Geometria 1

Alessandro Piazza [*]

20 aprile 2018

Sommario

Raccolta di definizioni, proposizioni e teoremi per il corso di Geometra 1 tenuto dal professor Giovanni Gaiffi e da Davide Lombardo nell'anno accademico 2017/2018.
Sono stati inoltre aggiunti altri risultati utili non fatti a lezione che sono segnalati da un obelisco †.

Attenzione: questa è una bozza, ci sono molti errori

Indice

[*]alessandro.piazza@sns.it

1 Strutture algebriche †

Definizione 1.1 (operazione) Dato un insieme X, si definisce operazione su X un'applicazione

$$*\colon A \times A \to A.$$

Definizione 1.2 (gruppo) Un gruppo è una coppia $(\mathbb{G}, *)$ dove $\mathbb{G}$ è un insieme non vuoto e $*$ è un'operazione su $\mathbb{G}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) *associativa*: $\forall a, b, c \in \mathbb{G},\ a * (b * c) = (a * b) * c$;

(ii) *esistenza dell'elemento neutro*: $\forall a \in \mathbb{G}, \exists 1_{(\mathbb{G},*)} : a * 1_{(\mathbb{G}.*)} = 1_{(\mathbb{G},*)} * a = a$;

(iii) *esistenza dell'inverso*: $\forall a \in \mathbb{G}, \exists \bar{a} \in \mathbb{G} : a * \bar{a} = \bar{a} * a = 1_{(\mathbb{G},*)}$.

Definizione 1.3 (gruppo abeliano) Un gruppo abeliano (o gruppo commutativo) è un gruppo $(\mathbb{G}, *)$ che soddisfa anche la seguente proprietà:

(iv) *commutativa*: $\forall a, b \in \mathbb{G},\ a * b = b * a$.

Teorema 1.1 Dato un gruppo $(\mathbb{G}, *)$:

1. l'elemento neutro è unico;
2. l'inverso di un elemento è unico;
3. *legge di cancellazione*: se $a, b, c \in \mathbb{G}$ e $a * b = a * c$ allora $b = c$.

Definizione 1.4 (anello) Un anello è una terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ dove $\mathbb{A}$ è un insieme, $+$ e $\cdot$ sono operazioni dette *somma* e *prodotto* su $\mathbb{A}$ tali che:

(i) $(\mathbb{A}, +)$ è un gruppo abeliano (*nota*: l'elemento neutro della somma viene indicato con $0_{\mathbb{A}}$ mentre l'inverso di $a \in \mathbb{A}$ viene detto *opposto* e denotato con $-a$);

(ii) *associativa del prodotto*: $\forall a, b, c \in \mathbb{A},\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(iii) *elemento neutro del prodotto*: $\exists 1_{\mathbb{A}} : \forall a \in \mathbb{A},\ a \cdot 1_{\mathbb{A}} = 1_{\mathbb{A}} \cdot a = a$;

(iv) *distributiva del prodotto rispetto alla somma*: $\forall a, b, c \in \mathbb{A},\ (a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c$.

Teorema 1.2 Sia $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un anello. Allora:

1. $\forall a \in A,\ a \cdot 0_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{A}} \cdot = 0_{\mathbb{A}}$;
2. $\forall a \in A,\ (-1_{\mathbb{A}}) \cdot a = -a$ (dove $-1_{\mathbb{A}}$ rappresenta l'inverso rispetto alla somma dell'elemento neutro del prodotto e $-a$ l'opposto di a, i.e. inverso di a rispetto alla somma).

Definizione 1.5 (anello commutativo) Un anello commutativo è un anello $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ che soddisfa anche la seguente proprietà:

(v) *commutativa*: $\forall a, b \in \mathbb{A},\ a \cdot b = b \cdot a$.

Definizione 1.6 (corpo) Un corpo è un anello $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ che soddisfa anche la seguente proprietà:

(v) *inverso rispetto al prodotto*: $\forall a \in \mathbb{A} : a \neq 0_{\mathbb{A}}, \exists \bar{a} \in A : a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = 1_{\mathbb{A}}$ che viene indicato con $\bar{a} = a^{-1}$.

Definizione 1.7 (campo) Un campo è una terna $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ tale che:

1. $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ è un anello commutativo;
2. *inverso rispetto al prodotto*: $\forall a \in \mathbb{A} : a \neq 0_{\mathbb{A}}, \exists \bar{a} \in A : a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = 1_{\mathbb{A}}$ che viene indicato con $\bar{a} = a^{-1}$.

In modo del tutto equivalente, un campo è $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ tale che:

1. $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ è un corpo;
2. *commutativa*: $\forall a, b \in \mathbb{A},\ a \cdot b = b \cdot a$.

Proposizione 1.3 Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ un campo. Allora $(a \cdot b = 0_{\mathbb{F}} \wedge a \neq 0_{\mathbb{F}}) \Rightarrow b = 0_{\mathbb{F}}$.

2 Spazi Vettoriali

Definizione 2.1 (campo) [1] Un campo è una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ dove $\mathbb{K}$ è un insieme su cui sono definite due operazioni di *somma* $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e *prodotto* $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ che associano a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme, ovvero tali che

1. $\forall x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x + y \in \mathbb{K}$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{K}$

e che rispettano le seguenti proprietà

(i) *associativa*: $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

(ii) *commutativa*: $\forall x, y \in \mathbb{K},\ x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$;

(iii) *esistenza degli elementi neutri*: $\exists 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K} : 0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$ tali che $\forall x \in \mathbb{K},\ x + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + x = x$ e $\forall x \in \mathbb{K},\ x \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ (tali elementi sono unici e per semplicità vengono indicati con 0 e 1);

(iv) *opposto*: $\forall x \in \mathbb{K}, \exists y \in \mathbb{K} : x + y = 0_{\mathbb{K}}$ che viene indicato con $-x$;

(v) *inverso*: $\forall x \in \mathbb{K} : x \neq 0_{\mathbb{K}}, \exists y \in \mathbb{K} : x \cdot y = 1_{\mathbb{K}}$ che viene indicato con $\frac{1}{x}$ o x^{-1};

(vi) *distributiva del prodotto rispetto alla somma*: $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Definizione 2.2 (spazio vettoriale) Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ o $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è una quaterna $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ dove $\mathbb{K}$ è un campo e V è un insieme non vuoto su cui sono definite due operazioni di

1. *somma* $+\colon V \times V \to V$ tra elementi di V tale che $\forall v, w \in V \Rightarrow +(v, w) = v + w \in V$
2. *prodotto per scalare* $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V$ tale che $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \cdot(\lambda, v) = \lambda \cdot v = \lambda v \in V$

che devono rispettare le seguenti proprietà:

(i) *associativa della somma*: $\forall v, w, u \in V,\ v + (w + u) = (v + w) + u$;

(ii) *commutativa della somma*: $\forall v, w \in V,\ v + w = w + v$;

(iii) *esistenza dell'elemento neutro della somma*: $\exists O_V \in V : \forall v \in V,\ v + O_V = O_V + v = v$;

(iv) *opposto della somma*: $\forall v \in V, \exists w \in W : v + w = O_V$ che viene indicato con $w = -v$;

(v) *distributiva del prodotto rispetto alla somma*: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V,\ \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$;

(vi) *distributiva del somma sul campo rispetto al prodotto*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V,\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;

(vii) *associativa del prodotto*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V,\ (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;

(viii) *elemento neutro del prodotto*: $\exists 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K} : \forall v \in V,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$;

Chiameremo *vettori* gli elementi di V.
Nota: dove non specificato intenderemo sempre che V è uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.

Proprietà 2.1 Uno spazio vettoriale gode delle seguenti proprietà:

1. Unicità dell'elemento neutro
2. Unicità dell'opposto
3. $0_{\mathbb{K}} \cdot v = O_V$
4. $(-1_{\mathbb{K}}) \cdot v = -v$

[1] Riassunto della sezione 1

Definizione 2.3 (sottospazio vettoriale) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Diciamo che $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se valgono le seguenti proprietà

(i) $\forall v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$

(ii) $\forall v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v \in W$

(iii) $O_V \in W$

Teorema 2.1 (intersezione di sottospazi) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $W, U \subseteq V$ sottospazi di V. Allora $W \cap U$ è sottospazio di V.

