دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

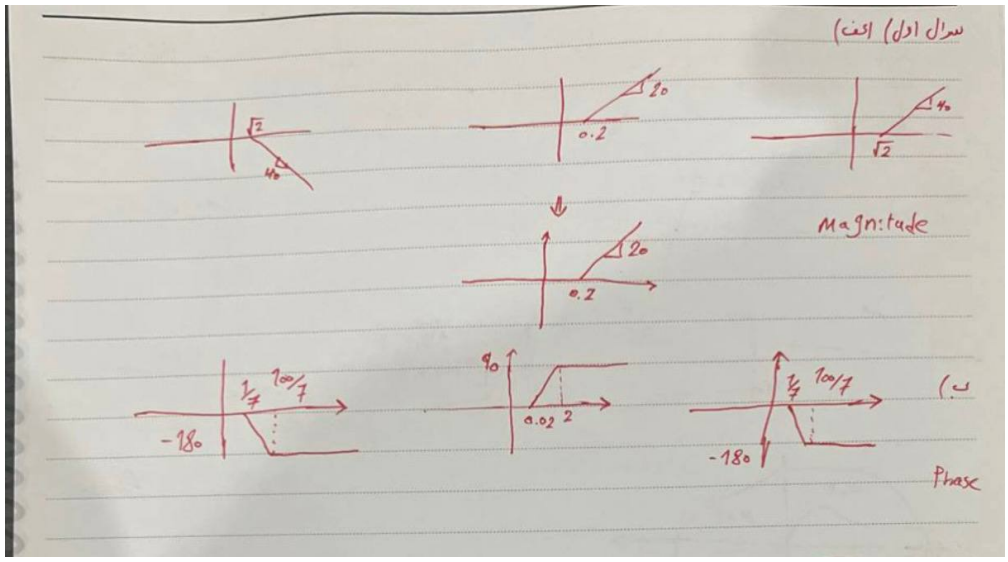
کنترل خطی

پاسخ تمرین ۴

نام و نام خانوادگی	آرمین حسین خلج
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۲۱۶۷۷۳
تاریخ	آذر ۱۴۰۴

