

MODELLERING EN SIMULATIE

Practicum 1: Monte Carlo-simulaties

Dirk Nuyens en Nick Vannieuwenhoven

28 oktober 2016

1 Praktische informatie

Het practicum wordt individueel opgelost. Het verslag dient de volgende componenten te bevatten: de oplossingen van de opgaves en de broncode van je programma's. Het verslag wordt uiterlijk **vrijdag 2 december 2016** ingediend. Een papieren versie van het verslag dient zich ten laatste maandagvoormiddag 5 december 2016 om 12u00 in de studentenbrievenbus in gebouw 200A te bevinden. Deze uitdraai dient tevens de broncode van de programma's te bevatten. Daarenboven stuur je per elektronische post naar nick.vannieuwenhoven@cs.kuleuven.be een gecomprimeerde map met daarin een elektronische versie van het verslag alsook de Matlabbronbestanden. Zorg ervoor dat je bronbestanden de **opgelegde naamgeving** respecteren (zie verder) want de codes zullen automatisch geverifieerd worden. De namen van het verslag en de gecomprimeerde map (de bestandsextensie buiten beschouwing latende) dienen overeen te stemmen met je studentennummer; "s0123456.pdf" voor je verslag en "s0123456.zip," "s0123456.tar.gz" en dergelijke zijn allen aanvaardbaar.

Veel succes!

In wat volgt vervang je elk voorkomen van "SN" met jouw studentennummer (r- of s-nummer)—bijvoorbeeld "s0123456". Elk van de functies dien je in een afzonderlijk bestand met dezelfde naam als de functie (met extensie ".m") te implementeren. Je codes zullen automatisch geverifieerd worden. Indien de opgelegde naamgeving niet gerespecteerd wordt, dan wordt dit beschouwd als het niet oplossen van de betrokken vraag.

Voor het oplossen van de opgaven mag je **alle** ingebouwde Matlabfuncties gebruiken. Naast de verplichte functies die de opgelegde naamgeving dienen te respecteren, mag je ook nog zelf extra hulpfuncties implementeren indien je dit nodig acht. Zorg ervoor dat deze hulproutines, voor zover ze in een eigen Matlabbronbestand geïmplementeerd worden, een naam dragen die start met "SN_".

2 Context en terminologie

2.1 Pensioenen

Het Belgische pensioenstelsel bestaat volgens de portaalwebsite Wikifin.be voor financiële vorming van de Belgische Autoriteit voor de Financiële Diensten en Markten (FSMA) uit drie pijlers: het wettelijk pensioen, het aanvullend pensioen en het individuele pensioensparen.¹ De voorwaarden en modaliteiten van het wettelijk pensioen zijn bij wet geregeld en zijn voornamelijk een functie van het beroepsstatuut (ambtenaar, werknemer of zelfstandige), de lengte van de loopbaan en de hoogte van het inkomen. Het aanvullend pensioen kan men in sommige gevallen opbouwen via de werkgever, vaak via een zogenaamde groepsverzekering. Bij het bereiken van de pensioenleeftijd wordt dit opgebouwde kapitaal uitgekeerd. Onder individueel pensioensparen verstaan we alle handelingen die men individueel kan ondernemen om een kapitaal op te bouwen.

^{*}Niets in deze publicatie mag beschouwd worden als een aanzet of uitnodiging tot het investeren in financiële instrumenten in het algemeen of in de specifieke instrumenten waarvan dit document gewag maakt. In het bijzonder mag deze publicatie niet beschouwd worden als beleggersadvies. Alle simulaties en geschatte gegevens die in dit document verschijnen, zijn louter voor educatieve doeleinden bestemd.

¹Zie <http://www.wikifin.be/nl/themas/pensioenen/sleutelvraag/een-pensioen-opbouwen>.

Volgens een recent artikel dat op woensdag 5 oktober 2016 gepubliceerd werd op derefactie.be zal het belang van individueel pensioensparen in de toekomst alsmäär groter worden.

Experten waarschuwen: "Begin zelf al te sparen voor uw pensioen"²

"Het wettelijk pensioenstelsel staat op instorten." Dat zeggen pensioenspecialisten Jef Vuchelen (VUB) en Mark Scholliers in hun boek "Het grote pensioenbedrog." Zij stellen dat ons pensioen op drijfzand gebouwd is en dat zonder drastische ingrepen de kans klein is dat u het pensioen krijgt waarop u recht heeft. "Begin zelf al te sparen voor uw pensioen," is hun goede raad.

[...]

Ze schrijven in hun boek onder meer dat de voorspellingen van commissies te optimistisch zijn, vooral over de economische groei. Volgens hen wordt er ook onvoldoende rekening gehouden met mogelijke zware economische crisissen. Als de Belgische openbare financiën door een of andere economische schok verslechteren is een Grieks scenario (waarbij Europa België dwingt om de pensioenbedragen te verlagen) mogelijk, klinkt het. Het duo pleit voor een drastische, structurele hervorming van het pensioensysteem. Scholliers raadt de burger aan daar niet op te wachten en zelf te beginnen sparen, een veralgemening van een verplicht aanvullend pensioen, "een soort eerste pijler bis," een tweede pensioen anders gefinancierd.

[...]

Door Ellen Maerevoet.

Een belangrijk deel van de Belgische bevolking volgde dit advies reeds op. Volgens een onderzoek van Wikifin³ uit 2015 menen bijna zes op tien Belgen dat ze als toekomstige gepensioneerde kunnen rekenen op een inkomen uit individueel pensioensparen. Uit hetzelfde onderzoek komt echter als belangrijke conclusie naar voor dat er maar "weinig samenhang [is] tussen [financiële] kennis, gedrag en attitudes." De vraag "hoe kan ik sparen voor mijn pensioen?" dringt zich dan ook op.

De meest gangbare vormen van individueel pensioensparen zijn sparen op een spaarrekening of termijnrekening, beleggen in coöperatieve aandelen (bv. Acco, Alterfin, Arco), beleggen in (staats)obligaties, beleggen in kasbons, beleggen in specifieke pensioenfondsen, beleggen in (beursgenoteerde) beleggingsfondsen, "sparen" in een tak-21 of tak-23 verzekeringsproduct ("levensverzekering"), het kopen en (mogelijk) verhuren van vastgoed en beleggen in aandelen.⁴

Het doel van dit practicum bestaat eruit om een vergelijkende studie te maken van drie mogelijke scenario's om zelf een individueel kapitaal uit te bouwen door middel van een Monte Carlo-simulatiestudie. Specifiek zullen we een spaarrekening, een eenvoudig beursgenoteerd beleggingsfonds en een erkend pensioenspaarfonds in het wettelijke kader van pensioensparen in detail onderzoeken.

Daar we deze laatste twee soorten fondsen in detail zullen simuleren is het noodzakelijk om wat extra terminologie toe te lichten.