Teorema 2.2 (somma di sottospazi) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $W, U \subseteq V$ sottospazi di V. Allora

$$W + U = \{v \in V : \exists w \in W, u \in U : v = w + u\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 2.4 (combinazione lineare) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Si dice combinazione lineare dei v_i un vettore $v \in V$ tale che

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_n.$$

Definizione 2.5 (Span) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_k \in V$. Si dice $Span\{v_1, \dots, v_n\}$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei v_i. Formalmente

$$Span\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ v \in V : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\}.$$

Teorema 2.3 (proprietà dello span) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora $Span\{v_1, \dots, v_n\}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene tutti i v_i.

Definizione 2.6 (dipendenza e indipendenza lineare) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = O_V.$$

Analogamente si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = O_V \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Definizione 2.7 (base) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice base di V se

(i) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti;

(ii) $Span\{v_1, \dots, v_n\} = V$ (generano).

Teorema 2.4 (unicità della combinazione lineare) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti. Se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$, allora $\lambda_i = \mu_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque la scrittura di un vettore come comb9inazione lineare di vettori linearmente indipendenti è unica.

Definizione 2.8 (sottoinsieme massimale) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Diciamo che l'insieme $\{v_1, \dots v_r\}$ con $r \in \mathbb{N}$ e $r \leq n$ è un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti se $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti e se $\forall i \in \mathbb{N} : r < i \leq n$, $v_1, \dots, v_r, v_i$ sono linearmente dipendenti.

Teorema 2.5 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_m \in V : Span\{v_1, \dots, v_m\} = V$ (generano). Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_m\}$ linearmente indipendente e massimale. Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V.

Teorema 2.6 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Se $w_1, \dots, w_m$, con $m > n$, sono vettori di V, allora $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Se $\exists j \in \{1, \dots, m\}$ tale che $w_j = 0$ allora $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha $0w_1 + \ldots + \lambda w_j + \ldots + 0w_m = O_V$ e quindi l'enunciato risulta verificato. Supponiamo quindi che $w_1, \dots, w_m$ siano tutti non nulli. Per assurdo $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti. Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $w_1 = a_1 v_1 + \ldots a_n v_n$ con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Supponiamo quindi *wlog* $a_1 \neq 0$, allora

$$v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \frac{a_2}{a_1} v_2 - \ldots \frac{a_n}{a_1} v_n.$$

Allora $v_1 \in Span\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ così $V = Span\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq Span\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ e quindi $Span\{w_1, v_2, \dots, v_n\} = V$.
L'idea è di rimpiazzare tutti i $v_1, \dots, v_n$ con i $w_1, \dots, w_n$ così che $w_1, \dots, w_n$ generino V. Procediamo in per induzione: supponiamo esista $r \in \mathbb{N} : r \leq n$ tale che $w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ generino V. Allora esistono $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tali che $w_{r+1} = b_1 w_1 + \ldots b_r w_r + b_{r+1} v_{r+1} + \ldots b_n v_n$. Osserviamo che almeno uno tra $b_{r+1}, \dots, b_n$ è non nullo (se fossero tutti nulli otterremmo una relazione di lineare dipendenza tra $w_1, \dots, w_m$). Così

$$v_{r+1} = -\frac{b_1}{b_{r+1}} w_1 - \ldots - \frac{b_r}{b_r + 1} + \frac{1}{b_{r+1}} w_{r+1} - \frac{b_{r+2}}{b_{r+1}} v_{r+2} - \ldots \frac{b_n}{b_{r+1}} v_n.$$

Dunque $v_{r+1} \in Span\{w_1, \dots, w_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ così $V = Span\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\} \subseteq Span\{w_1, \dots, w_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ quindi $w_1, \dots, w_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n$ generano V.
Per induzione su r allora $Span\{w_1, \dots, w_n\} = V$. Ma allora per $m > n$ esistono $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $w_m = d_1 w_1 + \ldots + d_n w_n$. Così $w_1, \dots, w_m, w_n$ non sono linearmente indipendenti da cui l'assurdo. $\square$

Corollario 2.7 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Supponiamo di avere due basi di V, una con n elementi e una con m elementi. Allora $n = m$.

Definizione 2.9 (dimensione) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale avente una base costituita da n vettori. Allora diremo che V ha dimensione n e scriveremo $\dim V = n$.
Nota: dove non specificato lo spazio considerato ha dimensione finita n.

Teorema 2.8 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$. Se $v_1, \dots, v_n$ generano V allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V.

Teorema 2.9 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono un insieme massimale di vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V.

Teorema 2.10 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$. Se $v_1, \dots, v_n$ un insieme di vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V.

Teorema 2.11 (completamento ad una base) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$. Sia r un intero positivo con $0 < r < n$. Dati r vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ linearmente indipendenti è possibile completarli ad una base di V, ossia trovare vettori $v_{r+1}, \dots, v_n$ tali che $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ è base di V.

3 Matrici

Definizione 3.1 (matrice) Una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un tabella ordinata di m righe e n colonne i cui elementi appartengono ad un campo $\mathbb{K}$. L'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ viene indicato con $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ ed è uno spazio vettoriale.
Dati $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ diremo che $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e scriveremo

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definizione 3.2 (matrice diagonale e identità) contenuto...

Definizione 3.3 (prodotto tra matrici) contenuto...

Proprietà 3.1 proprietà del prodotto ($n \times n$ stabile rispetto al prodotto)

Definizione 3.4 (matrice trasposta) contenuto...

Proprietà 3.2 (della trasposta) contenuto...

Definizione 3.5 (matrici coniugate) Due matrici A e B si dicono coinugate se esiste una matrice P invertibile tale che

$$B = P^{-1}AP.$$

Matrici coniugate rappresentano la stessa applicazioni lineari viste in due basi diverse.

Definizione 3.6 (traccia) Sia M una matrice quadrata $n \times n$. La traccia di M è la somma degli elementi sulla diagonale

$$\mathrm{tr}\,(M) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

Proprietà 3.3 (della traccia) La traccia gode delle seguenti proprietà

(i) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ e $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\ \mathrm{tr}(A)$

(ii) $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$

(iii) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Teorema 3.1 (invarianza della traccia per coniugio) Se A e B sono matrici coniugate, allora $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

Roba su riduzione a scalini...

Teorema 3.2 * Tutte e sole le matrici $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ che commutano con ogni matrice $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sono multipli dell'identità.

$$AB = BA,\ \forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} : A = \lambda \mathrm{Id}$$

4 Applicazioni lineari

Definizione 4.1 (spazio delle funzioni) Sia A e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. L'insieme $V^A = \mathscr{F}(A, V) = \{f : A \to V\}$ con le operazioni di

- *somma* $\forall f, g \in \mathscr{F}(A, V)$: $\forall x \in A, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *prodotto per scalare* $\forall f \in \mathscr{F}(A, V), \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\forall x \in A, (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

è lo spazio vettoriale delle funzioni da A in V.

Definizione 4.2 (applicazione lineare) Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Diremo che una funzione $L : V \to W$ è un'applicazione lineare (o mappa lineare o omomorfismo) se L soddisfa le seguenti proprietà

(i) $\forall v_1, v_2 \in V$ vale $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

(ii) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ vale $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

Diretta conseguenza è la seguente proprietà chiave delle applicazioni lineari

(iii) $L(O_V) = O_W$.

L'insieme delle applicazioni lineari $\mathscr{L}(V, W) = \{L : V \to W : L \text{ è lineare}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathscr{F}(V, W)$

Definizione 4.3 (nucleo) Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Definiamo nucleo o kernel di L, e scriveremo $\operatorname{Ker} L$, l'insieme degli elementi di V la cui immagine attraverso L è lo zero di W. Formalmente

$$\operatorname{Ker} L = \{v \in V : L(v) = O_W\}$$

Teorema 4.1 Sia $L \in \mathscr{L}(V, W)$. Allora $\operatorname{Ker} L$ è un sottospazio vettoriale di V.

Teorema 4.2 Sia $L \in \mathscr{L}(V, W)$. Allora $\operatorname{Im} L$ è un sottospazio vettoriale di W.

Teorema 4.3 $L \in \mathscr{L}(V, W)$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} L = \{O_V\}$.

Teorema 4.4 (composizione di applicazioni lineari) la composizione di due applicazioni lineari è ancora un'applicazione lineare

Teorema 4.5 (inversa di un'applicazione lineare) l'inversa di una applicazioni lineare (se esiste) è ancora un'applicazione lineare

Teorema 4.6 Sia $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare tale che $\operatorname{Ker} L = \{O_V\}$. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono vettori linearmente indipendenti, anche $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ sono vettori linearmente indipendenti di W.

