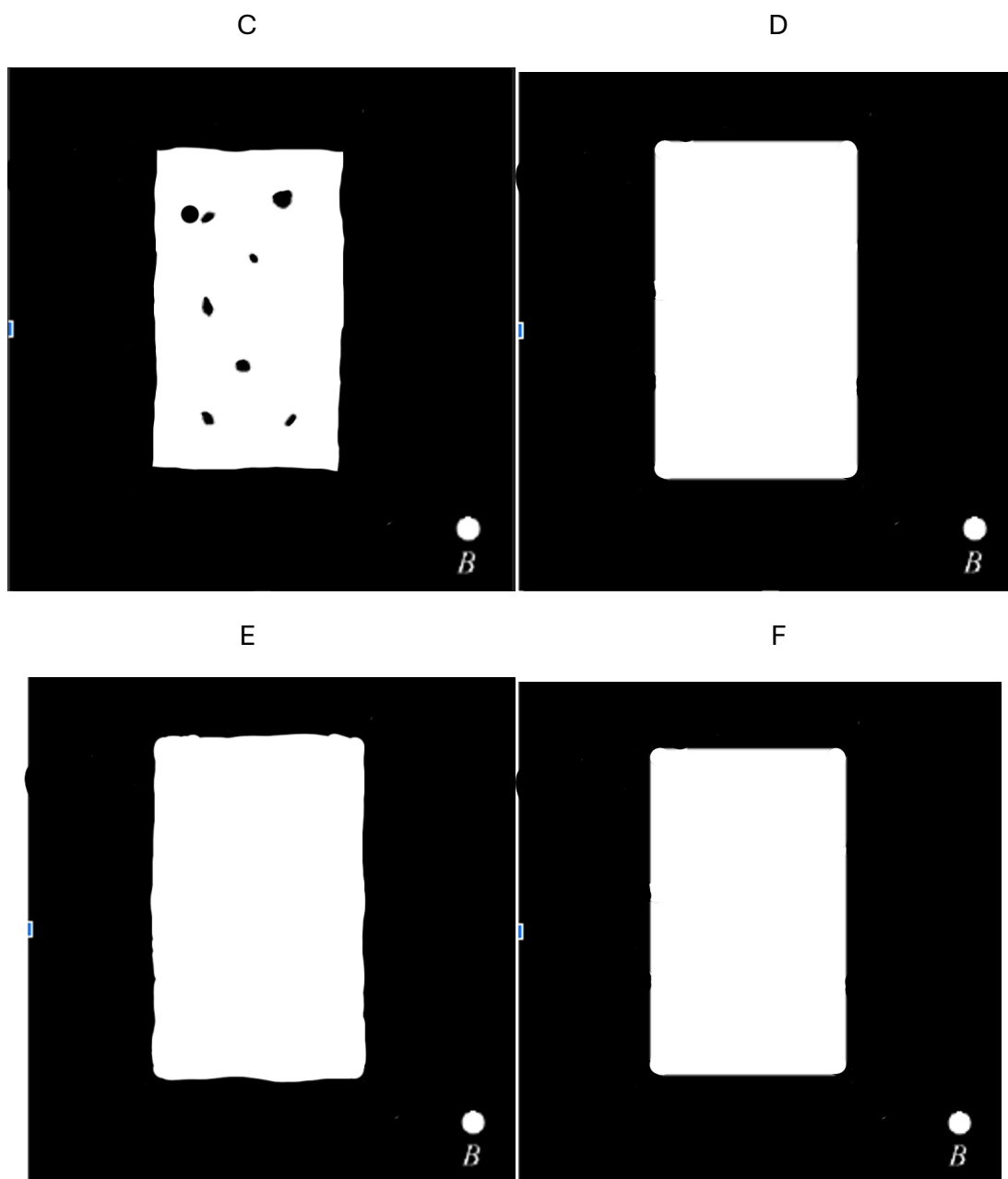


## بخش تئوری

1.

شکل C دارای حفره های بزرگتری نسبت به A است و طول و عرض کمتری دارد. شکل D همانند شکل F است و طول و عرض برابر A و بدون حفره. شکل E طول و عرض بیشتری نسبت به D و F دارد.