۱ پاسخ سوال ۱

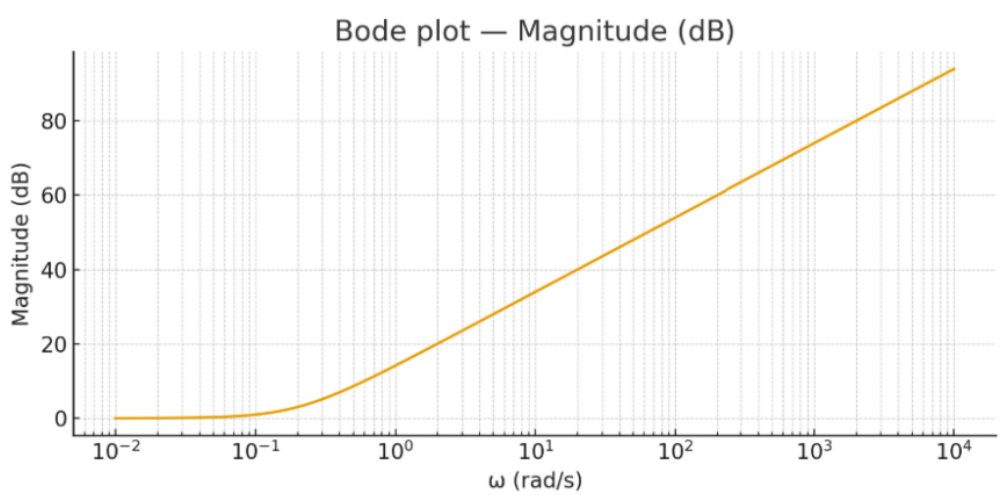
۱.۱ رسم نمودار بصورت دستی



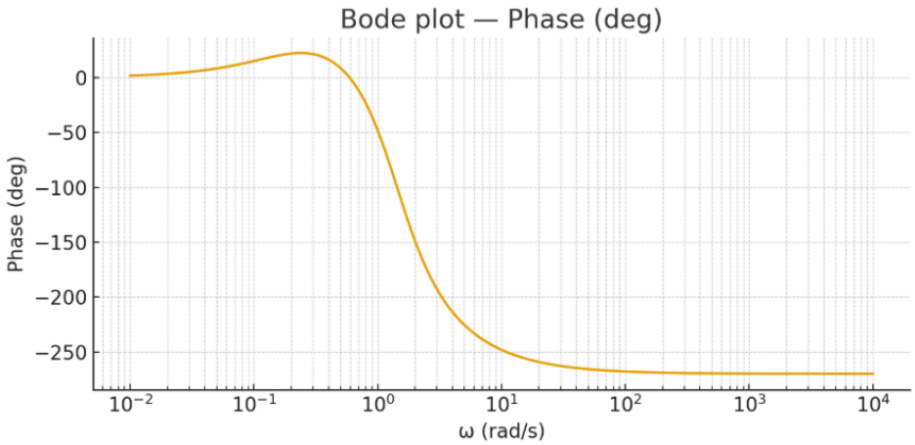
شکل ۱: رسم دستی

۲.۱ نمایش نمودار ها با استفاده از متلب

نمودار بودی و فاز تابع تبدیل را رسم میکنیم :



شکل ۲: Phase – Magnitude



شکل ۳: رسم دستی

مقایسه با رسم دستی نشان داد که شکل‌ها تقریباً مشابه هستند .

۳.۱ رسم نایکوئیست

تحلیل پایداری با معیار نایکوئیست

تابع تبدیل حلقه-باز به صورت $L(s) = G(s)H(s)$ است. با $H(s) = K/s$ داریم:

$$L(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{(s^2 - 2s + 2)(5s + 1)}{s^2 + 2s + 2}$$

معیار پایداری نایکوئیست $Z = N + P$ است که در آن:

- P: تعداد قطب‌های حلقه-باز ($L(s)$) در نیم‌صفحه راست .(RHP)
- N: تعداد دورهای نمودار نایکوئیست به دور نقطه -1 در جهت ساعتگرد.
- Z: تعداد قطب‌های حلقه-بسته در نیم‌صفحه راست. سیستم پایدار است اگر و تنها اگر $Z = 0$.

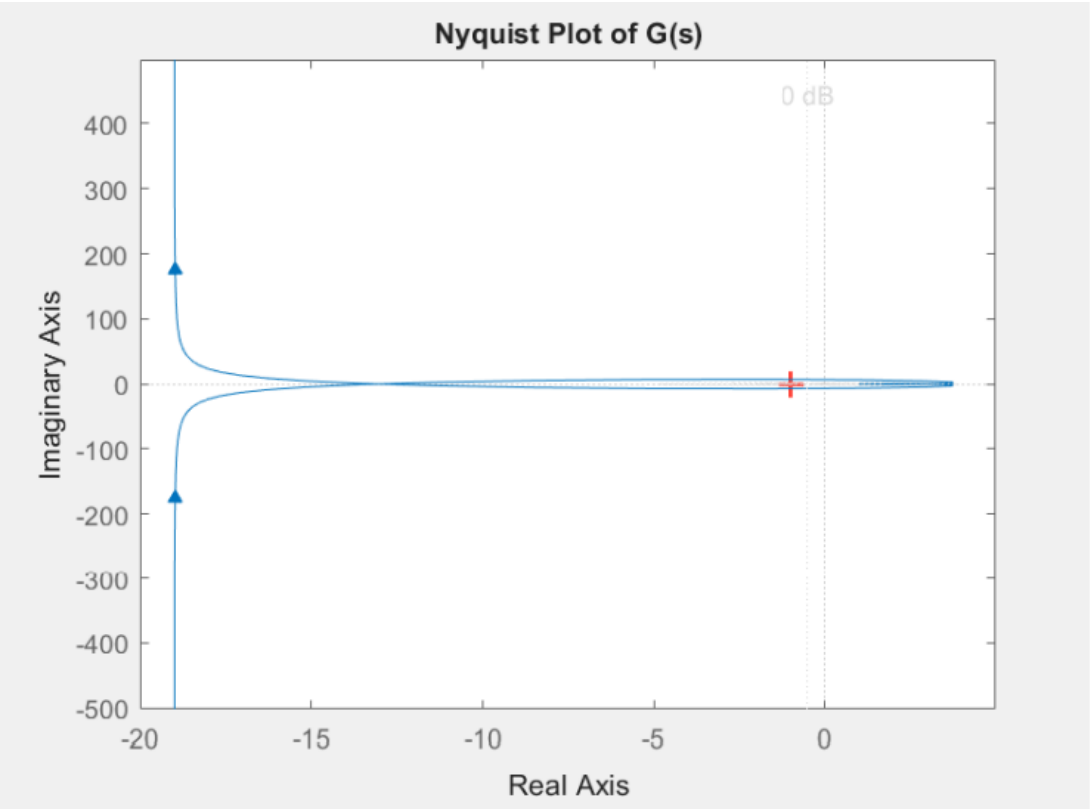
قطب‌های $L(s)$ ریشه‌های $s(s^2 + 2s + 2) = 0$ هستند که عبارتند از $s = 0$، $s = -1 + j$ و $s = -1 - j$. هیچ‌کدام از این قطب‌ها در نیم‌صفحه راست نیستند، بنابراین $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. شرط پایداری به $Z = N = 0$ ساده می‌شود. یعنی نمودار نایکوئیست نباید نقطه -1 را دور بزند.