Teorema 4.7 (delle dimensioni) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora vale

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} L + \dim \operatorname{Ker} L$$

Teorema 4.8 Sia $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare. Se $\operatorname{Ker} L = \{O_V\}$ e $\operatorname{Im} L = W$, allora L è biettiva e dunque invertibile

Definizione 4.4 (isomorfismo) $L \in \mathscr{L}(V, W)$ biettiva si dice isomorfismo. Se tale applicazioni esiste si dice che V e W sono isomorfi.

Definizione 4.5 (endomorfismo) $L \in \mathscr{L}(V, V)$ dallo spazio in sé si dice endomorfismo. L'insieme degli endomorfismi viene indicato con $\operatorname{End}(V)$ ed è un sottospazio vettoriale di $\mathscr{F}(V, V)$

Teorema 4.9 (decomposizione di Fitting) * Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$ e $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora esiste un intero $k \leq n$ tale che

(i) $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$;

(ii) $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$;

(iii) $f|_{\operatorname{Im} f^k} \colon \operatorname{Im} f^k \to \operatorname{Im} f^k$ è un isomorfismo;

(iv) $f(\operatorname{Ker} f^k) \subseteq \operatorname{Ker} f^k$;

(v) $f|_{\operatorname{Ker} f^k} \colon \operatorname{Ker} f^k \to \operatorname{Ker} f^k$ è nilpotente;

(vi) $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$.

Proposizione 4.10 [2] Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$ e $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora:

1. $\forall j \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker} f^j \subseteq \operatorname{Ker} f^{j+1}$;
2. se esiste $j \in \mathbb{N} : \operatorname{Ker} f^j = \operatorname{Ker} f^{j+1}$ allora $\forall m \geq j,\ \operatorname{Ker} f^m = \operatorname{Ker} f^{m+1}$;
3. se esiste $j \in \mathbb{N} : f^j = 0$ (endomorfismo nullo), allora $f^n = 0$.

[2] Primo compitino 2017/2018

5 Applicazioni lineari e matrici

Teorema 5.1 Sia $L\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ un'applicazione lineare. Allora esiste un unico vettore $A \in \mathbb{K}^n$ tale che $\forall X \in \mathbb{K}^n$

$$L(X) = A \cdot X$$

Teorema 5.2 Esiste una corrispondenza biunivoca tra

$$\{L\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad \text{lineare}\} \leftrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

1. Data una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ è possibile associare ad essa un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^m \\ X &\mapsto MX \end{aligned}$$

2. Sia $L\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Allora esiste una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tale che $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $L(X) = MX$. Se $\mathscr{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la è base canonica di $\mathbb{K}^n$, le colonne di M sono $L(e_1), \ldots, L(e_n)$.

Teorema 5.3 Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $L\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Siano inoltre $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi rispettivamente di V e di W. Preso $v \in V$ esiste una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tale che

$$X_{\mathscr{B}'}(L(v)) = MX_{\mathscr{B}}(v)$$

dove $X(w)$ è il vettore colonna di w scritto nella rispettiva base.

Teorema 5.4 Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione n e m. Siano $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi rispettivamente di V e di W.
Indicando con $\mathscr{L}(V, W) = \{L\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad \text{lineare}\}$ e con $[L]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ la matrice associata a L rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$, si ha che

$$\begin{aligned} M\colon \mathscr{L}(V, W) &\to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ L &\mapsto [L]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare ed è un isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari e lo spazio delle matrici.

Teorema 5.5 (matrice di funizione composta) Siano V, W e U spazi vettoriali e siano $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathscr{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ e $\mathscr{B}'' = \{u_1, \ldots, u_s\}$ basi di V, W e U rispettivamente. Siano inoltre $F\colon V \to W$ e $G\colon W \to U$ lineari. Allora

$$[G \circ F]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}''} = [G]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}''} \, [F]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$$

Teorema 5.6 Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare e $B\colon V \to V$ lineare e invertibile. Allora vale che

$$\mathrm{Im}\, L \circ B = \mathrm{Im}\, L \quad \text{e} \quad \dim \mathrm{Ker}\, L \circ B = \dim \mathrm{Ker}\, L$$

In altre parole se $[L]$ è la matrice associata a L e $[B]$ è la matrice invertibile delle mosse di colonna associata a B, la matrice $[L]\,[B]$ è una matrice ridotta a scalini per colonna in cui lo *Span* delle colonne è lo stesso dello span delle colonne di $[L]$. Più brevemente la riduzione di Gauss per colonne lascia invariato lo *Span* delle colonne.

Teorema 5.7 Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare e $U\colon W \to W$ lineare e invertibile. Allora vale che

$$\mathrm{Ker}\, U \circ L = \mathrm{Ker}\, L \quad \text{e} \quad \dim \mathrm{Im}\, U \circ L = \dim \mathrm{Im}\, L$$

In altre parole se $[L]$ è la matrice associata a L e $[U]$ è la matrice invertibile delle mosse di riga associata a U, la matrice $[U]\,[L]$ è una matrice ridotta a scalini per riga che ha lo stesso Ker di $[L]$. Più brevemente la riduzione di Gauss per righe lascia invariato lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Definizione 5.1 (rango) Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiamo rango di A, $\operatorname{rg} A$, in modo equivalente come

1. il numero massimo di colonne linearmente indipendenti (numero di *pivot* colonna di A ridotta a scalini per colonna)

2. il numero massimo di righe linearmente indipendenti (numero di *pivot* riga di A ridotta a scalini per righe)

3. la $\dim \operatorname{Im} L$, dove $L\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è l'applicazione lineare associata $[L]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = A$

6 Formula di Grassmann e somma diretta

Teorema 6.1 (formula di Grassmann) Siano A e B sottospazi vettoriali di V su un campo $\mathbb{K}$. Vale

$$\dim A + \dim B = \dim (A + B) + \dim (A \cap B)$$

Definizione 6.1 (somma diretta) Dati A e B sottospazi di V su un campo $\mathbb{K}$, si dice che A e B sono in somma diretta se $A \cap B = \{O_V\}$.
In modo del tutto equivalente A e B sono in somma diretta se e solo se $\dim A + \dim B = \dim (A + B)$.

Definizione 6.2 (somma diretta di k sottospazi) $U_1, \ldots, U_k$ sottospazi di V su un campo $\mathbb{K}$ si dicono essere insomma diretta se $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ vale

$$U_i \cap (U_1 + \ldots + \hat{U}_i + \ldots + U_k) = \{O_V\}$$

In modo equivalente $U_1, \ldots, U_k$ sono insomma diretta se e solo se

$$\dim U_1 + \ldots + \dim U_k = \dim (U_1 + \ldots + U_k)$$

Definizione 6.3 (complementare di un sottospazio) Sia A un sottospazio di V su un campo $\mathbb{K}$. Un complementare di A è un sottospazio B di V tale che

(i) $A \cap B = \{O_V\}$ (A e B sono in somma diretta)

(ii) $A + B = V$

In tal caso scriveremo che $A \oplus B = V$.

7 Sistemi lineari

Definizione 7.1 (sistema lineare omogeneo) contenuto...

Definizione 7.2 (matrice associata al sistema lineare omogeneo) contenuto...

Teorema 7.1 (dimensione delle soluzioni) Sia M la matrice associata ad un sistema lineare omogeneo con n incognite. Indicando con S lo spazio delle soluzioni del sistema lineare vale

$$\dim S = n - \operatorname{rg} M$$

Definizione 7.3 (sottospazio ortogonale) contenuto... + il sottospazio ortogonale è l'inieme delle soluzioni del sistema omogeneo

Definizione 7.4 (sistema lineare non omogeneo) contenuto...

Definizione 7.5 (matrice completa e incompleta associata) contenuto...

Teorema 7.2 (insieme soluzioni del sistema non omogeneo) Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo e S_0 l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Supposto $S \neq \varnothing$, preso un qualunque $v \in S$ vale

$$S = v + S_0$$

Definizione 7.6 (sottospazio affine) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, U un suo sottospazio e $v \in V - U$ $(v \neq 0)$ si dice che l'insieme $v + U$ è un sottospazio affine di V. Per convenzione si pone $\dim(v + U) = \dim U$.

8 Determinante

Definizione 8.1 (gruppo simmetrico) Il gruppo simmetrico di un insieme è il gruppo formato dall'insieme delle permutazioni dei suoi elementi, cioè dall'insieme delle funzioni biiettive di tale insieme in se stesso, munito dell'operazione binaria di composizione di funzioni.
In particolare detto $S_n = \{1, \dots, n\}$ l'insieme delle permutazioni

$$\Sigma_n = \Sigma(S_n) = \{\sigma \colon S_n \to S_n : \sigma \text{ è biettiva}\}$$

è un gruppo simmetrico. Ricordiamo che una permutazione $\sigma \in \Sigma_n$ viene spesso indicata con la seguente notazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

dove si intende che l'elemento i viene mandato in $\sigma(i)$ dalla permutazione.