2.

$$\begin{aligned}
 2.] \quad G(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\
 &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - j2\pi ux} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2} - j2\pi vy} dy \\
 &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - j2\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + j\pi u\sigma\sqrt{2}\right)^2} e^{-2\pi^2 u^2 \sigma^2} d\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \\
 &= \sigma\sqrt{2} e^{-2\pi^2 u^2 \sigma^2} (\sqrt{\pi}) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 \sigma^2 u^2} \\
 &\Rightarrow G(u,v) = 2\pi A \sigma^2 e^{-2\pi^2 \sigma^2 (u^2+v^2)} \rightarrow \text{گادسی در حوزه فرکانس}
 \end{aligned}$$

فیلتر در حوزه فرکانس پائین گذر است چون با افزایش  $u$  و  $v$  مقدار  $G(u,v)$  کاهش پیدا می کند بنابراین فرکانس های بالا را با نرخ کمتر عبور می دهد. و فرکانس های پائین را با نرخ بالا.

$G(u,v \rightarrow \infty) = 0$

ابتدا نزولی → پائین گذر

3.

مقدار مناسب برای  $p$  برابر 0 است. نورم صفر یک ماتریس برابر تعداد درایه های ناصفر آن است. هدف ما این است که در پیکسل های بدون نویز حاصل  $u-v$  برابر صفر شود. از آنجا که نویز S&P در تعداد نسبتاً کمی پیکسل وجود

دارد، می‌خواهیم فقط در این پیکسل‌ها حذف نویز رخ دهد و بقیه دست نخورده بمانند یعنی  $u-v=0$ . پس هرچه تعداد عناصر غیرصفر کمتر باشد بهتر است و کمک میکند تا حد امکان پیکسل‌های اصلی دست نخورده بمانند که متناظر با مقدار  $p=0$  است.

## بخش عملی

1.

برای تعیین پیکسل‌های محدوده لباس، به دنبال پیکسل‌هایی می‌گردیم که مقدار کانال سبز آن‌ها ( $R$ ) در محدوده مشخصی قرار دارد (بالای 250).



سپس با المان ساختاری دیسکی به شعاع 10 و انجام dilate و erode سوراخ‌ها را می‌پوشانیم. دلیل این کار انبساط تصویر و پر کردن سوراخ‌ها و سپس انقباض تصویر و برگرداندن آن به سبزه اولیه اش است.



پس از بدست آوردن ماسک، کانال قرمز پیسکل های درون ماسک را به مقدار 255 و کانال سبز آن ها را صفر میکنیم تا لباس قرمز شود.



2.

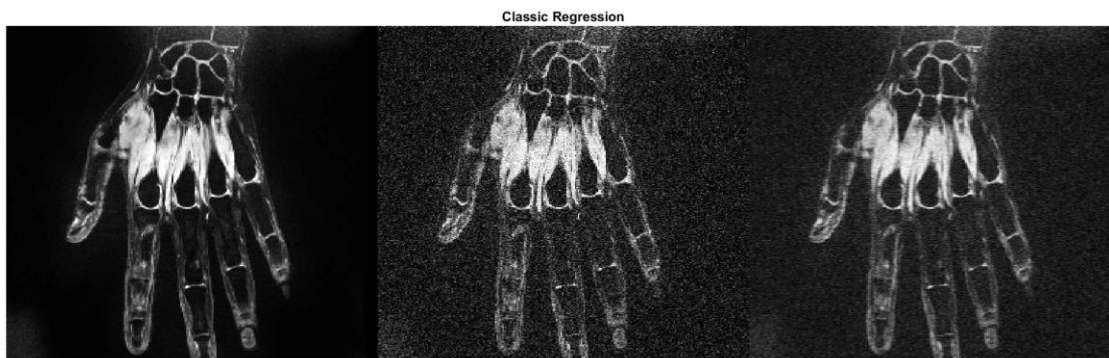
الف) تصویر اصلی و نویزی را رسم میکنیم. (سمت راست نویزی)



ب) عملکرد این کرنل به ای صورت است که میانگین وزن دار پیکسل های همسایه را محاسبه میکند. هرچه مکان پیکسل ها از پیکسل مرکز دورتر باشند وزن کمتری به آن ها تعلق میگیرد و تاثیری کمتری در مقدار حذف نویز شده پیکسل مرکز دارند. وزن ها به صورت تابع گاوسی از فاصله مکانی پیکسل ها محاسبه میشوند.

