

# Algebra Logică

Circuite Logice Combinatoriale

# Cuprins

- Logica binară și porți logice
- Algebra booleană
  - Proprietăți
  - Calcule algebrice
- Forme Standard, Forme Canonice
  - Mintermeni și Maxtermeni (Forme canonice)
  - Sumă de Produse și Produs de sume (Forme standard)
- Diagrame Karnaugh (K-Diagramme)
  - Funcții de 2, 3, 4, 5 variabile
  - Simplificarea funcțiilor logice folosind diagramele Karnaugh

# Logica binară

- VLSI (Very Large Scale Integration)
  - Mii de porți logice pe un singur cip de siliciu
- Componentele electronice din interiorul unui calculator – componente D I G I T A L E
- Electronica digitală operează cu 2 niveluri de voltaj: mai înalt sau mai scăzut (+5V, -5V), (0V, -5V), (+5V, 0V)  $\Leftrightarrow$  logica binară lucrează cu variabile binare ce pot lua doar 2 valori distincte (**0** și **1 – fals și adevărat**) și cu operații logice
- Există trei operații logice de bază:
  - **ȘI (AND), SAU (OR), NU (NOT)**
- Variabilele logice sunt reprezentate de regulă prin litere: a,b,c,...,X,Y,Z

# Functii logice

$F(\text{variabile}) = \text{expresie}$



- Operatori ( +, •, ' )
- Variabile
- Constante ( 0, 1 )
- Grupări în paranteze

Exemple:

- $F(a,b) = \bar{a} \bullet b + \bar{b}$
- $H(x,y,z) = x \bullet (y + \bar{z})$

# Operatori logici de bază

- AND ( $\cap$  sau  $\cdot$ ) 
  - OR ( $\cup$  sau  $+$ ) 
  - NOT ( $\neg$ ) 
- 
- $F(x,y) = x \cdot y, \Leftrightarrow F$  este 1 dacă  $x=y=1$
  - $G(x,y) = x+y, \Leftrightarrow G$  este 1 dacă fie  $x=1$ , fie  $y=1$
  - $H(x) = \overline{x}, \Leftrightarrow H$  este 1 dacă  $x=0$

# Operatori logici de bază (cont.)

- Operația SI logic (AND) este echivalentă cu înmulțirea binară:

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0,$$

$$1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$$

- Operația SAU logic (OR) este echivalentă cu adunarea binară, cu excepția unei operații:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1,$$

$$1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1 \text{ } (\neq 10_2)$$

# Tabele de adevăr pentru operatorii logici

Tabelă de adevăr: formă tabulară ce reprezintă în mod unic relația dintre variabilele de intrare și valoarea funcției

2-Intrări AND

x	y	$F=x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2-Intrări OR

x	y	$F=x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

x	$F=\bar{x}$
0	1
1	0

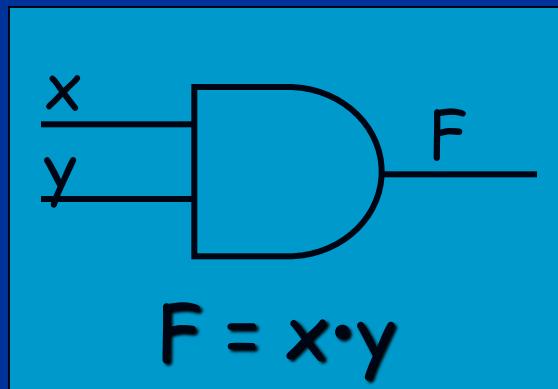
# Tabele de adevăr (cont.)

- Î: Fie o funcție booleană  $F()$  de  $n$  variabile. Câte linii există în tabela de adevăr a funcției  $F()$  ?
- R:  $2^n$  linii, deoarece există  $2^n$  combinații binare posibile pentru  $n$  variabile

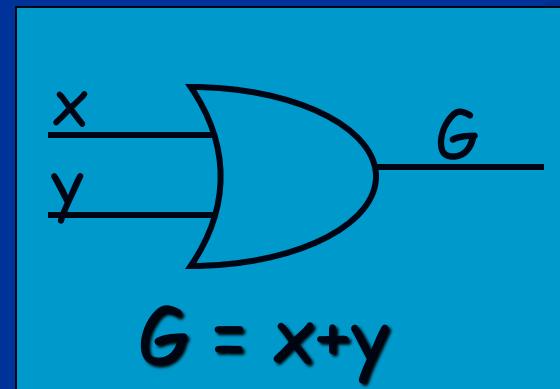
# Porti logice

- Portile logice sunt reprezentări grafice ale componentelor circuitelor electronice ce operează cu unul sau mai multe semnale de intrare pentru a produce un semnal de ieșire