Definizione 8.2 (trasposizione) Una trasposizione è una permutazione $\tau \in \Sigma_n$ tale che scambia due soli elementi di S_n mentre lascia invariati i restaniti $n-2$. Se τ scambia $i, j \in S_n$ scriveremo $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.

Proposizione 8.1 (i) Ogni permutazione $\sigma \in \Sigma_n$ è esprimile, non in modo unico, come prodotto (composizione) di trasposizioni.

(ii) Se $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_h = \lambda_1 \circ \cdots \circ \lambda_h$ con τ_i e λ_j trasposizioni allora h e k hanno la stessa parità. Se σ è prodotto di un numero pari (dispari) di trasposizioni diremo che σ è pari (dispari).

Definizione 8.3 Data $\sigma \in \Sigma_n$ definiamo la funzione segno $\operatorname{sgn} \colon \Sigma_n \to \{-1, 1\}$ come

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Vale in particolare che $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2)$

Proposizione 8.2 Sia $\sigma \in \Sigma_n$ una permutazione e sia σ^{-1} la permutazione inversa. Allora $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Teorema 8.3 (Unicità del determinante) Sia $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate a valori nel campo $\mathbb{K}$. Esiste una ed una sola funzione da $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ in $\mathbb{K}$ funzione delle righe (o delle colonne) di una matrice A che rispetta i seguenti tre assiomi:

(i) *multilineare* (lineare in ogni riga o colonna);

(ii) *alternante* (cambia di segno se si scambiano due righe o due colonne);

(iii) *normalizzata* (l'immagine dell'identità è 1);

Tale funzione viene detta determinante ed indicata con $\det \colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Proprietà 8.1 (del determinante) Le seguenti proprietà sono conseguenza degli assiomi (i), (ii) e (iii). Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ allora

(1) Se A ha due righe uguali allora $\det A = 0$.

(2) Se A ha una riga nulla allora $\det A = 0$.

(3) Se alla riga A_i di A si somma un multiplo della riga A_j $(i \neq j)$ si ottiene una matrice B tale che $\det A = \det B$.

(4) Il determinante è invariante sotto l'algoritmo di Gauss (escludendo le mosse di *normalizzazione* delle righe o delle colonne) a meno di un segno che dipende dal numero di scambi di righe o di colonne fatto. In altre parole se S è una forma a scalini di A allora $\det A = \pm \det S$.

(5) Se A è una matrice diagonale allora il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale: $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Teorema 8.4 (esistenza del determinante) Sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. La funzione

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma n}$$

è il determinante (in quanto è una funzione multilineare, alternante e normalizzata dallo spazio delle matrici nel campo).

Corollario 8.5 Il determinante di A è uguale al determinante della sua trasposta: $\det A = \det A^t$.

Definizione 8.4 (complemento algebrico) Il complemento algebrico o cofattore dell'elemento a_{ij} di una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta cancellando da A la i-esima riga e la j-esima colonna moltiplicato per $(-1)^{i+j}$: in formule

$$\mathrm{cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Con $\mathrm{cof}\,(A)$ indichiamo la matrice dei cofattori ovvero la matrice che ha nella posizione i,j il complemento algebrico di a_{ij}, $\mathrm{cof}\,(A) = \left(\mathrm{cof}_{ij}\,(A)\right)$

Teorema 8.6 (sviluppo di Laplace) Data $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ la seguente funzione

- fissata una riga i di A: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\mathrm{cof}_{ij}(A)$
- fissata una colonna j di A: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot\mathrm{cof}_{ij}(A)$

verifica gli assiomi (i), (ii) e (iii) e quindi è il determinante.
Dallo sviluppo di Laplace si deduce che la proprietà (5) di Proprietà 8.1 vale anche per le matrici triangolari (superiori o inferiori)

Teorema 8.7 (invertibilità) A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ ($\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,A = n$).

Proposizione 8.8 (formula per l'inversa) Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile, i.e. $\det A \neq 0$. Allora il coefficiente ij della matrice inversa è

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det A}\cdot\mathrm{cof}_{ji}\,(A)$$

dove $\mathrm{cof}_{ji}\,(A)$ è il complemento algebrico dell'elemento a_{ji} di A (sì, gli indici sono scambiati).

Teorema 8.9 (regola di Cramer) Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile, i.e $\det A \neq 0$ (e $\mathrm{rg}\,A = n$), e siano $A^1,\dots,A^n$ le sue colonne. Siano inoltre $b = (b_j)$ un vettori colonna. Allora se $x = (x_j)$ è l'unico vettore colonna che soddisfa il sistema lineare

$$Ax = b \quad\Leftrightarrow\quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad x_1A^1 + \dots x_nA^n = b$$

ha componenti date da

$$x_j = \frac{\det\left(A^1\cdots A^{j-1}\ b\ A^{j+1}\dots A^n\right)}{\det A}$$

dove per $A^1\cdots A^{j-1}\ b\ A^{j+1}\dots A^n$ si intende la matrice A alla cui j-esima colonna è stato sostituito il vettore colonna b dei termini noti.

Corollario 8.10 Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\mathrm{cof}\,A$ la matrice dei cofattori. Allora vale la seguente identità

$$A\ (\mathrm{cof}\,A)^t = \det(A)\cdot\mathrm{Id}$$

Teorema 8.11 (di Binet) Date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ vale $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Corollario 8.12 (determinante dell'inversa) Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è invertivile, i.e. $\det A \neq 0$, allora $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Corollario 8.13 Per ogni $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ vale $\det AB = \det BA$.

Corollario 8.14 (invarianza del determinatane per coniugio) Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con B matrice invertibile. Allora $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.
In altri termini se $[A]$ e $[A']$ sono matrici che descrivono lo stesso endomorfismo $A\colon V \to V$ ma scritte in basi (in partenza ed in arrivo) diverse allora $\det[A] = \det[A']$. Dunque è il determinante è ben definito come funzione dagli endomorfismi $\mathscr{L}(V)$ nel campo $\mathbb{K}$.

Definizione 8.5 (sottomatrice) Sia $M \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ una matrice qualsiasi. Per sottomatrice di M si intende una ottenuta da M cancellando alcune righe e/o alcune colonne di M. In modo equivalente si intende una $M' \in \mathrm{Mat}_{r\times s}(\mathbb{K})$ ottenuta da M selezionando i coefficienti posti nell'intersezione tra $1 \leq r \leq n$ righe ed $1 \leq s \leq m$ colonne scelte nella matrice M. Nel caso di sottomatrice quadrate si ha $r = s = k$ e si dice che l'ordine di M' è k.

Proposizione 8.15 Se $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_k = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{nk} \end{pmatrix}$ con $k \leq n$ sono vettori linearmente *dipendenti* allora ogni sottomatrice quadrata di ordine k estratta dalla matrice $M \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$ che ha per colonne $v_1, \dots, v_k$ non invertibile e quindi con determinante nullo.

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} v_{11} & & v_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n1} & & v_{nk} \end{array}\right)$$

Proposizione 8.16 Se $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{1n} \end{pmatrix}, \dots, v_k = \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{kn} \end{pmatrix}$ con $k \leq n$ sono vettori linearmente *indipendenti* allora esiste una sottomatrice quadrata di ordine k estratta dalla matrice $M \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$ che ha per colonne $v_1, \dots, v_k$ invertibile e quindi con determinante non nullo.

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} v_{11} & & v_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n1} & & v_{nk} \end{array}\right)$$

Teorema 8.17 (caratterizzazione del rango con il determinante) Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora il rango di A è il massimo ordine di una sottomatrice quadrata invertibile, i.e con determinante non nullo.
In altri termini $\mathrm{rg}\, A = k \Leftrightarrow$ tra tutte le sottomatrici di A esiste una sottomatrice $k \times k$ con determinante $\neq 0$ tale che tutte le sottomatrici quadrate di ordine maggiore hanno determinante nullo. Per lo sviluppo di Laplace è sufficiente verificare che tutte le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno determinante nullo.

Proprietà 8.2 (del determinante) Valgono le seguenti identità aggiuntive.

1. Se $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ è una matrice a blocchi con A matrice invertibile allora $\det M = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$. Inoltre che $AC = CA$ allora $\det M = \det AD - CB$.