برای پیاده سازی این فیلتر ابتدا یک کرنل گاوسی با پارامتر  $h_x$  و سایز 5 بدست میاوریم آن را با تصویر convolve میکنیم.

در شکل زیر تصویر سمت راست حذف نویز شده است.



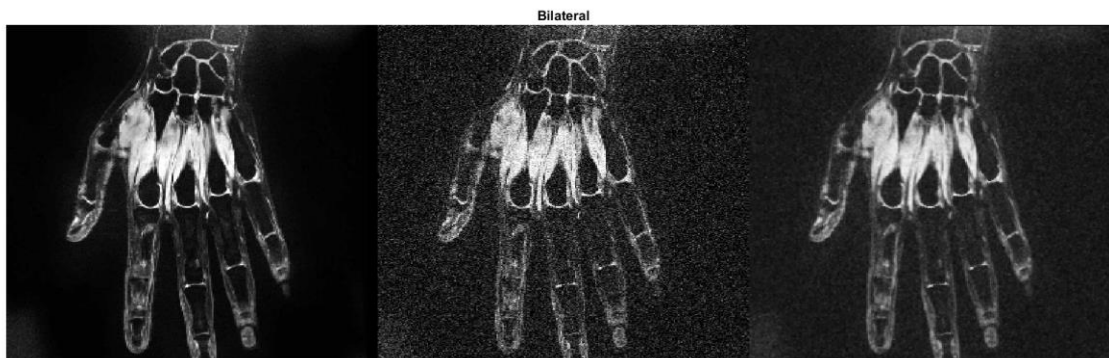
ج) عملکرد فیلتر bilateral نیز مشابه فیلتر گاوسی است با این تفاوت که علاوه بر فاصله مکانی پیکسل ها، فاصله ی سطح روشنایی آن ها را نیز در محاسبه وزن ها در نظر میگیرد. به این صورت که هرچه میزان روشنایی ک پیکسل با پیکسل مرکز اختلاف بیشتری داشته باشد، وزن آن پیکسل در محاسبه ی مقدار پیکسل مرکز کمتر است. این وزن تابع گاوسی از فاصله سطح روشنایی است.

از آنجا که فیلتر غیرخطی است برای هر پیکسل به صورت مجزا کرنل range را محاسبه کرده و در کرنل spatial ضرب میکنیم تا ماتریس وزن بدست بیاید. سپس برای محاسبه مقدار پیکسل، جمع وزن دار بر روی پیکسل های اطراف انجام میدهیم.

$$h_g = 1.95 \sigma_{noise}^2$$

$$h_x = 0.02 \sqrt{W_{image}^2 + H_{image}^2}$$

تصویر سمت راست حذف نویز شده است. واضح است که فیلتر bilateral عملکرد بهتری نسبت به گاوسی کلاسیک دارد و لبه ها را بهتر حفظ میکند.



پارامتر  $hx$  در واقع میزان پهنای کرنل مکانی را نشان میدهد به این صورت که هرچه بیشتر باشد این کرنل سطح بیشتری از تصویر را در بر میگیرد و اثر پیکسل های با فاصله مکانی بیشتر را افزایش میدهد و تصویر را مات تر میکند. هرچه کمتر باشد تعداد پیکسل های کمتری در میانگین اثر قالب را دارند و اگر خیلی کم باشد حذف نویز انجام نمیشود. پارامتر  $hg$  نیز هرچه بیشتر باشد طیف بیشتری از روشنایی پیکسل ها را در بر میگیرد و پیکسل های با اختلاف سطح روشنایی زیاد را نیز اثر زیادی در محاسبه میانگین میدهد. در تصاویری که فرکانس مکانی بالایی دارند مقدار  $hx$  باید کم باشد و در تصاویری که دارای لبه های زیادی است  $hg$  باید کم باشد.

3.

ابتدا نویز را به تصاویر اضافه کرده سپس فیلتر را بر روی آن ها به ازای مقادیر مختلف پارامتر ها اعمال میکنیم و نمودار PSNR را رسم میکنیم.

برای پیاده سازی، به ازای هر پیکسل یک پچ به اندازه Wsim در اطراف آن پیکسل در نظر گرفته و میزان شباهت آن (فاصله اقلیدسی) با پچ های دیگر در فاصله کمتر از W را محاسبه میکنیم و سپس جمع وزن دار انجام میدهیم.

