

# Modern Algebra

MATHEMATICS DEGREE HONOURS COURSE

**Dr. Arnab Chakraborty**

*Assistant Professor  
Indian Statistical Institute, Kolkata*

Formerly

*Guest Faculty  
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur*

◇

*Guest Faculty  
Ramakrishna Vivekananda University, Belur*

◇

*Assistant Professor  
St. Xavier's College, Kolkata*

**Sarat Book Distributors**

18-B, Shyamacharan De Street  
Kolkata 700 073



# সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

i

## I. Set, relation, function (year 1) 1

<b>DAY 1 একেবারে গোড়ার কথা</b>	<b>1</b>
1.1 $\subseteq, \cup, \cap$ . . . . .	2
1.2 চোখ, বাইনোকুলার, চাঁদ আর পরোটা . . . . .	4
1.3 Set-builder notation . . . . .	5
1.4 $\forall, \exists, \neg$ . . . . .	5
1.5 অংকের ব্যাকরণ . . . . .	6
1.6 প্রমাণ লেখার কায়দা . . . . .	8
1.6.1 Direct proof . . . . .	8
1.6.2 Proof by contradiction . . . . .	10
1.7 Vacuously true . . . . .	10
<b>DAY 2 দুটো set-কে সমান দেখানো</b>	<b>11</b>
<b>DAY 3 আরও প্রয়োগ</b>	<b>19</b>
3.1 de Morgan's Laws . . . . .	19
3.2 Cartesian products . . . . .	24
<b>DAY 4 Function (part 1)</b>	<b>28</b>
4.1 One-one, onto, bijection . . . . .	30
4.2 কিছু উদাহরণ . . . . .	31
<b>DAY 5 Function (part 2)</b>	<b>38</b>
5.1 Inverse function . . . . .	38
5.2 Left এবং right inverse . . . . .	40
<b>DAY 6 Function (part 3)</b>	<b>43</b>
6.1 Image of a set . . . . .	43
6.2 Preimage of a set . . . . .	47
6.3 Finite set-এর মজা . . . . .	48
<b>DAY 7 Function (part 4)</b>	<b>51</b>
7.1 Composition . . . . .	51
7.1.1 $f \circ g$ থেকে $f$ আর $g$ . . . . .	54
7.1.2 $f$ আর $g$ থেকে $f \circ g$ . . . . .	58
<b>DAY 8 Relation (part 1)</b>	<b>61</b>
8.1 Equivalence relation . . . . .	63
8.2 পরীক্ষা করে দেখা . . . . .	65
8.3 Properties . . . . .	70
8.4 Relation-এর domain আর range . . . . .	71

<b>DAY 9 Relation (part 2)</b>	<b>72</b>
9.1 ইচ্ছে মত relation তৈরী . . . . .	72
9.2 Partition . . . . .	76
9.2.1 Partition থেকে equivalence . . . . .	77
9.2.2 Equivalence থেকে partition . . . . .	79
<b>Answers</b>	<b>84</b>
<b>II. Group theory (year 1)</b>	<b>85</b>
<b>DAY 10 গোড়ার কথা</b>	<b>85</b>
10.1 Abstract structure তৈরীর মাল মশলা . . . . .	89
<b>DAY 11 Binary operation-দের বিভিন্ন ধর্ম</b>	<b>93</b>
11.1 Closure . . . . .	93
11.2 Commutative . . . . .	96
11.3 Identity . . . . .	96
11.4 Inverse . . . . .	99
11.5 Associativity . . . . .	100
<b>DAY 12 Group</b>	<b>103</b>
12.1 পূর্বপরিচিত কিছু group . . . . .	105
12.2 নতুন নতুন group . . . . .	105
12.2.1 Modulo group . . . . .	106
12.2.2 Complex numbers: unit circle . . . . .	108
12.2.3 Power set . . . . .	109
12.3 কিছু সহজ অংক . . . . .	111
<b>DAY 13 Matrix groups</b>	<b>113</b>
<b>DAY 14 আরও নানা রকম group</b>	<b>121</b>
14.1 Group of symmetry . . . . .	126
<b>DAY 15 Equation</b>	<b>128</b>
15.1 Abelian দেখানো . . . . .	130
<b>DAY 16 Order (part 1)</b>	<b>135</b>
16.1 Finite/infinite . . . . .	140
<b>DAY 17 Order (part 2)</b>	<b>142</b>
<b>DAY 18 Subgroup (part 1)</b>	<b>149</b>
18.1 Intersection . . . . .	152
18.2 Union . . . . .	154