2. Se M è una matrice diagonale a blocchi allora il determinante è il prodotto dei determinanti dei blocchi diagonali $A_1, \dots A_k$.

$$\det M = \det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{A_{k-1}} & \\ & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix} = \det(A_1) \cdots \det(A_k)$$

3. Se M è una *matrice di Vandermonde* allora vale che

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i=1 \\ j<i}}^{n} (a_i - a_j)$$

9 Diagonalizzazione di endomorfismi

Definizione 9.1 (autovettore, autovalore) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo su V. Un vettore $v \in V \setminus \{O_V\}$ si dice autovettore di T se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$T(v) = \lambda v.$$

Si dice in questo caso che λ è autovalore per T (relativo a v).
Notiamo che tutti i $v \in \operatorname{Ker} V \setminus \{O_V\}$ sono autovettori per v con autovalore 0.

Definizione 9.2 (autospazio) Dato $\lambda \in \mathbb{K}$ chiamiamo $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ l'autospazio relativo a λ. Segue dalla definizione che $V_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})$

Proposizione 9.1 Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono autovettori per T con relativi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora la matrice di $T \in \operatorname{End}(V)$ rispetto a $\mathscr{B}$ (sia in partenza che in arrivo) è diagonale.

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definizione 9.3 (polinomio caratteristico) Sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Fissata una base $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V chiamiamo

$$p_T(t) = \det\left(t \cdot \mathrm{Id} - [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}\right)$$

il polinomio caratteristico di T.

Proposizione 9.2 Il polinomio caratteristico non dipende dalla base scelta. In altri termini se $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ sono basi di V allora

$$p_T(t) = \det\left(t \cdot \mathrm{Id} - [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}\right) = \det\left(t \cdot \mathrm{Id} - [T]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'}\right) = \det(t \cdot \mathrm{Id} - T)$$

Teorema 9.3 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se λ è radice di $p_T(t)$, ossia $p_T(\lambda) = 0$.

Teorema 9.4 Dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di $T \in \operatorname{End}(V)$ a due a due distinti, siano $v_1, \dots, v_k$ gli autovettori corrispondenti: $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, T(v_k) = \lambda_k v_k$. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Teorema 9.5 (somma diretta degli autospazi) Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di T a due a due distinti. Allora gli autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta.
Più in generale se $A_1, \dots, A_k$ sottospazi di V sono tali che per ogni insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori non nulli linearmente indipendenti tali che $v_i \in A_i$, allora $A_1, \dots, A_k$ sono in somma diretta.

Definizione 9.4 (molteplicità algebrica e geometrica) Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ e

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdots (t - \lambda_k)^{a_k} \cdot f(t)$$

il polinomio caratteristico dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono le radici del polinomio, i.e autovalori di T, e $f(t)$ un polinomio irriducibile in $\mathbb{K}[t]$. Diremo che a_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i. Diremo inoltre che $m_i = \dim V_{\lambda_i}$ è la molteplicità geometrica di λ_i.
Notiamo che se T è diagonalizzabile allora $f(t) = 1$.

Teorema 9.6 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con $k \leq n$ autovalori. Allora $\forall i = 1, \dots, k$ vale $1 \leq m_i \leq a_i$ (molteplicità geometrica $\leq$ molteplicità algebrica).

Corollario 9.7 (criterio sufficiente per la diagonalizzazione) Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo e $p_T(t)$ il suo polinomio caratteristico. Se $p_T(t)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ a due a due distinte allora T è diagonalizzabile.

Teorema 9.8 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Allora T è diagonalizzabile se e solo se $f(t) = 1$ (il polinomio si fattorizza completamente nel campo) e $\forall \lambda_i$ autovalore $m_i = a_i$.

Definizione 9.5 (polinomio minimo) Sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Chiamiamo polinomio minimo di T il polinomio di grado più piccolo (*wlog* monico) $\mu_T(t) \in \mathbb{K}[t]$ tale che

$$\mu_T(T) = T^j + \ldots + b_1 T + b_0 \mathrm{Id} = 0.$$

Teorema 9.9 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Se $h(t) \in \mathbb{K}[t]$ soddisfa la proprietà $h(T) = 0$ allora $\mu_T(t)$ divide $h(t)$.

Teorema 9.10 (di Hamilton - Cayley) Dato $T\colon V \to V$ endomorfismo vale che $p_T(T) = 0$ e quindi che il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico.

Proposizione 9.11 Sia $A, B \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con B invertibile. Allora se $q(t) = c_n t^n + \ldots + c_1 t + c_0$ è un polinomio in $\mathbb{K}[t]$ vale

$$q(B^{-1}AB) = B^{-1}q(A)B.$$

Se $T \in \operatorname{End}(V)$ e $q(t) = p_T(t)$ è il polinomio caratteristico di T (o un qualsiasi polinomio tale che $q(T) = 0$) si ha che $p_T(T) = 0 \Leftrightarrow p_T(B^{-1}TB) = 0$ e quindi il polinomio minimo non dipende dalla base e l'enunciato del Teorema 9.10 non dipende dalla base scelta per V.

Proposizione 9.12 $T \in \operatorname{End}(V)$ è diagonalizzabile se e solo se le radici del polinomio minimo $\mu_T(t)$ hanno molteplicità algebrica 1, ovvero $\mu_T(t)$ non ha radici doppie.

Proposizione 9.13 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$, $p_T(t)$ il polinomio caratteristico e $\mu_T(t)$ il polinomio minimo. Allora $p_T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \mu_T(\lambda) = 0$.

Teorema 9.14 (triangolazione) Data una qualunque matrice $M \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso (i.e. ogni polinomio in $\mathbb{K}[t]$ è irriducibile, per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) esiste una matrice C invertibile (matrice di cambio base) tale che CMC^{-1} è triangolare superiore.
Moralmente ogni matrice è triangolabile.

Proposizione 9.15 Siano $T, S \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizzabili tali che $TS = ST$. Allora S preserva gli autospazi di T e viceversa: se V_λ è autospazio di T allora $S(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Teorema 9.16 (diagonalizzazione simultanea) Siano $T, S \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizzabili. Allora T e S sono simultaneamente diagonalizzabili (i.e. esiste una base che diagonalizza entrambe) se e solo se $TS = ST$.

Teorema 9.17 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizzabile e W un sottospazio di V. Allora

$$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_k})$$

dove $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ sono gli autospazi relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di f. Dunque la restrizione di f a $W \cap V_{\lambda_j}$ è diagonalizzabile per ogni j e quindi $f|_W$ è diagonalizzabile.

Teorema 9.18 (esistenza del complementare invariante) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizzabile e W un sottospazio di V f-invariante. Allora esiste U sottospazio vettoriale f-invariante tale che $V = W \oplus U$.

Teorema 9.19 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f \in \operatorname{End}(V)$. Se esistono W_1, W_2 un sottospazi di V f-invarianti tali che $V = W_1 + W_2$ e tali che le restrizioni di f a W_1 e W_2 sono diagonalizzabili, allora f è diagonalizzabile.

Teorema 9.20 * Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e W, U due sottospazi di V tali che $V = W \oplus U$. Se $f\colon W \to W$ e $g\colon U \to U$ sono due applicazioni lineari si consideri $L\colon V \to V$ data da $L(v) = f(w) + g(u)$, dove $v = w + u$, $w \in W$, $u \in U$. Allora L è diagonalizzabile se e solo se f e g sono diagonalizzabili.

Diagonalizzazione - una strategia in 4 passi

1. Dato $T\colon V \to V$ endomorfismo, calcolo il polinomio caratteristico e ne trovo le radici ottenendo un polinomio della forma

$$p_T(t) = \det(t\mathrm{Id} - T) = (t-\lambda_1)^{a_1} \cdots (t-\lambda_k)^{a_k} \cdot f(t)$$

   con $f(t)$ irriducibile in $\mathbb{K}[t]$. Se il polinomio caratteristico si fattorizza completamente nel campo, i.e. $f(t) = 1$ allora posso procedere, altrimenti T non è diagonalizzabile.

2. Dette $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con $k \leq n$ le radici del polinomio caratteristico, i.e. autovalori di T, studio gli autospazi relativi $V_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_1 \mathrm{Id}), \ldots, V_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_k \mathrm{Id})$

3. Osservo che questi sottospazi sono in somma diretta e quindi

   - se $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$ allora T si diagonalizza e una base digonalizzante di V è data dall'unione delle basi dei V_{λ_j} e posso procedere;
   - se $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \subset V$ allora T non è diagonalizzabile.