2.2 Obligaties

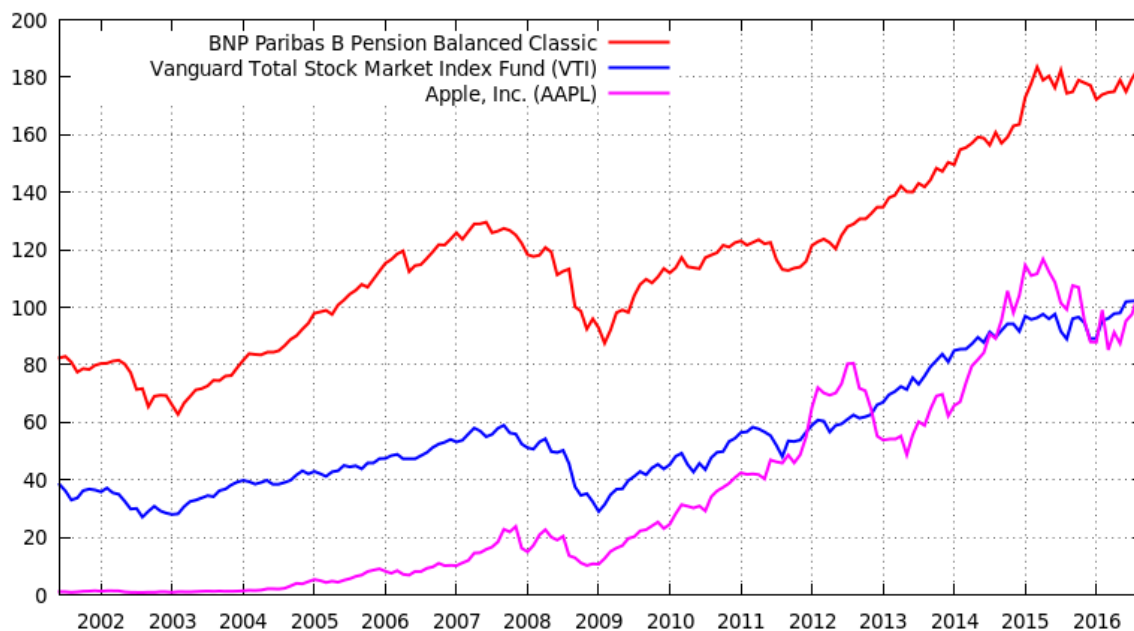
Een *schuldpapier* of *obligatie* is een financieel product dat wordt uitgegeven door een bedrijf of overheid (de emittent). Men kan obligaties op de primaire markt kopen rechtstreeks van de emittent bij uitgifte of op de secundaire markt ("de beurs"). Een obligatie heeft drie kenmerken: een hoofdsom, een jaarlijkse interestvoet en een maturiteitsdatum. De emittent belooft om op de maturiteitsdatum de hoofdsom aan de houder van het schuldpapier—de schuldeiser genaamd—te betalen. Daarnaast ontvangt de schuldeiser ook jaarlijks een interest op de hoofdsom. Op de interest die men ontvangt van een obligatie betaalt men (door de recente verhoging met 3 procentpunten van de regering Michel I) binnenkort 30% roerende voorheffing.

Obligaties zijn relatief veilige beleggingen, daar de schuldeiser een wettelijke bescherming geniet. Wanneer de emittent zich bankroet laat verklaren dan staan de obligatiehouders als eersten in de rij om hun schuld te vereffenen. Zij worden in elk geval vóór de aandeelhouders vergoed.

²Uittreksel uit het artikel op <http://derefactie.be/cm/vrtnieuws/binnenland/1.2785965>.

³Zie <http://www.wikifin.be/nl/studie-financieel-gedrag-en-attitudes-belgie-maart-2015>.

⁴Voor een mooi overzicht kan je <http://www.wikifin.be/nl/themas/nav-sparen-en-beleggen> raadplegen.



Figuur 1: De evolutie van de nettoinventariswaarde (in EUR) van het BNP Paribas pensioenfonds en de prijsevolutie (in EUR) van de beursgenoteerde aandelen met tickers VTI en AAPL.

Tot slot een kort rekenvoorbeeld. Veronderstel dat je op 1 november 2016 een bedrijfsobligatie koopt met een hoofdsom van €1000, een jaarlijkse interestvoet van 2.0% en als maturiteitsdatum 1 november 2020. Je zou dan op 1 november 2017 een bruto interest van $0.02 \cdot 1000 = 20$ euro ontvangen; na aftrek van de roerende voorheffing houd je netto €14 over. Ditzelfde bedrag ontvang je ook op 1 november 2018 en 2019. Tenslotte ontvang je op 1 november 2020 zowel de laatste interestbetaling van €14 alsook de uitbetaling van de hoofdsom, namelijk €1000. De schuldeiser ontvangt dus in het totaal €1056 over de resterende looptijd van de obligatie.

2.3 Aandelen

Een *aandeel* is een financieel instrument dat een deelname in het eigen vermogen van een bedrijf bewijst. Een aandeelhouder is dus een mede-eigenaar van een bedrijf naar verhouding van het aantal aandelen dat hij bezit. Vele aandelen zijn vrij verhandelbaar op verschillende beurzen, alwaar het spel tussen vraag en aanbod—beïnvloed door economische en bedrijfsmatige ontwikkelingen—de prijs van het aandeel bepaalt. De gemiddelde prijs van een aandeel over een langere periode zal vaak de waarde van het bedrijf benaderen, hoewel op een gemiddeld tijdstip de prijs van het aandeel zal afwijken van de waarde van het bedrijf.⁵

Een voorbeeld van de fluctuaties van de prijs van een aandeel wordt in fig. 1 geïllustreerd voor het aandeel van Apple, Inc. Dit aandeel wordt op de beurs in New York aangeduid met de *ticker* AAPL, een handige afkorting waaraan je het aandeel kan herkennen.⁶ Indien je één aandeel van Apple had gekocht bij de opening van het academiejaar 2013–2014, namelijk op maandag 23 september 2013, voor een marktprijs van \$70.87 per aandeel en dit aandeel drie jaar later had verkocht tegen de marktprijs van \$111.55, dan zou je 40.68 dollar winst per aandeel maken. Dit stemt overeen met een rendement van 57.4% in 3 jaar tijd, ofwel een jaarlijks cumulatief rendement van ongeveer 16.3% (want $40.68 \cdot 1.163^3 \approx 111.55$). Dit illustreert meteen ook de voornaamste reden om in aandelen te beleggen: de mogelijkheid om een significante *meerwaarde* (d.w.z. het verschil tussen de aankoopprijs en de verkoopspreis) te realiseren. België belast de gerealiseerde meerwaarde op aandelen (nog) niet; de regering Michel I heeft aangegeven om dit parlementaire jaar te onderzoeken of het opportuun is om een dergelijke meerwaardebelasting te heffen.

⁵Een discrepantie tussen de prijs en waarde kan soms enige tijd aanhouden, zoals bijvoorbeeld tijdens de huisprijzen-zeepbel in de Verenigde State van Amerika in 2006–2007 die bij het barsten aanleiding gaf tot de *subprime mortgages* crisis en resulteerde in de ernstige financiële crisis van 2007–2009. Afgezien van zulke speculatieve zeepbellen zal de prijs van een voldoende liquide aandeel binnen een beperkt interval rond de waarde van het bedrijf blijven schommelen.

⁶Op verschillende Aziatische beurzen gebruikt men een numerieke code om aandelen aan te duiden. Zo wordt het aandeel van Samsung op de Zuid-Koreaanse beurs aangegeven door 005930.

