

## 3 Energie- und Lyapunovbasierte Reglerentwurfsmethoden

Ziel dieser Übung ist es Regelungsverfahren, welche auf der Lyapunovtheorie basieren, auf praktische Problemstellungen anzuwenden. Hierzu sollen folgende Themen bearbeitet werden:

1. Die CT- und PD-Regelung von Starrkörpersystemen.
2. Die Regelung eines Arbeitspunktes eines nichtlinearen Systems durch einen Backstepping-Regler.
3. Die Vorgabe einer virtuellen Systemdynamik für ein nichtlineares System mittels Backstepping.

Studieren Sie als Vorbereitung auf die vorliegende Übung zumindest folgendes Skriptum:

- Skriptum zur VO Regelungssysteme 2 (SS 2019) [1]
  - Kapitel 3
  - Kapitel 5

Bei Fragen oder Anregungen zu dieser Übung wenden Sie sich bitte an

- Ulrich Knechtelsdorfer <[knechtelsdorfer@acin.tuwien.ac.at](mailto:knechtelsdorfer@acin.tuwien.ac.at)> oder
- Georg Janisch <[janisch@acin.tuwien.ac.at](mailto:janisch@acin.tuwien.ac.at)>.



Für diese Laborübung stehen auf der Homepage des Instituts vorbereitete MATLAB/SIMULINK und MAPLE Dateien im zip-Archiv **EnLyap.zip** zum Download bereit.



### 3.1 PD- und Computed-Torque-Regelgesetz

Bei der Regelung von vollaktuierten Starrkörpersystemen (Anzahl der Eingänge = Anzahl der Freiheitsgrade) gibt es eine Vielzahl möglicher Regelungsstrategien. In diesem Abschnitt gilt es zwei gängige Strategien, nämlich das PD- sowie das Computed-Torque-Regelgesetz (CT-Regelgesetz), auf einen bereits modellierten 3-Freiheitsgrade Roboter anzuwenden. Der große Unterschied der beiden Regelgesetze liegt in deren Zielsetzung. Beim PD-Regelgesetz wird eine Ruhelage, beim CT-Regelgesetz eine Solltrajektorie stabilisiert. Da gewisse Parameter des zu regelnden Systems im Allgemeinen nicht exakt bekannt sind, wird abschließend für den Roboter beispielhaft ein Lastmassenschätzer entworfen.

### Der RRP-Roboter

In Abbildung 3.1 ist ein RRP-Roboter (Revolute Revolute Prismatic) mit zwei rotatorischen Gelenken und einem translatorischen Gelenk schematisch dargestellt. Die einzelnen Gelenke sind über starre Glieder der Länge  $l_i$  und der Masse  $m_i$  miteinander verbunden. Der Schwerpunkt jedes Stabes liegt bei  $l_i/2$  und die jeweiligen Hauptträgheitsmomente in Stablängs- und Stabquerrichtung sind durch  $I_{xx,i}$ ,  $I_{yy,i}$ ,  $I_{zz,i}$  gegeben (Deviationsmomente sind zu vernachlässigen). Neben einer linearen Reibung  $d_i$  in jedem Gelenk wird auch die Schwerkraft berücksichtigt. Weiters sorgen Motoren in den Gelenken, durch Einbringen der Stellkraft  $F$  und der Stellmomente  $M_1$  und  $M_2$ , für die Positionierung des Roboters. Dabei ist zu beachten, dass der mögliche Verfahrweg des translatorischen Gelenks von  $s \in [0, l_3]$  eingehalten wird. Die Abbildung 3.1 zeigt die Roboterposition für die Winkel  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Die Zahlenwerte aller benötigten Parameter befinden sich in Tabelle 3.1.

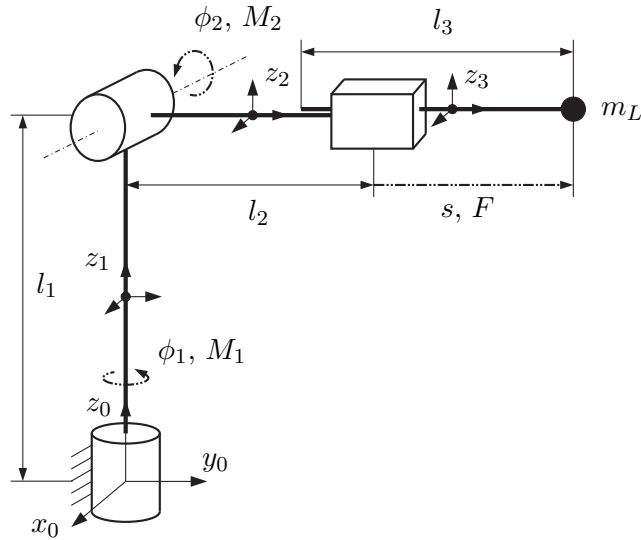


Abbildung 3.1: RRP-Roboter.

Die Modellierung des Roboters mit dem Lagrange-Formalismus (siehe z.B. [1], [2] oder [3]), führt auf die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{r}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{q} = [\phi_1, \phi_2, s]^T$  den Vektor der generalisierten Koordinaten,  $\dot{\mathbf{q}}$  den Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten,  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  die Massenmatrix,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  die Matrix der Zentrifugal- und Coriolisterme,  $\mathbf{r}(\dot{\mathbf{q}})$  den Vektor der linearen Reibkräfte und -momente und  $\boldsymbol{\tau} = [M_1, M_2, F]^T$  den Vektor der generalisierten externen Kräfte und Momente.

### Reglerentwurf

Für den Roboter wird sowohl ein PD- als auch ein CT-Regelgesetz entworfen, wobei letzteres abschließend noch um einen Schätzer für die Lastmasse erweitert wird. Als Stellgrößen stehen dem Regler die Einträge des generalisierten externen Kraftvektors  $\boldsymbol{\tau}$  zur

Größe	Wert	
$m_1, m_2, m_3, m_L$	20	kg
$l_1, l_2, l_3$	1	m
$I_{laengs}$	$7 \cdot 10^{-2}$	kg m <sup>2</sup>
$I_{quer}$	1.7	kg m <sup>2</sup>
$d_1, d_2$	1	N m s
$d_3$	10	N s/m

Tabelle 3.1: Parameter des RRP-Roboters.

Verfügung. Handelt es sich bei den eingesetzten Stellgliedern um Elektromotoren, dann kann die Spannung, nicht aber die Kraft bzw. das Moment vorgegeben werden. Da jedoch die unterlagerte Momentenregelung der Elektromotoren im Allgemeinen viel schneller als die Roboterdynamik ist, kann deren Dynamik näherungsweise vernachlässigt werden. Als Ausgangsgröße des Roboters wird dessen Lastmassenposition  $\mathbf{p}_L = [x_L, y_L, z_L]^T$  verwendet. Im Folgenden werden die in [1] (Kapitel 5.4 und Kapitel 5.5) gezeigten Reglerentwürfe kurz zusammengefasst.

Mit einem *PD-Regelgesetz* kann eine konstante Sollposition der generalisierten Koordinaten asymptotisch stabilisiert werden. Wie in [1] gezeigt, hat das entsprechende Regelgesetz die Form

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_P(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{soll}}) - \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) . \quad (3.2)$$

Die Kompensation der Potenzialkräfte  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  garantiert dabei, dass  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{soll}}$  eine Ruhelage des geschlossenen Kreises ist. Um den Einfluss der Einträge der Matrizen  $\mathbf{K}_P$  und  $\mathbf{K}_D$  besser verstehen zu können, ist es anschaulich, sich diese als zwischen Soll- und Istposition befindliche Federn und Dämpfer vorzustellen. Damit kann deren Auswirkung einerseits auf das Einschwingverhalten des Regelkreises und andererseits auf die bleibende Regelabweichung bei vorhandenen Störgrößen oder Parameterunsicherheiten verstanden werden.