   Se voglio solo sapere se T è diagonalizzabile è sufficiente confrontare la molteplicità algebrica a_i delle radici λ_i del polinomio caratteristico con la molteplicità geometrica $m_i = \dim V_{\lambda_i} = \dim \mathrm{Ker}(T - \lambda_i \mathrm{Id})$. T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ per ogni i vale $a_i = m_i$.

4. Usando la base trovata, si scrive la matrice diagonale corrispondente (i coefficienti sono zeri tranne sulla diagonale in cui ci sono tanti λ_i quanti la $m_i = \dim V_{\lambda_i}$).

10 Prodotti scalari

Definizione 10.1 (prodotto scalare) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione

$$\langle \, , \, \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$$

che soddisfa le seguenti prorpietà

(i) $\forall v, w \in V$ vale $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(ii) $\forall v, w, u \in V$ vale $\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$

(iii) $\forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ vale $\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

Indicheremo con la coppia (V, φ) lo spazio vettoriale V dotato del prodotto scalare $\varphi \colon V \times V \to \mathbb{K}$.

Proprietà 10.1 Alcuni prodotti scalari godono delle segenti proprietà

1. Un vettore $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$ si dice *isotropo*.
2. Un prodotto scalare tale che preso un $v \in V$

$$\forall w \in V \quad \langle v, w \rangle = O_V \Rightarrow v = O_V$$

   si dice *non degenere*.
3. Un prodotto scalare su V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ tale che

$$\forall v \in V \quad \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = O_V$$

   si dice *definito positivo*.

Teorema 10.1 Un prodotto scalare è non degenere se e solo se la matrice E che lo rappresenta ha rango massimo. Ovvero, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è base di V

$$\operatorname{rg} E = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} = n$$

Definizione 10.2 (norma, distanza, ortogonalità) Sia $\langle \, , \rangle$ un prodotto scalare su V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora

1. la norma di $v \in V$ è $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
2. la distanza tra $v, w \in V$ è data da $\|v - w\|$
3. due vettori $v, w \in V$ si dicono ortogonali se $\langle v, w \rangle = 0$

Teorema 10.2 (di Pitagora) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con prodotto scalare definito positivo. Dati $v, w \in V \colon \langle v, w \rangle = 0$ allora

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Teorema 10.3 (del parallelogramma) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con prodotto scalare definito positivo. Allora $\forall v, w \in V$ vale

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Definizione 10.3 (componente) Dati $v, w \in V$ chiamiamo coefficiente di Fourier o componente di v lungo w lo scalare

$$c = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

In particolare vale $\langle v - cw, w \rangle = 0$

Teorema 10.4 (disuguaglianza di Schwarz) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con prodotto scalare definito positivo. Allora $\forall v, w \in V$ vale

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Teorema 10.5 (disuguaglianza triangolare) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con prodotto scalare definito positivo. Allora $\forall v, w \in V$ vale

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Teorema 10.6 Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ a due a due perpendicolari ($\forall i \neq j \ \langle v_i, v_j\rangle = 0$). Allora $\forall v \in V$ il vettore

$$v - \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \ldots - \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} v_n$$

è ortogonale a ciascuno dei v_i. Risulta inoltre che il vettore $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ (dove $c_i = \frac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$) è la migliore approssimazione di v come combinazione lineare dei v_i.

Teorema 10.7 (disuguaglianza di Bessel) Siano $e_1, \ldots, e_n \in V$ a due a due perpendicolari e unitari. Dato un $v \in V$, sia $c_i = \frac{\langle v, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$. Allora vale

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \|v\|^2$$

Teorema 10.8 (ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare definito positivo. Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ vettori linearmente indipendenti. Possiamo allora trovare dei vettori $u_1, \ldots, u_r$, con $r \leq n$ ortogonali tra loro e tali che $\forall i \leq r$, $Span\{v_1, \ldots, v_i\} = Span\{u_1, \ldots, u_i\}$. In particolare basterà procedere in modo induttivo e prendere

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_i = v_i - \frac{\langle v_i, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \ldots - \frac{\langle v_i, u_{i-1}\rangle}{\langle u_{i-1}, u_{i-1}\rangle} u_{i-1} \end{cases}$$

Corollario 10.9 (esistenza della base ortonormale per prodotto scalare definito positivo) Dato V spazio vettoriale con prodotto scalare definito positivo esiste una base ortonormale di V, ossia una base $\{u_1, \ldots, u_r\}$ tale che $\forall i \neq j \ \langle u_i, u_j\rangle = 0$ e che $\forall i \ \|u_i\| = 1$.

Definizione 10.4 (ortogonale e radicale) Sia V uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare φ e $W \subseteq V$. Definiamo ortogonale di W l'insieme $W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W, \varphi(v, w) = 0\}$.
Definiamo radicale di V l'insieme $\text{Rad}\,(\varphi) = \{v \in V : \forall w \in V, \langle v, w\rangle = 0\}$. Per definizione si ha che $\text{Rad}\,(\varphi) = V^\perp$

Proprietà 10.2 (dell'ortogonale) ***** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dotato di prodotto scalare φ e siano U, W due sottospazi vettoriali di V. Allora:

(i) $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ e se φ è non degenere $W = (W^\perp)^\perp$;

(ii) $W^\perp \cap U^\perp = (W + U)^\perp$;

(iii) $(W \cap U)^\perp \supseteq W^\perp + U^\perp$ e se φ è non degenere $(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp$.

Teorema 10.10 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dotato di prodotto scalare φ. Sia W un sottospazio di V tale che la restrizione del prodotto scalare $\varphi|_W$ sia non degenere. Allora

$$V = W \oplus W^\perp.$$

In particolare l'enunciato vale se il prodotto scalare definito positivo.

Definizione 10.5 (prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$. Un prodotto hermitiano su V è una funzione

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

che soddisfa le seguenti proprietà

(i) $\forall v, w \in V$ vale $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (coniugato)

(ii) $\forall v, w, u \in V$ vale $\langle v, w+u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$ e $\langle v+w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$

(iii) $\forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ vale $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ e $\langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$

Definizione 10.6 (prodotto hermitiano standard) Dati due vettori colonna $v, w \in \mathbb{C}^n$ definiamo il prodotto hermitiano standard come

$$v \cdot w = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha_1\overline{\beta_1} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}$$

Teorema 10.11 (esistenza della base ortogonale per prodotto scalare generico) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale non banale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare. Allora V ha una base ortogonale.

Teorema 10.12 (Algoritmo di Lagrange) * Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare se V e $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base qualunque di V.

1. Se v_1 non è isotropo, cioè $\langle v_1, v_1\rangle \neq 0$, poniamo

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \\ v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1' \\ \vdots & \qquad \vdots \\ v_n' &= v_n - \frac{\langle v_n, v_1'\rangle}{\langle v_n, v_1\rangle} v_1' \end{aligned}$$

   Così $\langle v_j', v_1'\rangle = 0$ per ogni $j \in 2, \ldots, n$ e $\mathscr{B}'$ è una base di V.

2. Se v_1 è isotropo, cioè $\langle v_1, v_1\rangle \neq 0$ allora
   (a) Se $\exists j \in 2, \ldots, n$ tale che $\langle v_j, v_j\rangle \neq 0$ permuto la base $\mathscr{B}$ in modo che v_j sia il primo vettore e procedo come in 1.
   (b) Se $\forall j \in 1, \ldots, n,\ \langle v_j, v_j\rangle = 0$ allora ci sono due casi
      - $\langle\ ,\ \rangle$ è il prodotto scalare nullo e quindi ogni base è ortogonale
      - $\exists i \neq j : \langle v_i, v_j\rangle \neq 0$ in tale caso $\langle v_i + v_j, v_i + v_j\rangle = 2\langle v_j, v_j\rangle \neq 0$. Scelgo allora una base di V in cui $v_i + v_j$ è il primo vettore e procedo come in 1.

Dopo aver ortogonalizzato i vettori rispetto al primo, itero il procedimento su $\{v_2', \ldots, v_n'\}$ e così via. Alla fine ottengo una base ortogonale rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$. Dunque vale l'enunciato del Teorema 10.11.