Een bedrijf kan soms een *dividend* uitkeren aan de aandeelhouders om hen te laten delen in de bedrijfswinst. Dit dividend is dan een vaste hoeveelheid per aandeel. In België betaal je 30% roerende voorheffing op dividenden van Belgische bedrijven. Voor aandelen van bedrijven die op een andere beurs dan de Brusselse beurs genoteerd staan, betaal je eerst een extra bronbelasting aan het land waar de beurs gevestigd is. Zo betaal je eerst 15% bronbelasting op alle dividenden van aandelen die op Amerikaanse beurzen noteren, daarna gaat er nog eens 30% roerende voorheffing af. Apple keerde de afgelopen jaren regelmatig een dividend uit. In bovenstaand voorbeeld zou je bijvoorbeeld de volgende dividenden ontvangen hebben:

Datum	Bruto dividend (in \$)	Netto dividend (in \$)
4 augustus 2016	0.57	0.33915
5 mei 2016	0.57	0.33915
4 februari 2016	0.52	0.30940
5 november 2015	0.52	0.30940
6 augustus 2015	0.52	0.30940
7 mei 2015	0.52	0.30940
5 februari 2015	0.47	0.27965
6 november 2014	0.47	0.27965
7 augustus 2014	0.47	0.27965
8 mei 2014	0.47	0.27965
6 februari 2014	0.43571	0.25924745
6 november 2013	0.43571	0.25924745

Dit resulteert in een extra nettowinst van \$3.55, waardoor het netto totaalrendement (meerwaarde en dividenden) van je investering in Apple 62.4% zou bedragen.

Aandelen zijn relatief risicovolle beleggingen omdat er geen enkele kapitaalbescherming is. Wanneer het bedrijf failliet gaat dan zullen de aandelen doorgaans ook waardeloos worden. Een mooi voorbeeld hiervan is het aandeel van Dexia. In 2007 was Dexia een onderdeel van de Bel20 index—een korf van aandelen van de 20 belangrijkste beursgenoteerde Belgische bedrijven. Op haar hoogtepunt in 2007 kon je een Dexia-aandeel kopen voor €24.03. Helaas had Dexia een belangrijke blootstelling aan de Amerikaanse huizenmarkt waardoor het in 2008 in een liquiditeitscrisis verzeild raakte en uiteindelijk door de Belgische en Franse belastingbetalers werd geherkapitaliseerd. Later werd beslist om de *retail banking* activiteiten af te splitsen in Belfius en de activa van de restbank Dexia zou gecontroleerd ontmanteld worden. Vandaag is dat Dexia-aandeel uit 2007 nog precies 1.262 eurocent waard, een verlies van ongeveer 99,94%. De Arco-aandeelhouders (“coöperatieve vennoten”) verloren op die manier het grootste deel van hun investering, daar de Groep Arco een zeer significant deel⁷ van haar vermogen in Dexia-aandelen belegd had.

2.4 Fondsen

Twee van de scenario's voor pensioensparen die we zullen simuleren in dit practicum betreffen *beleggingsfondsen*. Een beleggingsfonds is een grote korf van aandelen en obligaties. De *assets under management* (AUM) van een fonds is de marktwarde van alle aandelen en obligaties in de korf. Deze korf wordt in kleinere eenheden aan beleggers verkocht. Een fonds dat bij creatie 10 miljoen euro aan AUM zou bezitten, kan bijvoorbeeld opgedeeld worden in 1 miljoen *eenheden*. Elke eenheid is dan 10 euro waard. Bij banken en beursmakelaars kan je (vaak fractionele) eenheden van beleggingsfondsen aankopen. Sommige fondsen zijn beursgenoteerd; in dit geval zijn de eenheden aandelen en kan je ze zoals aandelen verhandelen op de beurs. De *nettoinventariswaarde* per eenheid van een fonds is de AUM gedeeld door het aantal eenheden. Dit is tevens de prijs waarvoor men een eenheid van het fonds kan aankopen. In fig. 1 zie je een voorbeeld van de evolutie van de nettoinventariswaarde per eenheid voor twee fondsen: het pensioenspaarfonds *BNP Paribas B Pension Balanced Classic* en het beursgenoteerde *Vanguard Total Stock Market Index Fund*. Merk op dat deze laatste op de New York Stock Exchange genoteerd staat als een gewoon aandeel met ticker VTI. Fondsen die enkel uit aandelen (en wat cash) bestaan noemt men ook wel *aandelenfondsen*. Indien een fonds enkel uit obligaties bestaat dan spreekt men van een *obligatiefonds*. Een fonds dat zowel aandelen als obligaties bevat wordt een *gemengd fonds* genoemd.

Stel bijvoorbeeld dat er een aandelenfonds zou bestaan dat is opgedeeld in 5 miljoen eenheden en waarbij de korf bestaat uit telkens 1 miljoen aandelen van AB Inbev, Proximus, Engie, Solvay en Colruyt. De marktprijzen van deze aandelen op 25 oktober 2016 waren respectievelijk €114.25, €26.52, €13.21,

⁷Zie <http://deredactie.be/cm/vrtnieuws/politiek/1.1571049>.

€104.55 en €49.34. De nettoinventariswaarde van een eenheid van dit fonds bedroeg dan op 25 oktober 2016

$$\frac{10^6 \cdot 114.25 + 10^6 \cdot 26.52 + 10^6 \cdot 13.21 + 10^6 \cdot 104.55 + 10^6 \cdot 49.34}{5 \cdot 10^6} = 61.574$$

euro. Als we veronderstellen dat de samenstelling van de aandelenkorf drie jaar eerder op 28 oktober 2013 hetzelfde was dan was de nettoinventariswaarde op die dag

$$\frac{10^6 \cdot 75.55 + 10^6 \cdot 21.43 + 10^6 \cdot 18.20 + 10^6 \cdot 110.24 + 10^6 \cdot 41.40}{5 \cdot 10^6} = 53.364$$

euro. De nettoinventariswaarde van het fonds is dus in 3 jaar tijd gestegen met 15.38%, zonder rekening te houden met dividenden.

De aandelen waaruit het fonds bestaat kunnen dividenden uitkeren en de obligaties zullen een rente uitbetalen. Het cash dat op deze manier vergaard wordt, kan door het fonds op twee manieren gebruikt worden, afhankelijk van de structuur van het fonds. Bij een *distributiefonds* zullen de dividenden en interesten pro rata uitgekeerd worden aan de houders van het fonds. Op deze uitkering betaal je dan de gebruikelijke 30% roerende voorheffing. Een *kapitalisatiefonds* daarentegen zal het extra cash gebruiken om meer van de onderliggende waarden aan te kopen in dezelfde verhoudingen. Het effect hiervan is dat AUM per eenheid van het fonds stijgt.

Stel dat het bovenstaande fonds in een gegeven kwartaal netto 1 miljoen euro aan dividenden zou ontvangen van de onderliggende aandelen (AB Inbev, Proximus, Engie, Solvay en Colruyt). Indien het fonds een distributiefonds is dan wordt dit bedrag pro rata verdeeld over de eenheden: voor elke eenheid van het fonds dat je bezit krijg je $1000000/5000000 = 0.2$ euro bruto dividend. Na inhouding van de roerende voorheffing houd je hier €0.14 van over. Indien het fonds een kapitalisatiefonds is dan kopen de beheerders van het fonds met dit geld nieuwe aandelen, gebruikelijk volgens hetzelfde gewicht. In dit voorbeeld zouden ze dus voor €200000 aan nieuwe aandelen kopen van AB Inbev, Proximus, Engie, Solvay en Colruyt. Het gevolg is dat de AUM stijgt met 1 miljoen euro. De nettoinventariswaarde per eenheid stijgt dan met €0.2.

Obligatiefondsen zijn relatief veilige beleggingen daar ze enkel bestaan uit obligaties. Aangezien een fonds uit een grote korf van verschillende obligaties zal bestaan, is het risico zelfs lager dan wanneer je belegt in een individuele obligatie (met een gelijke kredietrating). Een aandelenfonds is een eerder risicovolle belegging, die echter minder risico draagt dan het investeren in een individueel aandeel. Wanneer een individueel bedrijf failliet gaat dan heeft dit doorgaans slechts een kleine invloed op de waarde van obligatiefondsen en aandelenfondsen die respectievelijk in de obligaties en aandelen van het bedrijf beleggen. Het risico van een gemiddeld fonds zit ergens tussen obligatie- en aandelenfondsen; het hangt af van het percentage van de AUM die in obligaties belegd is (en de kredietrating van die obligaties).