**sigma = 0.1**



**sigma = 0.2**



**sigma = 0.3**



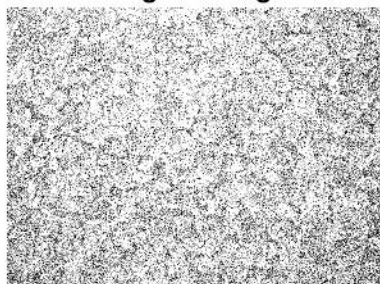
**sigma = 0.4**



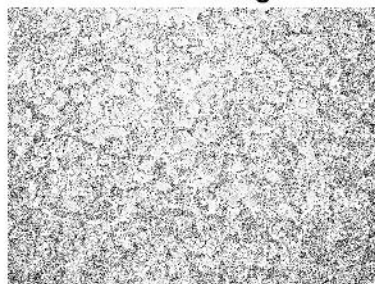
**sigma = 0.5**



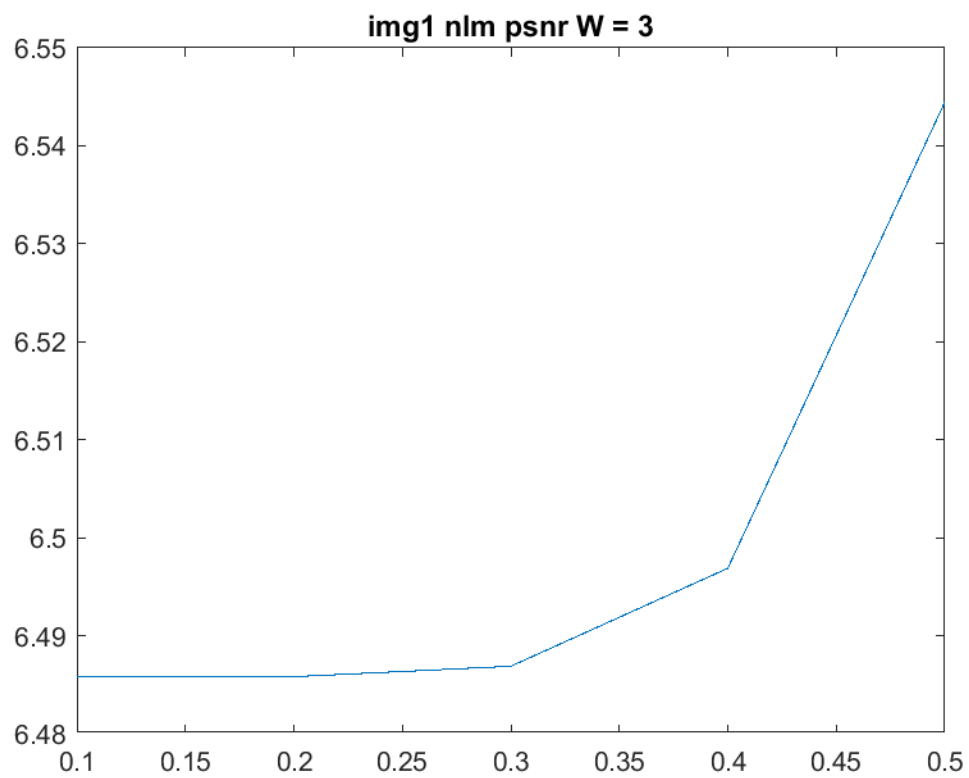