Proposizione 10.13 (base ortonormale) Sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortogonale di V con un prodotto scalare. Posto

$$v_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{\langle w_i, w_i\rangle}} & \text{se } \langle w_i, w_i\rangle > 0 \\ w_i & \text{se } \langle w_i, w_i\rangle = 0 \\ \frac{w_i}{\sqrt{-\langle w_i, w_i\rangle}} & \text{se } \langle w_i, w_i\rangle < 0 \end{cases}$$

l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

Teorema 10.14 (corrispondenza matrice - prodotto scalare) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V. Dato un prodotto scale $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ la matrice del prodotto scalare è

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = (\varphi(v_i, v_j))_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}.$$

Viceversa data M matrice simmetrica del prodotto scalare e u, w vettori di vettori colonna $[u]_{\mathscr{B}}$ e $[w]_{\mathscr{B}}$ si ha

$$\varphi(v, w) = [u]_B^t \cdot M \cdot [w]_{\mathscr{B}}.$$

Proposizione 10.15 (radicale) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e φ un prodotto scalare su V. Vale che $\mathrm{Rad}\,(\varphi) = \{v \in V : \forall w \in V, \varphi(v,w) = 0\} = \{v \in V : M_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot [v]_{\mathscr{B}} = 0\}$.
(Moralmente $\mathrm{Rad}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\, M_{\mathscr{B}}(\varphi)$).

Definizione 10.7 (spazio duale, funzionali) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si definisce spazio duale di V l'insieme delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{K}$

$$V^* = \mathscr{L}(V, \mathbb{K}) = \mathscr{L}(V) = \{L \colon V \to \mathbb{K} : L \text{ è lineare}\}.$$

I suoi elementi vengono detti funzionali lineari da V in $\mathbb{K}$ e risulta $\dim V = \dim V^*$.

Definizione 10.8 (base duale) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Fissata una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V esiste una base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ di V^* ad essa associata detta base duale di $v_1, \ldots, v_n$ definita come

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Teorema 10.16 (di rappresentazione) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita con un prodotto scalare non degenere. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi \colon V &\to V^* \\ v &\mapsto \varphi_v = \langle v, \cdot \rangle \end{aligned}$$

dove φ_v è la funzionale tale che $\forall w \in V : \varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$, è un isomorfismo tra V e il suo duale V^*. In altri termini, dato $\varphi \in V^*$ esiste un unico $v \in V$ tale che $\forall w \in V, \varphi(w) = \langle v, w \rangle$. In tale caso si dice che φ è rappresentabile.

Teorema 10.17 (annullatore) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$ e sia W sottospazio di V. Sia inoltre $\mathrm{Ann}\, W = \{\varphi \in V^* : \forall w \in W, \varphi(w) = 0\}$ l'annullatore di W. Allora $\mathrm{Ann}\, W$ è sottospazio di V^* e vale che $\dim(\mathrm{Ann}\, W) = n - \dim W$.

Corollario 10.18 Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n$ con prodotto scalare non degenere, sia W sottospazio di V e $W^\perp$ il suo ortogonale. Siano inoltre V^* il duale di V e $\mathrm{Ann}\, W$ l'annullatore di W. Allora $\Phi(W^\perp) = \mathrm{Ann}\, W$ (in altre parole $\Phi|_{W^\perp} \colon W^\perp \to \mathrm{Ann}\, W$ è un isomorfismo) e vale quindi

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

Teorema 10.19 * Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare φ. Sia W sottospazio di V, $W^\perp$ il suo ortogonale e $\mathrm{Rad}\,(\varphi)$ il radicale di φ. Allora vale

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap \mathrm{Rad}\,(\varphi))$$

Teorema 10.20 Sia $\Phi \colon V \to V^*$ l'isomorfismo del Teorema 10.16. Allora $\mathrm{Rad}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\, \Phi$ e $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}^*}(\Phi) = M_{\mathscr{B}}(\varphi_v)$ dove $\mathscr{B}^*$ è la base del duale associata alla base $\mathscr{B}$ di V.

Corollario 10.21 Un prodotto scalare φ su V è non degenere $\Leftrightarrow \mathrm{Rad}\,(\varphi) = \{O_V\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, M_{\mathscr{B}}(\varphi) = O_V \Leftrightarrow M_{\mathscr{B}}(\varphi)$ ha rango $n = \dim V$.

Corollario 10.22 Se $\mathscr{B}$ è una base ortonormale allora la matrice del prodotto scalare è diagonale. Detti $\lambda_i = \varphi(v_i, v_i)$ si ha

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Proposizione 10.23 (indice di nullità) Se $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V rispetto a φ prodotto scalare su V, allora

$$n_0(\varphi) = \mathrm{card}\{i : \lambda_i = \varphi(v_i, v_i) = 0\} = \dim \mathrm{Rad}\,(\varphi).$$

Tale valore viene detto indice di nullità del prodotto scalare.

Teorema 10.24 (di Sylvester, indice di positività e di negatività) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, φ un prodotto scalare su V e $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Esiste un numero intero $r = n_+(\varphi)$ che dipende solo da φ e non dalla base $\mathscr{B}$, detto indice di positività, tale che ci sono esattamente r indici i tali che $\varphi(v_i, v_i) = 1$. Analogamente esiste un $r' = n_-(\varphi)$ che dipende solo da φ e non dalla base $\mathscr{B}$, detto indice di negatività, tale che ci sono esattamente r' indici i tali che $\varphi(v_i, v_i) = -1$.

Definizione 10.9 (segnatura e forma canonica dei prodotti scalari) Si definisce segnatura di un prodotto scalare φ su V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ la terna $(n_0(\varphi), n_+(\varphi), n_-(\varphi))$. Detta $n = \dim V$ vale

$$n_0(\varphi) + n_+(\varphi) + n_-(\varphi) = n.$$

Dato inoltre W sottospazio vettoriale di V valgono le seguenti caratterizzazioni

- $n_0(\varphi) = \dim \mathrm{Rad}\,(\varphi)$;
- $n_+(\varphi) = \max\{\dim W : W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}$;
- $n_-(\varphi) = \max\{\dim W : W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}$.

Per il Teorema 10.24 esiste una base ortonormale $\mathscr{B}$ rispetto a φ in cui la matrice del prodotto scalare è della forma

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Id}_{n_+}} & & \\ & \boxed{-\mathrm{Id}_{n_-}} & \\ & & \boxed{0_{n_0}} \end{pmatrix}$$

dove Id_r è la matrice identità di dimensione $r \times r$ e 0_p è la matrice nulla di dimensione $p \times p$.
Operativamente: per trovare la segnatura scrivo la matrice del prodotto scalare in una base ortonormale rispetto al prodotto scalare φ; tale matrice è diagonale e la segnatura si legge sugli elementi della diagonale (ci sono n_+ elementi uguali a 1, n_- elementi uguali a -1 e n_0 elementi nulli). Per il Teorema Spettrale, posso semplicemente trovare gli autovalori della matrice del prodotto scalare (**Ci vanno altre ipotesi??**)

11 Teorema spettrale, aggiunzione, operatori ortogonali e unitari

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ di dimensione finita dotato di prodotto rispettivamente scalare o hermitiano definito positivo $\langle\ ,\ \rangle$.

Teorema 11.1 (endomorfismo aggiunto e matrice aggiunta) Dato $T \colon V \to V$ endomorfismo esiste un unico endomorfismo $T^* \colon V \to V$ tale che

$$\forall u, v \in V,\ \langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle.$$

Tale T^* viene detto endomorfismo aggiunto di T.
In termini di matrici, se $\mathscr{B}$ è una base ortonormale di V e $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ è la matrice di T rispetto a tale base, allora la matrice di T^* rispetto alla stessa base è $[T^*]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \overline{([T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}})^t}$ (trasposta coniugata). Se A è una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, si definisce matrice aggiunta di A la matrice $\overline{A^t}$.

Proposizione 11.2 (matrice dell'aggiunto) Sia $T \in \operatorname{End}(V)$, $\mathscr{B}$ una base di V e M la matrice del prodotto scalare scritta in tale base. Allora

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $[T^*]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = M^{-1}\,([T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}})^t\,M$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $[T^*]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \overline{M^{-1}}\,\overline{([T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}})^t}\,\overline{M}$.

Proposizione 11.3 (proprietà dell'aggiunzione) Dati $T, S \in \operatorname{End}(V)$ vale

(i) $(T + S)^* = T^* + S^*$

(ii) $(T\,S)^* = S^*\,T^*$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ (\alpha\,T)^* = \overline{\alpha}\,T^*$

(iv) $(T^*)^* = T$

(v) * $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ e $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$;

(vi) * $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ e $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$.

Definizione 11.1 (endomorfismo normale) $T \in \operatorname{End}(V)$ si dice normale se commuta con il suo aggiunto, ovvero se $T\,T^* = T^*\,T$.

