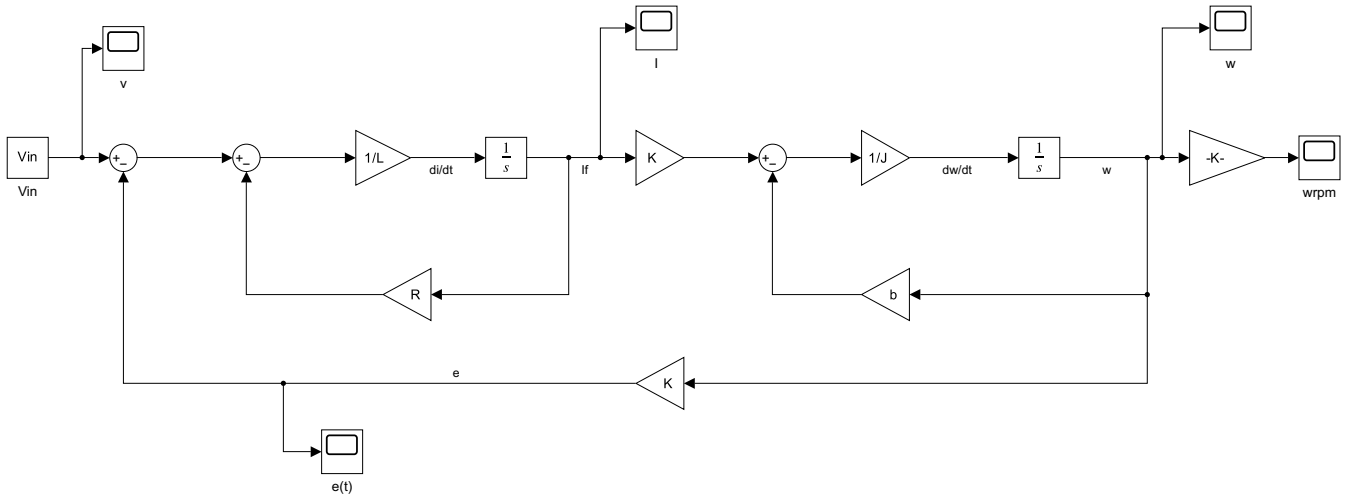
$$y(t) = K(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}))$$

مطابق خروجی متلب در ورودی پله :



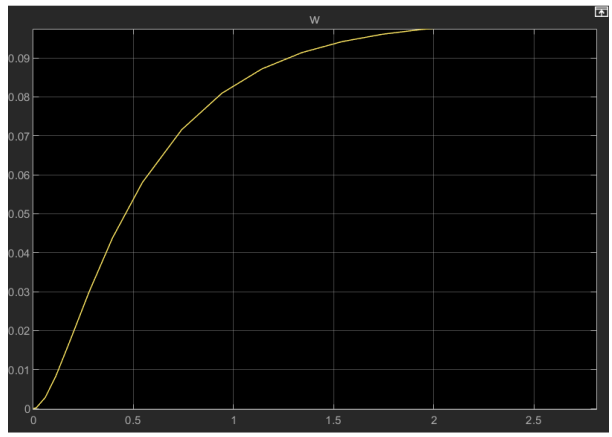
شکل ۷: Step Response

با توجه به معادلات سیستم میتوان چنین سیستمی را برای ماشین DC مدل کرد :

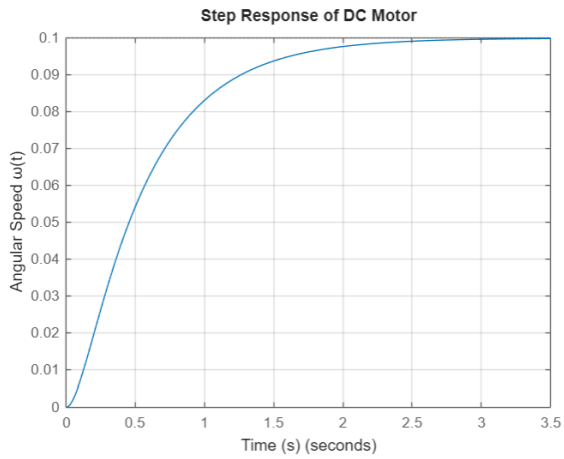


شکل ۸: DC Machine Model

که نیمه اول مدل مربوط به رابطه الکتریکی حاکم بر ماشین DC می شود و بقیه آن مربوط به رابطه مکانیکی و همچنین مشاهده میشود از بلوک های بهره و انتگرال گیر در طراحی استفاده شده است.



شکل ۹: ورودی پله به سیستم مدل شده



شکل ۱۰: فایل متلب داده شده

برای فشرده‌سازی مدل می‌توان بلوک‌ها را به صورت یک Subsystem ایجاد کرد و تنها ورودی‌ها و خروجی‌های اصلی را به آن متصل نمود. در این سیستم، ورودی‌ها شامل $V(t)$ و یا T_l هستند و خروجی‌ها نیز ω و i می‌باشند. همچنین می‌توان بخش‌های الکتریکی یا مکانیکی موتور را به صورت جداگانه در قالب Subsystem قرار داد تا مدار کلی فشرده‌تر و منظم‌تر شود.

مراجع

[1] S. J. Mason, “Feedback Theory—Further Properties of Signal Flow Graphs,” *Proceedings of the I.R.E.*, vol. 44, no. 7, July 1956.

[2] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Prentice Hall, 2010.

[3] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th ed. Wiley, 2014.

[4] The MathWorks, “DC Motor Control — MATLAB & Simulink Example,” *MathWorks Documentation*. Available: https://www.mathworks.com/help/control/ug/dc-motor-control.html

[5] M. Kuczmann, “Review of DC Motor Modeling and Linear Control Theory with Laboratory Tests,” 2024. (Review article — modeling, identification and control of DC motors.) Available (preprint / repository): https://www.researchgate.net/publication/381246468_Review_of_DC_Motor_Modeling_and_Linear_Control_Theory_with_Laboratory_Tests

[6] R. K. Kraus (or CTMS authors), “DC Motor Speed: System Modeling,” *Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS)*, University of Michigan. Available: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed&section=SystemModeling