Een specifiek kenmerk van fondsen betreft de *lopende kosten*. Elk jaar op 1 januari wordt een klein percentage van de AUM door de fondsbeheerder (de instantie die het fonds heeft samengesteld en de nodige aankopen van aandelen en obligaties regelt) ingehouden. Hierdoor daalt de nettoinventariswaarde per eenheid dus met dit percentage. Een fonds waarvan de fondsbeheerder heel veel acties onderneemt omdat het bijvoorbeeld belegt volgens een specifieke strategie die veel onderzoek vergt, wordt een *actief beheerd fonds* genoemd. De lopende kosten van een actief beheerd fonds zijn vaak hoog en kunnen oplopen tot enkele procentpunten. Daartegenover staat een *passief beheerd fonds* waarbij de aandelen en obligaties volgens een eenvoudig en geautomatiseerd principe aangekocht worden. De lopende kosten zijn hierbij veel lager en variëren van 0.03% tot 1%. *Deze lopende koersen zijn reeds verwerkt in de prijzen van de fondsen die je zal inladen in opgave 1.*

3 Geometrische Brownse bewegingen

Om de vermogensopbouw voor het pensioensparen accuraat te simuleren zullen we de prijs van fondsen voor ettelijke jaren in de toekomst moeten kunnen bepalen. Gelukkig zijn er in de financiële wiskunde reeds modellen opgesteld voor de evolutie van de nettoinventariswaarde van fondsen (en aandelen). Een populair model dat—al dan niet met uitbreidingen—gebruikt wordt door handelaars, fondsbeheerders en financiële instellingen veronderstelt dat het logaritme van de prijsstijging van het fonds voldoet aan een Brownse beweging met constante drift μ en constante volatiliteit σ . Zo'n stochastisch model voor de evolutie van de prijs van een fonds noemt men een geometrische Brownse beweging. We hebben

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} N(0, 1) \right), \quad (1)$$

waarin S_0 de initiële prijs is van het fonds, S_t is de prijs van het fonds na t maanden, μ is de gemiddelde maandelijkse driftfactor, σ is de maandelijkse volatiliteit van het fonds en $N(0, 1)$ is de standaard normale verdeling. We kunnen dit model herschrijven als

$$t\rho \approx \log((1 + \rho)^t) = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}N(0, 1),$$

waarbij het maandelijkse cumulatieve rendement ρ voldoende klein moet zijn opdat de Maclaurinreeksontwikkeling $x + \mathcal{O}(x^2) = \log(1 + x)$ nauwkeurig is. Een interpretatie van model (1) is dus dat het maandelijkse cumulatieve rendement na t maanden bij benadering verdeeld is als

$$\rho \approx \frac{1}{t} \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{t}\right), \quad (2)$$

waarin $X \sim N(m, s^2)$ aanduidt dat de random variabele X normaal verdeeld is met gemiddelde m en standaardafwijking s . Deze uitdrukking leert ons dat model (1) stelt dat het maandelijkse cumulatieve rendement ρ , bij benadering, normaal verdeeld is rond de driftfactor μ min een correctieterm $\frac{1}{2}\sigma^2$ en met een variantie die lineair afneemt met het verstrijken van de tijd t . Beschouwd over lange termijnen $t \rightarrow \infty$ stelt dit model dus dat het dagelijkse maandelijkse rendement $\rho \rightarrow \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Om de prijs van een fonds te simuleren voor de komende t maanden zullen we gebruik maken van model (1). Om dit model te kunnen aanwenden, moeten we nog de driftfactor μ en de volatiliteit σ bepalen. Aangezien deze waarden betrekking hebben op de toekomst en deze per definitie ongekend is, zullen we deze parameters schatten op basis van historische data. Wanneer we de prijs van het fonds gedurende bijvoorbeeld de laatste 100 maanden kennen dan gaat men als volgt te werk. We weten uit vergelijking (2) dat voor elke twee opeenvolgende maanden steeds geldt dat

$$\log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2\right).$$

We kunnen dan de log-rendementen $\log(S_1/S_0)$ berekenen voor alle opeenvolgende maanden, wetende dat elk van deze metingen verdeeld zijn zoals in bovenstaande vergelijking. Het gemiddelde van deze 99 geobserveerde log-rendementen is dan een schatter voor het populatiegemiddelde $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ terwijl de standaardafwijking van de geobserveerde log-rendementen een schatter is voor de populatiestandaardafwijking σ .

Opgave 1. Laad het bestand `Funds.mat` in. Dit bestand bevat een 184×2 matrix `S`. De eerste kolom bevat de prijs (in €) gedurende de 184 opeenvolgende maanden van 1 juli 2001 tot 1 oktober 2016 van het fonds genaamd *Vanguard Total Stock Market Index Fund* (VTI) en de tweede kolom bevat dezelfde informatie voor het fonds genaamd *BNP Paribas B Pension Balanced Classic* (BNP). De laatste rijen bevatten dus de meest recente prijzen. ♦

Opgave 2. Schrijf een functie met de volgende hoofding

```
function [mu, sigma] = SN_estimateParameters(s)
```

die als uitvoer de driftfactor μ en de volatiliteit σ geeft van het fonds waarvan de prijsevolutie gegeven wordt door de vector `s`; in principe is `s` steeds een kolom van de matrix `S` die je hebt ingeladen uit het `Funds.mat` bestand. De conventie is dat de meest recente prijzen achteraan in `s` staan.

Bereken de driftfactor μ en de volatiliteit σ voor de twee fondsen die je hebt ingeladen in opgave 1 en neem deze op in je verslag. Rapporteer 3 beduidende cijfers. ♦

Op basis van het statistische model (1) kunnen we het verloop van de prijs van een fonds voor opeenvolgende maanden simuleren door middel van een Monte Carlo-simulatie.

Opgave 3. Schrijf een functie met de hoofding

```
function [path] = SN_simulatePath(initialPrice, mu, sigma, months)
```

die een geometrische Brownse beweging met driftfactor `mu` en volatiliteit `sigma` gedurende `(months-1)` opeenvolgende maanden simuleert.

Het uitvoerargument `path` is een willekeurig pad van de prijs op de eerste dag van de maand; de lengte van `path` is `months`. Het eerste element van `path` bevat steeds de initiële prijs `initialPrice` van het fonds (in €) op de eerste dag van de eerste maand. Het i^{de} element van de vector `path` is het resultaat van een simulatie van de geometrische Brownse beweging in verg. (1) met driftfactor `mu`, volatiliteit `sigma`, $t = 1$ maand en S_0 de prijs van het fonds op de eerste dag van de vorige maand, zijnde `path(i-1)`. ♦

Opgave 4. Simuleer 10 willekeurige paden van het aandelenfonds VTI. Als invoer geef je de μ en σ die je in opgave 2 berekende, als `initialPrice` neem je de meest recente marktprijs die je op <http://www.morningstar.com/stocks/ARCX/VTI/quote.html> kunt raadplegen en als lengte van de simulatie `months` kies je 60 maanden. Plot deze tien paden op eenzelfde grafiek en neem ze op in het verslag. Welke initiële prijs heb je gebruikt voor de 10 paden? Vermeld ook de datum. Zien de paden die je gegenereerd hebt er uit zoals de koers van VTI van de afgelopen 5 jaar, die je ook ook voornoemde webpagina kan vinden? Motiveer grondig indien je meent van niet. ♦