بررسی برای K=۱ و K=۱/۲

با رسم نمودار نایکوئیست، مشاهده می‌شود که نمودار برای هر دو مقدار K محور حقیقی منفی را در نقطه‌ای چپ‌تر از -1 قطع می‌کند. همچنین به دلیل وجود قطب در مبدأ، نمودار دارای یک کمان بزرگ در بی‌نهایت است. این ترکیب باعث می‌شود که نقطه -1 دو بار در جهت ساعتگرد دور زده شود ($N = 2$).

- برای K=۱: $Z = N + P = 2 + 0 = 2$. سیستم ناپایدار است.
- برای K=۱/۲: $Z = N + P = 2 + 0 = 2$. سیستم ناپایدار است.

حالا نمودار نایکوییست را رسم میکنیم :



۲ پاسخ سوال ۲

با توجه به تابع تبدیل سیستم که در قسمت (ج) به دست آمده است:

$$G(s) = \frac{19.62}{s^2 + 8.86s + 19.62}$$

- آیا سیستم دارای صفر است؟

  خیر. صورت تابع تبدیل یک عدد ثابت است و هیچ ریشه‌ای (صفری) ندارد.

- آیا سیستم مینیمم فاز است؟

  بله. یک سیستم زمانی مینیمم فاز است که تمام قطب‌ها و صفرهای آن در نیم‌صفحه چپ محور موهومی (LHP) باشند.

- صفرها: سیستم صفری ندارد.
- قطب‌ها: قطب سیستم یک قطب تکراری در $s = -4.43$ است.

از آنجایی که قطب سیستم در نیم‌صفحه چپ قرار دارد، سیستم مینیمم فاز است.

- برای ورودی پله واحد:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = 1 \implies e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0.5$$

- برای ورودی شیب واحد:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

- برای ورودی سهمی واحد:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

با توجه به شیب تقریباً $-40\ \mathrm{dB/dec}$ و فازِ نهایی $\approx -180^\circ$، فرض می‌کنیم مدل ساده دو قطب LHP و بدون صفر مؤثر باشد:

$$G(s) \approx \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}.$$

از نقطهٔ فرکانس بالا تقریب می‌زنیم که برای $\omega \gg p_i$ داریم $|G(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2}$. بنابراین با استفاده از نقطه $\omega = 258$:

$$K \approx |G(j258)| \cdot 258^2 \approx 3.02\times 10^{-4}\cdot 258^2 \approx 20.1.$$

$$\boxed{G(s) \approx \frac{19.3}{(s+0.0518)^2}.}$$

۳ پاسخ سوال ۳

برای $s = j\omega$ زاویهٔ $L(j\omega)$ برابر است با:

$$\angle L(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega) - \arctan(0.5\omega).$$

شرط فازی برای برخورد با -1:

$$-90^\circ - \arctan(0.1\omega) - \arctan(0.5\omega) = -180^\circ$$

یعنی

$$\arctan(0.1\omega) + \arctan(0.5\omega) = 90^\circ.$$

با استفاده از فرمول جمع تانژانت می‌یابیم:

$$1 - 0.05\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

اندازهٔ $L(j\omega)$ در این فرکانس:

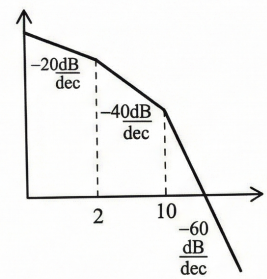
$$|L(j\omega)| = \frac{100k}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}\sqrt{1+(0.5\omega)^2}}.$$

شرط $|L| = 1$ برای برخورد به -1 نتیجه می‌دهد:

$$k_{\mathrm{cr}} \approx 0.12.$$

$$L(s) = 100\,\frac{\overset{\omega_{c1} = 2\,\mathrm{rad/s}}{K}}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

