আচ্ছা, preimage নিয়ে তো অনেক কথা বললাম, কিন্তু image নিয়ে তো কিছু বললাম না? যেমন A যদি open হয় তবে $f(A)$-ও কি open হতে বাধ্য? আসলে এরকম কিছুই বলা যায় না।

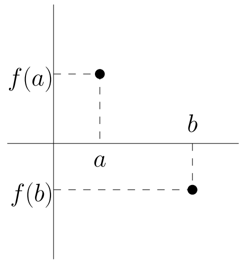

Fig 236

Exercise 298: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা এমন continuous $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর এমন একটা set $A \subseteq \mathbb{R}$ দাও যাতে—

1. A closed অথচ $f(A)$ closed নয়।
2. A open অথচ $f(A)$ open নয়।

■

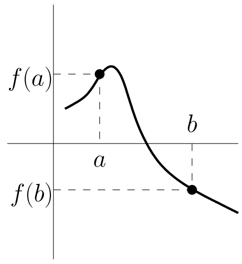

Fig 237

DAY 23

Intermediate value property

ব্যাপারটা প্রথমে ছবি এঁকে বোঝা যাক। Fig 236-এ দুটো বিন্দু দেওয়া আছে, একটা x-axis-এর কিছুটা উপরে, অন্যটা কিছুটা নীচে। তোমার কাজ হল এমন একটা continuous function-এর গ্রাফ আঁকা যেটা এই দুটো বিন্দু দিয়ে যায়। এটা কঠিন কাজ নয়, একটা উত্তর Fig 237-এর দেখানো আছে। লক্ষ কর যে গ্রাফটা a থেকে b-তে যাবার পথে x-axis-কে একবার ছেদ করেছে। এবার তোমাকে একটা কঠিন কাজ করতে দেব—তোমাকে এমন একটা continuous গ্রাফ আঁকতে হবে যেটা ঐ দুটো বিন্দু দিয়ে যায়, কিন্তু a থেকে b-এর মধ্যে কোথাও x-axis-কে ছেদ না করে। খানিকক্ষণ চেষ্টা করে দেখলেই বুঝবে যে এরকম গ্রাফ আঁকা অসম্ভব। সাবধান, Fig 238-এর মত আঁকলে কিন্তু চলবে না, ওটা কোনো function-এর গ্রাফই নয় (কেন নয়?)।

এটা কোনো function-এর গ্রাফই নয়!

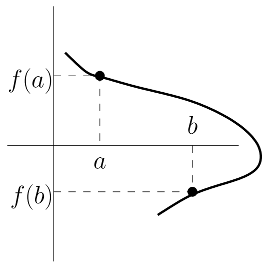

Fig 238

তার মানে যদি $f(x)$ এমন কোনো continuous function হয় যার ক্ষেত্রে $f(a)$ আর $f(b)$-র মধ্যে একজন positive, অন্যজন negative, তবে কোনো না কোনো point c পাবই (a,b)-র মধ্যে যেখানে $f(c) = 0$ হবে। ঠিক এই কথাটাই এখানে প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Exercise 299: If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is continuous and if $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs, then prove that there exists at least one point c in the open interval (a,b) such that $f(c) = 0$[4] **(2000)** ■

Soln:

We
assume, without loss of generality,
that $f(a) > 0$ and $f(b) < 0$

$f(a)$ আর $f(b)$-র মধ্যে কে positive কে negative সেটা বলে দেয় নি, তাই একটা কিছু ধরে নিলাম। উল্টোটা ধরলেও প্রমাণের মূল যুক্তি একই থাকত।

Target To show $\exists c \in (a,b) \quad f(c) = 0.$

কি করে c পাব সেটা বোঝার জন্য প্রথমে এই set-টা দ্যাখো—

Let $A = \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$.

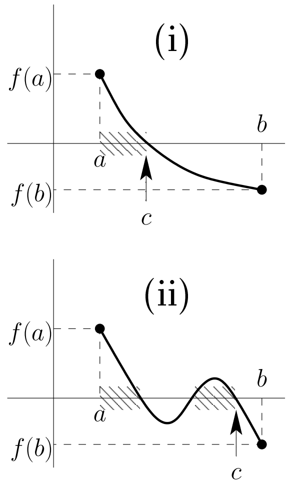

Fig 239

Fig 239-এ দুটো উদাহরণ দেখিয়েছি। মনে রেখো A হল x-axis-এর সেই অংশগুলো যেখানে গ্রাফটা y-axis-এর উপরে মাথা তুলেছে। ছবিতে আমরা A-কে shade করে দেখিয়েছি। লক্ষ কর যে যদি $c = \sup A$ নিই, তবে দুই ক্ষেত্রেই $f(c) = 0$ হচ্ছে। এই ব্যাপারটা যে সব সময়েই হবে, সেটা আমরা এক্ষুণি প্রমাণ করব। কিন্তু আগে নিজে কয়েকটা ছবি এঁকে নিঃসন্দেহ হয়ে নাও।

আমরা $c = \sup A$ নিতে চলেছি, কিন্তু তার আগে দেখানো দরকার যে $\sup A$ আদৌ আছে, মানে A হল nonempty এবং bounded above.