Der Reglerentwurf mittels *Computed-Torque* Methode setzt sich aus zwei Schritten zusammen. Im Linearisierungsschritt wird das im Allgemeinen nichtlineare Streckenmodell durch das CT-Regelgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{r}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.3)$$

so transformiert, dass der geschlossene Kreis vom neuen Stelleingang  $\mathbf{v}$  zu den generalisierten Lagekoordinaten  $\mathbf{q}$  durch das lineare System

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (3.4)$$

beschrieben wird. Im Stabilisierungsschritt wird nun ein Regelgesetz für das lineare System gesucht, sodass das Fehlersystem zu einer zweifach stetig differenzierbaren Solltrajektorie

$\mathbf{q}_{\text{soll}}(t)$  gleichmäßig global asymptotisch stabil ist. Dies gelingt, indem  $\mathbf{v}$  in der Form

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_{\text{soll}} - \mathbf{K}_0 \underbrace{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{soll}})}_{\mathbf{e}_q} - \mathbf{K}_1 \underbrace{(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{\text{soll}})}_{\dot{\mathbf{e}}_q} \quad (3.5)$$

mit geeigneten positiv definiten Diagonalmatrizen  $\mathbf{K}_0$  und  $\mathbf{K}_1$  vorgegeben wird. Die Fehlerdynamik lautet dann

$$\ddot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_q = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Mit der Wahl der Matrizen  $\mathbf{K}_0$  und  $\mathbf{K}_1$  kann die entkoppelte Fehlerdynamik gezielt eingestellt werden (z.B. Polvorgabe).

Das soeben besprochene CT-Regelgesetz kann um einen *Lastmassenschätzer* erweitert werden, um die Regelung robust gegenüber Veränderungen der Lastmasse zu machen. Für die Herleitung des Adaptionsgesetzes wird auf das Vorlesungsskript [1] (Kapitel 5.5) verwiesen.



Zur Lösung der folgenden Aufgaben steht auf der Homepage der Lehrveranstaltung ein zip-Archiv zum Download zur Verfügung. Dieses enthält die Modellierung der Strecke in MAPLE, ein MATLAB/Simulink-Modell zur Simulation des geschlossenen Regelkreises samt einer Parameterdatei und einer Datei zum Plotten der simulierten Lastmassenposition. Die Dynamik des Roboters ist im MATLAB/Simulink-Modell bereits als MATLAB Function implementiert. Die Parameterdatei wird beim Starten einer Simulation automatisch ausgeführt. Die im Simulationsmodell vorhandenen Subblöcke haben verschiedene Aufgaben: „Vorwärtskinematik“ berechnet die Lastmassenposition in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und „Inverse Kinematik“ macht genau das Gegenteil. Weiters sorgt „Sollwertfilter“ dafür, dass der vorgegebene Sollverlauf  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{soll}}$  in ein zweifach stetig differenzierbares Führungssignal  $\mathbf{q}_{\text{soll}}$  umgewandelt wird. Damit stehen dem Regler neben dem Führungssignal  $\mathbf{q}_{\text{soll}}$  auch dessen erste und zweite Ableitung  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{soll}}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}_{\text{soll}}$  zur Verfügung. Es kann zwischen drei verschiedenen Sollverläufen gewählt werden. Durch Auswahl des Blocks „Sollwert\_Ausgangspunkt“ wird ein stationäres Führungssignal  $\mathbf{q}_{\text{soll}} = \mathbf{q}(0) = [-\pi/2 \text{ rad}, 0 \text{ rad}, 0.5 \text{ m}]^T$  vorgegeben, was einer konstanten Lastposition von  $\mathbf{p}_{L,\text{soll}} = \mathbf{p}_L(0) = [1.5 \text{ m}, 0 \text{ m}, 1 \text{ m}]^T$  entspricht. Während die Lastmasse bei dieser Auswahl in ihrer Anfangsposition verbleibt, kann über „Sollwert\_Arbeitspunktwechsel“ auch ein Sprung in der Lastposition auf  $\mathbf{p}_{L,\text{soll}} = [0 \text{ m}, 1.5 \text{ m}, 2 \text{ m}]^T$  gefordert werden. Über „Sollwert\_Sinus“ kann auch ein sinusförmiger Sollverlauf für die Lastposition ausgewählt werden. Sollte während der Simulation der dritte Roboterarm außerhalb seines Verfahrbereiches  $s \in [0, l_3]$  geraten oder die Massenmatrix  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  singulär werden, dann wird die Simulation gestoppt und rechts oben in einer der numerischen Anzeigen eine 1 ausgegeben. Weiters ist eine Visualisierung des Roboters implementiert für welche die Matlab-Toolboxen *Simscape* und *Simscape Multibody* benötigt werden.



**Aufgabe 3.1 (PD-Reglerentwurf).** Implementieren Sie den PD-Regler in Form einer zeitdiskreten MATLAB Function mit einer Abtastzeit  $T_s = 5$  ms. Setzen Sie die Reglermatrizen in der Form  $\mathbf{K}_P = \text{diag}(k_{p1}, k_{p2}, k_{p3})$  und  $\mathbf{K}_D = \text{diag}(k_{d1}, k_{d2}, k_{d3})$  an. Bestimmen Sie systematisch die Einträge so, dass bei stationärem Führungssignal und einer sprungförmigen Störung am Streckeneingang von  $\tau_{\text{Störung}} = [250 \text{ Nm}, 250 \text{ Nm}, 200 \text{ N}]^T$  (siehe Block „Störung“) die Regelabweichung  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{soll}}$  den stationären Wert  $\mathbf{e}_\infty = [1^\circ, 1^\circ, 1 \text{ cm}]^T$  annimmt. Das Einschwingen soll näherungsweise aperiodisch erfolgen.

**Hinweis:** Die Abtastzeit können Sie im „Ports and Data Manager“ der MATLAB Function unter Angabe der *Update Method* „Discrete“ einstellen. Außerdem empfiehlt es sich, die Struktur mit den Reglerparametern explizit als Parameter zu übergeben. Weisen Sie dazu ebenfalls im „Ports and Data Manager“ der Embedded MATLAB Function der Parameterstruktur das Scope „Parameter“ zu.

Obwohl das PD-Regelgesetz zur Stabilisierung einer Ruhelage entwickelt wurde, liefert es auch für langsame Trajektorien gute Ergebnisse. Überprüfen Sie dies durch Simulation der sinusförmigen Trajektorie für die Position der Lastmasse bei ausgeschalteter Störung. Variieren Sie dabei die Frequenz für die  $z$ -Koordinate der Lastmasse, indem Sie einmal  $f_z = 0.2 \text{ Hz}$  und einmal  $f_z = 2.0 \text{ Hz}$  wählen ( $f_z$  kann in der Parameterdatei vorgegeben werden). Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse und halten Sie die entsprechenden Dateien für Diskussionen während der Laborübung bereit. Verwenden Sie dazu das MATLAB-Skript **Auswertung.m**.

