DATA FITTING

Maak één van de onderstaande opgaven. Zorg ervoor dat alle opgaven onder de studenten verdeeld worden. Voor elke opgave geeft iemand zich op om die in het practicum op te lossen (email aan `Franky.Backeljauw@ua.ac.be`). Voor het maken van de opgaven dient code uit de GSL library gebruikt (en eventueel aangepast) te worden.

1) We beschouwen de functie van Runge,

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

- Neem de 17 equidistante en exact voorstelbare interpolatiepunten -1, $-7/8$, $\ldots$, $-1/8$, 0, $1/8$, $\ldots$, $7/8$, 1. Bereken enerzijds de interpolerende veelterm van graad 16 door die punten, hetzij in zijn Newton- of in zijn Lagrange-voorstelling. Bereken anderzijds de natuurlijke kubische spline. Maak een grafiek van beide en vergelijk met de opgegeven functie $f(x)$.
- Herbereken de kubische spline door dezelfde punten maar nu met als voorwaarden in de eindpunten $S"(-1) = f"(-1) = 925/4394$ en $S"(1) = f"(1) = 925/4394$. Herbereken de interpolerende veelterm van graad 16 met de interpolatiepunten $x_i = \cos((i+0.5)\pi/17)$ voor $i = 0, \ldots, 16$. Maak opnieuw een grafiek en vergelijk beide zowel met de interpolerende veelterm door de equidistante interpolatiepunten als met de natuurlijke kubische spline.

2) In de volgende tabel staat het gewicht van een baby genoteerd zoals gemeten op de aangegeven datum:

x_i	f_i
27/10/2001	2.8
19/11/2001	3.6
03/12/2001	4.4
20/12/2001	5.5
09/01/2002	6.4
23/01/2002	7.2
06/03/2002	8.3

Zet de datums om in een tijdsveranderlijke gemeten in dagen. Bereken dan de interpolerende veelterm, de stuksgewijs lineaire spline en de natuurlijke kubische spline. Stel ieder van deze functies samen met de data grafisch voor. Welke van de berekende functies verkies je en waarom?

3) In de volgende tabel staan de data van een denkbeeldig scheikundig experiment:

x_i	-1	-0.96	-0.86	-0.79	0.22	0.50	0.93
f_i	-1.000	-0.151	0.894	0.986	0.895	0.500	-0.306

Bereken de interpolerende veelterm en de natuurlijke kubische spline en plot beide, samen met de datapunten. Wat stel je vast?

4) Beschouw de functie $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Sample deze functie in 11 equidistante punten en bereken de Newtonvoorstelling en de Lagrangevoorstelling van de interpolerende veelterm $p_{10}(x)$ van graad 10. Plot f en de interpolerende veelterm p_{10}. Bereken nu enerzijds de natuurlijke kubische spline en anderzijds de kubische spline waarbij als extra voorwaarden $s"_0(x_0) = \sin"(x_0)$ en $s"_9(x_{10}) = \sin"(x_{10})$ wordt opgegeven. Plot de foutencurve ten opzichte van $f(x)$ voor beide splinevarianten.

5) Neem de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq -0.5 \\ 1 - |2x| & -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & 0.5 \leq x \leq 1.0 \end{cases}$$

- Neem equidistante interpolatiepunten en bereken de interpolerende veeltermen van graad 2, 3 en 4.
- Bereken met 5 equidistante datapunten tevens de natuurlijke kubische spline en de kubische spline waarbij als extra voorwaarden wordt opgegeven

$$s"_0(x_0) = \frac{(x_2 - x_0)s"_1(x_1) - (x_1 - x_0)s"_2(x_2)}{x_2 - x_1}$$
$$s"_3(x_4) = \frac{(x_4 - x_2)s"_3(x_3) - (x_4 - x_3)s"_2(x_2)}{x_3 - x_2}$$

  Wat betekenen deze speciale splinecondities?

Plot alle functies ten opzichte van $f(x)$ en bespreek de verschillende interpolanten.

6) Neem $f(x) = \cos^{10}(x)$ op het interval $[-2, 2]$. Plot alle hieronder gevraagde functies en vergelijk.

- Bereken door equidistante datapunten de interpolerende veeltermen van graad 2, 4, 6 en 8. Waarom kiezen we even graden?
- Bereken de natuurlijke kubische spline in de datapunten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -0.5, x_3 = 0, x_4 = 0.5, x_5 = 1, x_6 = 2$.
- Herbereken de interpolerende veelterm van graad 6 door deze punten en geef ook de interpolerende veelterm van graad 6 door de punten $x_i = 2\cos(i\pi/6), i = 0, \ldots, 6$.