LINEAIRE STELSELS VERGELIJKINGEN

Maak één van de onderstaande opgaven. Zorg ervoor dat alle opgaven onder de studenten verdeeld worden. Voor elke opgave geeft iemand zich op om die in het practicum op te lossen (email aan `Franky.Backeljauw@uantwerpen.be`). De routines die je nodig hebt, vind je in de GSL library.

1) Los in standaard dubbele precisie het volgende 3×3 stelsel op:

$$\begin{pmatrix} 3.021 & 2.714 & 6.913 \\ 1.031 & -4.273 & 1.121 \\ 5.084 & -5.832 & 9.155 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 12.648 \\ -2.121 \\ 8.407 \end{pmatrix}$$

Verander nu $a_{2,2}$ in -4.275 en los opnieuw het stelsel op. Wat stel je vast? Verklaar grafisch (zoals in de les voor een 2×2 stelsel dat het snijpunt bepaalde van bijna parallelle rechten).

2) Beschouw het benchmark probleem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \binom{n+i-1}{i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$a_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1} \qquad x_j = 1$$

Bereken een schatting van het conditiegetal voor de opgegeven matrix A waarbij $n = 3, 6, 9, 12$. Los het opgegeven stelsel voor $n = 3, 6, 9, 12$ op in dubbele precisie ($1/2$ `ULP` $= 2^{-53}$) en bereken residu en error vector. Bespreek residu, error, conditiegetal en de relatie tussen deze grootheden.

3) Beschouw de $n \times n$ Hilbert matrix

$$H_n = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

- Neem voor het vervolg van de oefening $n = 3, 6, 9, 12$. Bereken de determinant.
- Bereken een schatting voor het conditiegetal $\kappa(H_n)$.
- Gebruik `GEPP` in standaard dubbele precisie floating-point aritmetiek ($1/2$ `ULP` $= 2^{-53}$) om een kolom $\tilde{x}$ naar keuze uit de inverse matrix H_n^{-1} te berekenen.
- Ga na dat de residuvector $y - H_n \tilde{x}$ voldoet aan

$$||y - H_n \tilde{x}|| \leq c \, ||H_n|| \, ||\tilde{x}|| \; \texttt{ULP}$$

4) Beschouw de tridiagonale matrix met de waarden -1 op de bovendiagonaal, de entries $+1$ op de benedendiagonaal en op de diagonaal zelf de waarden $b_i, i = 1, \ldots, n$ gegeven door

$$b_i = \frac{2(i+1)}{3}, \qquad i+1 = 3, 6, 9, \ldots$$
$$b_i = 1, \qquad i+1 = 2, 4, 5, 7, 8, \ldots$$

Het rechterlid van het lineaire stelsel is gegeven door de vector $y = (y_1, \ldots, y_n)$ met $y_i = \delta_{i1}$. We noemen de onbekende vector $x^{(n)}$. De component $x_1^{(n)}$ is dan een benadering voor het getal $e - 2$. Gebruik `GEPP` (en kies een voldoende grote n) om een benadering voor $e - 2$ te berekenen met 10 beduidende cijfers.

5) Beschouw de $n \times n$ Hilbert matrix

$$H_n = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

- Bereken in Maple de exacte inverse matrix H_n^{-1} voor $n = 5, 10, 15$.
- Bereken een schatting voor het conditiegetal $\kappa(H_n)$.
- Gebruik `GEPP` in standaard dubbele precisie floating-point aritmetiek ($1/2$ `ULP` $= 2^{-53}$) om een kolom $\tilde{x}$ naar keuze uit de inverse matrix H_n^{-1} te berekenen voor $n = 5, 10, 15$ en vergelijk deze met de exacte oplossing x.
- Ga na dat de errorvector $x - \tilde{x}$ voldoet aan

$$||x - \tilde{x}|| \leq c\, \kappa(H_n)\, ||\tilde{x}||\ \texttt{ULP}$$