Opgave 5. Vergelijk de empirische cumulatieve distributiefunctie van de log-rendementen van opeenvolgende maanden van het fonds VTI met de cumulatieve distributiefunctie van het model, i.e., $N(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$. Als modelparameters μ en σ kies je de overeenkomstige populatiestatistieken die je in opgave 2 hebt berekend. Maak een figuur van deze twee functies en neem deze op in het verslag. Kan je op basis van deze figuur besluiten dat de geobserveerde log-rendementen van VTI gedurende de laatste 184 maanden inderdaad bij benadering voldoen een normale verdeling met gemiddelde $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ en standaardafwijking σ ? ♦

4 Simuleren van scenario's voor pensioensparen

We simuleren vervolgens de vermogensopbouw bij drie verschillende scenario's om aan pensioensparen te doen met inbegrip van de heersende fiscaliteit. In alle scenario's veronderstellen we dat de pensioenspaarder net is afgestudeerd en nog geen kapitaal bezit. Hij bezit wel een beleggersrekening waar hij periodiek geld op stort. Afhankelijk van het bestudeerde scenario wordt het gestorte geld op de beleggersrekening ofwel overgeschreven naar een spaarrekening, ofwel geïnvesteerd in een beursgenoteerd fonds, ofwel geïnvesteerd in een pensioenspaarfonds. We veronderstellen dat we steeds op de eerste dag van elk kwartaal⁸ geld storten de beleggersrekening. Het budget dat we hiervoor per kwartaal uittrekken is steeds gelijk voor alle kwartalen van eenzelfde jaar. Elk jaar verhogen we het spaarbudget per kwartaal met 2%—de lange-termijn inflatiedoelstelling van de Europese Centrale Bank. Wanneer we dus starten met een spaarbudget van €1000 per kwartaal dan zullen we in de eerste vier kwartalen van de simulatie €1000 per kwartaal investeren, in de volgende vier kwartalen investeren we dan €1020 per kwartaal, enzoverder.

Opgave 6. Schrijf een functie met hoofding

```
function [capital] = SN_investedCapital(budget, quarters)
```

die de totale hoeveelheid stortingen (in €) op de beleggersrekening berekent wanneer we `quarters` kwartalen steeds het geïndexeerde spaarbudget investeren. Het spaarbedrag wordt jaarlijks (dus elk vierde kwartaal) met 2% verhoogd, startende van `budget` in het eerste kwartaal. De eerste verhoging van het spaarbudget vindt plaats in het 5^{de} kwartaal.

Hoeveel geld heb je na 40 kwartalen gestort als je start met een spaarbudget per kwartaal van €500? ♦

4.1 Spaarrekening

De eerste algemene techniek voor het opbouwen van een vermogen die we beschouwen is het klassieke sparen op een spaarrekening.

We zullen een eenvoudige (niet-)gereguleerde spaarrekening veronderstellen waarbij enkel een getrouwheidspremie wordt uitbetaald. Op 25 oktober 2016 bedroeg de hoogste rente op een spaarrekening (zonder spaardoel en zonder minimum of maximum maandelijks of jaarlijkse inlage) een magere 1.00%. In de context van dit practicum veronderstellen we dat er nooit geld zal worden afgehaald van een spaarrekening. We veronderstellen tevens dat alle stortingen op de eerste dag van het kwartaal plaatsvinden.

De getrouwheidspremie wordt op de eerste dag van elk kwartaal uitbetaald voor stortingen die gedurende 12 maanden op de spaarrekening stonden. Een storting van €1000 op 1 april 2016 op een rekening met 1.00% getrouwheidspremie zal dus voor het eerst interest opleveren op 1 april 2017. De interest bedraagt dan 1.00%, oftewel €10.0. Wanneer je deze interest op je spaarrekening laat staan dan zal je op 1 april 2018 vervolgens 1.00% interest ontvangen op een bedrag van €1010.00, goed voor €10.10.

⁸We veronderstellen dat het eerste kwartaal loopt van 1 januari tot 31 maart, het tweede kwartaal van 1 april tot 30 juni, het derde kwartaal van 1 juli tot 30 september en het laatste kwartaal van 1 oktober tot 31 december.

Om accuraat de vermogensopbouw via een spaarrekening te modelleren, dienen we ook rekening te houden met de fiscaliteit. Op de interesten van niet-gereguleerde spaarrekeningen wordt een roerende voorheffing van 15% door de bank ingehouden. Bij een bruto getrouwheidspremie van 1% krijg je dus maar 0.85% netto uitbetaald.

Opgave 7. Schrijf een functie met de hoofding

```
function [path, yield] = SN_simulateSaving(...
    budget, rate, quartals ...
)
```

die een spaarrekening met bovenstaande kenmerken en fiscaliteit (roerende voorheffing) simuleert.

Het argument **budget** is het spaarbudget per kwartaal (in €) in het eerste kwartaal van de simulatie. Herinner dat elk jaar het kwartaalspaarbudget met 2% stijgt. Het argument **rate** is de bruto getrouwheidspremie. Deze blijft gedurende de ganse simulatie constant. Het aantal kwartalen dat gesimuleerd moet worden is **quartals**.

Het uitvoerargument **path** is een vector van lengte **quartals** die op de i^{de} positie het gespaarde vermogen (inclusief interesten) bevat in het i^{de} kwartaal van de simulatie. **path(1)** is dus per definitie gelijk aan de eerste storting **budget**. Alle interesten die tijdens de simulatie verdiend worden, blijven steeds op de spaarrekening staan. Het uitvoerargument **yield** is het eindrendement: de relatieve toename in waarde van **path(end)** ten opzichte van de totale waarde van de stortingen (in €) die verricht werden in de simulatie. De ontvangen interesten zijn geen stortingen. ♦

Merk op dat het eindrendement 0.5 (50%) is wanneer **path(end)** = 1500 en de totale stortingen €1000 bedroegen.

4.2 Beursgenoteerde fondsen

De tweede algemene techniek om een vermogen uit te bouwen bestaat eruit om elk kwartaal het spaarbudget te beleggen in een beursgenoteerd aandelenindexfonds.

Een *indexfonds* is een passief beheerd beursgenoteerd aandelenfonds waarbij de korf van aandelen bestaat uit de aandelen uit een specifieke index. Een index is een verzameling van aandelen die dienen als een representatieve afspiegeling van een onderliggende aandelenmarkt. Een welbekende index voor Amerikaanse beursgenoteerde bedrijven is de zogenaamde Standard & Poor's 500 Index dewelke bestaat uit 500 grote Amerikaanse bedrijven die genoteerd staan op de New York Stock Exchange of de NASDAQ-technologiebeurs. Een ander voorbeeld is de Bel20-index die 20 belangrijke beursgenoteerde Belgische bedrijven bevat. Zulke indices worden door een onafhankelijk orgaan samengesteld op basis van eenvoudige en objectieve criteria zoals bijvoorbeeld de marktkapitalisatie of boekwaarde van de bedrijven. Er zijn indexfondsen van verschillende bedrijven die eenzelfde index volgen.

Het *Vanguard Total Stock Market Index Fund* (VTI) was een van de eerste indexfondsen die op de Amerikaanse markt geïntroduceerd werd in 1992. VTI is een van de vele fondsen die de prestaties van Amerikaanse bedrijven volgt. Op 30 september 2016 bestond VTI uit 3613 aandelen van Amerikaanse beursgenoteerde bedrijven en op 25 oktober 2016 had het 64.32 miljard US dollar AUM en 581576802 uitstaande aandelen met een nettoinventariswaarde van \$109.84 per eenheid. In tabel 1 worden de 20 posities met de grootste marktwaarde in het VTI-fonds weergegeven.⁹ De lopende kosten van VTI bedragen nauwelijks 0.05%. VTI is een van de meest populaire beursgenoteerde aandelenindexfondsen; volgens ETF.com bekleedt het de derde plaats in de lijst van fondsen met de grootste hoeveelheid AUM.¹⁰

Om de evolutie van de prijs van een VTI-aandeel te simuleren veronderstellen we dat deze voldoet aan een geometrische Brownse beweging, zoals beschreven in paragraaf 3.