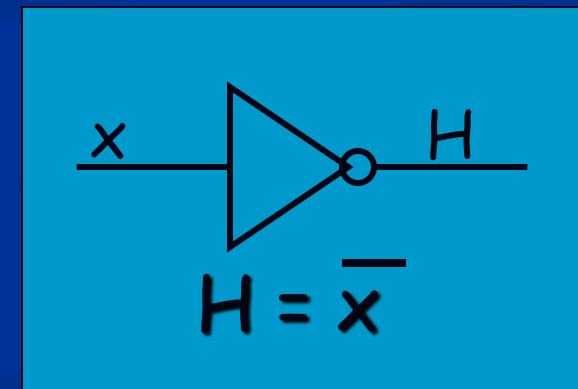
2-Intrări AND



2-Intrări OR

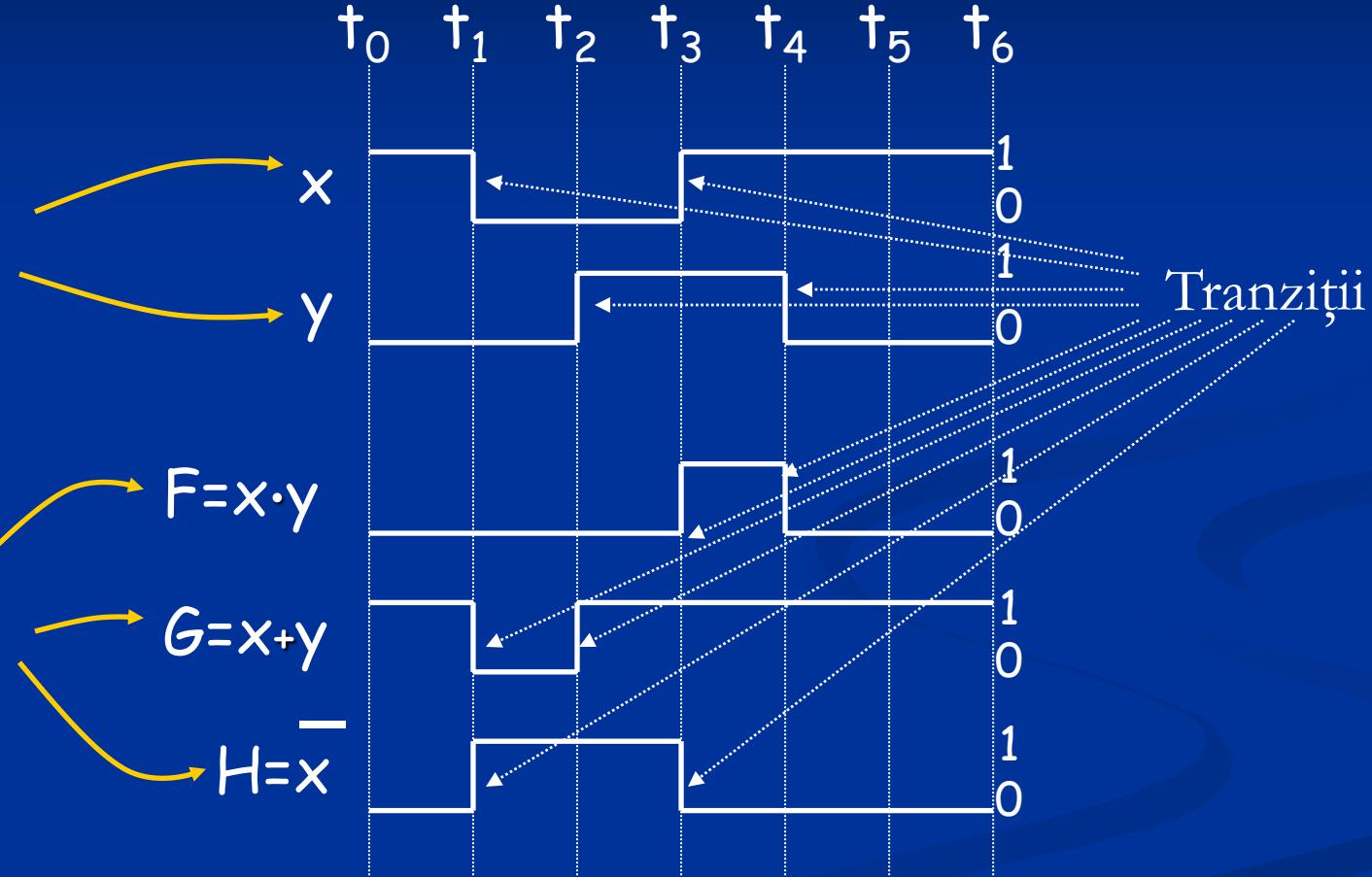


NOT (Invertor)



# Diagramme - funcție de timp

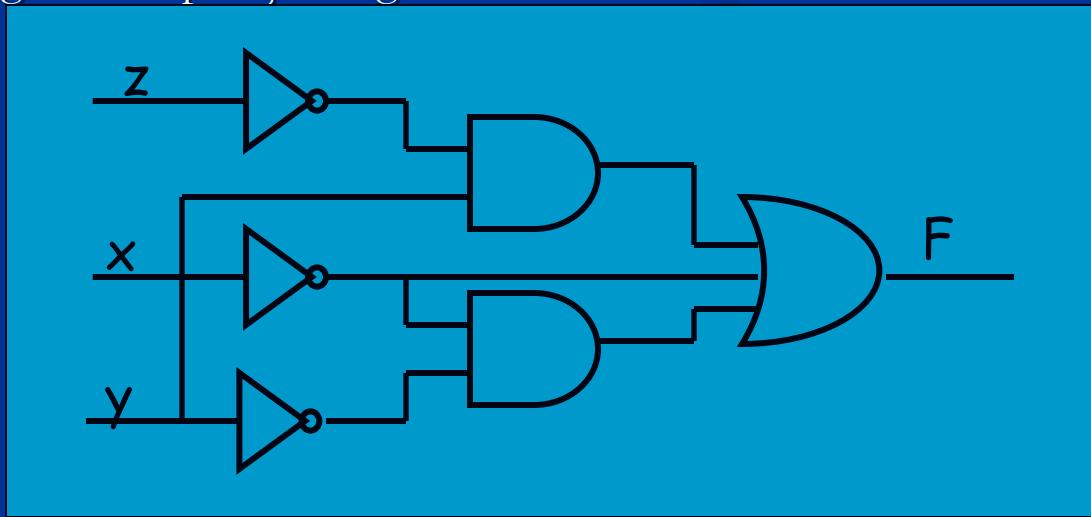
Semnale  
de intrare



Semnale  
“poartă”  
de ieșire

# Circuite logice combinaționale

- Un circuit logic al cărui ieșire nu depinde decât de intrări s.n. **circuit combinational**
- În cazul blocurilor (circuitelor) cu memorie, ieșirea poate depinde atât de intrări cât și de valorile stocate în memorie – **circuit secvențial**
- Fie funcția  $F = \overline{x} + \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y}$
- Se poate construi un circuit combinațional logic pentru a implementa funcția  $F$  prin conectarea semnalelor de intrare pentru portile logice corespunzătoare:
  - Semnale de intrare → Variabilele funcției ( $x, y, z$ )
  - Semnale de ieșire → Valoarea de ieșire a funcției ( $F$ )
  - Porti logice → Operațiile logice

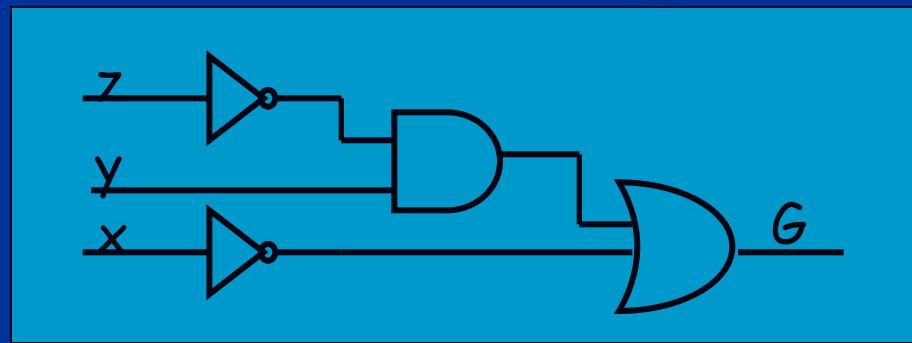
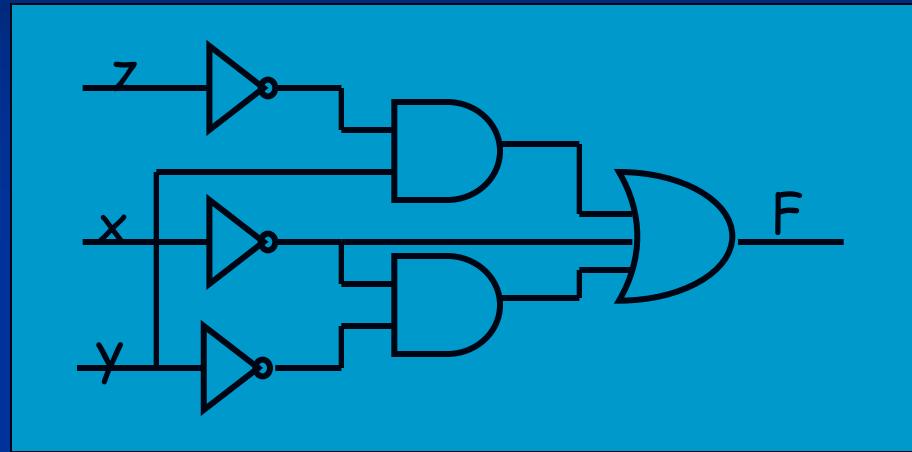