**Aufgabe 3.2 (CT-Reglerentwurf mit und ohne Lastmassenschätzer).** Implementieren Sie den CT-Regler wie den PD-Regler in Form einer zeitdiskreten MATLAB Function mit der Abtastzeit  $T_s = 5$  ms. Bestimmen Sie die Einträge der Diagonalmatrizen  $\mathbf{K}_0 = \text{diag}(k_{01}, k_{02}, k_{03})$  und  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12}, k_{13})$  in der Form, dass alle Eigenwerte der Fehlerdynamik bei  $\lambda = -10$  zu liegen kommen (Polvorgabe). Die Qualität der entworfenen Regelung soll nun in den folgenden Unterpunkten anhand einiger Testszenarios beurteilt werden.

1. Nominelles Verhalten: Simulieren Sie das Regelkreisverhalten bei sinusförmiger Solltrajektorie ( $f_z = 2.0 \text{ Hz}$ ), ausgeschalteter Störung und idealer Übereinstimmung der Anfangswerte von Soll- und Isttrajektorie, d.h.  $\mathbf{q}_{\text{soll}}(0) = \mathbf{q}(0) = [-\pi/2 \text{ rad}, 0 \text{ rad}, 0.5 \text{ m}]^T$ . Welche Eigenschaft haben die Verläufe von  $\mathbf{q}_{\text{soll}}$  und  $\mathbf{q}$ ?
2. Anfangswertabweichung: Simulieren Sie wieder das nominelle Verhalten, jedoch für verschiedene Anfangswerte von Soll- und Isttrajektorie. Stellen Sie dazu in der Parameterdatei folgende Werte ein:  $\text{par\_delta\_phi10} = \text{par\_delta\_phi20} = \pi/4 \text{ rad}$  und  $\text{par\_delta\_s0} = 0.25 \text{ m}$ . Entspricht der Verlauf des Fehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{soll}}$  der vorgegebenen Fehlerdynamik?
3. Störverhalten: Simulieren Sie erneut das nominelle Verhalten ( $\text{par\_delta\_phi10} =$

$par\_delta\_phi20 = par\_delta\_s0 = 0$ ), allerdings unter Einwirkung einer sprunghaften Störung. Legen Sie dazu den entsprechenden Schalter im Simulationsmodell um. Kann die Störung ausgeregelt werden?

- Parameterschwankung: Simulieren Sie ein weiteres Mal das nominelle Verhalten (die Störung muss dabei ausgeschaltet sein), jedoch unter Veränderung der Streckenlastmasse. Der Regler soll dabei weiterhin mit dem nominellen Wert von  $m_L = 20 \text{ kg}$  arbeiten.

Dokumentieren Sie die Resultate jedes Testszenarios und halten Sie diese Ergebnisse für die Laborübung bereit. Verwenden Sie dazu das MATLAB-Skript **Auswertung.m** (s. Verzeichnis CT/Matlab).

Erweitern Sie den zuvor entwickelten CT-Regler um einen Lastmassenschätzer. Realisieren Sie den adaptiven Regler ebenfalls als zeitdiskrete MATLAB Function mit der Abtastzeit  $T_s = 1 \text{ ms}$ . Approximieren Sie dabei die Integration der Schätzdifferentialgleichung durch das Euler-Vorwärts-Verfahren. Der Zustand des Schätzers kann z. B. durch eine **persistent**-Variable oder einen *Delay*-Block implementiert werden. Simulieren Sie nun erneut Punkt 4 und studieren Sie den Einfluss unterschiedlicher  $\Gamma$ -Werte auf die Adaptionsgeschwindigkeit. Verwenden Sie die Näherung  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \approx \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{soll}})$ .

## 3.2 Arbeitspunktstabilisierung mittels Backstepping

*Integrator Backstepping* ist ein nichtlineares Reglerentwurfsverfahren. Dieses ist für Systeme in strict-feedback Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + g_2(\mathbf{x}_1, x_2)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_1, x_2, \dots, x_k) + g_k(\mathbf{x}_1, x_2, \dots, x_k)u\end{aligned}\tag{3.7}$$

mit den Zuständen  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}$ ) anwendbar. Im Folgenden wird das Backstepping-Verfahren zur Stabilisierung eines Arbeitspunktes angewendet.

### 3.2.1 Ein System aus der Epidemieforschung

Die Ausbreitung von Krankheiten kann durch nichtlineare Differentialgleichungssysteme beschrieben werden [4]. Eines der einfachsten Modelle dieser Form ist das sogenannte SIR-Modell

$$\dot{s} = -\beta \frac{is}{N} + \delta r - u\tag{3.8a}$$

$$\dot{i} = \beta \frac{is}{N} - \gamma i\tag{3.8b}$$

$$\dot{r} = \gamma i - \delta r + u\tag{3.8c}$$

$$s + i + r = N.\tag{3.8d}$$

Bei diesem Modell wird die zeitliche Evolution von anfälligen Individuen  $s$  (susceptibles), erkrankten Individuen  $i$  (infected), und resistenten Individuen  $r$  (resistant) beschrieben. Die Anzahl der Individuen  $N$  bleibt dabei konstant. Weiters bezeichnet  $\beta$  die Kontaktrate,  $\frac{1}{\gamma}$  die mittlere Dauer einer Erkrankung,  $\frac{1}{\delta}$  die mittlere Dauer der Immunität, und  $u$  stellt eine Impftrate dar.

Das Gleichungssystem (3.8) stellt kein gewöhnliches Differentialgleichungssystem (ODE) sondern ein Differential-Algebraisches-System dar. Durch Umformen der Nebenbedingung (3.8d) und einsetzen in (3.8) kann der Zustand  $s$  eliminiert werden. Wird weiters angenommen, dass  $N = 1$  gilt, womit die Zustände direkt als prozentuelle Werte interpretiert werden können, so ergibt sich das nichtlineare gewöhnliche Gleichungssystem

$$\dot{i} = \beta i(1 - i - r) - \gamma i \quad (3.9a)$$

$$\dot{r} = \gamma i - \delta r + u \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 - i - r \\ i \\ r \end{bmatrix}. \quad (3.9c)$$

Im Folgenden wird das System (3.9) mit den in Tabelle 3.2 gegebenen Parametern untersucht und ein Regler dafür entworfen.

Größe	Wert	Anfangszustand	Wert
$\beta$	1	$i_0$	1e-3
$\gamma$	0.1	$r_0$	0
$\delta$	0.01		

Tabelle 3.2: Parameter des SIR-Modells.

### Aufgabe 3.3 (Regelung eines Epidemiemodells).

1. Stellen Sie das Vektorfeld von (3.9) in Matlab für  $u = 0$  dar. Bestimmen Sie die Ruhelagen und zeichnen Sie diese in das Vektorfeld ein. Sind diese (lokal) asymptotisch stabil?

**Hinweis:** Mit dem MATLAB-Befehl `quiver` können Vektorfelder dargestellt werden.

2. Entwickeln Sie einen Backstepping-Regler, welcher die Anzahl an Infizierten um den Wert  $i_{\text{soll}} = 0.02$  stabilisiert. Implementieren Sie sowohl das SIR-Modell (3.9) als auch den Regler als zeitkontinuierliche MATLAB Function in MATLAB/Simulink. Wählen Sie die Reglerparameter so, dass mit dem in Tabelle 3.2 gegebenen Anfangszuständen kein Überschwingen von  $i$  auftritt.
3. In praktischen Aufgabenstellungen ist der verfügbare Bereich der Stellgröße oft

beschränkt. Nehmen Sie an, dass für die Impfrate

$$0 \leq u \leq 0.1 \quad (3.10)$$

gilt. Vergleichen Sie die Vektorfelder der geschlossenen Regelschleife mit und ohne der Stellgrößenbeschränkung. Ist die durch  $i_{\text{soll}}$  definierte Ruhelage mit einem stellgrößenbeschränkten Regler (lokal) asymptotisch stabil?