**Original Image**



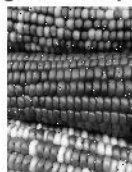
**Filtered Image**







**sigma = 0.1.png sigma = 0.2.png sigma = 0.3.png sigma = 0.4.png sigma = 0.5.png**

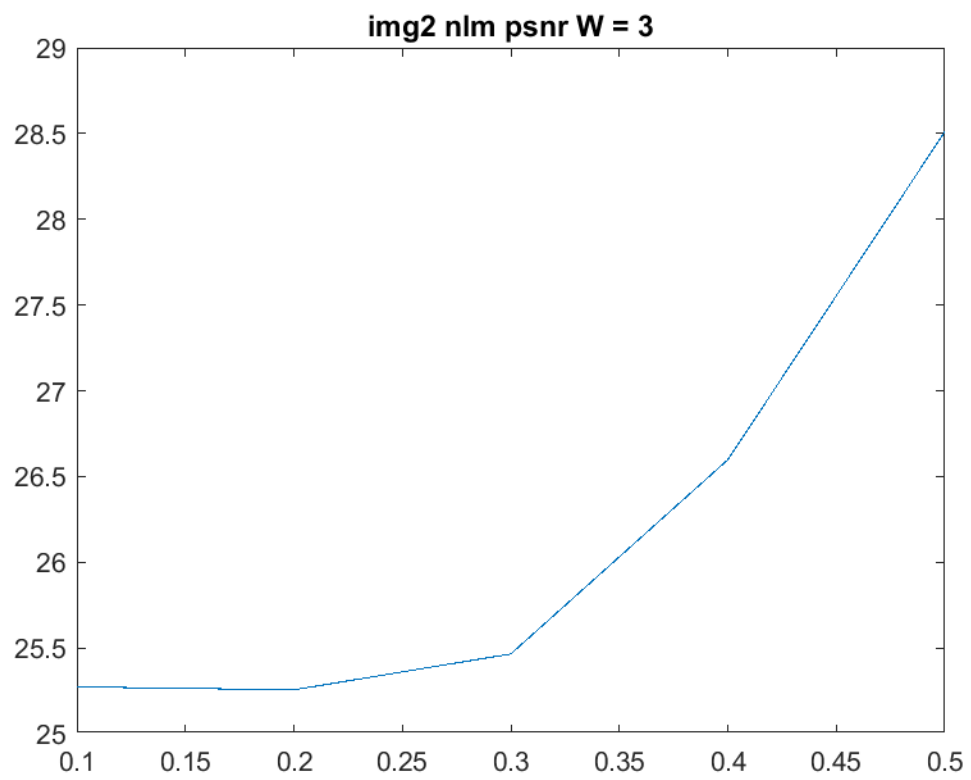


**Original Image**

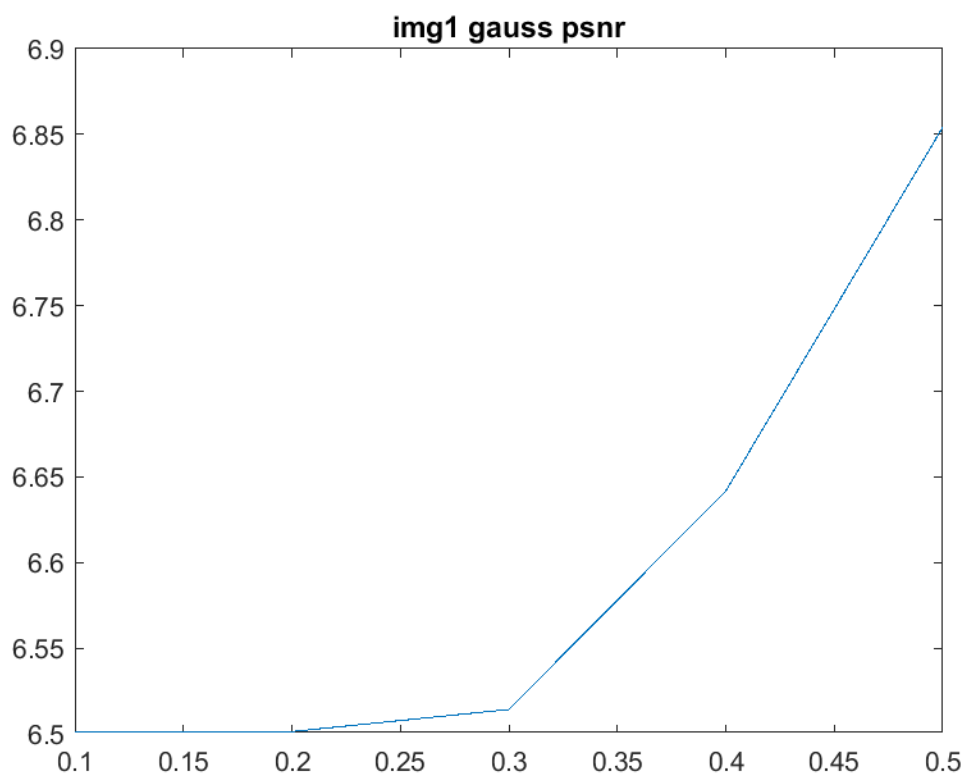


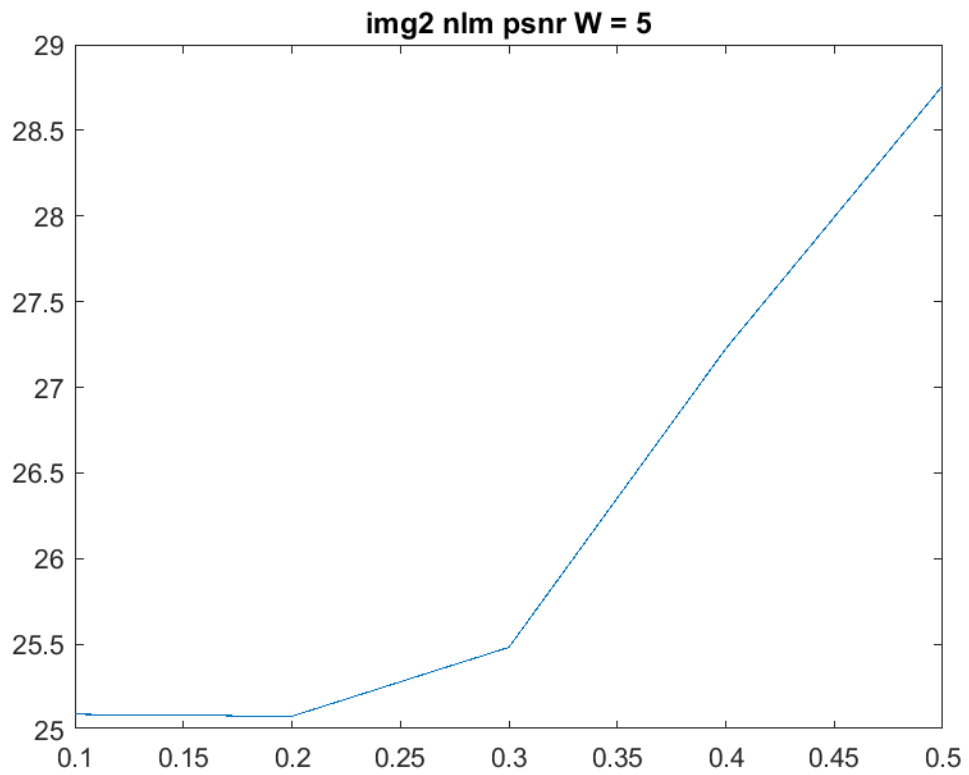
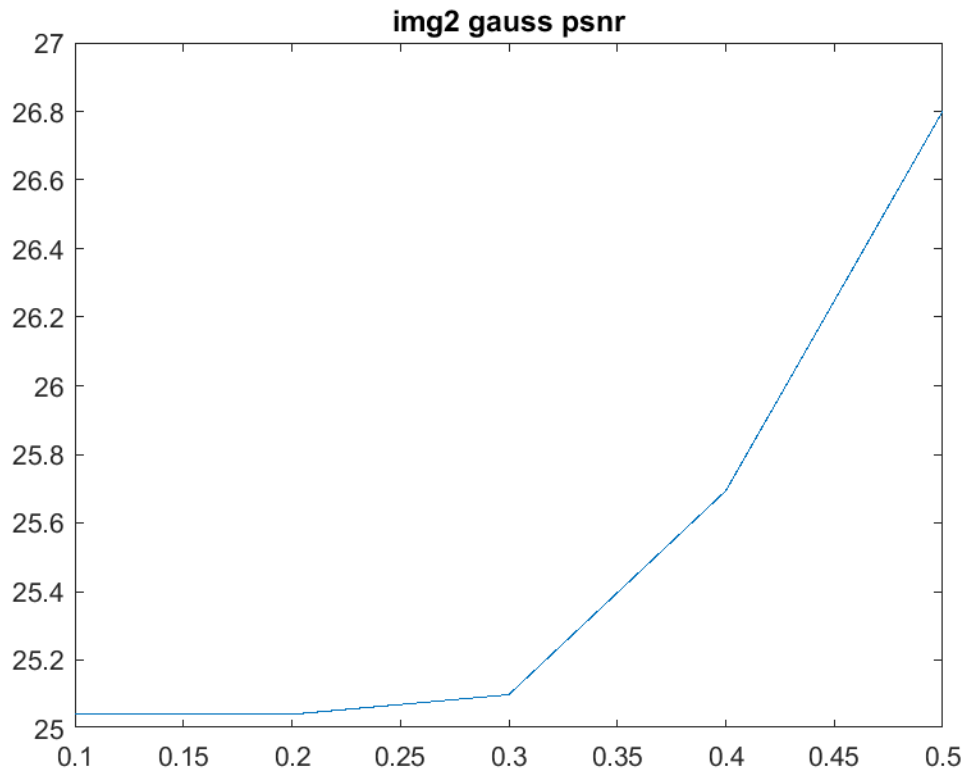
**Filtered Image**