# Circuite logice combinaționale (cont.)

- Pentru a proiecta un circuit eficient trebuie să minimizăm dimensiunea acestuia (aria) și latența de propagare (timpul necesar ca semnalul sau semnalele de intrare să producă valoarea la ieșire)
- Tabela de adevăr pentru
  - $F = \overline{x} + y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y}$
  - $G = \overline{x} + y \cdot \overline{z}$
- Tabelele de adevăr pentru funcțiile F și G sunt identice → avem de-a face cu aceeași funcție
- Vom utiliza forma G pentru a implementa circuitul logic (avem nevoie de mai puține componente)

x	y	z	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

# Circuite logice combinatoire (cont.)



# Algebra Boole (booleană)

- O altă modalitate folosită pentru a specifica funcțiile logice; modalitate de a manevra (și simplifica) funcțiile booleene
- George Boole (1815-1864): “An investigation of the laws of thought”
- Termeni utilizati:
  - *Literal*: O variabilă sau complementul acesteia
  - *Termen produs*: literale conectate prin •
  - *Termen sumă*: literale conectate prin +

# Teoremele fundamentale ale algebrei booleene

1. Teoremele reuniunii și intersecției:

- Există un element 0 numit **prim element** cu proprietățile:

$$x \cap 0 = 0 \text{ și } x \cup 0 = x$$

- Există un element 1 numit **ultim element** cu proprietățile:

$$x \cap 1 = x \text{ și } x \cup 1 = 1$$

2. Teoremele de unicitate:

- Elementul 1 este unic
- Elementul 0 este unic

3. Teoremele complementării:

- Principiul contradicției:

$$x \cap \bar{x} = 0$$

- Principiul terțului exclus:

$$x \cup \bar{x} = 1$$

# Teoremele fundamentale ale algebrei booleene (cont.)

4. Teorema dublei negații:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

5. Teoremele absorbției:

- $x \cup (x \cap y) = x$
- $x \cap (x \cup y) = x$

6. Teoremele lui DeMorgan:

$$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$$

$$\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$$

# Teoremele fundamentale ale algebrei booleene (cont.)

7. Teoremele de idempotență:

$$x \cup x \cup \dots \cup x = x$$

$$x \cap x \cap \dots \cap x = x$$

8. Teoremele de comutativitate, asociativitate și distributivitate pentru cele 2 legi de compozиție:

- $x \cup y = y \cup x$
- $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$
- $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
  
- $x \cap y = y \cap x$
- $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$
- $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

# Dualitate

- Duala unei expresii logice se obține interschimbând între ele operațiile  $\bullet$  și  $+$  și valorile 1 și 0 în expresia inițială, respectând precedența inițială a operațiilor.
- Nu se interschimbă  $x$  cu  $\bar{x}$
- Exemplu de expresie duală:
  - Găsiți  $H(x,y,z)$ , duala funcției  $F(x,y,z) = \bar{x} \bullet y \bullet z + x \bullet \bar{y} \bullet z$
  - $H = (\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)$
- Duala nu are întotdeauna aceeași valoare de adevar cu expresia inițială
- În cazul unei egalități booleene, duala acesteia este, de asemenea, validă.

# Proprietăți de dualitate

Conform regulilor dualității putem rescrie teoremele reuniunii și intersecției:

$$1. X + 0 = X \quad 2. X \cdot 1 = X \quad (\text{duala lui } 1)$$

$$3. X + 1 = 1 \quad 4. X \cdot 0 = 0 \quad (\text{duala lui } 3)$$

$$5. X + X = X \quad 6. X \cdot X = X \quad (\text{duala lui } 5)$$

$$7. X + \overline{X} = 1 \quad 8. X \cdot \overline{X} = 0 \quad (\text{duala lui } 7)$$

# Alte proprietăți ale algebrei booleene

## Absorbția:

1.  $x + x \cdot y = x$
2.  $x \cdot (x + y) = x$  (duala)

### ■ Demonstrație:

$$\begin{aligned} x + x \cdot y &= x \cdot 1 + x \cdot y \\ &= x \cdot (1+y) \\ &= x \cdot 1 \\ &= x \end{aligned}$$

Q.E.D.

Egalitatea 2 este adevărată conform principiului dualității

# Alte proprietăți ale algebrei booleene (cont.)

## Teorema consensului

1.  $xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$
2.  $(x+y) \cdot (\overline{x}+z) \cdot (\overline{y}+z) = (x+y) \cdot (\overline{x}+z)$  -- (duala)

### ■ Demonstrație:

$$\begin{aligned} xy + \overline{x}z + yz &= xy + \overline{x}z + (x+\overline{x})yz \\ &= xy + \overline{x}z + xyz + \overline{x}yz \\ &= (xy + xyz) + (\overline{x}z + \overline{x}zy) \\ &= xy + \overline{x}z \end{aligned}$$

Q.E.D.

Egalitatea 2 este adevărată conform dualității.

# Tabele de adevăr

- Conțin toate combinațiile posibile ale valorilor variabilelor funcției
- Fie funcțiile:
  - $F_1(x,y,z)$  adevărată dacă cel puțin una dintre intrări este adevărată
  - $F_2(x,y,z)$  adevărată dacă exact două dintre intrări sunt adevărate
  - $F_3(x,y,z)$  adevărată dacă toate cele trei intrări sunt adevărate.

x	y	z	$F_1$	$F_2$	$F_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

# Tabele de adevăr

- Care sunt expresiile celor trei funcții logice?
  - $F_1(x,y,z) = x + y + z$
  - $F_3(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$
  - $F_2(x,y,z) = (x \cdot y \cdot \overline{z}) + (x \cdot \overline{y} \cdot z) + (\overline{x} \cdot y \cdot z) \quad (1)$   
 $= (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z)(\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) \quad (2)$

Obs.  $\overline{x \cdot y \cdot z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

# Tabele de adevăr (cont.)

- Tabelă de adevăr: reprezentare unică a unei funcții booleene
- Dacă două funcții au tabele de adevăr identice, atunci funcțiile sunt echivalente (și reciproc).
- Tabelele de adevăr pot fi utilizate pentru a demonstra diverse egalități.
- Tabelele de adevăr cresc exponențial (cu numărul variabilelor) în mărime și nu sunt foarte ușor de înțeles. De aceea este utilizată algebra booleană.

# Expresiile logice nu sunt unice

- Spre deosebire de tabelele de adevăr, expresiile ce reprezintă o funcție booleană nu sunt unice.
- Exemplu:
  - $F(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot \overline{z}$
  - $G(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + y \cdot \overline{z}$
- Tabelele de adevăr pentru  $F()$  și  $G()$  sunt identice.
- În concluzie,  $F() \Leftrightarrow G()$

x	y	z	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

# Calcul algebric

- Algebra booleeană reprezintă un instrument util pentru simplificarea circuitelor digitale.
- Mai simplu  $\Leftrightarrow$  mai ieftin, mai mic, mai rapid.
- Exemplu: să se simplifice funcția logică  
 $F = \overline{xyz} + \overline{x}\overline{y}\overline{z} + xz.$

Calcul direct:

$$\begin{aligned} F &= \overline{xyz} + \overline{x}\overline{y}\overline{z} + xz \\ &= \overline{xy}(z + \overline{z}) + xz \\ &= \overline{xy} \cdot 1 + xz \\ &= \overline{xy} + xz \end{aligned}$$

# Calcul algebric (cont.)

- Exemplu. Demonstrați că:

$$\overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z} = \overline{x}\overline{z} + y\overline{z}$$

- Demonstrație:

$$\begin{aligned} & \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z} \\ &= \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \cancel{\overline{x}y\overline{z}} + \cancel{xy\overline{z}} + x\overline{y}\overline{z} \\ &= \overline{x}\overline{z}(\overline{y} + y) + y\overline{z}(\overline{x} + x) \\ &= \overline{x}\overline{z} \cdot 1 + y\overline{z} \cdot 1 \\ &= \overline{x}\overline{z} + y\overline{z} \end{aligned}$$

Q.E.D.