### 3.3 Impedanzregelung mittels Backstepping

Anders als bei einer Arbeitspunktstabilisierung kann nicht nur ein spezifischer Punkt im Zustandsraum angefahren und stabilisiert werden, sondern ein gewünschtes dynamisches Systemverhalten vorgegeben werden. Dabei wird das vorliegende System so geregelt werden, dass das dynamische Verhalten eines *Sollsystems* imitiert wird. Ein populäres Anwendungsgebiet ist die Impedanzregelung bei welcher der Zusammenhang zwischen (generalisierten) Koordinaten und (generalisierten) Kräften, und damit eine mechanische Impedanz, vorgegeben wird [5].

Im Folgenden wird der Entwurf einer Impedanzregelung mittels Backstepping anhand eines hydraulischen Systems beschreiben. Weiters wird eine Impedanzregelung für ein flexibles Robotergelenk entworfen.

#### 3.3.1 Ein hydraulisches System

##### Systembeschreibung und Modellierung

Das in Abbildung 3.2 skizzierte hydraulische System besteht aus einem doppelwirkenden Hydraulikzylinder, einem Hydrospeicher und einer Masse  $m$  (inklusive Kolben- und Stangenmasse). Der Volumenstrom  $q$  in die Kammer  $a$  des Zylinders kann mit Hilfe eines Servoventils direkt vorgegeben werden. Das System kann z. B. als einfaches Modell einer aktiven Radaufhängung dienen.

Die Kolbenposition sei  $s_k$ , wobei in der Mittelstellung des Zylinders  $s_k = 0$  m gelte. Die Kolbengeschwindigkeit wird mit  $w_k = \dot{s}_k$  bezeichnet. Für  $s_k = 0$  enthält die Kammer  $a$  des Zylinders ein Offset-Ölvolumen  $V_a$ . Die Kolbenstange besitzt den Durchmesser  $D_b$  und der Kolben weist den Durchmesser  $D_a$  auf. Die effektiven Flächen  $A_a$  bzw.  $A_b$  auf der Kolbenseite bzw. der Stangenseite des Zylinders ergeben sich damit zu

$$A_a = \frac{D_a^2 \pi}{4}, \quad A_b = A_a - \frac{D_b^2 \pi}{4}. \quad (3.11)$$

In der Kammer  $a$  des Zylinders muss Massenerhaltung gelten, d.h.

$$\frac{d}{dt} m_a = \rho_a (q - q_{\text{leak}}), \quad (3.12)$$

mit der Masse  $m_a = (V_a + s_k A_a) \rho_a$ , der Dichte des Öls  $\rho_a$  in der Zylinderkammer  $a$ , dem Volumenstrom  $q$  in die Kammer  $a$  sowie dem Leckagevolumenstrom  $q_{\text{leak}}$  zwischen den



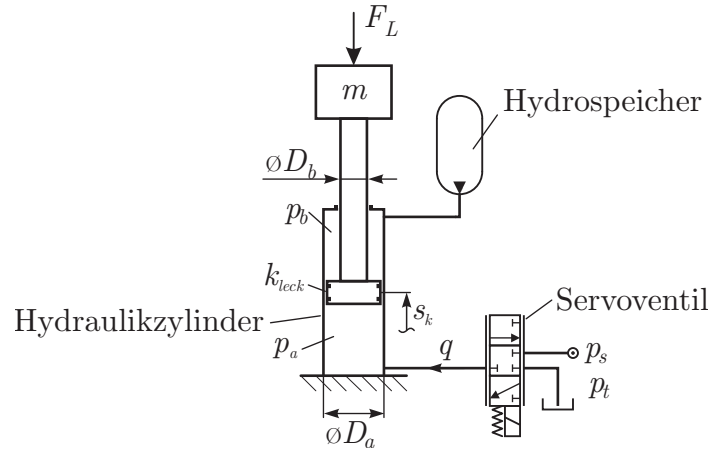


Abbildung 3.2: Ein hydraulisches System.

beiden Kammern des Zylinders. Nimmt man eine laminare Strömung für die Leckage an, so kann der Leckagevolumenstrom in der Form

$$q_{\text{leck}} = k_{\text{leck}}(p_a - p_b), \quad (3.13)$$

mit dem (konstanten) Leckageparameter  $k_{\text{leck}}$  angegeben werden. Zur Berücksichtigung der Kompressibilität des Öls führt man den Kompressionsmodul  $\beta$  in der Form

$$\beta = \rho \left( \frac{d\rho}{dp} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

ein<sup>1</sup>. Die Massenerhaltung ergibt sich dann zu

$$\frac{d}{dt} m_a = \frac{\partial m_a}{\partial s_k} w_k + \frac{\partial m_a}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial p_a} \dot{p}_a = \rho_a (q - q_{\text{leck}}) \quad (3.15)$$

bzw. nach kurzer Umformung

$$\frac{d}{dt} p_a = \frac{\beta}{V_a + A_a s_k} (-A_a w_k - k_{\text{leck}}(p_a - p_b) + q). \quad (3.16)$$

Wie in Abbildung 3.2 ersichtlich, ist die Kammer  $b$  des Zylinders mit einem Blasenspeicher verbunden, welcher den Druck  $p_b$  im Wesentlichen konstant hält. Zusätzlich wird angenommen, dass der Druck  $p_b$  mit einem Druckregelventil geregelt wird, womit die Annahme  $p_b = \text{konst.}$  gerechtfertigt ist.

Zur Beschreibung des Systems fehlt noch die Impulserhaltung der Masse  $m$ . Diese folgt unmittelbar zu

$$\frac{d}{dt} s_k = w_k \quad (3.17a)$$

$$\frac{d}{dt} w_k = \frac{1}{m} (p_a A_a - p_b A_b - d_k w_k - F_L), \quad (3.17b)$$

<sup>1</sup>Man beachte, dass diese Beschreibung nur für Drücke  $p > 0$  gilt.

wobei  $d_k$  die viskose Reibkonstante des Zylinders beschreibt.

Für den späteren Entwurf eines Reglers mit Hilfe des Integrator-Backsteppings erweist sich die Transformation der Zustandsgrößen  $[s_k, w_k, p_a] \rightarrow [s_k, w_k, F_p]$  mit der Druckkraft  $F_p = p_a A_a - p_b A_b$  als sinnvoll. Damit ergibt sich das transformierte System

$$\frac{d}{dt} s_k = w_k \quad (3.18a)$$

$$\frac{d}{dt} w_k = \frac{1}{m} (F_p - d_k w_k - F_L) \quad (3.18b)$$

$$\frac{d}{dt} F_p = \frac{\beta A_a}{V_a + A_a s_k} \left( -A_a w_k - \frac{k_{\text{leck}}}{A_a} (F_p - p_b (A_a - A_b)) + q \right) \quad (3.18c)$$

unmittelbar in strict-feedback Form (vgl. (3.7)). Zur besseren Darstellung führt man  $\mathbf{x}_1 = [s_k, w_k]^T$ ,  $x_2 = F_p$ ,  $u = q$  sowie

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} w_k \\ \frac{1}{m} (-d_k w_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (3.19a)$$

$$f_2 = \left[ \frac{\beta A_a}{V_a + A_a s_k} \left( -A_a w_k - \frac{k_{\text{leck}}}{A_a} (F_p - p_b (A_a - A_b)) \right) \right], \quad g_2 = \left[ \frac{\beta A_a}{V_a + A_a s_k} \right] \quad (3.19b)$$

ein. Hierbei beschreibt  $\mathbf{h}_1$  den Einfluss der externen Lastkraft  $F_L$ .

