NUMERIEKE INTEGRATIE

Maak één van de onderstaande opgaven. Zorg ervoor dat alle opgaven onder de studenten verdeeld worden. Voor elke opgave geeft iemand zich op om die in het practicum op te lossen (email aan `Franky.Backeljauw@uantwerpen.be`). Voor de programmatie gebruik je GSL of Numerical Recipes.

1) Vermits

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

gaan we een benadering voor $\ln(2)$ berekenen met behulp van de samengestelde trapeziumregel. Deel hiervoor het interval $[1, 2]$ op in 2^k deelintervallen van gelijke grootte met $k = 1, 2, \ldots$ en noteer $T(k)$ voor de berekende benadering. Voer k op tot

$$\left| \frac{T(k) - T(k+1)}{T(k+1)} \right| \leq 2^{-40}$$

Hoe moet de implementatie van de trapeziumregel georganizeerd zijn om zuinig om te springen met de evaluaties $f(x_k)$? Controleer of de code die je downloadde zo geïmplementeerd is.

2) Welke h voorspel je (op basis van de foutenformule in de cursus) om de integraal

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)\, dx$$

te berekenen gebruik makend van de samengestelde trapeziumregel met een absolute fout gegarandeerd kleiner dan 10^{-3}? Voer de berekening daarna effectief uit met gedownloade code. Vergelijk de stapgrootte h gebruikt in de code met degene die je net zelf berekend hebt.

3) Selecteer een uniforme random number generator uit GSL. Gebruik de random number generator om het volume te berekenen van

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ x^2 + \sin(y) \leq z \\ x - z + \exp(y) \geq 1 \end{cases}$$

4) Selecteer een uniforme random number generator uit Numerical Recipes. Bereken nu een benadering voor de integraal

$$\int\int_R (\exp(x) + \cos(xy))\, dxdy$$

waarbij

$$R = \{(x,y) \mid \frac{1}{3} \leq 3x \leq 9 - y, \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$$

5) Selecteer een degelijke random number generator. Bereken vervolgens de oppervlakte van de onregelmatige figuur in het vlak, gedefinieerd door

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 4 \\ x^3 + y^3 \leq 29 \\ y \geq e^x - 2 \end{cases}$$

Maak ook een tekening van de figuur.

6) Beschouw

$$f(x) = -\log(1+x)\log(1-x)$$

en maak een plot van $f(x)$ op het interval $[-1,1]$.

- Bij sommige bepaalde integralen komt het voor dat het integrandum oneindig wordt in een of beide eindpunten, terwijl de integraal eindig blijft. Gebruik Maple om de exacte uitdrukking voor $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ te berekenen.
- We gaan nu met behulp van de samengestelde trapeziumregel een numerieke benadering berekenen voor deze integraal. Deel hiervoor het interval $[-1,1]$ op in 2^k deelintervallen van gelijke grootte met $k = 1, 2, \ldots$ en noteer $T(k)$ voor de berekende benadering. Voer k op tot

  $$\left| \frac{T(k) - T(k+1)}{T(k+1)} \right| \leq 2^{-23}$$

  Controleer of de code die je downloadde zuinig omspringt met de evaluaties $f(x_k)$. Hoe ga je om met het feit dat het integrandum niet kan geëvalueerd worden in de eindpunten?