

1. خیر، در حالت کلی نمی توان سیستم گرام عبارتی را به دست آورد به این دلیل که حامل جمع، ضرب، تفریق و تقسیم دو تصویر به موقعیت قرارگیری پیکسل ها وابسته است که در سیستم گرام این اطلاعات وجود ندارد و در جهت تصویر با سیستم گرام مان متناظر مشابه می توان مقادیر متفاوت و میزبان روش های متفاوت پس از عملیات خیر داشته باشد که سیستم گرام نهایی مثل متفاوت می شود.

$$h_{f+g}(r_k) = h_f(r_k - c) = h_f(r_k - \text{argmax}(h_g)) \quad (\text{الف})$$

$$h_{f-g}(r_k) = h_{f-g}(r_k + c) = h_f(r_k + \text{argmax}(h_g)) \quad (\text{ب})$$

$$h_{f \cdot g}(r_k) = h_f\left(\frac{r_k}{c}\right) = h_f\left(\frac{r_k}{\text{argmax}(h_g)}\right) \quad (\text{ج})$$

$$h_{\frac{f}{g}}(r_k) = h_f(c r_k) = h_f(r_k \cdot \text{argmax}(h_g)) \quad (\text{د})$$

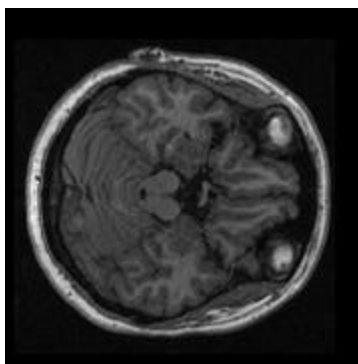
2.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial v} \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cos \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \sin \theta \right) \cos \theta \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cos \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \sin \theta \right) \sin \theta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \Rightarrow \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] \checkmark \end{aligned}$$

1.

1.1) با استفاده از دستور niftiread فایل مد نظر را لود می کنیم.

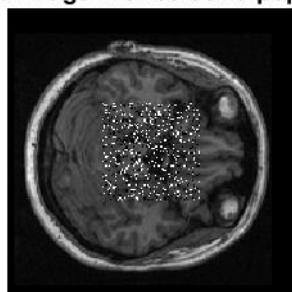
1.2) اسلایس ذخیره شده را لود و برای نرمالیزه کردن بر ماکسیمم مقدار پیکسل تقسیم می کنیم و بعد تغییر سایز آن را ذخیره می کنیم.



1.3) با استفاده از دستور imnoise نویز salt & pepper را به بلاکی دلخواه از تصویر اضافه می کنیم.

نویز salt & pepper تغییرات تیز و ناگهانی و تصادفی در تصویر ایجاد می کند و خود را به صورت پیکسل های سیاه و سفید پراکنده به صورت تصادفی در نشان میدهد.

Reshaped image with salt and pepper noise



1.4) تابعی مینویسیم که واریانس بلوکی دلخواه از تصویر را حساب کند.

1.5) برای 9 بلاک 60*60 غیرهمپوشان واریانس ها را حساب می کنیم که بزرگترین مقدار آن 0.0667 است. بیشترین واریانس مربوط به بلاک وسط تصویر است. با توجه به کم بودن واریانس بلاک وسط تصویر در نبود نویز، نتیجه می گیریم نویز salt & pepper باعث افزایش قابل توجه واریانس تصویر می شود.

0.0315245981781700

0.0359129628171778

0.0311751062846961

0.0225628587032231

0.0667229652901678

0.0314773168358568

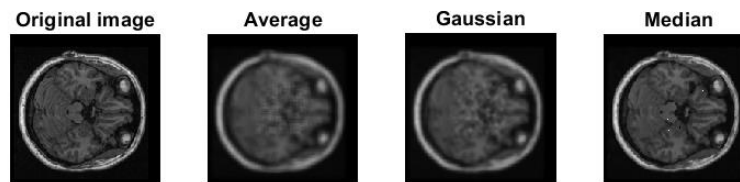
0.0288406617745343

0.0283357493007433

0.0285305853948968

1.6) با استفاده از سه فیلتر میانگین، گاوسی، و میانه تصویر را حذف نویز میکنیم. بهترین نتیجه برای فیلتر میانه است و بدترین نتیجه مربوط به فیلتر میانگین است.