### Regelungsaufgabe

Mit Hilfe des Reglerentwurfsverfahrens Integrator-Backstepping soll die folgende Regelungsaufgabe gelöst werden. Das hydraulische System (3.18) soll mit Hilfe des Eingangs  $u = q$  so geregelt werden, dass das dynamische Verhalten des geschlossenen Kreises dem eines gewünschten mechanischen Impedanzsystems der Form

$$\frac{d}{dt} s_k^I = w_k^I \quad (3.20a)$$

$$\frac{d}{dt} w_k^I = \frac{1}{m} \left( -F_c^I(s_k^I) - d^I w_k^I - F_L \right) \quad (3.20b)$$

entspricht. Darin bezeichnet  $F_c^I(s_k^I)$  die gewünschte Federcharakteristik und  $d^I$  ist der gewünschte viskose Dämpfungskoeffizient des Impedanzsystems. Die gewünschte Federcharakteristik soll dabei streng monoton steigend sein und die Bedingung

$$F_c^I(s_k^I) s_k^I \geq 0 \quad (3.21)$$

erfüllen. Eine Regelungsaufgabe dieser Form wird in der Literatur auch als Impedanzregelungsaufgabe bezeichnet.

### Reglerentwurf mit bekannten Parametern

Wie bereits gezeigt wurde, kann das mathematische Modell des hydraulischen Systems in strict-feedback Form dargestellt werden. Daher bietet sich für den Entwurf eines Reglers die Entwurfsmethodik des Backsteppings an. Für die folgenden Reglerentwürfe soll die

externe Lastkraft  $F_L$  vernachlässigt werden, d.h.  $F_L = 0$ . Der Einfluss der Lastkraft wird später in den Simulationsstudien untersucht. Im ersten Schritt wird der Zustand  $x_2 = F_p$  als virtuelle Stellgröße für das mechanische Teilsystem  $\mathbf{x}_1$  aufgefasst. Vergleicht man nun das reale mechanische Teilsystem (3.17) bzw. (3.19) mit dem gewünschten mechanischen Impedanzsystem (3.20), so erkennt man unmittelbar, dass die Wahl

$$x_2 = \alpha_1(\mathbf{x}_1) = -F_c^I(s_k) - (d^I - d_k)w_k \quad (3.22)$$

zum gewünschten Verhalten führt. Da angenommen wurde, dass  $F_L = 0$  gilt und unter Berücksichtigung der Eigenschaften von  $F_c^I$  folgen die Ruhelagen des Systems für  $x_2 = \alpha_1(\mathbf{x}_1)$  zu  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ . Zum Nachweis der Stabilität dieser Ruhelage wählt man die Gesamtenergie<sup>2</sup> des gewünschten Impedanzsystems

$$V_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{2}mw_k^2 + \int_0^{s_k} F_c^I(\xi) d\xi. \quad (3.23)$$

Die zeitliche Ableitung dieser Lyapunovfunktion ergibt sich nach kurzer Rechnung unter der Annahme  $x_2 = \alpha_1(\mathbf{x}_1)$  zu

$$\dot{V}_1 = -d^I w_k^2 \leq 0, \quad (3.24)$$

womit die Stabilität des Systems im Sinne von Lyapunov gezeigt ist. Mit Hilfe des Invarianzprinzips von Krassovskii-LaSalle kann sogar die asymptotische Stabilität nachgewiesen werden. Dazu sucht man die größte positiv invariante Menge  $\mathcal{Y}$  in der Menge  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}_1 = 0\} = \{\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2 | w_k = 0\}$ . Im betrachteten Beispiel gilt  $\mathcal{Y} = \{\mathbf{0}\}$ , womit die Ruhelage asymptotisch stabil ist. Da die Lyapunovfunktion noch radial unbeschränkt ist, gilt diese Aussage global.

Im nächsten Schritt wird die Lyapunovfunktion  $V_1$  um den Fehler zwischen realem Zustand  $x_2$  und gewünschtem Zustand  $\alpha_1(\mathbf{x}_1)$  erweitert, d. h.

$$V_2(\mathbf{x}_1, x_2) = V_1(\mathbf{x}_1) + \frac{\gamma}{2}(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1))^2. \quad (3.25)$$

Der Parameter  $\gamma \gg 1$  in (3.25) gewichtet den Fehler  $(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1))$  und damit die Abweichung von Soll- und Istsystem so stark, dass diese maßgeblich den Wert der Lyapunovfunktion  $V_2$  bestimmt. Die zeitliche Ableitung von  $V_2$  ergibt sich unter Verwendung von (3.19) und (3.22) zu

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\mathbf{x}_1, x_2) &= \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) + \gamma(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1)) \left( f_2 + g_2 u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 \alpha_1)}_{\leq 0} + \gamma(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1)) \underbrace{\left( f_2 + g_2 u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1 \right)}_{=-k_1(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1))}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Wahl

$$u = \frac{1}{g_2} \left( -f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1 - k_1(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1)) \right), \quad (3.27)$$

<sup>2</sup>Zeigen Sie, dass diese Funktion die Anforderungen an eine Lyapunovfunktion erfüllt.

mit dem Reglerparameter  $k_1 > 0$  führt zu einer negativ semi-definiten zeitlichen Ableitung  $\dot{V}_2 \leq 0$ . Damit ist die Stabilität des gesamten geschlossenen Kreises gezeigt. Die asymptotische Stabilität des Regelkreises kann wiederum mit Hilfe des Invarianzprinzips von Krassovskii-LaSalle gezeigt werden.

In Gleichung (3.27) wird nochmals die Funktion des Parameters  $\gamma$  deutlich. Er unterdrückt im Stellgesetz den Anteil der Lyapunov-Funktion  $V_1$ . Dieser ist für den Nachweis der Stabilität des Backstepping-Reglers zwar erforderlich, führt aber zu Abweichungen im gewünschten Impedanzverhalten. Soll mit dem Backstepping-Verfahren nur die Stabilisierung einer Ruhelage statt die Vorgabe eines Impedanzverhaltens erreicht werden, muss der Term  $\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1$  nicht extra unterdrückt werden und  $\gamma$  wird zu 1 gewählt.

### Reglerentwurf mit unbekannten Parametern

Im obigen Reglerentwurf wurde angenommen, dass alle Parameter des Systems exakt bekannt sind. In der Realität tritt jedoch häufig der Fall auf, dass ein oder mehrere Parameter nicht oder nur sehr ungenau bestimmt werden können. Im betrachteten Beispiel des hydraulischen Systems soll angenommen werden, dass die Leckage zwar konstant ist, d.h.  $k_{\text{leak}} = 0$ , der genaue Wert jedoch unbekannt ist.

Auch für diesen Fall bietet sich das Backstepping-Verfahren zum Reglerentwurf an, wobei hier jedoch eine Erweiterung um eine Adaption des Leckageparameters notwendig ist. Man beachte, dass der Leckageparameter  $k_{\text{leak}}$  in der gleichen Differentialgleichung wie der Stelleingang  $u = q$  auftritt. Damit ist die sogenannte matching-condition erfüllt und der Entwurf eines adaptiven Reglers gestaltet sich besonders einfach.