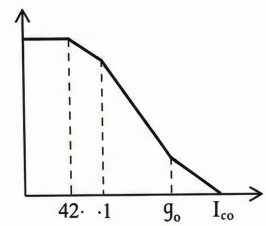
$\tau_1 = 0.5\mathrm{s}$ ، $\tau_1 = \sigma_c^{x1}, -20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ ، $\omega_{c2} = 10\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ ، $\tau_2 = 0.1\mathrm{s}$



$$H(j\omega) = \frac{100}{j\omega(0.1j\omega+1)(0.5j\omega+1)} = \frac{100}{-0.6\omega^2 + j\omega\left(1-0.05\omega^2\right)}$$

Intersection calculate ω

$$\Rightarrow \quad \omega\left(1-0.05\omega^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0 \text{ or } \omega^2 = 20 \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{20}. \\ H\left(j\sqrt{20}\right) = \frac{100}{-0.6\cdot 20} \approx -8.33 \end{cases}$$



Stable (پایدار):

$$-\frac{1}{K} < -8.33 \;\Rightarrow\; K < \frac{1}{8.33} \approx 0.12$$ پایدار

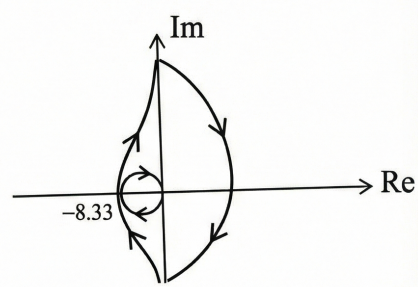
Unstable (ناپایدار, 2 unstable poles):

$$\Rightarrow \quad -8.33 < -\frac{1}{K} < 0 \quad \Rightarrow \quad 0.12 < K < \infty$$

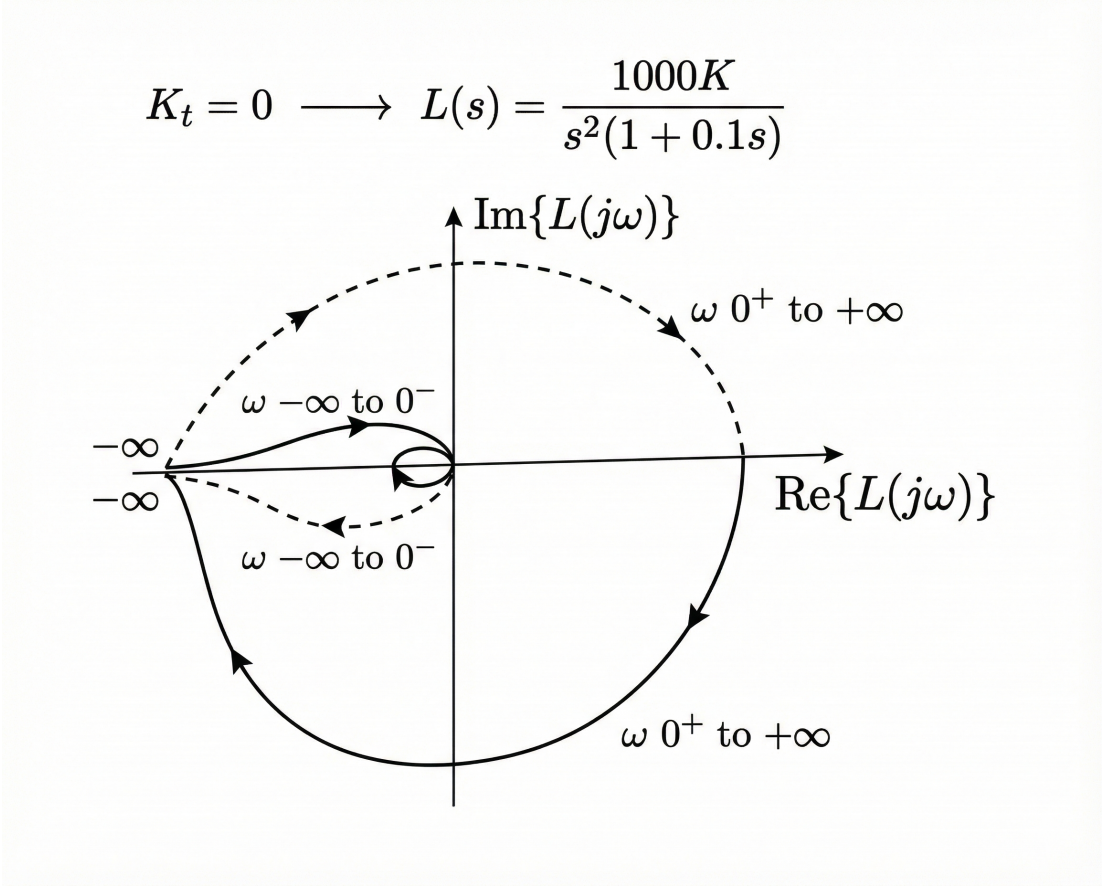
تقب ناپدار

Stable (پایدار):

