কিছুটা তো বটে)। এই একই ব্যাপারই বারবার চলতে থাকবে, তাই একিলিসের আর কচ্ছপ ধরা হবে না। বুঝতে অসুবিধা হয় না, যে এখানে প্রথম সমাধানটাই ঠিক, কিন্তু দ্বিতীয় সমাধানটার ভুলটা তাহলে কোথায়? এই ধরণের paradox-এর সমাধান করতে গিয়েই infinite series বিষয়টার সৃষ্টি, যেটা আমরা এখানে শিখতে চলেছি।

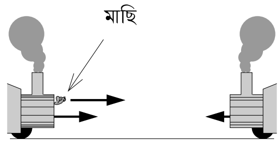

Fig 107

এই প্রসঙ্গে একটা ছেলে-ঠকানো প্রশ্ন মনে পড়ল, যেটা তোমরা হয়তো ছোটোবেলার কোনো অংক বইতে দেখে থাকবে। দুটো ট্রেন আসছে মুখোমুখি (Fig 107)। একটার গতি ঘন্টায় 200 km, অন্যটার 100 km. ওদের মধ্যে এই মুহূর্তে দূরত্ব মাত্র 5 km. বুঝতেই পারছ শীঘ্রই একটা সাংঘাতিক দুর্ঘটনা হতে চলেছে। আমাদের অবশ্য তা নিয়ে কোনো মাথা ব্যথা নেই, আমাদের যাবতীয় দুশ্চিন্তা একটা মাছিকে নিয়ে, যেটা একটা আশ্চর্য কায়দায় আত্মহত্যার পরিকল্পনা এঁটেছে। মাছিটা ঘন্টায় 600 km বেগে উড়তে পারে। এই মুহূর্তে সেটা প্রথম ট্রেনের ইঞ্জিন থেকে অন্য ট্রেনের ইঞ্জিনের দিকে উড়তে শুরু করেছে। ঐ ইঞ্জিনে পৌঁছনোমাত্র সে বোঁ-ও করে ঘুরে গিয়ে ফের প্রথম ট্রেনের দিকে ফিরে আসবে (Fig 108), পৌঁছেই আবার বোঁ-ও করে দ্বিতীয় ইঞ্জিনের দিকে ছুটবে, এইভাবেই উড়তেই থাকবে উড়তেই থাকবে যতক্ষণ না ট্রেনদুটো দড়াম করে পরস্পরকে ধাক্কা মারার সময়ে মাছিটাকে পিষে ফেলবে। প্রশ্ন হল এই অনিবার্য করুণ পরিণতির আগে মাছিটা মোট কত দূরত্ব উড়বে? এর সহজ সমাধানটা এই রকম—ট্রেনদুটো পরস্পরকে ধাক্কা মারবে $5/(100+200) = 1/60$ ঘন্টা পরে। ততক্ষণ মাছিটা টানা উড়েছে, তার মানে মোট উড়েছে $600/60 = 10$ km. এবার আমি জেনোর কায়দায় একটা অন্য সমাধান দিচ্ছি, এর ভুলটা কোথায় বল—মাছিটা দুটো ট্রেনের চেয়েই দ্রুত যায়। সুতরাং দুটো ট্রেনের মধ্যে সংঘর্ষের আগেই মাছিটা অন্য ট্রেন পৌঁছে যাবে, ফেরা পথেও একই যুক্তি খাটবে, সংঘর্ষের আগেই ও প্রথম ট্রেনের ফিরে আসবে। একই ভাবে সংঘর্ষের আগেই ও আবার দ্বিতীয় ট্রেনে পৌঁছে নির্বিঘ্নে ফিরেও আসবে। এইভাবে চলতেই থাকবে, ফলে ওর ওড়া কোনো দিনই শেষ হবে না!

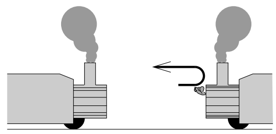
Fig 108

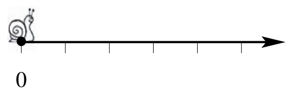

Fig 109

এই দুটো paradox-এরই নিরসন হবে এই অধ্যায়ের infinite series শেখার পর। অবশ্য তুমি মনে করতেই পারো যে, খামোখা অত কষ্ট করব কেন? সহজ বুদ্ধিতে যেটা বোঝা যাচ্ছিল দুই ক্ষেত্রেই তো সেটাই ঠিক দেখা যাচ্ছে, আমরা আদৌ জটিল সমাধানগুলো নিয়ে মাথা ঘামাব কেন? ঠিক কথা, এই দুটো উদাহরণেই সহজ বুদ্ধির সমাধানটাই ঠিক হয়েছে। কিন্তু সব সময়েই কিন্তু তা হয় না। এবার একটা উদাহরণ দিই যেখানে সহজ বুদ্ধির সমাধানটা বেমালুম ভুল (যদিও সেটা প্রমাণ করার পরও বিশ্বাস হওয়া শক্ত)!