Opgave 8. Schrijf een functie met hoofding

```
function [path] = SN_simulateQuarterlyPath(price, mu, sigma, quartals)
```

die een geometrische Brownse beweging met *maandelijkse* driftfactor **mu** en *maandelijkse* volatiliteit **sigma** gedurende **quartals-1 opeenvolgende** kwartalen simuleert.

price is de prijs in euro op de eerste dag van het eerste kwartaal. De invoerargumenten **mu** en **sigma** hebben dezelfde interpretatie als de uitvoerargumenten van de functie die je in opgave 2 hebt geschreven. Het aantal kwartalen dat gesimuleerd moet worden is **quartals**.

⁹Meer gedetailleerde informatie vind je op <http://www.etf.com/VTI>.

¹⁰Zie <http://www.etf.com/etfanalytics/etf-finder>.

Bedrijf	Gewicht
Apple Inc.	2.44%
Alphabet Inc. Class A	2.01%
Microsoft Corporation	1.89%
Exxon Mobil Corporation	1.58%
Johnson & Johnson	1.44%
Amazon.com, Inc.	1.36%
General Electric Company	1.26%
Berkshire Hathaway Inc. Class B	1.23%
Facebook, Inc. Class A	1.22%
AT&T Inc.	1.11%
JPMorgan Chase & Co.	1.08%
Procter & Gamble Company	1.03%
Wells Fargo & Company	1.01%
Verizon Communications Inc.	0.94%
Pfizer Inc.	0.92%
Chevron Corporation	0.83%
Merck & Co., Inc.	0.77%
Intel Corporation	0.75%
Coca-Cola Company	0.74%
Home Depot, Inc.	0.73%

Tabel 1: De 20 bedrijven met het grootste aandeel in de samenstelling van de *Vanguard Total Stock Market Index Fund* ETF volgens <http://www.etf.com/VTI> (geraadpleegd op 26 oktober 2016).

Het uitvoerargument `path` is een willekeurig pad van de prijs op de eerste dag van elk kwartaal; de lengte van `path` is `quarters`. Het eerste element van `path` bevat steeds de initiële prijs `initialPrice` van het fonds (in €) op de eerste dag van het eerste kwartaal. Alle andere elementen in de vector zijn het resultaat van het simuleren van een geometrische Brownse beweging met driftfactor `mu` en volatiliteit `sigma` (en $t = 3$ maanden) startende bij de prijs van het fonds op de eerste dag van het vorige kwartaal.

Je mag bij de implementatie van deze functie gebruik maken van `SN_simulatePath`. ♦

Het VTI-fonds is een distributiefonds. Op de eerste dag van elk kwartaal worden de dividenden uitgekeerd die in het voorgaande kwartaal verzameld werden. We zullen veronderstellen dat het dividendrendement (de absolute hoeveelheid dividend gedeeld door de nettoinventariswaarde) constant is. Dit is een vrij realistische veronderstelling. Op jaarbasis bedraagt het bruto dividendrendement van VTI ongeveer 1.95%; vanwege de bronbelasting van 15% en de roerende voorheffing van 30% bedraagt het jaarlijkse netto dividendrendement dus 1.16%. We veronderstellen dat elk kwartaal een vierde van het jaarlijkse nettodividend wordt uitbetaald. Op de eerste dag van het kwartaal wordt dus 0.29% van de nettoinventariswaarde per eenheid op die dag uitgekeerd en toegevoegd aan het beschikbare spaarbudget. Dit ganse bedrag wordt dan onmiddellijk opnieuw geïnvesteerd in VTI-aandelen.

De fiscaliteit voor het beleggen in beursgenoteerde indexfondsen is vrij voordelig. De kosten die je maakt bedragen 0.27% beurstaks (op 1 januari 2016 verhoogd door de regering Michel I) op de aankoopprijs. Daarnaast betaal je ook steeds transactiekosten aan je beursmakelaar. We zullen (realistisch) veronderstellen dat deze precies €10 bedragen. Als je spaarbudget €1000 bedraagt, kan je dus door de transactiekosten en beurstaks maximaal voor $(1000 - 10) \cdot \frac{99.63}{100} = 986.337$ euro aan aandelen kopen. Er is geen meerwaardebelasting in België. Op eender welk moment zou je dus al je aandelen kunnen verkopen waarbij enkel 0.27% beurstaks en wat transactiekosten aangerekend worden.

Om verdere complicaties te vermijden zullen we (onrealistisch) veronderstellen dat het mogelijk is om fractionele aandelen te kopen op de beurs. Op deze manier kunnen we steeds 100% van het beschikbare spaarbudget aanwenden. Als de nettoinventariswaarde van een eenheid van het VTI-fonds €100.56 bedraagt, dan kopen we met een spaarbudget van €1000 dus 9.808442721 aandelen.

Opgave 9. Schrijf een functie met hoofding

```
function [path, yield] = SN_simulateFundInvestingPath(...
    budget, pricePath, quarters ...
)
```

die het periodiek beleggen in bovenstaand VTI-fonds simuleert met de bijbehorende fiscaliteit (0.27% beurstaks en €10 transactiekosten).

Het argument **budget** is het spaarbudget per kwartaal (in €) in het eerste kwartaal van de simulatie. Herinner dat elk jaar het kwartaalspaarbudget met 2% stijgt. **quartals** is het aantal kwartalen dat gesimuleerd moet worden. De voorspelde nettoinventariswaarde per aandeel (in €) van het VTI-fonds wordt gegeven door het argument **pricePath**. De lengte van deze vector is **quartals** en ze bevat op positie i de voorspelde prijs van VTI in het i^{de} kwartaal van de simulatie. In principe is dit pad dus de uitvoer van de functie uit de voorgaande opgave.

De uitvoer **path** is een vector van lengte **quartals** die op de i^{de} positie het gespaarde vermogen (de totale nettoinventariswaarde van alle fractionele aandelen) bevat in het i^{de} kwartaal van de simulatie. **path(1)** bevat dus per definitie **budget**, verminderd met de betaalde beurstaks en transactiekosten. Alle dividenden die men in de simulatie ontvangt worden onmiddellijk aan het beschikbare spaarbudget toegevoegd om er vervolgens nieuwe VTI-aandelen mee te kopen. Het uitvoerargument **yield** is het eindrendement: de relatieve toename in waarde van **path(end)** ten opzichte van de totale waarde van de stortingen (in €) op je beleggersrekening die verricht werden in de simulatie. De ontvangen dividenden zijn geen stortingen. ♦

Opgave 10. Schrijf een functie met hoofding

```
function [yields] = SN_simulateFundInvesting(...
    budget, quartals, historicalPrice, N ...
)
```

die de functie uit de voorgaande opgave gebruikt om het periodiek beleggen in bovenstaand VTI-fonds te simuleren met een Monte Carlo-simulatie.