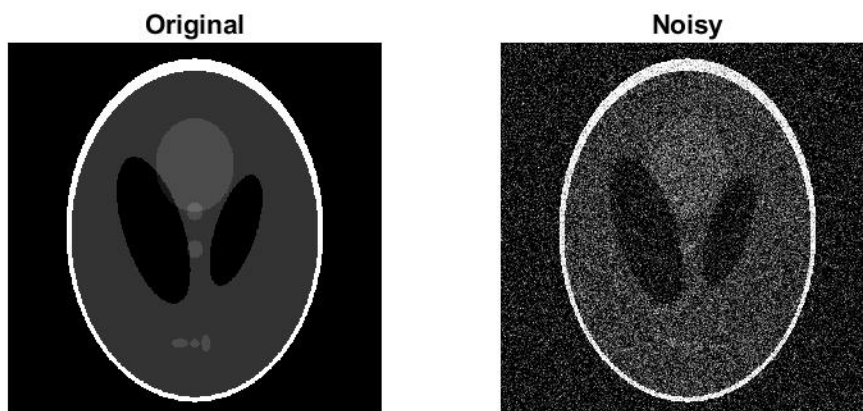
برای فیلتر گاوسی نمودار PSNR بر حسب sigma را رسم میکنیم. با توجه به نتایج الگوریتم NLM عملکرد بهتری نسبت به فیلتر گاوسی دارد.





4.

الف) با استفاده از دستور `imnoise`، نویز گاوسی با واریانس 0.05 و میانگین صفر به تصویر اضافه میکنیم.



ب) برای پیاده سازی فیلتر ابتدا تابعی برای محاسبه مشتق جزئی مینویسیم. به این صورت که در ورودی راستای مدنظر و `forward` یا `backward` بودن آن را در ورودی بگیرد و با شیفت دادن تصویر در آن راستا و کم کردن آن از تصویر اصلی مشتق جزئی را محاسبه کند. سپس مقدار گرادیان را در لبه ها و در راستای عمود بر لبه برابر صفر قرار دهد (مطابق شرایط مرزی).

سپس الگوریتم زیر را پیاده سازی میکنیم و برای جلوگیری از صفر شدن مخرج مقدار `eps` به آن اضافه مینماییم.

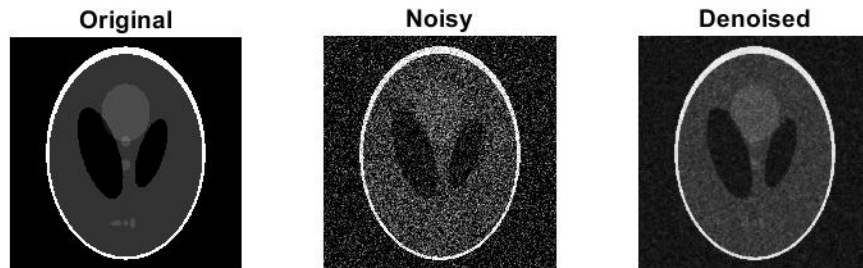
$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t$$

$$* \left\{ \nabla_x^- * \left( \frac{\nabla_x^- u_{i,j}^n}{\sqrt{(\nabla_x^- u_{i,j}^n)^2 + \left( m(\nabla_y^+ u_{i,j}^n, \nabla_y^- u_{i,j}^n) \right)^2}} \right) + \nabla_y^- \right.$$