Denoised images



1.7) معیار median absolute error مقدار میانه قدر مطلق تفاضل پیکسل های دو تصویر را محاسبه میکند.

$$MAE = \text{median}(|Y_i - X_i|)$$

معیار SSIM بر مبنای سه معیار مقایسه ای انجام می شود که بین دو تصویر محاسبه میشوند. این سه معیار luminance، contrast و structure comparison هستند. این معیار برخلاف MSE و PSNR صرفاً به تفاوت میان پیکسل ها تکیه نمی کند و به اطلاعات ساختاری پیکسل ها توجه دارد و به ادراک بینایی انسان نزدیک تر است.

$$SSIM = l(x, y)^{\alpha} c(x, y)^{\beta} s(x, y)^{\gamma}$$

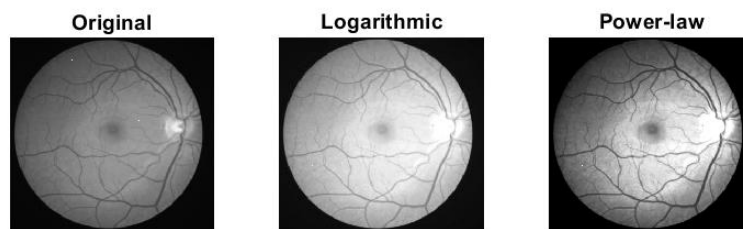
همانطور که انتظار داشتیم معیار SSIM برای median بیشتر از gauss و بیشتر از average است و خطای MAE برای median کمتر از gauss و کمتر از average است که هر دو نشان دهنده عملکرد بهتر فیلتر میانه بر روی این نویز هستند.

MAE median = 2.259175e-03 ,SSIM median = 9.429761e-01

MAE gauss = 1.344423e-02 ,SSIM gauss = 7.820980e-01

MAE avg = 1.589914e-02 ,SSIM avg = 7.131991e-01

2. توان تبدیل را برابر 2 قرار میدهیم. با توجه به نتایج در تبدیل logarithmic روشنایی نواحی تیره تصویر افزایش میابد. و در تبدیل Power-Law به ازای توان های بزرگتر از 1 میزان contrast تصویر افزایش میابد و جزئیات ریز و کمرنگ تصویر (رگ ها) واضح تر میشوند.



3.

این کار را به دو روش میتوان انجام داد. در روش اول ضرایب فوریه دوبعدی را در دو جهت reverse کرده و تبدیل عکس فوریه انجام میدهیم. در روش دوم از این ایده که دوران در حوزه فوریه منجر به دوران در حوزه مکان میشود استفاده میکنیم، این به این دلیل است که هر دو تبدیل خطی هستند.

Original image

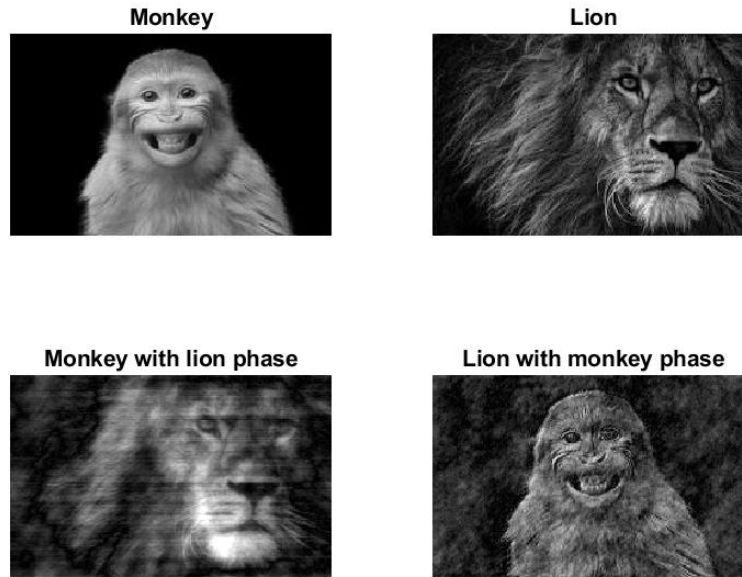


Rotated image



4.