Het argument **budget** is het spaarbudget per kwartaal (in €) in het eerste kwartaal van de simulatie. **quartals** is het aantal kwartalen dat gesimuleerd moet worden. Om de prijsevolutie van het VTI-fonds te simuleren, veronderstellen we dat de prijzen voldoen aan een geometrische Brownse beweging. De parameters van dit model bepaal je aan de hand van de prijsgeschiedenis **historicalPrice**, waarbij de meest recente prijzen achteraan in de vector staan (zoals de data die je hebt ingeladen in opgave 1). Gebruik de functie uit opgave 2 om deze parameters te schatten. Als initiële prijs voor het fonds gebruik je **historicalPrice(end)**. Het aantal bemonsteringen is **N**.

De uitvoer **yields** is een vector van lengte **N** die eindrendementen van de **N** bemonsteringen van je Monte Carlo-simulatie bevat. ♦

4.3 Pensioenspaarfonds

De laatste techniek om een vermogen op te bouwen is via het wettelijke stelsel van pensioensparen. In dit systeem kan men jaarlijks een beperkte hoeveelheid vermogen sparen in een fiscaal vermeend gunstig regime. Het vermogen moet men investeren in ofwel een spaarverzekering (tak-21) ofwel een pensioenspaarfonds. Een spaarverzekering is een verzekeringsconstructie met een vast gegarandeerd rendement en een variabele winstparticipatie. Deze constructies zijn dermate ondoorzichtig dat het niet mogelijk blijkt om met behulp van publiek beschikbare gegevens een accurate simulatie op te zetten. Daarom zullen we in dit practicum opteren voor een pensioenspaarfonds.

Een pensioenspaarfonds is een (doorgaans niet-beursgenoteerd) actief beheerd gemengd kapitalisatie-beleggingsfonds dat een bijzonder wettelijk statuut geniet.

Een van de fondsen die de afgelopen 10 jaren het best presteerde volgens spaargids.be¹¹ is het *BNP Paribas B Pension Balanced Classic* (BNP) pensioenspaarfonds. Volgens de prospectus (gedateerd op april 2016) streeft dit gemengde fonds ernaar 50% van het vermogen te beleggen in aandelen en 50% in obligaties. Uit de laatst beschikbare marketingcommunicatie¹² over het fonds op 31 augustus 2016 blijkt dat het fonds bestaat uit 812 posities. De tien grootste posities worden in tabel 2 weergegeven. Volgens Morningstar bedroeg de AUM van het BNP-fonds zo'n €3.585 miljard en de nettoinventariswaarde per eenheid €181.14 op 26 oktober 2016.¹³ De lopende kosten voor dit actief beheerde fonds bedragen 1.25%.

Het BNP-fonds is een kapitalisatiefonds. De dividenden en interesten die het fonds genereert, worden dus automatisch herbelegd. Dit hoeven we dus niet te simuleren.

¹¹Zie <http://www.spaargids.be/sparen/pensioenspaarfonds/vergelijken.html>.

¹²Zie het "Factsheet" document op <http://www.bnpparibas-ip.be/particuliere-belegger-particulier/fundsheets/gemengd/bnp-paribas-b-pension-balanced-classic-c-be0026480963/>.

¹³Zie <http://www.morningstar.be/be/funds/snapshot/snapshot.aspx?id=F0GBR04NZJ>.

Naam	Gewicht	Type
Italië BTPS 01/06/2018	2.86%	Staatsobligatie
Espagne 30/07/2017	1.52%	Staatsobligatie
AB Inbev	1.24%	Aandeel
Italy BTPS 01/06/2025	1.16%	Staatsobligatie
Espagne 31/10/2017	1.04%	Staatsobligatie
France OAT 25/11/2024	0.93%	Staatsobligatie
Spain 31/01/2037	0.92%	Staatsobligatie
Koninklijke Ahold NV	0.85%	Aandeel
French Govt 25/10/2038	0.83%	Staatsobligatie
France OAT 25/04/2021	0.82%	Staatsobligatie

Tabel 2: De 10 grootste posities in het *BNP Paribas B Pension Balanced Classic* pensioenfonds volgens de marketingcommunicatie van 31 augustus 2016.

Om de evolutie van de prijs van een eenheid van het BNP-fonds te simuleren veronderstellen we dat deze voldoet aan een geometrische Brownse beweging, zoals beschreven in paragraaf 3.

Om fractionele eenheden van het BNP-fonds aan te kopen, moet een prijs van 3% van het transactiebedrag betaald worden als *instapkosten*. Deze instapkosten vervangen de beurstaks en transactiekosten die je bij beursgenoteerde fondsen zou betalen. We veronderstellen dat we steeds het volledige spaarbudget aanwenden om eenheden te kopen. Als ons spaarbudget €1000 bedraagt dan betalen we €30 aan de fondsbeheerder om voor €970 aandelen van het BNP-fonds te kopen.

De Belgische Staat probeert pensioensparen fiscaal aantrekkelijk te maken. Bij de aanschaf van een pensioenspaarfonds betaal je geen beurstaks. Bovendien krijg je elk jaar via je belastingaangifte 30% van het nieuw geïnvesteerde bedrag terug met een maximale teruggave van €282 per persoon en per kalenderjaar. We zullen veronderstellen dat de federale belastingdienst dit bedrag steeds op 1 april terugbetaalt. Dit bedrag wordt aan het beschikbare spaarbudget van het overeenkomstige kwartaal toegevoegd en onmiddellijk gebruikt om meer eenheden van het BNP-fonds te kopen. We veronderstellen¹⁴ bovendien dat het bedrag van de maximale teruggave elk jaar met 2% wordt verhoogd. Stel bijvoorbeeld dat je in 2016 en 2017 telkens €1000 per kwartaal hebt geïnvesteerd in het BNP-fonds. Dan krijg je van de belastingdienst op 1 april 2017 het maximumbedrag van €282 terug en op 1 april 2018 krijg je ook het maximumbedrag terug, namelijk €287.64.

Tegenover het fiscale voordeel staan natuurlijk beperkingen. Wanneer we veronderstellen dat je onmiddellijk na het afstuderen begint met pensioensparen op 23-jarige leeftijd, dan wordt op je 60^{ste} verjaardag een taks van 8% ingehouden¹⁵. Deze taks wordt ingehouden op een *fictief* jaarlijks cumulatief rendement van 4.75% op elke storting. Stel dat je een investering maakt van €1000 op 1 januari 2017 en vervolgens nog een investering op 1 januari 2025 ter waarde van €2000. Als we veronderstellen dat je op 1 januari 2017 net 23 jaar bent dan is de belastbare basis van je pensioenspaarfonds

$$1.0475^{60-23} \cdot 1000 + 1.0475^{60-31} \cdot 2000 = 13250.40$$

euro. Hierop betaal je dan 8% belastingen, ofwel €1060.03. Contrasteer dit met het ontbreken van enige significante van belasting bij een beursgenoteerd indexfonds. Merk ook op dat het jaarlijkse cumulatieve rendement van het BNP-fonds in de laatste 10 jaren 4.12% bedraagt. Zonder rekening te houden met de 3% instapkosten. *De eindbelasting nemen we niet op in onze simulatie.*

Opgave 11. Schrijf een functie met hoofding

```
function [path, yield] = SN_simulatePensionFundInvestingPath(...
    budget, pricePath, quarters ...
)
```

die het periodiek beleggen in bovenstaand BNP-fonds simuleert met de bijbehorende fiscaliteit (3% instapkosten en 30% belastingvoordeel).

Het argument **budget** is het spaarbudget per kwartaal (in €) in het eerste kwartaal van de simulatie. Herinner dat elk jaar het kwartaalspaarbudget met 2% stijgt. **quarters** is het aantal kwartalen dat

¹⁴Dit indexeringsmechanisme bestaat maar door een recente regeringsbeslissing werd de werking ervan bevroren tot 2019.