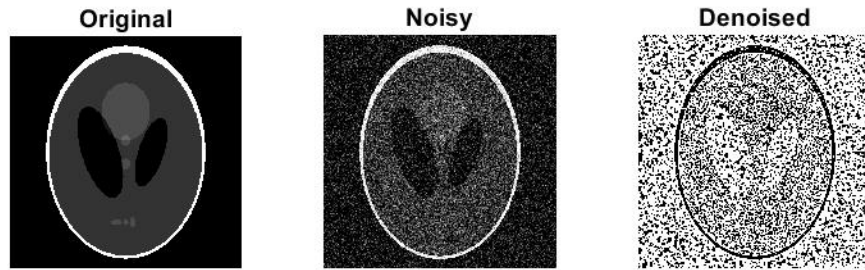
$$* \left. \left( \frac{\nabla_y^+ u_{i,j}^n}{\sqrt{(\nabla_y^- u_{i,j}^n)^2 + \left( m(\nabla_x^+ u_{i,j}^n, \nabla_x^- u_{i,j}^n) \right)^2}} \right) \right\} + \Delta t * \lambda * (f_{i,j} - u_{i,j}^n)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N - 1$$

Iterations = 10



Iterations = 100



(c)

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{Var(image)}{Var(image\ denoised - image)} \right)$$

SNR for 10 iterations = 1.026640e+01

5.902811e+01 = SNR for 100 iterations



.5

$\lambda = 10;$

$\alpha = 0.01;$

$\text{GapTol} = 0.01;$

$N_{\text{iterations}} = 100;$



**TV GPCL**





TV Chambolle



عملکرد کد TV GPCL به صورت زیر است:

- Initialize variables and compute the gradient of the noisy image ( $g$ ).
- Compute the energy based on the divergence of  $w$  and the noisy image.
- Update the primal variable  $u$  based on the dual variable  $w$ .
- Perform gradient projection with a fixed step length to update  $w$ .
- Compute the energy and duality gap at each iteration.
- Check for convergence based on the relative duality gap.

الگوریتم در مقاله به صورت زیر توضیح داده شده است و با استفاده از دوگان مسئله بهینه سازی محدب و نقطه شروع با حدس اولیه، جواب مسئله Total Variation را بدست می آورد.

مسئله دوگان به صورت زیر است:

$$\min_{\|w\| \leq 1} \sum_{i,j} |Div(w) - \lambda f|$$

*subject to*  $\|w\| \leq 1$

---

**Algorithm 1** Chambolle's projection algorithm for gray-scale TV-denoising

---

**Input:** A noisy image  $f(i, j)$  as a  $N \times N$  matrix, a trade-off parameter  $\lambda > 0$ , a time-step parameter  $\delta_t > 0$  and an algorithm tolerance  $tol > 0$ .

**Output:** The denoised image  $u(i, j)$  as a  $N \times N$  matrix.

```
 $p \leftarrow 0$ 
while  $\max_{1 \leq i, j \leq N} \{|p^{n+1}(i, j) - p^n(i, j)|\} > tol$  do
    for all pixel  $(i, j)$  in the image do
         $p(i, j) \leftarrow \frac{p(i, j) + \delta_t D(\operatorname{div} p - \lambda f)(i, j)}{1 + \delta_t |D(\operatorname{div} p - \lambda f)(i, j)|}$ 
    end for
end while
return  $u = f - \frac{1}{\lambda} \operatorname{div} p$ .
```

---

عملکرد کد TV Chambolle به صورت زیر است:

- Initialize variables and compute the gradient of the noisy image (g).
- Compute the energy based on the divergence of w and the noisy image.
- Update the primal variable u based on the dual variable w.
- Perform Chambolle's semi-implicit gradient descent to update w.
- Compute the energy and duality gap at each iteration.
- Check for convergence based on the relative duality gap.

الگوریتم در مقاله به صورت زیر توضیح داده شده است و با استفاده از دوگان مسئله بهینه سازی محدب و نقطه شروع با حدس اولیه، جواب مسئله Total Variation را بدست می آورد.

مسئله دوگان به صورت زیر است:

$$\min_{w} \sum_{i,j} |Div(w) - \lambda f|$$

$$\text{subject to } |w| \leq 1$$

Chambolle's projection algorithm for TV-denoising is based on a dual formulation. Chambolle discusses not only its application to the image denoising problem (4) for additive white Gaussian noise, but also to the inverse problem of zooming and to the computation of the mean curvature motion of interfaces. It has also been extended to image deblurring or image inpainting and colorization. For denoising, the algorithm provided in Chambolle's paper has proved to be quite efficient for regularizing noisy images without over-smoothing the boundaries of the objects.