Definizione 11.2 (endomorfismo autoaggiunto) $T \in \operatorname{End}(V)$ si dice autoaggiunto se $T = T^*$. In termini di matrici se $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ è la matrice di T rispetto a una base ortonormale $\mathscr{B}$ di V si ha

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: T è autoaggiunta $\Leftrightarrow$ $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ è simmetrica (uguale alla trasposta).
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: T è autoaggiunta $\Leftrightarrow$ $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ è hermitiana (uguale alla trasposta coniugata).

Teorema 11.4 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ autoaggiunto. Se λ autovalore per T, allora $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 11.5 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $T \in \operatorname{End}(V)$ autoaggiunto. Allora

(i) il polinomio caratteristico $p_T(t)$ si fattorizza completamente e ha tutte le radici reali;

(ii) T ha almeno un autovalore;

(iii) se $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è un insieme di autovalori a due a due distinti allora $v_1, \ldots, v_r$ sono a due a due ortogonali.

Proposizione 11.6 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ e W sottospazio di V T-invariante, i.e. $T(W) \subseteq W$. Allora l'ortogonale $W^\perp$ è T^*-invariante.

Proposizione 11.7 Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ autoaggiunto e W sottospazio di V T-invariante, i.e. $T(W) \subseteq W$. Allora $T|_W$ è ancora autoaggiunto.

Teorema 11.8 (Spettrale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Sia $T\colon V \to V$ endomorfismo autoaggiunto se e solo se esiste una base ortonormale di V di autovettori per T.
In altri termini, ogni matrice simmetrica reale è simile a una matrice diagonale tramite una matrice ortogonale. In formule se $S \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica reale esistono una matrice ortogonale O (i.e. $O^tO = \mathrm{Id}$) rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$ e una matrice diagonale D tali che

$$D = O^{-1}SO = O^tSO.$$

Teorema 11.9 (Spettrale $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) * Sia $T\colon V \to V$ endomorfismo normale se e solo se esiste una base ortonormale di V di autovettori per T.
In altri termini, ogni matrice normale è simile a una matrice diagonale tramite una matrice unitaria. In formule se $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è una matrice normale esiste esistono una matrice unitaria U (i.e. $\overline{U^t}U = \mathrm{Id}$) rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$ e una matrice diagonale D tali che

$$D = U^{-1}NU = \overline{U^t}NU.$$

Teorema 11.10 (Spettrale $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ per endomorfismi autoaggiunti) Sia $T\colon V \to V$ endomorfismo normale allora se esiste una base ortonormale di V di autovettori per T (una sola implicazione).
In altri termini, ogni matrice hermitiana è simile a una matrice diagonale tramite una matrice unitaria. In formule se $H \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è una matrice hermitiana esiste esistono una matrice unitaria U (i.e. $\overline{U^t}U = \mathrm{Id}$) rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$ e una matrice diagonale D tali che

$$D = U^{-1}HU = \overline{U^t}HU.$$

Proposizione 11.11 Sia $T \in \mathrm{End}\,(V)$ (autoaggiunto se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Allora

$$T = O_{\mathrm{End}\,V} \Leftrightarrow \forall v \in V,\ \langle Tv, v\rangle = 0$$

Teorema 11.12 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare definito positivo. Sia $T \in \mathrm{End}\,(V)$ tale che $TT^* = T^*T$. Allora $V = \mathrm{Ker}\,T \oplus \mathrm{Im}\,T$.

Definizione 11.3 (endomorfismo ortogonale e matrice ortogonale) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Un endomorfismo $U\colon V \to V$ tale che $U^* = U^{-1}$ si dice endomorfismo ortogonale. In termini di matrici se $\mathscr{B}$ è un base ortonormale, $[U]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}$ è ortogonale $\Leftrightarrow$ $[U^{-1}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = ([U]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}})^t$.
Equivalentemente $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice ortogonale se $M^t = M^{-1}$.

Proposizione 11.13 Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale.

(ii) Le righe di A sono vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

(iii) Le colonne di A sono vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

Definizione 11.4 (endomorfismo unitario e matrice unitaria) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un endomorfismo $U\colon V \to V$ tale che $U^* = U^{-1}$ si dice endomorfismo unitario. In termini di matrici se $\mathscr{B}$ è un base ortonormale, $[U]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}$ è unitaria $\Leftrightarrow$ $[U^{-1}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \overline{([U]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}})^t}$
Equivalentemente $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ si dice unitaria se $\overline{M^t} = M^{-1}$.

Proposizione 11.14 Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è unitaria.

(ii) Le righe di A sono vettori ortonormali rispetto al prodotto hermitiano standard.

(iii) Le colonne di A sono vettori ortonormali rispetto al prodotto hermitiano standard.

Teorema 11.15 Sia $U \in \mathrm{End}\,(V)$ tale che $U^* = U^{-1}$ (i.e. ortogonale o unitario). Se λ è autovalore per U allora

(i) $|\lambda| = 1$ (in particolare se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda = \pm 1$);

(ii) Se $Uv = \lambda v$ allora $U^* v = \overline{\lambda} v$ (in particolare $\overline{\lambda}$ è autovalore di $U^* = U^{-1}$ rispetto allo stesso autovettore).

Teorema 11.16 Dato $U \in \operatorname{End}(V)$ sono equivalenti

(i) $U^* = U^{-1}$;

(ii) $\forall v, w \in V,\ \langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$ (U è un'isometria)

(iii) $\forall v \in V,\ \|Uv\| = \|v\|$.

Proposizione 11.17 Sia $U \in \operatorname{End}(V)$ ortogonale o unitaria e sia W un sottospazio di V U-invariante. Allora $W^\perp$ è U-invariante.

Teorema 11.18 (Spettrale per gli endomorfismi unitari) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sia $U \in \operatorname{End}(V)$ unitario. Allora esiste una base ortonormale di V di autovettori per U.

Teorema 11.19 (forma canonica degli endomorfismi ortogonali) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $Q\colon V \to V$ un endomorfismo ortogonale. Allora esiste una base ortonormale $\mathscr{B}$ di V in cui la matrice di Q ha la forma

$$[Q]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Id}_p} & & & & \\ & \boxed{-\mathrm{Id}_q} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_k}} \end{pmatrix}$$

dove $p, q, k \in \mathbb{N}$ con $p + q + 2k = n = \dim V$, Id_r è la matrice identità di dimensioni $r \times r$ e R_{θ_i} è una matrice rotazione non banale 2×2

$$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \qquad \text{con } \theta_i \neq 0, \pi \ (+2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z})$$

Proposizione 11.20 O matrice ortogonale $\Rightarrow \det O = \pm 1$.
U matrice unitaria $\Rightarrow |\det O| = 1$.

Definizione 11.5 $O(V)$ è il gruppo degli endomorfismi ortogonali con l'operazione di composizione. $O(\mathbb{R}^n) = O(n)$.
Il sottogruppo delle di $O(V)$ con $\det = +1$ è il gruppo ortogonale speciale $SO(V)$.

Definizione 11.6 $U(V)$ è il gruppo degli endomorfismi unitari con l'operazione di composizione. $U(\mathbb{C}^n) = O(n)$.
Il sottogruppo delle di $U(V)$ con $\det = +1$ è il gruppo unitario speciale $SU(V)$.

12 Miscellanea

Teorema 12.1 (forma canonica delle involuzioni) * Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim V = n$ e sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = \mathrm{Id}$. Allora esiste una base $\mathscr{B}$ di V tale che

$$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Id}_k} & \\ & \boxed{-\mathrm{Id}_{n-k}} \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{N}$ univocamente determinato.

Teorema 12.2 (forma canonica delle proiezioni) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim V = n$ e sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = f$ (proiezione). Allora esiste una base $\mathscr{B}$ di V tale che

$$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Id}_k} & \\ & \boxed{0_{n-k}} \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{N}$ univocamente determinato.

Teorema 12.3 * Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione ≥ 1 e sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = -\mathrm{Id}$. Allora esiste una base $\mathscr{B}$ di V tale che

$$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} & \boxed{-\mathrm{Id}_m} \\ \boxed{\mathrm{Id}_m} & \end{pmatrix}$$

con $m \in \mathbb{N}$ univocamente determinato. In particolare tale base è $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_m, f(v_1), \dots, f(v_m)\}$.

Teorema 12.4 (forma canonica delle matrici antisimmetriche reali) * Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ antisimmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale $M \in O(n)$ tale che

$$M^{-1}AM = M^tAM = \begin{pmatrix} \boxed{H_{a_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{H_{a_k}} & \\ & & & \boxed{0} \end{pmatrix} \qquad \text{con } H_{a_i} = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$$

TEST MERGE