Der erste Schritt des Reglerentwurfs ist exakt gleich wie beim Entwurf mit bekannten Parametern und wird daher nicht wiederholt. Um den Einfluss des unbekannten Parameters zu berücksichtigen, führt man die folgende erweiterte Lyapunovfunktion ein

$$V_2(\mathbf{x}_1, x_2, \tilde{k}_{\text{leak}}) = V_1(\mathbf{x}_1) + \frac{\gamma}{2}(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1))^2 + \frac{\gamma}{2k_0}\tilde{k}_{\text{leak}}^2, \quad (3.28)$$

wobei  $\tilde{k}_{\text{leak}} = \hat{k}_{\text{leak}} - k_{\text{leak}}$  den Schätzfehler, d.h. die Differenz zwischen geschätztem Wert  $\hat{k}_{\text{leak}}$  und realem Wert  $k_{\text{leak}}$ , beschreibt. Berechnet man die zeitliche Ableitung, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) + \gamma(x_2 - \alpha_1) \left( f_2 + g_2 u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) \right) + \frac{\gamma}{k_0} \tilde{k}_{\text{leak}} \dot{\tilde{k}}_{\text{leak}} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 \alpha_1) + \gamma(x_2 - \alpha_1) \left( f_2 + g_2 u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1 \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{k_0} \tilde{k}_{\text{leak}} \dot{\tilde{k}}_{\text{leak}} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 \alpha_1) + \gamma(x_2 - \alpha_1) \left( \hat{f}_2 + g_2 u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1 \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{k_0} \tilde{k}_{\text{leak}} \dot{\tilde{k}}_{\text{leak}} - \gamma(x_2 - \alpha_1) (\hat{f}_2 - f_2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Darin kennzeichnet  $\hat{f}_2$ , dass der geschätzte Parameter  $\hat{k}_{\text{leak}}$  in  $f_2$  verwendet wird. Nun kann man nachweisen, dass sich der Ausdruck  $\hat{f}_2 - f_2$  in der Form

$$\hat{f}_2 - f_2 = -(\hat{k}_{\text{leak}} - k_{\text{leak}}) \chi(\mathbf{x}_1, x_2), \quad (3.30)$$

mit

$$\chi(\mathbf{x}_1, x_2) = \frac{\beta}{V_a + A_a s_k} (F_p - p_b(A_a - A_b)) \quad (3.31)$$

schreiben lässt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 \alpha_1)}_{\leq 0} + \underbrace{\gamma(x_2 - \alpha_1) \left( \hat{f}_2 + g_2 u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1 \right)}_{=-k_1(x_2 - \alpha_1)} \\ & + \underbrace{\gamma \tilde{k}_{\text{leak}} \left( \frac{1}{k_0} \dot{\hat{k}}_{\text{leak}} + (x_2 - \alpha_1) \chi \right)}_{=0}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Das Stellgesetz

$$u = \frac{1}{g_2} \left( -\hat{f}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 x_2) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{g}_1 - k_1(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1)) \right) \quad (3.33)$$

enthält nun die geschätzte Größe  $\hat{f}_2$  statt  $f_2$  wie in (3.27), weil statt des unbekannten Parameters  $k_{\text{leak}}$  dessen geschätzter Wert  $\hat{k}_{\text{leak}}$  verwendet werden muss. Dieser wird mit dem Parameterschätzer

$$\frac{d}{dt} \hat{k}_{\text{leak}} = -k_0(x_2 - \alpha_1) \chi \quad (3.34)$$

berechnet. Mit Hilfe des Parameters  $k_0 > 0$  kann die Dynamik des Parameterschätzers gezielt beeinflusst werden.

Offensichtlich ist die zeitliche Ableitung (3.32) der (positiv definiten) erweiterten Lyapunovfunktion  $V_2$  negativ semi-definit, womit die Stabilität im Sinne von Lyapunov gezeigt ist. Die asymptotische Stabilität folgt wiederum durch Anwendung des Invarianzprinzips von Krassovskii-LaSalle.

**Hinweis:** Der hier systematisch entworfene Schätzer für  $\hat{k}_{\text{leak}}$  ist kein klassischer Beobachter, wie er aus der Theorie der LTI-Systeme bekannt ist. Insbesondere existiert für nichtlineare Systeme kein Analogon zum Separationsprinzip der LTI-Theorie (siehe Skriptum zur VU Automatisierung [6] Abschnitt 8.4). Daher muss für nichtlineare Systeme der Schätzer (Beobachter) immer in Kombination mit dem Regler entworfen und die Stabilität des Gesamtsystems nachgewiesen werden.



Im auf der Insititus-Homepage zur Verfügung gestellten zip-Archiv befindet sich das MAPLE-Arbeitsblatt `Backstepping_hydraulisches_System.mw`. In diesem wird obiger Reglerentwurf durchgeführt. Weiters befindet sich ein in MATLAB/Simulink implementiertes Simulationsmodell in diesem zip-Archiv. Die in MAPLE hergeleiteten Stellgesetze sind als MATLAB Function Blöcke implementiert. Die Integration der rechten Seite von 3.34 wird dabei durch das Euler-Vorwärts-Verfahren approximiert. Die Parameterdatei `Parameter_hydraulisches_System.m` enthält alle wesentlichen Parameter, deren Zahlenwerte auch in Tabelle 3.3 zusammengefasst sind. Darin bezeichnet  $k_{\text{leak}}$  den nominellen Wert des Leckageparameters.



In der Simulation kann zwischen verschiedenen gewünschten Federcharakteristiken gewählt werden, eine lineare Feder

$$F_c^I(s_k) = c_1^I s_k \quad (3.35)$$

mit der linearen Steifigkeit  $c_1^I$ , eine kubische Feder

$$F_c^I(s_k) = c_1^I s_k + c_3^I s_k^3 \quad (3.36)$$

mit der kubischen Steifigkeit  $c_3^I$  sowie eine nichtlineare Feder der Form

$$F_c^I(s_k) = \frac{c_0^I 2s_{k,\max}^I}{\pi} \tan\left(\frac{\pi s_k}{2s_{k,\max}^I}\right) \quad (3.37)$$

mit den Parametern  $c_0^I$  und  $s_{k,\max}^I$  wie in Tabelle 3.3 gegeben.

Größe	Wert	
$D_a$	0.04	m
$D_b$	0.02	m
$V_a$	$7 \cdot 10^{-4}$	m <sup>3</sup>
$\beta$	$1.6 \cdot 10^9$	Pa
$p_b$	150	bar
$k_{\text{leck}}$	$1.667 \cdot 10^{-12}$	m <sup>5</sup> /(N s)
$m$	500	kg
$d_k$	800	N s/m
$d^I$	2500	N s/m
$c_1^I$	$50 \cdot 10^3$	N/m
$c_3^I$	$10 \cdot 10^6$	N/m <sup>3</sup>
$c_0^I$	$50 \cdot 10^3$	N/m
$s_{k,\max}^I$	0.5	m

Tabelle 3.3: Parameter des hydraulischen Systems.

**Aufgabe 3.4 (Backstepping-Regler für das hydraulische System).** Vollziehen Sie den Reglerentwurf in MAPLE und die Implementierung in MATLAB/SIMULINK nach. Führen Sie folgende Untersuchungen für den Regler sowohl ohne als auch mit Adaption durch:

- Können mit dem Backstepping-Verfahren auch nichtlineare Impedanzsysteme erzeugt werden? Überprüfen Sie dies durch Simulation.
- Welchen Einfluss haben Variationen der Startbedingungen? Führen Sie diese Untersuchungen sowohl ohne als auch mit Störkraft  $F_L$  durch. Begründen Sie

eventuell auftretende Abweichungen.

- Variieren Sie den Leckageparameter  $k_{leck}$  im Block `kleck`.
- Untersuchen Sie den Einfluss des Regler- bzw. Schätzerparameters  $k_1$  und  $k_0$ .
- Welchen Einfluss des Messrauschens können Sie feststellen? Begründen Sie diesen Einfluss.
- Variieren Sie den Parameter  $\gamma$ . Wie beeinflusst dieser das Regelergebnis?