$A \subseteq [a,b]$, and so is bounded from above by b.

$\because f(a) > 0 \therefore a \in A$, and $\therefore A \neq \phi$.

$\therefore \sup A$ exists.

$\exists c$ Choose $c = \sup A$.

এবার তবে দেখানো শুরু করি যে $f(c) = 0$. আমরা proof by contradiction ব্যবহার করব, মানে $f(c) \neq 0$ ধরে শুরু করব, এবং শেষমেশ একটা contradiction-এ পৌঁছব।

Check Shall show that $f(c) = 0$.

Let, if possible, $f(c) \neq 0$.

$f(c) \neq 0$ হলে দুটো কেস হতে পারে—হয় $f(c) < 0$ নয় $f(c) > 0$. প্রথম কেসে আমরা দেখাব যে c কোনোভাবেই A-র upper bound হতে পারে না—এটা একটা contradiction কারণ আমরা $c = \sup A$ নিয়েছিলাম।

Case I: $f(c) < 0$:

Take $\epsilon = -f(c) > 0$.

$\because f(x)$ is continuous at $x = c$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c,\delta) \quad f(x) \in N(f(c),\epsilon).$$

Now $\because \epsilon = -f(c)$,

$\therefore N(f(c),\epsilon) = (2f(c), 0)$.

$\therefore \forall x \in N(c,\delta)$ we have $f(x) < 0$.

In particular, for $x = c + \frac{\delta}{2}$ we have $f(c + \frac{\delta}{2}) < 0$.

So $c + \frac{\delta}{2} \in A (\Rightarrow\Leftarrow \because c$ is an upper bound of A.

এবার দ্বিতীয় কেস। এখানে দেখাব যে c-এর থেকেও ছোটো upper bound আছে A-র জন্য। এটা একটা contradiction, কারণ $c = \sup A$ হল A-র সবচেয়ে ছোটো upper bound.

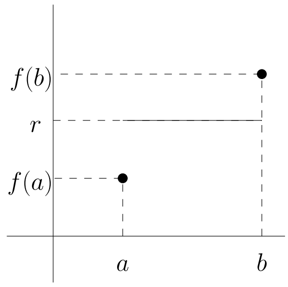

Fig 240

<u>Case II: $f(c) > 0$:</u>

Take $\epsilon = f(c) > 0$. $\because f(x)$ is continuous at $x = c$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \quad f(x) \in N(f(c), \epsilon).$$

Now $\because \epsilon = f(c)$,

$\therefore N(f(c), \epsilon) = (0, 2f(c))$.

So $\forall x \in N(c, \delta)$ we have $f(x) > 0$.

In particular, for $c - \frac{\delta}{2}$ is also an upper bound for A.($\Rightarrow\Leftarrow \because$ c is <u>least</u> upper bound of A.)

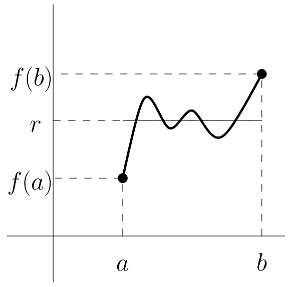

Fig 241

■

Exercise 300: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous on $[a, b]$ and $f(a)f(b) < 0$ Prove that there exists at least one point $c \in (a, b)$ such that $f(c) = 0$. [5] **(2002,2004,2011)** ■

Soln:

এটা আসলে আগের অংকটাই। $f(a)f(b) < 0$ মানে $f(a)$ আর $f(b)$ দুজনে 0-র দুদিকে আছে।

■

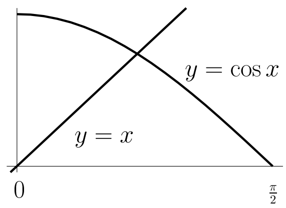

Fig 242

এতক্ষণ আমরা দুটো point নিচ্ছিলাম যারা x-axis-এর দুইদিকে আছে, এবং দেখিয়েছি যে কোনো continuous function দিয়ে তাদের যোগ করতে হলে x-axis-কে অন্ততঃ একবার ছেদ না করে পথ নেই। একই কথা কিন্তু x-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল যে কোনো লাইনের সম্বন্ধেই বলা যেত। যেমন Fig 240-তে $y = r$ দিয়ে একটা লাইন এঁকেছি, আর তার দুই দিকে দুটো point নিয়েছি। যদি এই দুটো point-কে একটা continuous function-এর গ্রাফ দিয়ে যোগ করতে হয় (Fig 241-এর মত) তবে (a, b)-র মধ্যে কোথাও একটা $f(x) = r$ হওয়া ছাড়া গত্যন্তর নেই। এই কথাটাই হল বিখ্যাত **intermediate value theorem**.

Intermediate value theorem

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Let r be a number strictly between $f(a)$ and $f(b)$. Then there exists $c \in (a, b)$ such that $f(c) = r$.