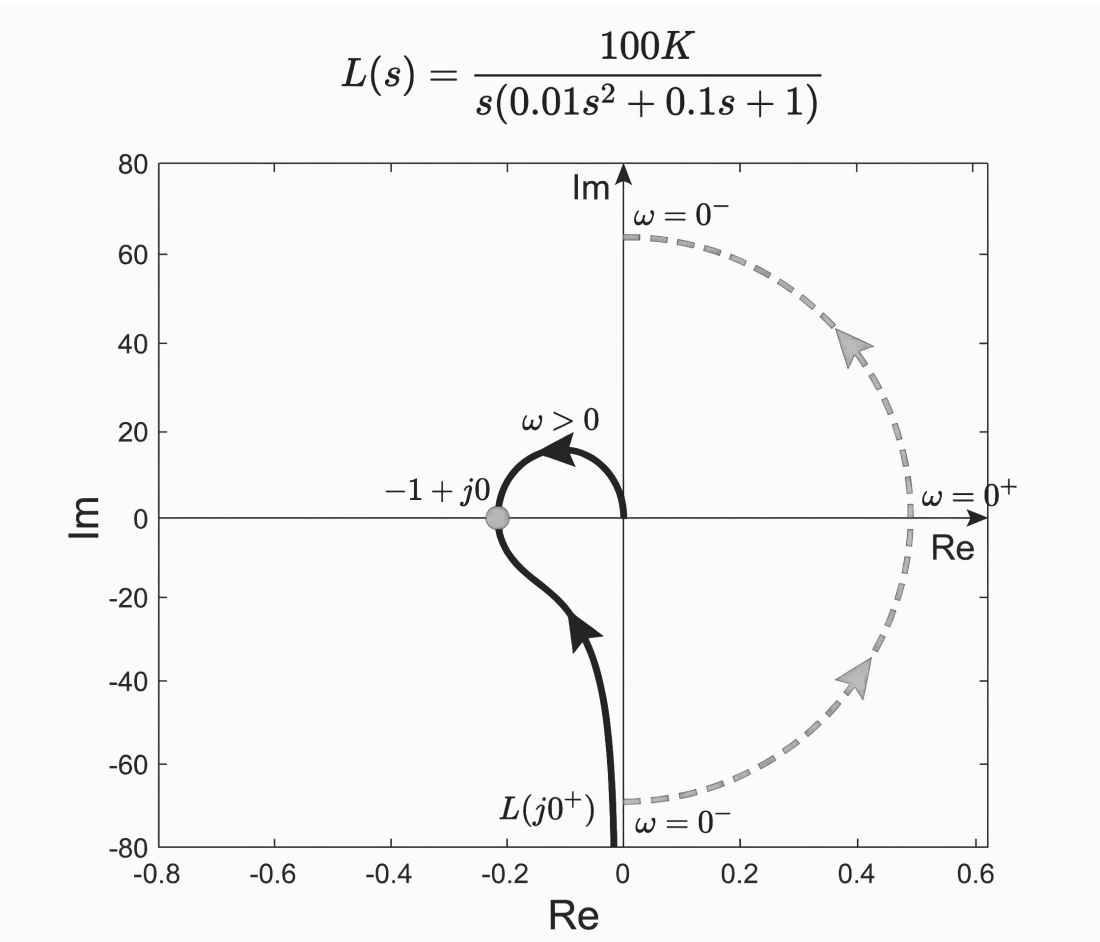
$$0 < -\frac{1}{K} \;\Rightarrow\; K > \infty \text{ (Not possible)}$$