# Functii complementare

- Complementara unei funcții se obține din funcția inițială interschimbând între ele operațiile • și +, valorile 1 și 0 și complementând fiecare variabilă.
- În tabela de adevăr se face interschimbarea valorilor 1 și 0 în coloana ce reprezintă valoarea funcției.
- Complementara unei funcții nu este același lucru cu duala funcției !

# Exemplu de complementare

- Să se găsească  $H(x,y,z)$ , complementara funcției  $F(x,y,z) = x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$
- $$\begin{aligned} H = \overline{F} &= (\overline{x \bar{y} \bar{z}} + \overline{\bar{x} y z}) \\ &= (\overline{x} \overline{\bar{y}} \overline{\bar{z}}) \cdot (\overline{\bar{x}} \overline{y} \overline{z}) \quad DeMorgan \\ &= (\bar{x} + y + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \quad DeMorgan \end{aligned}$$

Observație: Complementara unei funcții poate fi obținută din funcția duală în care se complementează toate literalele

# Existența și unicitatea funcțiilor booleene

$$B_2 = \{0, 1\}$$

$$f : B_2 \rightarrow B_2$$

$$f : B_2 \times B_2 \rightarrow B_2$$

$$f : \underbrace{B_2 \times B_2 \times \cdots \times B_2}_{n \text{ ori}} \rightarrow B_2$$

## Definiții – *forma normală*

S.n. *produs elementar/sumă elementară* un *produs/sumă* de variabile *și/sau* negațiile lor

S.n. *forma normală disjunctivă (FND)* a unei relații logice funcționale, o relație echivalentă (are aceeași valoare de adevăr) care este o *sumă de produse* elementare construite cu aceleași variabile ca și relația dată inițial, fiecare produs conținând toate variabilele posibile (ele sau complementarele lor).

## Definiții - *forma normală*

S.n. *formă normală conjunctivă (FNC)* a unei relații logice funcționale, o relație echivalentă (are aceeași valoare de adevăr) care este un *produs de sume* elementare construite cu aceleași variabile ca și relația dată inițial, fiecare sumă conținând toate variabilele posibile (ele sau complementarele lor).

# FND pentru o funcție cu o singură variabilă

Fie  $f : B_2 \rightarrow B_2$  o funcție booleană de o singură variabilă și a,b două constante booleene

$$f(x) = ax \cup b\bar{x} - \text{forma normală disjunctivă}$$

$$f(x) = (a \cup x)(b \cup \bar{x}) - \text{forma normală conjunctivă}$$

Aceste funcții sunt unic determinate.

Inlocuim  $x = 1, x = 0$  în relația lui  $f(x)$ :

$$\begin{cases} f(1) = a \bullet 1 \cup b \bullet \bar{1} = a \bullet 1 \cup b \bullet 0 = a \cup 0 = a \\ f(0) = a \bullet 0 \cup b \bullet \bar{0} = a \bullet 0 \cup b \bullet 1 = 0 \cup b = b \end{cases}$$

$$FND : f(x) = f(1) \bullet x \cup f(0) \bullet \bar{x}$$

# FNC pentru o funcție cu o singură variabilă

$f(x) = (a \cup x)(b \cup \bar{x})$  - forma normală conjunctivă

Inlocuim  $x = 1, x = 0$  în relația lui  $f(x)$ :

$$\begin{cases} f(1) = (a \cup 1) \bullet (b \cup \bar{1}) = (a \cup 1) \bullet (b \cup 0) = 1 \bullet b = b \\ f(0) = (a \cup 0) \bullet (b \cup \bar{0}) = (a \cup 0) \bullet (b \cup 1) = a \bullet 1 = a \end{cases}$$

$$FNC: f(x) = (f(0) \cup x) \bullet (f(1) \cup \bar{x})$$

## Demonstrarea existenței (FND)

Se considera relatia  $f(x) = f(1) \bullet x \cup f(0) \bullet \bar{x}$  in FND si se inlocuieste  $x$  pe rand cu valorile 0 si 1.

$$\begin{cases} f(1) = f(1) \bullet 1 \cup f(0) \bullet \bar{1} = f(1) \bullet 1 \cup f(0) \bullet 0 = f(1) \\ f(0) = f(1) \bullet 0 \cup f(0) \bullet \bar{0} = f(1) \bullet 0 \cup f(0) \bullet 1 = f(0) \end{cases}$$

# Demonstrarea existenței (FNC)

Se considera relația  $f(x) = (f(0) \cup x) \bullet (f(1) \cup \bar{x})$  în FNC și se înlocuieste  $x$  pe rand cu valorile 0 și 1.

$$\begin{cases} f(1) = (f(0) \cup 1) \bullet (f(1) \cup \bar{1}) = (f(0) \cup 1)(f(1) \cup 0) = 1 \bullet f(1) = f(1) \\ f(0) = (f(0) \cup 0) \bullet (f(1) \cup \bar{0}) = (f(0) \cup 0)(f(1) \cup 1) = f(0) \bullet 1 = f(0) \end{cases}$$

# FND pentru o funcție de două variabile

Fie  $f : B_2 \times B_2 \rightarrow B_2$  o funcție booleană de două variabile și a,b,c,d constante booleene

$$f(x, y) = axy \cup bx\bar{y} \cup \bar{c}\bar{x}y \cup d\bar{x}\bar{y} \text{ - forma normală disjunctivă}$$

$$f(x, y) = (a \cup x \cup y)(b \cup x \cup \bar{y})(c \cup \bar{x} \cup y)(d \cup \bar{x} \cup \bar{y}) \text{ - forma normală conjunctivă}$$

Considerăm forma FND și înlocuim  $x = 1, x = 0$  în relația lui  $f(x)$ . Vom avea:

$$\begin{cases} a = f(1,1) \\ b = f(1,0) \\ c = f(0,1) \\ d = f(0,0) \end{cases}$$

$$FND: f(x, y) = f(1,1)x\bar{y} \cup f(1,0)x\bar{y} \cup f(0,1)\bar{x}y \cup f(0,0)\bar{x}\bar{y}$$

# FNC pentru o funcție de două variabile

$f(x, y) = (a \cup x \cup y)(b \cup x \cup \bar{y})(c \cup \bar{x} \cup y)(d \cup \bar{x} \cup \bar{y})$  - forma normală conjunctivă  
Inlocuim în expresia de mai sus  $x = 1, x = 0$  și obținem:

$$\begin{cases} a = f(0,0) \\ b = f(0,1) \\ c = f(1,0) \\ d = f(1,1) \end{cases}$$

$$FNC : f(x, y) = (f(0,0) \cup x \cup y)(f(0,1) \cup x \cup \bar{y})(f(1,0) \cup \bar{x} \cup y)(f(1,1) \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

# Demonstrarea existenței în cazul FND

$f(x, y) = f(1,1)xy \cup f(1,0)x\bar{y} \cup f(0,1)\bar{x}y \cup f(0,0)\bar{x}\bar{y}$  - forma normală disjunctivă

