Solve it

Link submit:
https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=onlinejudge&page=show_problem&problem=1282

Solution:

C++: http://ideone.com/H1gtte

python: https://ideone.com/0cpjd2

Java: https://ideone.com/NnbVH0

Tóm tắt đề: Hãy giải phương trình $f(x) = 0$

Với $f(x) = p.e^{-x} + q.sinx + r.cosx + s.tanx + t.x^2 + u$ và nghiệm phải nằm trong đoạn $[0,1]$.

Input

Bao gồm nhiều test case, mỗi test case gồm 6 số nguyên p, q, r, s, t, u. Trong đó $0 \le p, r \le 20$ và $-20 \le q, s, t \le 0$. Có tối đa 2100 test case.

Output

Với mỗi test case, in ra trên một dòng tương ứng là nghiệm của phương trình bạn tìm được với mỗi bộ test case. Nghiệm sẽ được ghi với giá trị làm tròn 4 chữ số, hoặc bạn in ra "No solution" nếu như không tồn tại nghiệm tương ứng.

0 0 0 0 -2 1 1 0 0 0 -1 2 1 -1 1 -1 -1 1	0.7071 No solution 0.7554

Hướng dẫn giải:

Bài này có 2 cách giải:

- Cách 1: Ta sẽ dùng phương pháp tìm nghiệm của Newton. Cụ thể, ta sẽ đặt một nghiệm x_0 cho trước, tất nhiên x_0 phải nằm trong tập xác định ban đầu của đề bài. Sau đó, ta duyệt một vòng lặp từ 1 đến một hằng số nào đó, ở đây ta sẽ chọn số lần lặp là một số n nào đó, với công thức như sau: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, trong đó, $f'(x)$ là đạo hàm bậc một của hàm số $f(x)$ trên một tập xác định cho trước. Kết quả là x_n Số n ở đây ta sẽ chọn đủ lớn để $f(x_n)$ chênh lệch so với giá trị 0 một giá trị eps nào đó mà bạn đọc cảm thấy ổn.

- Cách 2: Nếu ta để ý với dữ kiện của đề bài, cộng với một số tính chất đặc biệt của hàm số. Ta quan tâm đến các điều kiện $0 \leq p, r \leq 20$ và $-20 \leq q, s, t \leq 0$, đồng thời ta thấy nghiệm x lại là một số không âm. Điều này đặt ra cho ta một câu hỏi, liệu hàm số $f(x)$ của ta có một tính chất đặc biệt nào đó ?
  Thật vậy, trước hết ta có nhận xét: $f(x)$ là một hàm số liên tục trên tập xác định $D = [0,1]$. Do có tính chất liên tục như thế, ta hoàn toàn có thể lấy đạo hàm bậc một của $f(x)$ với mọi nghiệm x trong tập xác định cho trước. Hàm số sau khi ta lấy đạo hàm bậc 1 như sau: $f'(x) = -p.e^{-x} + q.cosx - r.sinx + \frac{s}{cosx^2} + 2.x.t \ \ \forall x \in D$
  Như vậy, ta có thể phát hiện ra tính chất thú vị như sau:
  1. $p \geq 0\,, e^{-x} > 0 \ \forall x \in [0,1] => \ -p.e^{-x} \leq 0$
  2. $q \leq 0, cosx > 0 \ \forall x \in [0,1] => q.cosx \ \leq 0$
  3. $r \geq 0, sinx > 0 \ \forall x \in [0,1] => \ -r.sinx \leq 0$
  4. $s \leq 0, \frac{1}{cosx^2} \geq 0 \ \forall x \ \in [0,1] => \ \frac{s}{cosx^2} \leq 0$
  5. $t \leq 0 => 2.x.t \ \leq 0 \ \forall x \in [0,1]$

  Do đó: $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [0,1]$. Tuy nhiên, trường hợp $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi các hệ số p, q, r, s, t đều bằng 0. Khi đó, phương trình sẽ vô nghiệm do lúc đó ta chỉ còn lại phương trình $u = 0$. Nên đây là trường hợp không thể xảy ra.

  Từ đó, ta hoàn toàn có thể dễ dàng đánh giá được $f'(x) < 0 \ \forall x \in [0,1]$. Khi đạo hàm bậc một của một hàm số có giá trị âm, ta có thể đưa ra kết luận $f(x)$ là một hàm số nghịch biến trên tập xác định $D = [0,1]$. Như vậy, với $x_0 > x_1$ thì $f(x_0) \leq f(x_1)$. Như vậy, dựa vào tính chất hàm số nghịch biến này, ta hoàn toàn có thể sử dụng kỹ thuật chặt nhị phân như sau:

  1. Ta sẽ kiểm tra xem phương trình của ta có vô nghiệm hay không. Đồng nghĩa với việc ta kiểm tra $f(1) > 0$ hay $f(0) < 0$ hay không ? Nếu có thì ta kết luận phương trình này vô nghiệm, ta in ra “No solution”.
  2. Ta đặt $l = 0\,, r = 1$, cứ mỗi lần $l \leq r$, ta đặt $x = \frac{l+r}{2}$, nếu $f(x) > 0$, ta kết luận rằng nghiệm của phương trình phải nằm trong đoạn $[x..r]$, do đó ,ta di chuyển $l = x$, ngược lại, ta kết luận nghiệm phương trình nằm trong đoạn $[l..x]$, nên ta di chuyển $r = x$. Tuy nhiên, thực tế việc chặt nhị phân trên một đoạn số thực cho đến khi $l > r$ là điều không thể. Do đó, ta sẽ cố định số lần lặp là một hằng số, để từ đó kết quả của ta chính là x sau khi lặp đúng số lần như thế. Ta sẽ chọn số lần lặp là một số T nào đó sao cho bạn đọc thấy ổn là được.

Cách để ta tìm số T như sau: Ta thấy rằng mỗi lần ta chọn giá trị ở giữa, thì khoảng cách giữa l, r lại giảm đi $\frac{1}{2}$. Đề yêu cầu ta phải tìm ra kết quả phải chính xác tới 4 chữ số thập phân, điều này có nghĩa là giá trị ta tìm ra chênh lệch so với giá trị đáp án thực tế tối thiểu là 10^{-6}.

Như vậy, nếu như ta lặp lại T lần, thì khoảng cách $r - l = \frac{1}{2^T}$, đồng thời chắc chắn đáp án thực tế phải là một số K nào đó mà $l \leq K \leq r$, do đó:
$10^{-6} \leq K - l \leq r - l = \frac{1}{2^T}$. $\Leftrightarrow 10^{-6} \leq \frac{1}{2^T} \Leftrightarrow 2^T \geq 10^6 \Leftrightarrow T \geq \sim 20$.
Tức là ta phải cho số lần lặp tối thiểu 20 lần. Bạn đọc có thể cho số lần lặp nhiều hơn để có thể ra kết quả ổn định hơn.

Đánh giá độ phức tạp thuật toán: O(T).