একটা 1 মিটার লম্বা রাবার ব্যান্ড আছে। একটা শামুক এর ওপর চড়ে একপ্রান্ত থেকে অন্য প্রান্তে যাবার চেষ্টা করছে (Fig 109). শামুকরা ধীরস্থির প্রাণী, মিনিটে মাত্র 1 সেন্টিমিটার এগোয়। ঠিক এক মিনিটের মাথায় আমরা রাবার ব্যান্ডটাকে টেনে আরও 1 মিটার বাড়িয়ে দিলাম (মানে এখন মোট দৈর্ঘ্য দাঁড়াল $1 + 1 = 2$ মিটার)। শামুকটা যেহেতু ব্যান্ডের গায় লেপ্টে বসে রয়েছে, ফলে টান খেয়ে সেটাও সামান্য খানিকটা এগিয়ে গেল। পরের মিনিটে আবার শামুকটা ব্যান্ড বেয়ে আরো 1 সেন্টিমিটার এগোলো। তার পর ফের ব্যান্ডটাকে টেনে আরও 1 মিটার বাড়িয়ে দেওয়া হল। এইভাবে চলতে লাগল। শামুকটা সব সময়েই ব্যান্ড বেয়ে মিনিটে 1 সেন্টিমিটার করে এগোয়, আর প্রতি মিনিটের মাথায় ব্যান্ডটাকে টেনে তার দৈর্ঘ্য 1 মিটার করে বাড়িয়ে দেওয়া হয়।

প্রশ্ন হল শামুকটা কি কোনো দিনই ব্যান্ডের অন্য প্রান্তে পৌঁছবে? সহজ বুদ্ধি নিশ্চয়ই বলছে যে, সেটা অসম্ভব! এবার আর জটিল বুদ্ধির (সঠিক) সমাধানটা এখানেই বলব না, সেটা যথা সময়ে আত্মপ্রকাশ করবে!

17.1 Definition

আমরা এবার infinite series-এর সংজ্ঞা শিখব। কি করতে চলেছি বোঝার জন্য আবার সেই একিলিসের কচ্ছপ তাড়া করার উদাহরণটা ভাবো। ধরো একিলিসের velocity (গতিবেগ) হল V আর কচ্ছপটার velocity হল v $(< V)$. যদি শুরুতে ওদের দূরত্ব হয় d_1, তবে একিলিস B-তে পৌঁছবে $\frac{d_1}{V}$ সময় পরে। এর নাম দিলাম ধর t_1,

$$t_1 = \frac{d_1}{V}.$$

এর মধ্যে কচ্ছপটা এগিয়ে যাবে vt_1 দূরত্ব (একে বলি d_2). তবে সেই d_2 দূরত্ব অতিক্রম করতে একিলিসের সময় লাগবে

$$t_2 = \frac{d_2}{V} = t_1 \times \frac{v}{V}.$$

এই সময়ে কচ্ছপটা এগিয়ে যাবে $d_3 = vt_2$ দূরত্ব, আর সেটা পার করতে একিলিসের সময় লাগবে আরও

$$t_3 = \tfrac{d_3}{V} = t_1 \left(\frac{v}{V}\right)^2.$$

এইভাবে ব্যাপারটা চলতেই থাকবে, সুতরাং মোট সময় লাগবে

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots = t_1 + t_1 \left(\tfrac{v}{V}\right) + t_1 \left(\tfrac{v}{V}\right)^2 + \cdots .$$

এদিকে সহজ বুদ্ধিতে আমরা জানি যে, মোট সময় লাগার কথা

$$\frac{d_1}{V - v},$$

কারণ কচ্ছপটার সাপেক্ষে একিলিসের relative velocity হল $V - v$. তার মানে এই paradox-এর নিরসন তখনি হবে যদি কোনোভাবে দেখাতে পারি যে,

$$t_1 \left[1 + \tfrac{v}{V} + \left(\tfrac{v}{V}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{d_1}{V - v}.$$

এই অবধি এসে হয়তো তুমি চিনে ফেলেছো যে বাঁদিকের সংখ্যাগুলো একটা GP-তে রয়েছে। হাইস্কুলে সাধারণতঃ এই কথাটা বলা থাকে যে, $-1 < r < 1$ হলে

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1 - r} \qquad (*)$$

হয়। কেন হয়, কি করে হয় এসব অবশ্য হাইস্কুলে বলা হয় না, এবং ছাত্ররা সাধারণতঃ অন্ধের মত এই কথাটা মুখস্থ করে রাখে। এই কথাটা যদি এখানে আমরা অন্ধের মতই আমাদের ক্ষেত্রে লাগিয়ে দিই তবে

$$t_1 \left[1 + \tfrac{v}{V} + \left(\tfrac{v}{V}\right)^2 + \cdots\right] == t_1 \times \frac{1}{1 - \frac{v}{V}} = \frac{d_1}{V - v},$$