Considerăm expresia de mai sus și înlocuim  $x = 1, x = 0, y = 1, y = 0$  și obținem:

$$\begin{cases} x = y = 1 \Rightarrow f(1,1) = f(1,1) \bullet 1 \bullet 1 \cup f(1,0) \bullet 1 \bullet \bar{1} \cup f(0,1) \bullet \bar{1} \bullet 1 \cup f(0,0) \bullet \bar{1} \bullet \bar{1} = f(1,1) \\ x = 1, y = 0 \Rightarrow f(1,0) = f(1,1) \bullet 1 \bullet 0 \cup f(1,0) \bullet 1 \bullet \bar{0} \cup f(0,1) \bullet \bar{1} \bullet 0 \cup f(0,0) \bullet \bar{1} \bullet \bar{0} = f(1,0) \\ x = 0, y = 1 \Rightarrow f(0,1) = f(1,1) \bullet 0 \bullet 1 \cup f(1,0) \bullet 0 \bullet \bar{1} \cup f(0,1) \bullet \bar{0} \bullet 1 \cup f(0,0) \bullet \bar{0} \bullet \bar{1} = f(0,1) \\ x = y = 0 \Rightarrow f(0,0) = f(1,1) \bullet 0 \bullet 0 \cup f(1,0) \bullet 0 \bullet \bar{0} \cup f(0,1) \bullet \bar{0} \bullet 0 \cup f(0,0) \bullet \bar{0} \bullet \bar{0} = f(0,0) \end{cases}$$

# Demonstrarea existenței în cazul FNC

$$FNC : f(x, y) = (f(0,0) \cup x \cup y)(f(0,1) \cup x \cup \bar{y})(f(1,0) \cup \bar{x} \cup y)(f(1,1) \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

Consideram expresia de mai sus și înlocuim  $x = 1, x = 0, y = 1, y = 0$  și obținem:

$$\begin{cases} x = y = 1 \Rightarrow f(1,1) = (f(0,0) \cup 1 \cup 1)(f(0,1) \cup 1 \cup \bar{1})(f(1,0) \cup \bar{1} \cup 1)(f(1,1) \cup \bar{1} \cup \bar{1}) = f(1,1) \\ x = 1, y = 0 \Rightarrow f(1,0) = (f(0,0) \cup 1 \cup 0)(f(0,1) \cup 1 \cup \bar{0})(f(1,0) \cup \bar{1} \cup 0)(f(1,1) \cup \bar{1} \cup \bar{0}) = f(1,0) \\ x = 0, y = 1 \Rightarrow f(0,1) = (f(0,0) \cup 0 \cup 1)(f(0,1) \cup 0 \cup \bar{1})(f(1,0) \cup \bar{0} \cup 1)(f(1,1) \cup \bar{0} \cup \bar{1}) = f(0,1) \\ x = y = 0 \Rightarrow f(0,0) = (f(0,0) \cup 0 \cup 0)(f(0,1) \cup 0 \cup \bar{0})(f(1,0) \cup \bar{0} \cup 0)(f(1,1) \cup \bar{0} \cup \bar{0}) = f(0,0) \end{cases}$$

# Definiții – mintermen, maxtermen

- *Literal*: O variabilă sau complementul acesteia
- *Termen produs*: literale legate prin operația •
- *Termen sumă*: literale legate prin operația +
- *Mintermen*: un termen produs în care toate variabilele apar exact o singură dată, complementate sau nu.
- *Maxtermen*: un termen sumă în care toate variabilele apar o singură dată, complementate sau nu

# Mintermeni

- Un mintermen reprezintă o combinație unică în tabela de adevăr.
- Notați cu  $m_j$ , unde  $j$  este echivalentul zecimal al combinației binare a mintermenului ( $b_j$ ).
- O variabilă în  $m_j$  este complementată dacă valoarea în  $b_j$  este 0, altfel este necomplementată.
- Exemplu: Fie o funcție de 3 variabile (x,y,z) și  $j=3$ . Atunci  $b_j = 011$  iar mintermenul corespunzător este  $m_j = \bar{x} y z$

# Maxtermeni

- Un maxtermen reprezintă o combinație unică în tabela de adevăr.
- Notați cu  $M_j$ , unde  $j$  este echivalentul zecimal al combinației binare x mintermenului ( $b_j$ ).
- O variabilă în  $M_j$  este complementată dacă valoarea în  $b_j$  este 1, altfel este necomplementată.
- Exemplu: Fie o funcție de 3 variabile (x,y,z) și  $j=3$ . Atunci  $b_j = 011$  iar maxtermenul corespunzător este  $M_j = x + \bar{y} + \bar{z}$

# Formele canonice de reprezentare ale funcțiilor booleene

Forme *canonice*:

- Forma **minterm** (FCD – forma canonică disjunctivă) – SUMĂ de produse – variabilele sau complementele lor în cadrul unui mintermen sunt legate prin operația booleană ȘI, iar mintermenii sunt legați prin operația booleană SAU. În sumă apar mintermenii pentru care funcția booleană are valoarea 1.
- Forma **maxterm** (FCC – forma canonică conjunctivă) – PRODUS de sume – variabilele sau complementele lor în cadrul unui maxtermen sunt legate prin operația booleană SAU, iar maxtermenii sunt legați prin operația booleană ȘI. În produs apar maxtermenii pentru care funcția booleană are valoarea 0.
- Formele canonice sunt unice.

# Mintermeni/maxtermeni pentru o funcție de 2 variabile booleene

Funcție de 2 variabile			
x	y	Mintermeni $m_i$	Maxtermeni $M_i$
0	0	$m_0 = \bar{x}\bar{y}$	$M_0 = x \cup y$
0	1	$m_1 = \bar{x}y$	$M_1 = x \cup \bar{y}$
1	0	$m_2 = x\bar{y}$	$M_2 = \bar{x} \cup y$
1	1	$m_3 = xy$	$M_3 = \bar{x} \cup \bar{y}$

# Mintermeni/maxtermeni pentru o funcție de 3 variabile booleene

Funcție de 3 variabile				
x	y	z	Mintermeni $m_i$	Maxtermeni $M_i$
0	0	0	$m_0 = \overline{x}\overline{y}\overline{z}$	$M_0 = x \cup y \cup z$
0	0	1	$m_1 = \overline{x}\overline{y}z$	$M_1 = x \cup y \cup \overline{z}$
0	1	0	$m_2 = \overline{x}yz$	$M_2 = x \cup \overline{y} \cup z$
0	1	1	$m_3 = \overline{x}y\overline{z}$	$M_3 = x \cup \overline{y} \cup \overline{z}$
1	0	0	$m_4 = x\overline{y}\overline{z}$	$M_4 = \overline{x} \cup y \cup z$
1	0	1	$m_5 = x\overline{y}z$	$M_5 = \overline{x} \cup y \cup \overline{z}$
1	1	0	$m_6 = xy\overline{z}$	$M_6 = \overline{x} \cup \overline{y} \cup z$
1	1	1	$m_7 = xyz$	$M_7 = \overline{x} \cup \overline{y} \cup \overline{z}$

# Exemplu

■ Fie tabela de adevăr următoare:

■ FCD pentru  $f_1$  este:

$$f_1(x,y,z) = m_1 + m_2 + m_4 + m_6 \\ = \overline{x} \overline{y} z + \overline{x} y \overline{z} + x \overline{y} \overline{z} + x y z$$

■ FCC pentru  $f_1$  este:

$$f_1(x,y,z) = M_0 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7 \\ = (x+y+z) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}) \cdot \\ (\overline{x}+y+\overline{z}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}).$$