<b>DAY 19 Subgroup (part 2)</b>	<b>156</b>
19.1 সহজে subgroup দেখানো . . . . .	156
19.1.1 কিছু প্রয়োগ . . . . .	159
19.2 Centre of a group . . . . .	163
<b>DAY 20 Group-এর পূর্বপুরুষরা</b>	<b>164</b>
20.1 Semigroup থেকে group . . . . .	167
<b>Answers</b>	<b>174</b>
<b>III. Group theory (year 2)</b>	<b>177</b>
<b>DAY 1 Coset</b>	<b>177</b>
1.1 Coset কাকে বলে? . . . . .	177
1.2 পাউরুটির স্লাইসের প্রমাণ . . . . .	184
<b>DAY 2 Lagrange's theorem</b>	<b>186</b>
2.1 Coset ব্যবহার করে প্রমাণ . . . . .	186
2.2 Equivalence ব্যবহার করে প্রমাণ . . . . .	188
2.2.1 Equivalence-টা এলো কোথা থেকে? . . . . .	190
2.3 Applications . . . . .	191
2.3.1 Euler's theorem . . . . .	192
2.4 Lagrange's theorem-এর converse . . . . .	194
<b>DAY 3 Cyclic groups (part 1)</b>	<b>196</b>
3.1 Cyclic group মানেই Abelian . . . . .	197
3.2 Examples . . . . .	199
3.2.1 $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ . . . . .	199
3.2.2 Complex . . . . .	199
3.2.3 বিবিধ . . . . .	200
3.3 কখন cyclic হয়? . . . . .	202
<b>DAY 4 Cyclic groups (part 2)</b>	<b>204</b>
4.1 Generators . . . . .	204
4.2 Subgroup . . . . .	206
4.2.1 Cyclic-দের subgroup-রাও cyclic . . . . .	206
4.2.2 Cyclic-এর বেলায় Lagrange's theorem-এর converse . . . . .	208
<b>DAY 5 Permutation groups (part 1)</b>	<b>209</b>
5.1 Double-decker notation . . . . .	209
5.2 Cycle notation . . . . .	211
5.3 Symmetric group: $S_n$ . . . . .	213
5.4 Equations . . . . .	215
5.5 Order . . . . .	216

<b>DAY 6 Permutation groups (part 2)</b>	<b>219</b>
6.1 Even এবং odd permutation . . . . .	219
6.1.1 15-puzzle . . . . .	224
6.1.2 Even-odd-এর নামতা . . . . .	225
6.2 Subgroups . . . . .	226
6.2.1 Alternating subgroup, $A_n$ . . . . .	227
<b>Answers</b>	<b>229</b>
 <b>IV. Rings and Fields (year 2)</b>	 <b>231</b>
<b>DAY 7 Ring (part 1)</b>	<b>231</b>
7.1 কেন এবং কী? . . . . .	231
7.1.1 Unity আর unit-এর মধ্যে পার্থক্য কী? . . . . .	233
7.2 নানারকম ring . . . . .	234
7.3 একটা অভূত প্রয়োগ . . . . .	237
<b>DAY 8 Ring (part 2)</b>	<b>239</b>
8.1 Subring . . . . .	239
8.2 Subring-এর unity . . . . .	243
8.3 Union/intersection . . . . .	246
<b>DAY 9 Ring (part 3)</b>	<b>247</b>
9.1 সহজ কিছু অংক . . . . .	247
<b>DAY 10 Ring (part 4)</b>	<b>254</b>
10.1 একটু কম সহজ কিছু অংক . . . . .	254
10.2 আরও কঠিন কিছু অংক . . . . .	260
<b>DAY 11 Ring (part 5)</b>	<b>260</b>
11.1 Zero divisor . . . . .	260
11.2 Unit . . . . .	266
<b>DAY 12 Integral domain</b>	<b>268</b>
12.1 Characteristic . . . . .	272
<b>DAY 13 Field (part 1)</b>	<b>275</b>
13.1 Field দেখানো . . . . .	275
<b>DAY 14 Field (part 2)</b>	<b>282</b>
14.1 Integral domain-এর সঙ্গে field-এর সম্পর্ক . . . . .	282
14.2 Prime order fields . . . . .	286
<b>DAY 15 Field (part 3)</b>	<b>288</b>
15.1 Subfield . . . . .	288
15.2 Equations . . . . .	292
<b>Answers</b>	<b>296</b>

<b>V. Group theory (3rd yr)</b>	<b>297</b>
<b>DAY 1 Isomorphism এবং homomorphism</b>	<b>297</b>
1.1 কুমীরছানার গল্প . . . . .	297
1.2 Image আর kernel . . . . .	301
<b>DAY 2 নানারকম group</b>	<b>307</b>
2.1 Cyclic groups . . . . .	309
<b>DAY 3 Normal subgroup (part 1)</b>	<b>313</b>
3.1 কাকে বলে? . . . . .	313
3.2 তিনরকম সংজ্ঞা . . . . .	314
3.3 তিনটে সংজ্ঞাই সমার্থক . . . . .	316
3.4 পাঁচমিশালী অংক . . . . .	318
<b>DAY 4 Normal subgroup (part 2)</b>	<b>323</b>
4.1 Well-known examples . . . . .	323
4.1.1 Alternating subgroup . . . . .	323
4.1.2 Centre . . . . .	324
4.1.3 Normaliser . . . . .	325
4.1.4 Commutator . . . . .	327
4.2 Kernel . . . . .	328
<b>DAY 5 Quotient group (part 1)</b>	<b>329</b>
5.1 Normal subgroup-রা কোথা থেকে এল? . . . . .	329
5.2 Quotient group কাকে বলে? . . . . .	333
<b>DAY 6 Quotient group (part 2)</b>	<b>338</b>
6.1 Isomorphism theorem . . . . .	342
<b>Answers</b>	<b>345</b>
<b>Index</b>	<b>347</b>

## ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

এসে গেল Modern Algebra-র দ্বিতীয় সংস্করণ। প্রথম সংস্করণের পরে তোমরা অনেকে নানারকম পরামর্শ, অনুরোধ, অভিযোগ করেছিলে। সেইসব মাথায় রেখে বইটার খোলনলচে অনেকটাই বদলে ফেলেছি। যারা যারা নানারকম মতামত দিয়ে সাহায্য করেছ, তাদের সকলের তো নাম জানি না, তাই এখানে উল্লেখ করতে পারছি না। কিন্তু বিশেষভাবে যে দুজনের মন্তব্যের ভিত্তিতে বইটার অনেকটাই রদবদল করেছি তাঁরা হলেন শ্রীকল্লোল মাইতি আর শ্রীআবীরলাল সরকার। এঁদেরকে (এবং নাম-না-বলা শুভাখীদেরকেও) অনেক অনেক ধন্যবাদ।

যারা আমাদের "বাংলায় বোঝানো ইংরাজী বই" সিরিজটা নতুন দেখছ, তাদের জানিয়ে রাখি যে, এই সিরিজটা লেখা হচ্ছে সেই সব ছাত্রছাত্রীদের কথা মাথায় রেখে যারা ইংরাজী মাধ্যমে পড়ছে, কিন্তু ইংরাজীর চেয়ে যাদের বাংলা বুঝতে বেশী সুবিধা হয়। এখানে যাবতীয় technical term ইত্যাদি ইংরাজীতেই লেখা, উত্তরগুলোও তাই। শুধু বোঝানো অংশটুকু বাংলায়।

যাদের ইংরাজী বুঝতে অসুবিধা হয় না, তারাও অনেক সময়ে বুঝতে পারো না যে, একটা অংকের উত্তর কি করে ইংরাজীতে লিখতে হয়। অংক লেখার ইংরাজী আর সাধারণ ইংরাজী ঠিক এক জিনিস নয়। কি করে একটা উত্তর ইংরাজীতে গুছিয়ে লিখতে হয় সেটা এই বইতে handwriting-এর মত লিখে দেখানো আছে।

বইটায় প্রচুর ছবি দেওয়া আছে। একটা অংকের উত্তর জানা থাকলে লিখে ফেলা কঠিন নয়। কঠিন হল উত্তরটা নিজে নিজে ভেবে বার করা। ছবিগুলো এই কাজে অপরিহার্য। এই বইয়ের অন্যতম উদ্দেশ্য হল তোমাকে ছবি এঁকে অংক করতে উৎসাহিত করা। অংক করার সময়ে যত পারবে ছবি আঁকবে, এমন কি পরীক্ষার খাতাতেও। ওতে সময় নষ্ট হয় না, বরং সময় বাঁচে।

বইটায় পাঁচটা অধ্যায় আছে। প্রথম দুটো first year-এর জন্য, তার পরের দুটো second year-এর জন্য, এবং শেষ অধ্যায়টা third year-এর জন্য। প্রতিটা অধ্যায়কে আবার day1, day2,... এইভাবে দিনে দিনে ভাগ করা আছে। মোটামুটিভাবে এক দিনের কাজ বলে যতটা দিয়েছি, সেটা হল কোচিং ক্লাসের দুই ঘন্টার পড়া। যেগুলো ইংরাজীতে লেখা সেগুলো যেন মাস্টারমশাই বোর্ডে লেখাচ্ছেন, আর বাংলাগুলো মুখে বলছেন।

### 10 years' questions

যখন যে অধ্যায়টা শিখলে তখন তখনই সেই অধ্যায়ের 10 years' question-গুলো কষে ফেলা বুদ্ধিমানের কাজ। ঠিক এই নীতিতেই এই বইটা লেখা। প্রতিটি অধ্যায়ে সেই বিষয়ের দশ বছরের প্রশ্নগুলোর বিশদ উত্তর আলোচনা করা আছে। এমন কি ভুল অংকগুলোও বাদ নেই, সেগুলো কেন ভুল সেটাও বোঝানো আছে।

এই বইয়ের 10 years' question-গুলো নিয়েছি বাজারে প্রচলিত সংকলনগুলো থেকে। সুতরাং ভুল প্রশ্নগুলোর ভুলের দায় কতটা প্রশ্নকর্তার আর কতটা সংকলনকারীর সেটা জানি না। এই বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। তাও কিছু ভুল থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। কোনো ভুলের সন্ধান পেলে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে email (arnabc74@gmail.com) বা ফোন (9231542600) ব্যবহার করতে পারো। আর এই webpage-টায় চোখ রেখো--

<http://www.isical.ac.in/~arnabc/modalged2>

এই বইয়ের ভুলত্রুটিগুলো বেরোলে ওখানে বলে দেব। আর তোমার মন্তব্য লেখারও একটা জায়গা আছে ওখানে।

অর্ণব চক্রবর্তী