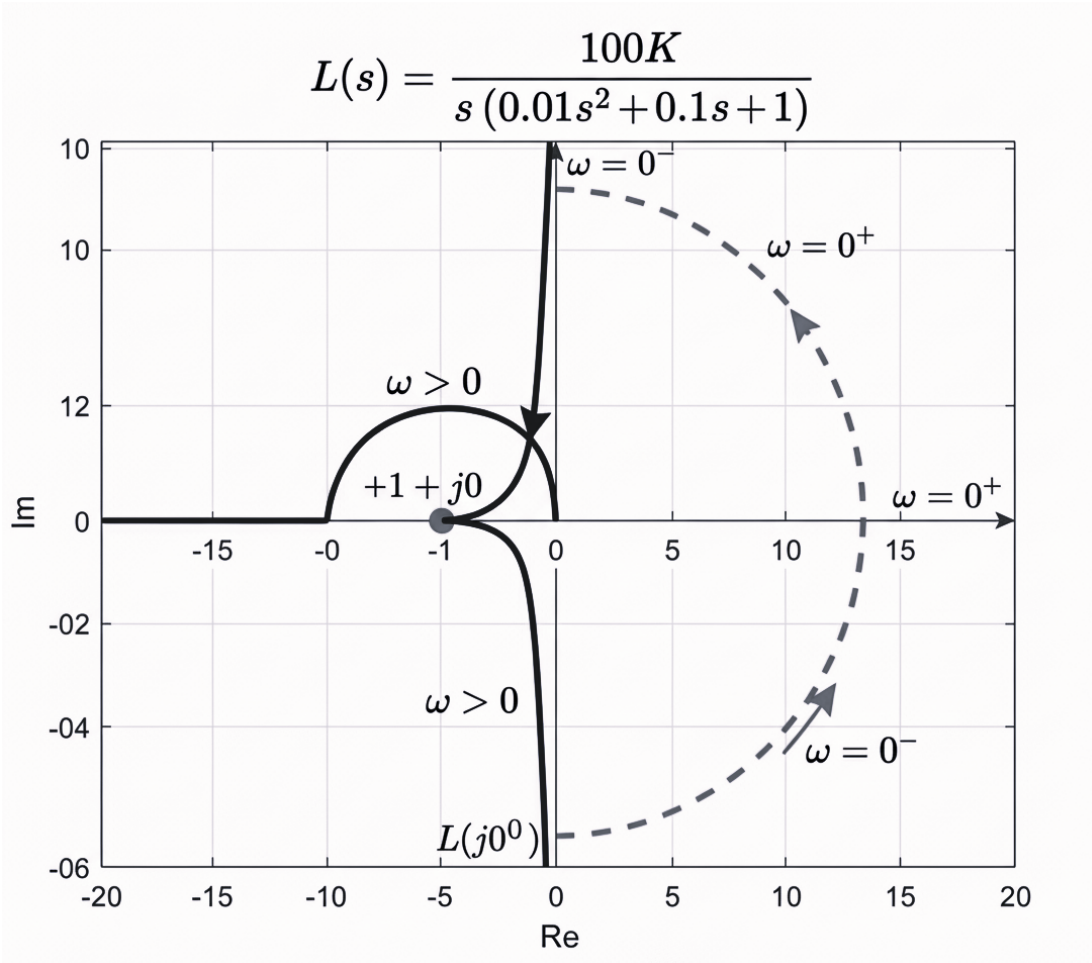
۴ پاسخ سوال ۴



شکل ۴: نمودار نایکوئیست



شکل ۵: نمودار نایکوئیست



شکل ۶: نمودار نایکوئیست

پاسخ قسمت (د): محدوده K_t برای پایداری

معادله مشخصه $K = 10$ و فیدبک سرعت $K_t s$، تابع تبدیل حلقه-باز سیستم کلی به صورت $G_{inner}(s) = \frac{10}{s(s+1+10K_t)}$ در می‌آید. معادله مشخصه سیستم نهایی $0 = s(s+1+10K_t) + 10$ است:

$$s^2 + (1+10K_t)s + 10 = 0$$

برای پایداری این سیستم درجه ۲، تمام ضرایب باید مثبت باشند. چون ضرایب s^2 و s^0 مثبت هستند، تنها شرط لازم این است:

$$1 + 10K_t > 0 \implies 10K_t > -1 \implies K_t > -0.1$$

محدوده K_t برای پایداری عبارت است از: $\mathbf{K_t > -0.1}$.

معادلات مربوط به نمودارهای نایکوئیست

معادلات تابع تبدیل حلقه باز ($L(s)$) که در نمودارهای نایکوئیست دست‌نویس مشاهده شدند:

- نمودار ۱ ($K_t = 0.1$):

$$L(s) = \frac{10K}{s(0.005s^2 + 0.01s + 1)}$$

- نمودار ۲ ($K_t = 0.01$):

$$L(s) = \frac{100K}{s(0.01s^2 + 0.1s + 1)}$$