■ Observație:  $m_j = \overline{M}_j$

x	y	z	$f_1$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

# Prescurtări: $\sum$ și $\prod$

- $f_1(x,y,z) = \sum m(1,2,4,6)$ , unde  $\sum$  indică faptul că este vorba despre o sumă-de-produse, iar  $m(1,2,4,6)$  indică faptul că mintermenii din sumă sunt  $m_1, m_2, m_4$  și  $m_6$ .
- $f_1(x,y,z) = \prod M(0,3,5,7)$ , unde  $\prod$  indică faptul că este vorba despre un produs-de-sume, iar  $M(0,3,5,7)$  indică faptul că maxtermenii din produs sunt  $M_0, M_3, M_5$  și  $M_7$ .
- Deoarece  $m_j = \overline{M}_j$  pentru orice  $j$ ,  
 $\sum m(1,2,4,6) = \prod M(0,3,5,7) = f_1(x,y,z)$

# Conversia între formele canonice

- Se înlocuiește  $\sum$  cu  $\prod$  (sau invers) și se înlocuiesc acei termeni de rang  $j$  ce au apărut în forma inițială cu aceia care nu au apărut.
- Exemplu:

$$\begin{aligned}f_1(x,y,z) &= \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} \\&= m_1 + m_2 + m_4 + m_6 \\&= \sum(1,2,4,6) \\&= \prod(0,3,5,7) \\&= (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})\end{aligned}$$

## Forme standard

- Formele standard sunt asemănătoare cu formele canonice, cu excepția faptului că nu toate variabilele trebuie să apară în termenii produs (respectiv sumă).

Exemple:

- $f_1(x,y,z) = \overline{x}yz + y\overline{z} + x\overline{z}$   
reprezintă o formă *standard* sumă-de-produse
- $f_1(x,y,z) = (x + y + z) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{z})$   
reprezintă o formă *standard* produs-de-sume

# Conversia unei sume-de-produse de la forma standard la forma canonica

- Termenii *ne-canonici* se transformă prin inserarea valorii 1 pentru fiecare variabilă  $x$  ce lipsește:

$$(x + \bar{x}) = 1$$

- Se înlătură mintermenii după ce

$$\begin{aligned}f_1(x,y,z) &= \bar{x} \bar{y} z + y \bar{z} + x \bar{z} \\&= \bar{x} \bar{y} z + (x + \bar{x}) y \bar{z} + x(\bar{y} + y) \bar{z} \\&= \bar{x} \bar{y} z + x y \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} + x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} \\&= \bar{x} \bar{y} z + x y \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z}\end{aligned}$$

# Conversia unui produs-de-sume de la forma standard la forma canonica

- Termenii ne-canonici se transformă prin inserarea valorii 0 pentru variabilele ce lipsesc (de exemplu,  $x\bar{x} = 0$ ) și se folosește proprietatea de distributivitate

- Se înlătură maxtermenii dupicați

$$\begin{aligned}f_1(x,y,z) &= (x+y+z) \cdot (\bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{z}) \\&= (x+y+z) \cdot (x\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y\bar{y} + z) \\&= (x+y+z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + z) \cdot \\&\quad (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \\&= (x+y+z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z})\end{aligned}$$

# Diagrame Karnaugh

- Diagramele Karnaugh sunt reprezentări grafice ale funcțiilor booleene.
- O celulă din diagramă corespunde unei linii din tabela de adevăr.
- De asemenea, o celulă din diagramă corespunde unui mintermen sau maxtermen al expresiei booleene
- Zone ce conțin mai multe celule adiacente corespund termenilor standard.

# Diagrama Karnaugh pentru două variabile

$x_1$	0	1
0	$m_0$	$m_1$
1	$m_2$	$m_3$

SAU

$x_1$	0	1
0	$m_0$	$m_2$
1	$m_1$	$m_3$

Obs. Ordinea variabilelor este importantă - pentru  $f(x_1, x_2)$ ,  $x_1$  este linia,  $x_2$  este coloana.

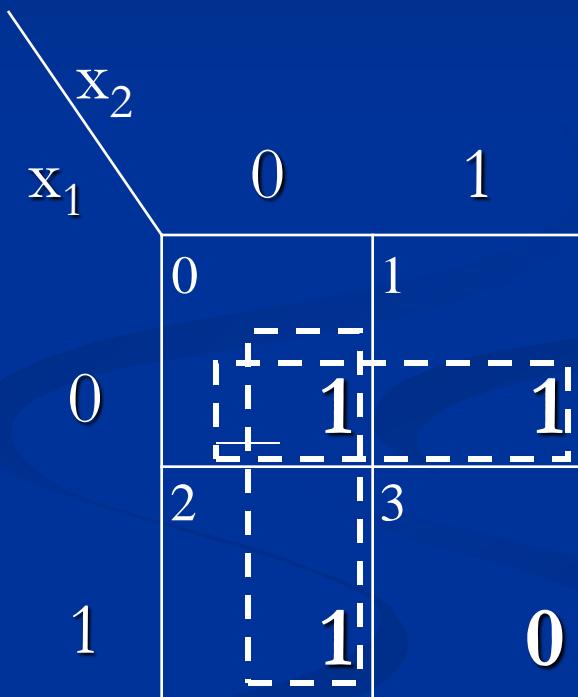
Celula 0 reprezintă  $\overline{x_1} \overline{x_2}$ ; Celula 1 reprezintă  $\overline{x_1} x_2$ ; etc. Dacă avem un ***mintermen*** în expresia funcției, atunci avem o valoare de 1 în celula respectivă din tabel.

## Diagrama Karnaugh pentru două variabile (cont.)

- Oricare două celule adiacente din tabel diferă printr-o singură variabilă, ce apare complementată într-o celulă și necomplementată în cealaltă.
- Exemplu:  
 $m_0 (= \overline{x}_1 \overline{x}_2)$  este adiacentă cu  $m_1 (= \overline{x}_1 x_2)$  și cu  $m_2 (= x_1 \overline{x}_2)$  dar nu și cu  $m_3 (= x_1 x_2)$

