ORTHOGONALE BASISFUNCTIES

Maak één van de onderstaande opgaven. Zorg ervoor dat alle opgaven onder de studenten verdeeld worden. Voor elke opgave geeft iemand zich op om die in het practicum op te lossen (email aan `Franky.Backeljauw@uantwerpen.be`). Je programmeert de oplossing in C/C++ met gebruik van de BLAS subroutines en eventueel GSL.

1) Teken een vierkant met hoekpunten in $(\pm 1, \pm 1)$. Het zwaartepunt van het vierkant ligt dus in de oorsprong. Neem een punt op de rand van het vierkant. De rechte die de oorsprong met dit punt verbindt, heeft richtingscoëfficient $\tan\theta$ (welke grootheid θ hierin is, moet duidelijk zijn). Beschouw nu de functie $f(\theta)$, met $0 \le \theta \le 2\pi$, die de afstand vanuit de oorsprong geeft tot het punt op de rand van het vierkant dat op de rechte met richtingscoefficient $\tan\theta$ ligt. Hierbij wandel je over de volledige rand van het vierkant van $(1, 0)$ over $(1, 1), (0, 1), (-1, 1)$ naar $(-1, 0)$ en dan verder rond terug naar $(1, 0)$. De functie onder beschouwing is duidelijk een periodische functie.
Kies een oneven waarde n en daarbij n discrete $\theta_i = 2(i-1)\pi/n$ met $i = 1, \dots, n$. Benader de rand van het vierkant door een trigonometrische interpolant waarbij je aan n oplopende oneven waarden geeft. Maak een plot van de reconstructie van de rand van het vierkant die je op die manier bekomt. Plot de foutenkromme en commentarieer.

2) Beschouw de functie $g(x) = |x|$ op het interval $[-1, 1]$.
   - Neem in $[-1, 1]$ de $m + 1$ equidistante punten $x_i = -1 + 2(i-1)/m$ met $i = 1, \dots, m+1$ en herdefinieer $g(x)$ zodat die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd is.
   - Bereken en plot de periodische benaderingen

     $$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

     voor $n = 1$ en $n = 3$ gebaseerd op de discrete data in de punten πx_i voor $i = 1, \dots, m$.

3) Beschouw de functie $\cos(11x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Maak een grafiek. Welke zijn de nulpunten van deze functie? En welke zijn de extrema? Selecteer de datapunten $x_0 = 0, x_1 = \pi/2, x_1 = \pi$ en bereken de trigonometrische interpolant van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

Plot de grafiek van de interpolant samen met die van de gegeven functie. Wat denk je dat de grote discrepantie veroorzaakt?

4) Beschouw de functie $f(x) = \sqrt{1 + x/5}$ op het interval $[-1, 1]$.

- Neem in $[-1, 1]$ de $m + 1$ equidistante punten $x_i = -1 + 2(i - 1)/m$ met $i = 1, \ldots, m + 1$ en herdefinieer $f(x)$ zodat die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd is.
- Bereken en plot de periodische benaderingen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

  voor $n = 1$ en $n = 3$ gebaseerd op de discrete data in de punten πx_i voor $i = 1, \ldots, m$.

5) Beschouw de equidistante punten $x_k = 2k\pi/8, k = 0, \ldots, 7$ en daarin de functiewaarden $f(x_k) = 1, k = 0, \ldots, 3$ en $f(x_k) = -1, k = 4, \ldots, 7$ die komen van de functie

$$f(x) = \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}.$$

Pas de functiewaarden in de punten 0 en 2π aan zodat de functie periodisch wordt. Bereken de beste trigonometrische veelterm van de vorm

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x).$$

Bereken tevens de interpolerende trigonometrische veelterm waarin de 8 basisfuncties $1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \sin(3x), \cos(4x)$ worden gebruikt. Plot beide benaderingen ten opzichte van de 8 datapunten.

6) De Chebyshev veeltermen $T_n(x), n = 0, 1, \ldots$ kunnen berekend worden uit een 3-terms recursierelatie (zie (18.7) in de cursusnota's). Bereken $T_4(x)$ en $T_7(x)$ en verifieer dat

- $$\int_{-1}^{1} \frac{T_0(x)T_1(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = 0$$
- $$\int_{-1}^{1} \frac{T_4(x)T_7(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = 0$$
- $$\int_{-1}^{1} \frac{T_4(x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \frac{\pi}{2}$$
- $$\int_{-1}^{1} \frac{T_0(x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \pi$$

Maak ook een grafiek van $T_7(x)$ en verifieer dat de nulpunten en extrema effectief gegeven zijn door de formules uit de cursus.

Maak $T_7(x)$ nu monisch en geef een bovengrens op de absolute waarde van die monische veelterm op het interval $[-1, 1]$ zonder een grafiek ervan te maken.

7) De Taylor en Chebyshev reeksontwikkelingen voor $\arctan(x)$ zijn gegeven in de cursusnota's. Bereken de interpolerende veelterm van graad 9 door de Chebyshev extrema van $T_9(x)$ voor de functie $\arctan(x)$ op $[-1, 1]$. Vergelijk deze met de partieelsom van graad 9 van enerzijds de Taylorreeks en anderzijds de Chebyshevreeks voor $\arctan(x)$. Plot ook de drie foutenkrommen. Ziet de foutenkromme voor de interpolant er eerder uit als die van een partieelsom van een Taylorreeks of als die van een partieelsom van een Chebyshevreeks?