تبدیل فوریه دو بعدی را برای تصاویر حساب کرده و دامنه و فاز آن را جدا میکنیم و فاز ها را جابجا کرده و تبدیل عکس فوریه را حساب می کنیم. نتیجه بدست آمده نشان می دهد که فاز تصویر نقش مهم تر و اساسی تری نسبت به دامنه آن در ساختار و شکل کلی تصویر دارد.



5.

الف) فیلتر وینر را برای دو حالت با degradation و بدون آن پیاده سازی میکنیم (در حالت دوم $H=1$). برای تخمین واریانس نویز مقدار واریانس یک گوشه ی تصویر استفاده می کنیم. همچنین برای حفظ میانگین، آن را ابتدا از تصویر کم و بعد از اعمال فیلتر به آن اضافه میکنیم.

$$W(u, v) = \frac{P_{FG}(u, v)}{P_{GG}(u, v)} = \frac{H^* P_{FF}}{|H|^2 P_{FF} + P_{NN}} = \frac{1}{H} \frac{|H|^2 P_{FF}}{|H|^2 P_{FF} + P_{NN}} = \frac{1}{H} \frac{P_{GG} - P_{NN}}{P_{GG}}$$

ب) مقدار (PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio یک معیاری برای سنجش میزان کیفیت عکس حذف نویز شده است که هرچه بیشتر باشد نشان دهنده این است که نویز کمتری در تصویر وجود دارد. این مقدار از رابطه زیر محاسبه می شود که MSE میانگین مربعات تفاضل تصویر اصلی با حذف نویز شده است.

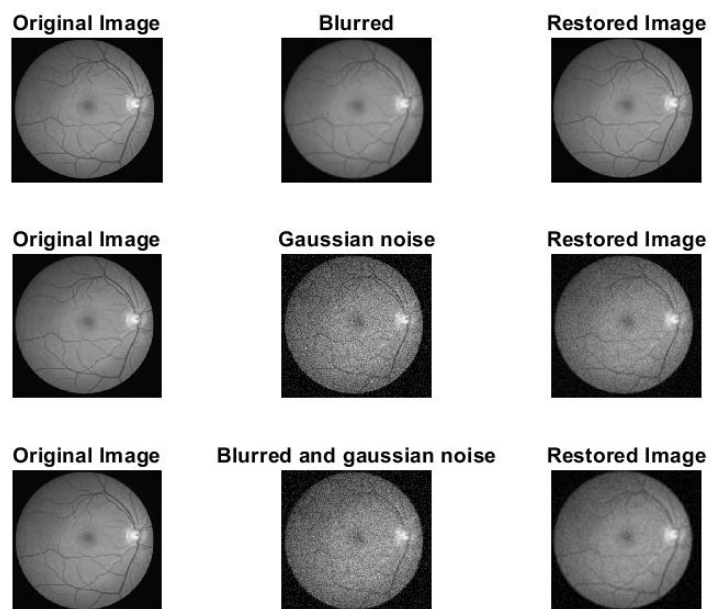
$$PSNR = 10 \log \left(\frac{Max_I^2}{MSE} \right)$$

ج) مشاهده میکنیم که PSNR در حالت 2 بیشتر از حالت 1 بیشتر از حالت 3 است. (بن مقادیر با توجه به میزان نویز گاوسی میتواند متفاوت باشد).

PSNR blurred = 2.830668e+01

PSNR gauss = 2.886856e+01

PSNR blurred and gauss = 2.811135e+01

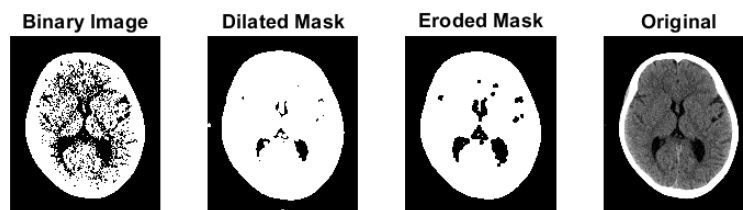


6.