# Diagrame Karnaugh - exemple

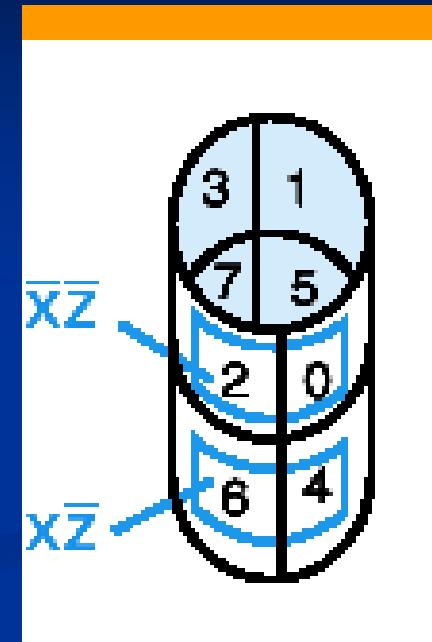
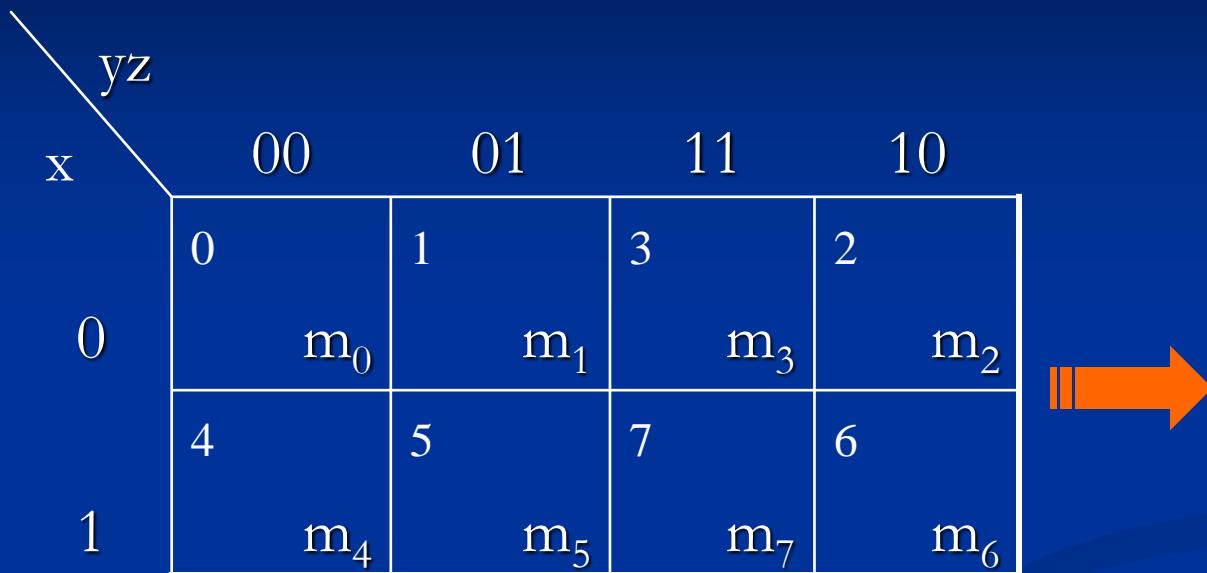
- $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2}$   
 $= m_0 + m_1 + m_2$   
 $= \overline{x_1} + \overline{x_2}$
- În diagrama Karnaugh valorile de 1 reprezintă mintermenii  $m_0, m_1, m_2$
- Gruparea celulelor cu valoarea 1 permite simplificarea
- Ce funcții (mai simple) sunt reprezentate de fiecare grupare?
  - $\overline{x_1} = m_0 + m_1$
  - $\overline{x_2} = m_0 + m_2$
- Obs.  $m_0$  este cuprins în ambele grupări



# Minimizarea FND folosind diagrame Karnaugh

- Se completează cu 1 în diagrama Karnaugh pentru fiecare termen produs din funcție.
- Se grupează *celulele adiacente* ce conțin valoarea 1 pentru a obține un produs cu mai puține variabile. Grupările astfel obținute trebuie să conțină un număr de celule ce reprezintă o putere a lui 2 (2, 4, 8, ...etc.).
- Se grupează și termenii adiacenți de pe margini pentru diagramele Karnaugh de 3 sau mai multe variabile. Cele patru colțuri ale tabelului se pot grupa împreună.
- Grupările *nu sunt neapărat unice*.

# Diagrama Karnaugh pentru trei variabile

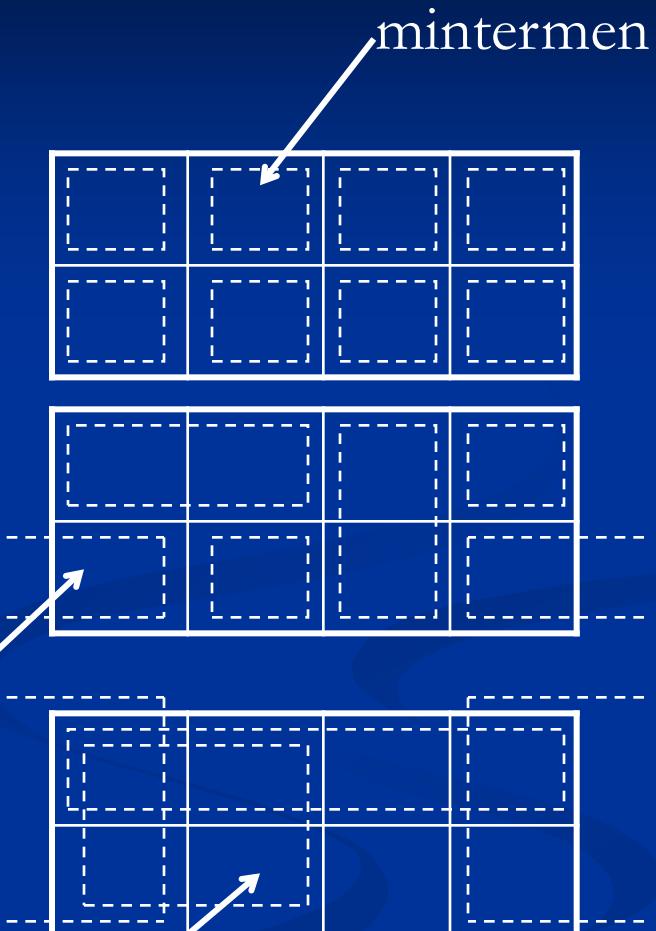


**Obs.:** ordinea variabilelor contează - pentru  $(x,y,z)$ , yz este coloana, x este linia.

**Obs.:** fiecare celulă este adiacentă cu trei alte celule (stânga, dreapta, sus, jos sau cu cea de pe marginea corespunzătoare din partea cealaltă)

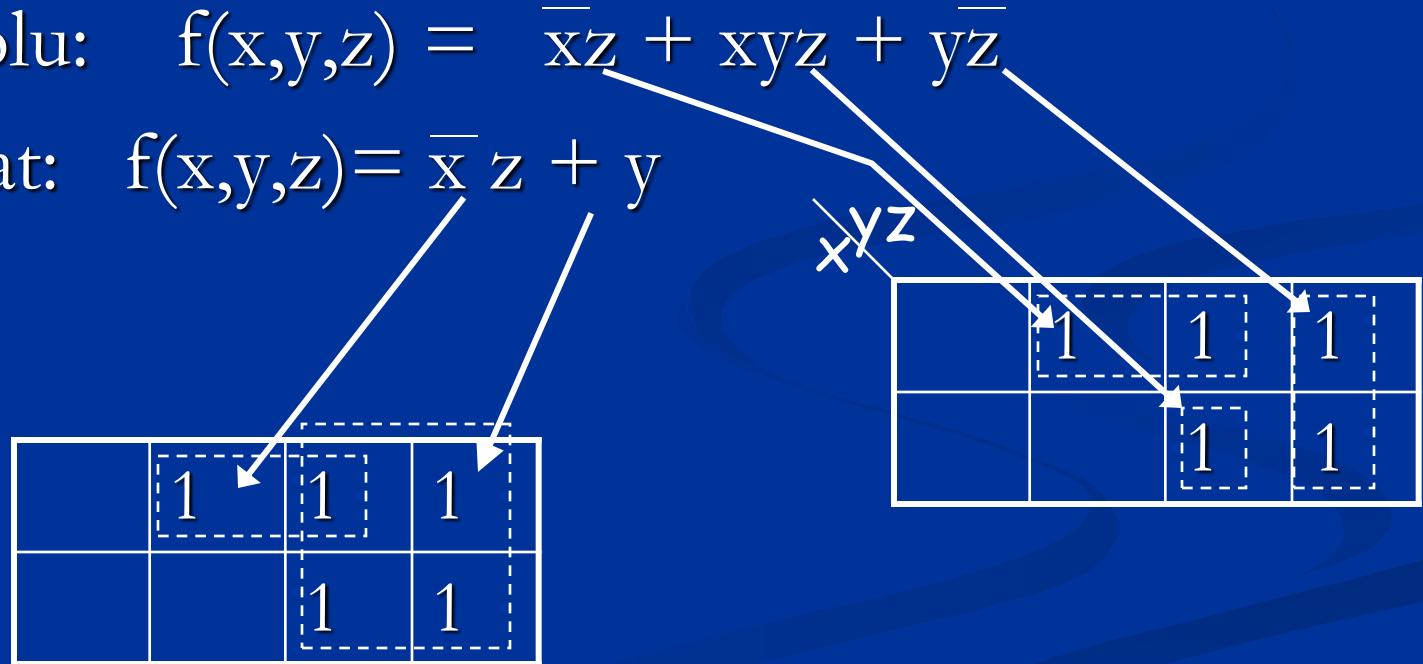
# Diagrama Karnaugh pentru trei variabile (cont.)