¹⁵De regering Michel I verlaagde onlangs het oude tarief van 10% met 2 procentpunten.

gesimuleerd moet worden. De voorspelde nettoinventariswaarde per aandeel (in €) van het BNP-fonds wordt gegeven door het argument `pricePath`. De lengte van deze vector is `quartals` en ze bevat op positie i de voorspelde prijs van BNP in het i^{de} kwartaal van de simulatie. In principe is dit pad dus de uitvoer van de functie uit opgave 8.

De uitvoer `path` is een vector van lengte `quartals` die op de i^{de} positie het gespaarde vermogen (de totale nettoinventariswaarde van alle fractionele eenheden) bevat in het i^{de} kwartaal van de simulatie. `path(1)` bevat dus per definitie `budget`, verminderd met de instapkosten. Alle belastingteruggaven die men in de simulatie ontvangt, worden onmiddellijk aan het beschikbare spaarbudget toegevoegd om er vervolgens nieuwe BNP-eenheden mee te kopen. Het uitvoerargument `yield` is het eindrendement: de relatieve toename in waarde van `path(end)` ten opzichte van de totale waarde van de stortingen (in €) op je pensioenrekening die verricht werden in de simulatie. De ontvangen belastingteruggaven zijn geen stortingen. ♦

Opgave 12. Schrijf een functie met hoofding

```
function [yields] = SN_simulatePensionFundInvesting(...
    budget, quartals, historicalPrice, N ...
)
```

die de functie uit de voorgaande opgave gebruikt om het periodiek beleggen in bovenstaand BNP-fonds te simuleren met een Monte Carlo-simulatie.

Het argument `budget` is het spaarbudget per kwartaal (in €) in het eerste kwartaal van de simulatie. `quartals` stelt het aantal kwartalen dat gesimuleerd moet worden voor. Om de prijsevolutie van het BNP-fonds te simuleren veronderstellen we dat de prijzen voldoen aan een geometrische Brownse beweging. De parameters van dit model bepaal je aan de hand van de prijsgeschiedenis `historicalPrice`, waarbij de meest recente prijzen achteraan in de vector staan (zoals de data die je hebt ingelezen in opgave 1). Gebruik de functie uit opgave 2 om deze parameters te schatten. Als initiële prijs voor het fonds gebruik je `historicalPrice(end)`. Het aantal bemonsteringen is N .

De uitvoer `yields` is een vector van lengte N die eindrendementen van de N bemonsteringen van je Monte Carlo-simulatie bevat. ♦

4.4 Vergelijkende studie

We kunnen vervolgens de drie scenario's met elkaar vergelijken. In alle volgende Monte Carlo-simulaties kiezen we $N = 100000$ bemonsteringspunten. Om het beleggen in het VTI-fonds te simuleren, gebruiken we als historische data steeds de eerste kolom van de matrix `S` die je in opgave 1 hebt ingelezen. Evenzo gebruiken we steeds de tweede kolom van `S` als historische data om beleggingen in het BNP-fonds te simuleren. Het beschikbare spaarbudget en het aantal kwartalen zullen we variëren.

Opgave 13. Simuleer het rendement voor elk van de 3 scenario's na 40 kwartalen (10 jaar) wanneer je spaarbudget €750 per kwartaal bedraagt. Voor de spaarrekening zullen we de extreem gunstige getrouwheidspremie van 3.0% hanteren. Duid vector met bemonsterde rendementen van het VTI-fonds aan met `yieldF` en de bemonsterde rendementen van het BNP-fonds met `yieldP`. Maak histogrammen van de gesimuleerde rendementen van de fondsen door de volgende code uit te voeren:

```
figure; hold all;
histogram(yieldF, 'BinWidth', 0.05, 'Normalization', 'probability');
histogram(yieldP, 'BinWidth', 0.05, 'Normalization', 'probability');
legend('VTI', 'BNP');
```

Neem deze figuur op in het verslag. Hoeveel bedraagt het rendement (uitgedrukt in %) van de spaarrekening? ♦

Opgave 14. Voer de voorgaande simulatie ook uit voor $4 \cdot (60 - x)$ kwartalen, waarbij x je leeftijd is. Welke waarde van x heb je gekozen? Maak dezelfde figuur opnieuw en neem deze op in het verslag. Kies wel de waarde 0.2 als `BinWidth` om een duidelijke figuur te bekomen.

Bespreek je resultaten. Valt er iets bijzonder op in deze figuur? ♦

Opgave 15. Simuleer het rendement voor elk van de 3 scenario's na 40, 80, 120 en 160 kwartalen wanneer je spaarbudget steeds $(250 + x)$ euro per kwartaal bedraagt, waarbij x de laatste 3 cijfers van je studentnummer zijn. Rapporteer x in het verslag.

Maak een duidelijke tabel van de volgende kwantielen:¹⁶ 2.5%, 25%, 50%, 75% en 97.5% voor elk van de 3 scenario's en lengte van de simulatie. Hint: de functie `quantile` kan handig zijn.

Hoe groot is de kans om een *negatief* eindrendement te behalen in de 3 scenario's en voor de 4 verschillende lengtes van de simulatie? Geef je antwoord in een duidelijke tabel.

Hoeveel bedraagt de kans om een vermogen van minstens €1 miljoen opgebouwd te hebben in elk van deze 12 simulaties? Maak opnieuw een tabel. ♦

Opgave 16. Simuleer het rendement van het BNP-pensioenfonds na 160 kwartalen wanneer je de volgende spaarbudgetten (per kwartaal) zou aanhouden: €125, €250, €500, €1000 en €2000. Hoeveel bedraagt de mediaan van het eindrendement in deze vijf gevallen? Wat valt op? Verklaar dit bijzondere fenomeen. ♦

Opgave 17. Bij welk spaarbudget per kwartaal haal je het hoogste verwachte eindrendement wanneer je in het wettelijk stelsel van pensioensparen je geld belegt in het *BNP Paribas B Pension Balanced Classic* fonds? ♦

Opgave 18. Simuleer het rendement van het VTI-fonds na 160 kwartalen wanneer je de volgende spaarbudgetten (per kwartaal) zou aanhouden: €125, €250, €500, €1000 en €2000. Hoeveel bedraagt de mediaan van het eindrendement in deze vijf gevallen? Wat valt op? Verklaar. ♦

Opgave 19. Bij welk spaarbudget per kwartaal haal je het hoogste verwachte eindrendement wanneer je je geld belegt in het *Vanguard Total Stock Market Index Fund* fonds? ♦

Opgave 20. Alle voorgaande experimenten indachtig, welke strategie zou jij aanbevelen voor pensioensparen? Dit mag een combinatie van meerdere technieken zijn. ♦

5 Evaluatie

Opgave 21. Hoeveel tijd heb je gespendeerd aan het oplossen van de opdrachten? Hoeveel tijd heb je gespendeerd aan het schrijven van het verslag? ♦

Opgave 22. Denk je dat de resultaten van dit practicum realistisch zijn? Hebben de resultaten je verrast? Zou je zelf een vermogen willen opbouwen via het wettelijke stelsel? Waarom wel of niet? Welke strategie zou je zelf verkiezen? ♦

Opgave 23. Welke bedenkingen heb je bij dit practicum? Was de opgave (veel) te gemakkelijk, (veel) te moeilijk of van een gepaste moeilijkheidsgraad? Wat zou je zelf anders aangepakt hebben? Was de terminologie voldoende duidelijk? ♦

¹⁶Het 25% kwantiel wordt ook wel het eerste kwartiel genoemd, het 50% kwantiel is de mediaan en het 75% kwantiel komt overeen met het derde kwartiel.