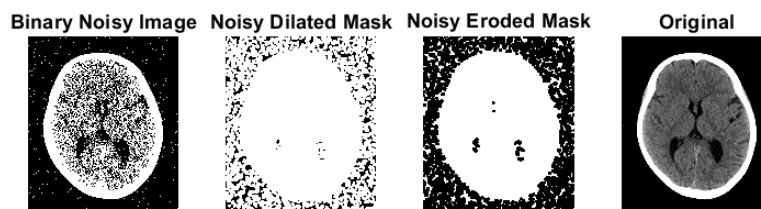
الف) پیکسل ها بزرگتر از 80 را برابر 1 و کوچکتر از 80 را برابر 0 قرار می دهیم.

ب) برای انجام closing ابتدا ماسک اولیه را dilate کرده و سپس erode می کنیم. این کار را با یک structuring element به شکل دیسک با شعاع 6 انجام می دهیم.

همانطور که در شکل زیر می بینیم در ماسک نهایی تصویری به خوبی از پس زمینه اش جدا شده است.

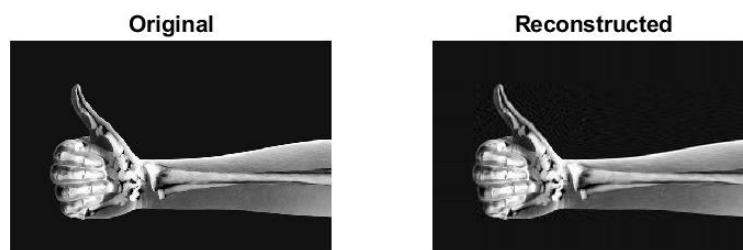


ج) همانطور که انتظار داشتیم در صورت اضافه کردن نویز گاوسی، کیفیت ماسک نهایی کاهش میابد و بخش هایی از پس زمینه را نیز در بر میگیرد.