Dokumentieren Sie die wesentlichen Erkenntnisse dieser Untersuchungen in Kurzform und halten Sie diese Ergebnisse für die Laborübung bereit.

### 3.3.2 Rotary Flexible Joint

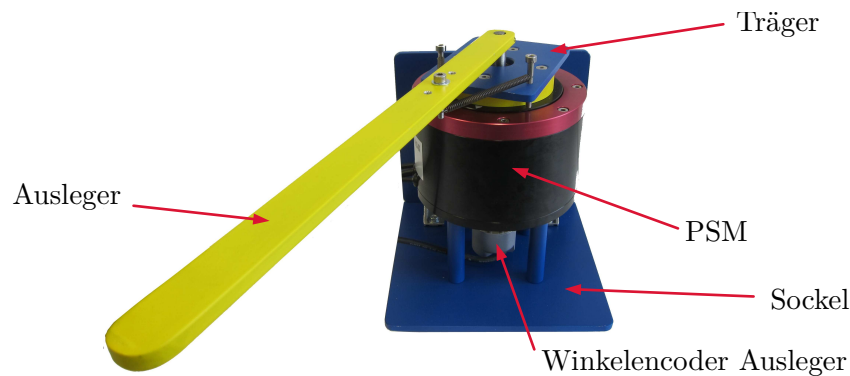


Abbildung 3.3: Laborversuch Rotary Flexible Joint.

Der in Abbildung 3.3 dargestellte Laborversuch *Rotary Flexible Joint* besteht aus einem Sockel, einem Träger und einem Ausleger. Der Versuchsaufbau kann als einfaches Modell eines Roboterarms mit flexiblen Gelenken betrachtet werden. Das Starrkörpersystem besitzt zwei mechanische Freiheitsgrade. Der Sockel ist gegenüber dem Inertialsystem ( $0x_0y_0z_0$ ) fest. Der Ausleger und der von einem permanent erregten Synchronmotor angetriebene Träger sind um die Achse  $z_0$  drehbar gelagert. Wie in Abbildung 3.4 skizziert, wird ihre Position durch die Drehwinkel  $x_{11}$  (Ausleger) und  $x_2$  (Träger) beschrieben. Die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten werden mit  $x_{12}$  und  $x_3$  benannt. Die Zustandsgrößen des Auslegers werden zum Vektor  $\mathbf{x}_1 = [x_{11}, x_{12}]^T$  zusammengefasst.

Auf den Ausleger wirkt das unbekannte aber konstante Lastmoment  $M_L$ . Zwischen dem Ausleger und dem Träger sind Federn angebracht, die auf die beiden Körper (näherungsweise) ein Rückstellmoment  $c_0(x_{11} - x_2)$  mit  $c_0 > 0$  ausüben. Die sich zufolge der geometrischen Anordnung der Federn ergebende Nichtlinearität ist für (hier vorausgesetzte) kleine Auslenkungen vernachlässigbar. Darüber hinaus wirkt auf den Ausleger ein viskoses Reibmoment mit dem Reibkoeffizienten  $d_a > 0$ . Die Reibung zwischen Ausleger und Träger wird als vernachlässigbar klein angesehen.

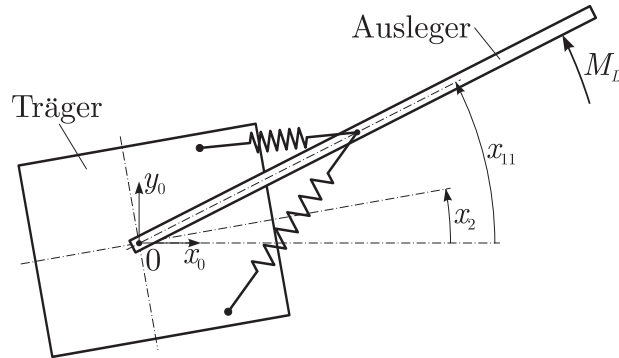


Abbildung 3.4: Freiheitsgrade des Systems Rotary Flexible Joint.

Der Träger wird über einen permanent erregten Synchronmotor mit Direktantrieb angetrieben. Da der Synchronmotor mit einer unterlagerten Drehzahlregelung betrieben wird, kann die Dynamik des Trägers im Modell vernachlässigt werden. Unter Annahme einer idealen Drehzahlregelung kann die Motordrehzahl, bzw. die Winkelgeschwindigkeit  $x_3$  des Trägers, als Eingang des Systems angesehen werden. Das Massenträgheitsmoment des Auslegers bezüglich der Achse  $z_0$  ist mit  $I_a$  gegeben.

Mit Hilfe des Drehimpulserhaltungssatzes erhält man sofort die Systemgleichungen in strict-feedback Form (3.7) mit

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ \frac{1}{I_a}(M_L - c_0(x_{11} - x_2) - d_a x_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.38a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = u. \quad (3.38b)$$

Es gilt hier also gemäß der Notation in (3.7)  $n = 2$  und  $k = 2$  sowie

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} x_{12} \\ \frac{1}{I_a}(M_L - c_0 x_{11} - d_a x_{12}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_a} c_0 \end{bmatrix} \quad (3.39a)$$

$$f_2(\mathbf{x}_1, x_2) = 0 \quad g_2(\mathbf{x}_1, x_2) = 1. \quad (3.39b)$$

Größe	Wert	
$c_0$	0.9898	N m
$I_a$	$2.773 \cdot 10^{-3}$	kg m <sup>2</sup>
$d_a$	$6.541 \cdot 10^{-4}$	N m s

Tabelle 3.4: Parameter des Laborversuchs Rotary Flexible Joint.



**Aufgabe 3.5 (Backstepping-Regler für das Rotary Flexible Joint).** Entwerfen Sie mit dem Backstepping-Verfahren einen Regler, der dem Ausleger die Dynamik

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ \frac{1}{I_a}(M_L - M(x_{11}) - dx_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

einprägt. Dem Regler stehen sämtliche Zustände  $\mathbf{x}_1$  und  $x_2$  sowie das Lastmoment  $M_L$  als Messwerte zur Verfügung. Der Entwurf soll zunächst für ein beliebiges, hinreichend oft stetig differenzierbares, monoton steigendes Rückstellmoment  $M(x_{11})$  mit  $M(x_{11})x_{11} > 0$  für  $x_{11} \neq 0$  vorgenommen werden.

Bestimmen Sie dafür zunächst einen Sollwert  $\alpha_1(\mathbf{x}_1)$  für  $x_2$  und zeigen Sie, dass damit das autonome System  $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)\alpha_1(\mathbf{x}_1)$  asymptotisch stabil bezüglich der sich für ein festes  $M_L$  ergebenden Ruhelage  $\mathbf{x}_{1R}$  ist. Nach einer Koordinatentransformation  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1R}$  kann

$$V_1(\mathbf{z}_1) = \int_0^{z_{11}} (M(\xi + x_{11R}) - M_L) d\xi + \frac{I_a}{2} z_{12}^2 \quad (3.41)$$

als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion verwendet werden. Erweitern Sie im zweiten Backstepping Schritt  $V_1$  in der Form

$$V_2(\mathbf{z}_1, z_2) = V_1(\mathbf{z}_1) + \frac{\gamma}{2} z_2^2 \quad (3.42)$$

mit  $z_2 = (x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1))$  und bestimmen Sie ein Regelgesetz.