În dreapta sunt prezentate tipurile de structuri ce sunt fie mintermeni, fie se obțin prin regula de minimizare a grupării în grupuri de câte 2, 4 sau 8 celule.



# Regulile de simplificare

- Se completează mintermenii funcției booleene în diagramă apoi se grupează termenii 1
- Exemplu:  $f(x,y,z) = \bar{x}z + xyz + y\bar{z}$
- Rezultat:  $f(x,y,z) = \bar{x}z + y$



# Exemple

- $f_1(x, y, z) = \sum m(2, 3, 5, 7)$

- $f_1(x, y, z) = \overline{x}y + xz$

- $f_2(x, y, z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 6)$

- $f_2(x, y, z) = \overline{x} + y \overline{z}$

A 3D coordinate system is shown with axes labeled x, y, and z. The x-axis points along the bottom edge, the y-axis points upwards, and the z-axis points diagonally upwards and to the right.

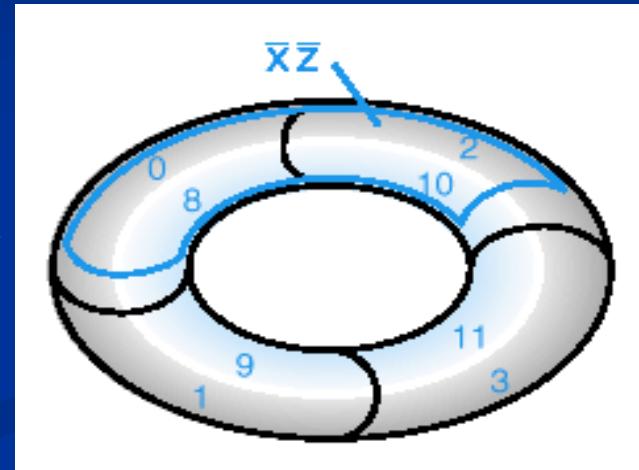
	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	

1	1	1	1
			1

# Diagrame cu patru variabile

YZ  
WX

	00	01	11	10
00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
01	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$



- Celule de sus sunt adiacente cu cele de jos.
- Celulele din dreapta sunt adiacente cu cele din stânga.

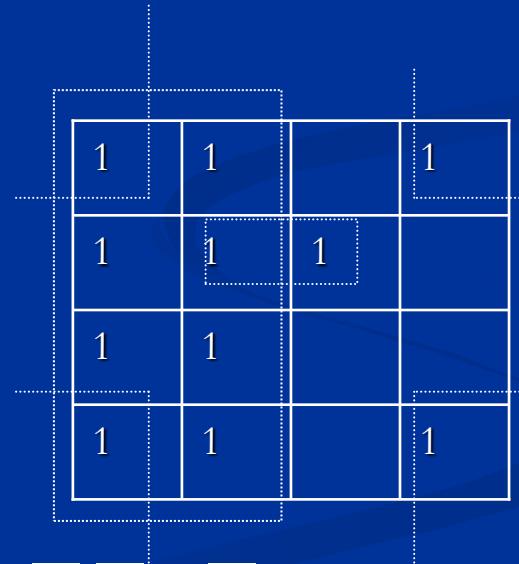
# Simplificarea diagramelor cu patru variabile

- O celulă reprezintă un mintermen de 4 literale.
- Un dreptunghi format din două pătrate adiacente reprezintă un termen produs de 3 literale.
- Un dreptunghi format din 4 celule reprezintă un termen produs de 2 literale.
- Un dreptunghi format din 8 celule reprezintă un termen produs dintr-un literal.
- Un dreptungi format din toate cele 16 celule reprezintă o funcție logică egală cu 1.

# Exemplu

- Simplificați funcția booleană
  - $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,4,5,7,8,9,10,12,13)$ .
- Se completează cu 1 diagrama Karnaugh a funcției  $f()$  și apoi se grupează valorile de 1.

ab \ cd	00	01	10	11
00	1	1		1
01	1	1	1	
10	1			
11	1			1



$$f(a,b,c,d) = \overline{c} \overline{b} \overline{d} + \overline{b} d + c \overline{b} d + c d$$

# Simplificarea produselor de sume

- Simplificarea sumei-de-produse se utilizează asupra **zerourilor** funcției f din diagrama Karnaugh pentru a obține  $\bar{f}$ .
- Complementara lui  $\bar{f}$ , este  $\overline{\overline{f}} = f$ 
  - Complementara unei funcții booleene se poate obține din duală, complementând fiecare literal.
  - sau
  - Folosind Teorema lui DeMorgan.

# Produs-de-sume

ab\cd	00	01	10	11
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
10	0	0	1	1
11	0	0	0	0

- $\overline{f}(a,b,c,d) = ab^- + ac^- + a^-b c d^-$
- Duala lui  $\overline{f}$  este:  $(a+\overline{b})(a+\overline{c})(\overline{a}+b+c+\overline{d})$
- Complementarea tuturor literalelor în duala lui  $(\overline{f})$ :  
 $f = (\overline{a}+b)(\overline{a}+c)(a+b+\overline{c}+d)$

# Termeni redundanți

- Pot exista combinații de valori de intrare care
  - Nu se vor întâmpla niciodată
  - Dacă se întâmplă, ieșirea nu contează.
- Valorile funcției pentru astfel de combinații se numesc valori “ce nu contează” (termeni redundanți).
- Se noteaza cu R (sau x). Fiecărui dintre termeni i se poate atribui valoarea 0 sau 1 într-o implementare.
- Termenii redundanți se pot utiliza pentru simplificarea funcțiilor

## Exemplu

- Simplificarea funcției  $f(a,b,c,d)$  a cărei diagramă este:
  - $f = a'c'd + ab' + cd' + a'bc'$   
sau
  - $f = a'c'd + ab' + cd' + a'bd'$
- A 3-a soluție?

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	x	x
10	1	1	x	x

0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	x	x
1	1	x	x

0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	x	x
1	1	x	x

# Exemplu

- Simplificați funcția  $g(a,b,c,d)$
- $g = a'c' + ab$   
sau
- $g = a'c' + b'd$

	a\c	b\c	d\c
a\b	x	1	0
b\b	1	x	0
c\b	1	x	x
d\b	0	x	x

x	1	0	0
1	x	0	x
1	x	x	1
0	x	x	0

x	1	0	0
1	x	0	x
1	x	x	1
0	x	x	0