A. 4.1

geg.:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u \quad ; \quad y = h(x) = x_1$$

Relativer Grad

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} y = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x}$$

$$= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \left(f(x) + g(x) u \right)$$

$$= L_f h(x) + L_g h(x) u$$

$$= (x_3 - x_2^3) + 0$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} \dot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(L_f h(x) + \cancel{L_g h(x) u}^{\,0} \right) \cdot \left(f(x) + g(x) u \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(x_3 - x_2^3 \right) \cdot \left(f(x) + g(x) u \right)$$

$$= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) u$$

$$= \left(+3x_2^3 + x_1^2 - x_3 \right) + 1 u$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x_3 - x_2^3) = \begin{bmatrix} 0 & -3x_2^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_g L_f^1 h(x) = L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = 2}}$$

Byrnes-Isidori-Normalform

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

$\phi_{r+1}(x)$ ist so zu bestimmen, dass

$$\frac{d}{dt}\phi_3(x) = L_f\phi_3(x) + \underbrace{L_g\phi_3(x)}_{\stackrel{!}{=}0} u$$

durch diese Wahl ist die Nulldynamik unabhängig von u

$$L_g\phi_3(x) = \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\phi_3(x) \stackrel{!}{=} 0$$

=> jede Funktion von x_1, x_2 oder x_1 und x_2 erfüllt das

=> man will dass die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ \phi_3(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 & 1 \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

regulär ist.

= $\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}$ darf nicht 0 sein, sonst ist Zeile 3 linear abh. von Zeile 1

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi_3(x) = x_2}}$$

Transformiertes System

$$\dot{x}_1 = x_3 - x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 - x_3$$
$$L_f^2 h(x) = 3x_2^3 + x_1^2 - x_3$$
$$L_g L_f h(x) = 1$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 + z_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ L_f^2 h(\Phi^{-1}(z)) + L_g L_f h(\Phi^{-1}(z))\, u \\ L_f \Phi_3(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix}$$

$$L_f \Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x} f(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x_2) f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} = -x_2$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 3z_3^3 + z_1^2 - z_2 - z_3^3 + u \\ -z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 2z_3^3 - z_2 + z_1^2 + u \\ -z_3 \end{bmatrix}$$

Regelgesetz

System:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \underbrace{2z_3^3 - z_2 + z_1^2}_{b(z)} + \underbrace{1}_{a(z)} u$$

$$\dot{z}_3 = -z_3$$

$$y = z_1$$

Zustandsrückführung:

$$u = \frac{1}{a(z)} \left(-b(z) + v \right)$$

$$= -2z_3^3 + z_2 - z_1^2 + v$$

Geschlossener Kreis:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

$$\dot{z}_3 = -z_3 \qquad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^2}$$

$$y = z_1$$

! Das Teilsystem $\dot{z}_3 = -z_3$ ist im geschlossenen Kreis nicht beobachtbar

Es muss von alleine stabil sein ($\dot{z}_3 = -z_3$ ist stabil)

Nulldynamik

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \eta = \begin{bmatrix} z_3 \end{bmatrix}$$

; Nulldynamik: $\dot{\eta} = q(\xi, \eta)\big|_{\xi = 0}$

$\dot{z}_3 = -z_3 \quad \rightarrow$ stabil