**Hinweis:** Für die Rechnung können Sie MAPLE verwenden, es reicht aber auch eine handschriftliche Ausarbeitung. In jedem Fall sollten Sie am Ende Ihrer Rechnung und vor der Implementierung mit Hilfe von MAPLE das gefundene Regelgesetz durch Einsetzen in die gewünschten Zeitableitungen der Lyapunov-Funktionen auf Richtigkeit überprüfen.



Zum Test des Reglers steht das SIMULINK-Modell `Sim_Modell_RFJ.slx` zur Verfügung. Hierbei wurde für die Systemdynamik eine nichtlineare Federkennlinie der Rückstellfedern berücksichtigt. Im Simulationsmodell stehen sowohl die exakten Zustände  $\mathbf{x}_1$  und  $x_2$  als auch – ähnlich dem realen System – deren durch Quantisierung verrauschte Messsignale zur Verfügung. Das Lastmoment  $M_L$  wirkt als zusätzlicher Systemeingang, der sich entsprechend dem in Abbildung 3.5 dargestellten Verlauf ändert.



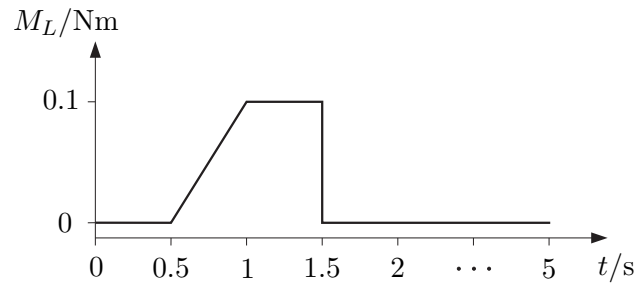


Abbildung 3.5: Lastmoment für das System Rotary Flexible Joint.

Verwenden Sie als Parameter des Sollsystems in (3.40)  $d = 10 \cdot 10^{-3} \text{ N m s}$  für den gewünschten Dämpfungsparameter und für das gewünschte Rückstellmoment

$$M(x_{11}) = M_{\max} \tanh\left(\frac{cx_{11}}{M_{\max}}\right) \quad (3.43)$$

mit  $M_{\max} = 0.2 \text{ N m}$  und  $c = 0.7 \text{ N m}$ . Wählen Sie  $\gamma = 10^{10}$ . Implementieren Sie den entworfenen Regler in einer Embedded MATLAB Function und testen Sie seine Performance.

**Hinweis:** Wenn Sie Ihren Entwurf in MAPLE durchgeführt haben und das Package `CodeGeneration` verwenden, um die Ausdrücke in MATLAB-Code zu konvertieren, kann es für eine kompaktere Darstellung sinnvoll sein, im Befehl MATLAB die Option `optimize` zu setzen. Damit werden Rechnungen in Zwischenschritten zerlegt. Für eine effiziente Fehlersuche ist es außerdem sinnvoll, im Regelgesetz nicht alle Teilausdrücke komplett zu ersetzen, sondern auch im Regler Zwischenergebnisse zu berechnen und diese dann weiter einzusetzen; z. B.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \dots \\ \partial\alpha_1/\partial\mathbf{x}_1 &= \dots \\ &\vdots \\ u &= f(\mathbf{x}_1, \alpha_1, \partial\alpha_1/\partial\mathbf{x}_1, \dots). \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.6 (Adaptiver Backstepping-Regler für das Rotary Flexible Joint).** Es wird nun angenommen, dass das Lastmoment nicht mehr messtechnisch zur Verfügung steht, so dass der in Aufgabe 3.5 entworfene Regler um einen Schätzer für die unbekannte, konstante Last  $M_L$  erweitert werden muss. Überlegen Sie sich, wie Sie im vorliegenden Fall ein asymptotisches Abklingen des Schätzfehlers  $\tilde{M}_L = \hat{M}_L - M_L$  garantieren können.

Prüfen Sie, ob hier die *matching condition* bzw. die *extended matching condition* erfüllt ist.

Implementieren Sie den Regler und den Schätzer in einer MATLAB Function, wobei

die Integration der Schätzerdifferentialgleichung zeitdiskret mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren mit der Abtastzeit  $T_s = 1 \text{ ms}$  erfolgen soll. Der Block soll die Stellgröße  $u$  sowie den Schätzwert  $\hat{M}_L$  ausgeben. Sehen Sie als Eingänge den Zustandsvektor  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$  sowie einen Vektor  $[d, M_{\max}, c]$  zur Vorgabe der Solldynamik entsprechend (3.40) vor. Beachten Sie hierbei die Reihenfolge. Übergeben Sie die Regelparame-ter und die Parameter der Strecke als Struktur an den Matlab Function-Block. Über einen weiteren Eingang  $act$  soll eine Aktivierung bzw. Deaktivierung des Blocks ermöglicht werden. Für  $act = 0$  ist der Block deaktiviert und die beiden Ausgänge sind auf 0 zu setzen. In diesem Fall muss die Integration der Schätzerdifferentialgleichung gestoppt werden. Weiters ist diese bei einer Aktivierung des Blocks über  $act = 1$  korrekt zu initialisieren. Die geforderte Schnittstelle für den Block ist nochmals in Abbildung 3.6 zusammengefasst. Übergeben Sie alle *übrigen* benötigten Parameterwerte zusammengefasst in einer Struktur als Parameter an die MATLAB Function. Entfernen Sie im Data Manager Dialog der Funktion für diesen Parameter den Haken bei der Eigenschaft „Tunable“.

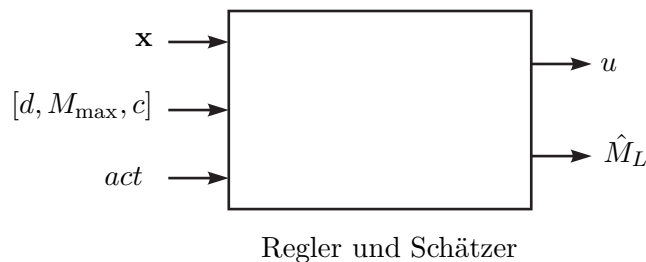


Abbildung 3.6: Schnittstelle für Subsystem Regler und Schätzer.

Untersuchen Sie den Einfluss des Rauschens in den Zuständen auf Regler und Schätzer. Achten Sie bei der Wahl der Reglerparameter darauf, dass das durch den Regler verursachte Rauschen in der Stellgröße  $u$  einen Spitze-Spitze Wert von 0.01 rad/s nicht überschreitet.

**Hinweis:** Bei der Wahl allfälliger beim Entwurf freigebliebener Parameter kann es hilfreich sein, zunächst  $k_0 = 0$  zu setzen. Was bedeutet das für den Schätzer  $\hat{M}_L$ ? Später, wenn günstige Werte für die anderen Parameter gefunden wurden, kann dann  $k_0$  langsam vergrößert werden.

### 3.4 Literatur

- [1] A. Kugi, *Skriptum zur VO Regelungssysteme 2 (SS 2020)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/regelungssysteme-2/>.
- [2] A. Kugi und W. Kemmetmüller, *Skriptum zur VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2020/2021)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/fachvertiefung-automatisierungs-und-regelungstechnik/>.
- [3] W. Kemmetmüller und A. Kugi, *Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2020)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/modellbildung/>.
- [4] H. W. Hethcote, „The Mathematics of Infectious Diseases“, *SIAM Review*, Jg. 42, Nr. 4, S. 599–653, 2000.
- [5] C. Ott, *Cartesian Impedance Control of Redundant and Flexible-Joint Robots*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] A. Kugi, *Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2020/2021)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/automatisierung/>.