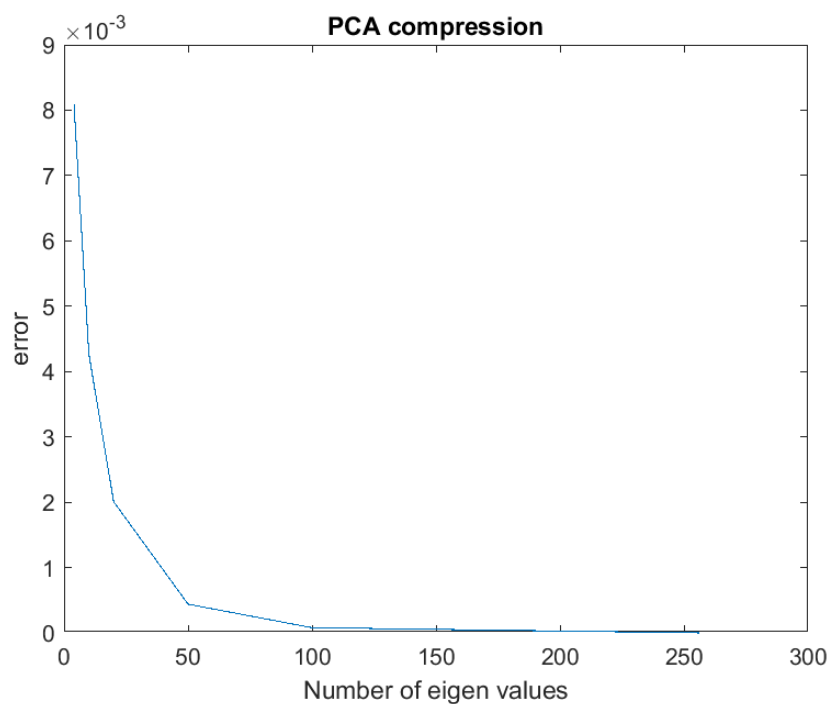


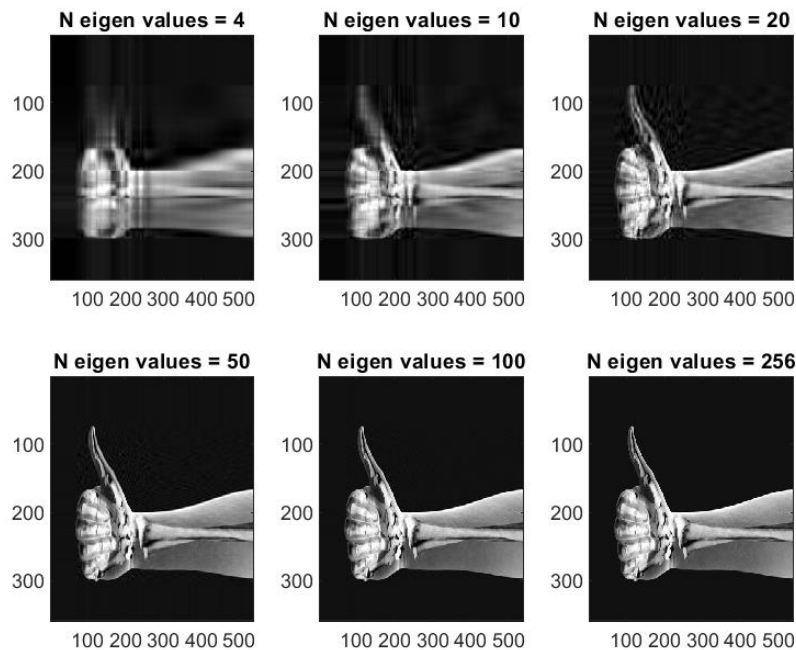
7.

الف) با استفاده از 50 مقدار ویژه می توان تصویر را به میزان خوبی بازسازی کرد. اما در بخش هایی که جزئیات زیادی دارد مانند انگشت ها، دارای رزولوشن کمتری نسبت به تصویر اصلی هستند.



ب) نمودار MSE بر حسب تعداد مقادیر ویژه نگه داشته شده را رسم میکنیم.





.8

الف) top-hat transform و bottom-hat transform تبدیل هایی هستند که جزئیات و المان های کوچک تصویر را از آن استخراج میکنند. در اولی المان های استخراج شده کوچکتر از SE و روشن تر از اطرافشان هستند و در دومی المان ها کوچکتر از SE و تیره تر از اطرافشان اند.

$$T_{w(f)} = f - open(f, SE)$$

$$T_{b(f)} = close(f, SE) - f$$

ب) از دو ماسک square و disk استفاده میکنیم.

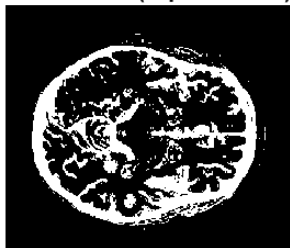
Top-Hat (Square Mask)



Top-Hat (Disk Mask)



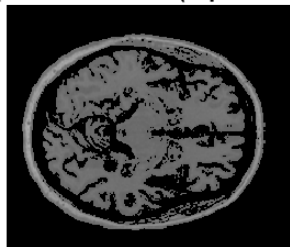
Bottom-Hat (Square Mask)



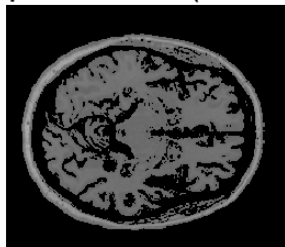
Bottom-Hat (Disk Mask)



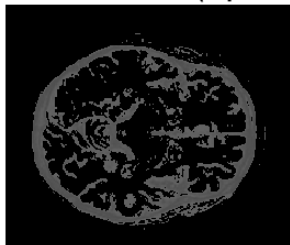
Top-Hat Transform (Square Mask)



Top-Hat Transform (Disk Mask)



Bottom-Hat Transform (Square Mask)



Bottom-Hat Transform (Disk Mask)

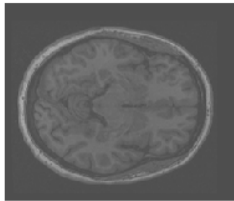


ج) برای ماسک های disk و square به ازای سایز های 1 تا 6 نواحی روشن تصویر را به آن اضافه و نواحی تاریک را از آن کم میکنیم.

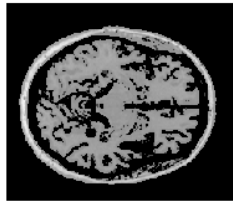
امتیازی: در تصاویر پزشکی عمدتاً از ماسک **disk** استفاده میشود به دلیل که در همه جهات اثر یکسانی میگذارد و **isotropic** است. همچنین برای ساختار های کروی و دارای انحنا مناسب است و **smoothness** لبه ها را از بین نمیببرد.

size = 1

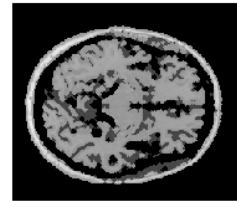
original image



square

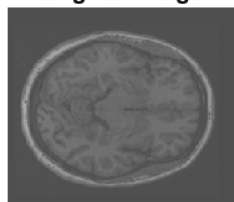


disk



size = 2

original image



square

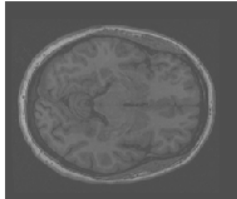


disk

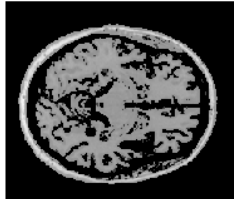


size = 3

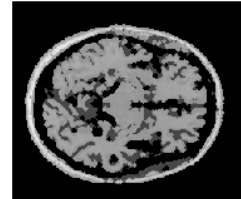
original image



square

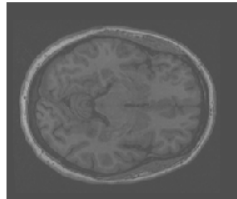


disk

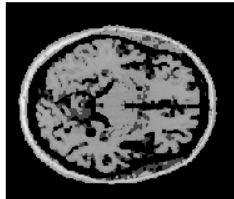


size = 4

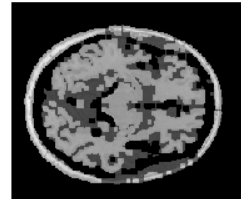
original image



square

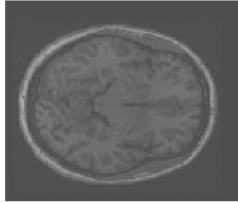


disk

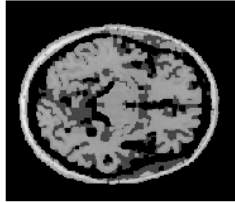


size = 5

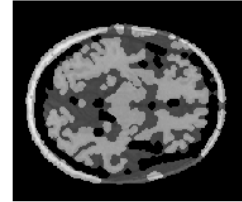
original image



square

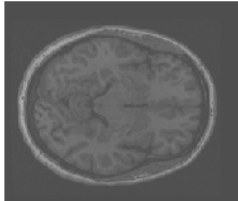


disk

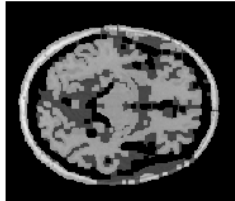


size = 6

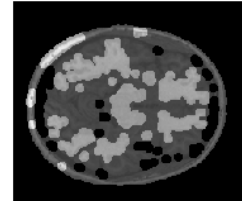
original image



square



disk



د) با استفاده از کانولوشن دوبعدی مقدار p و a را برای هر x و y محاسبه کرده و $c(x, y)$ را بدست می آوریم.
 ح) به ازای سایزهای 1 تا 6 برای SE های مربع و دیسک بهبود contrast را انجام داده و مقدار CIR را محاسبه میکنیم و بهترین نتیجه بدست آمده را رسم میکنیم.

Contrast Improvement Ratio (CIR) within ROI square:

450.65 443.0808 450.65 434.5508 398.1873 363.3839

Contrast Improvement Ratio (CIR) within ROI disk:

398.2231 443.2497 398.2231 363.3839 319.2054 229.2551

best

