

# Activité : Partition

## Table des matières

1	Description du problème	1
2	Partition parfaite des entiers de 1 à $n$	3
3	Algorithmes gloutons	5
4	Programmation dynamique	11
5	Tester et Générer	15
6	Problèmes connexes	15

## 1 Description du problème

### Définition 1.1 – Partition d'un ensemble

Un *multiensemble* (parfois appelé sac) est un ensemble dans lequel chaque élément peut apparaître plusieurs fois. Soit un multiensemble  $S$  de  $n$  entiers naturels :

$$S = \{s_i \mid s_i > 0\}_{1 \leq i \leq n}.$$

Une *(bi)partition* de  $S$  est constituée de deux sous-multiensembles  $S_1$  et  $S_2$  tels que :

- $S_1$  et  $S_2$  sont non vides :  $S_1 \neq \emptyset$  et  $S_2 \neq \emptyset$  ;
- $S_1$  et  $S_2$  sont disjoints :  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  ;
- $S_1$  et  $S_2$  recouvrent  $S$  :  $S_1 \cup S_2 = S$ .

### Exemple – Partition d'un ensemble

Soit un multienemble  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- Les multiensembles  $S_1$  et  $S_2$  forment une partition de  $S$ .
  - $S_1 = \{1\}$  et  $S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$
  - $S_1 = \{2, 4\}$  et  $S_2 = \{1, 3, 5\}$
- Les multiensembles  $S_1$  et  $S_2$  ne forment pas une partition de  $S$ .
  - $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $S_2 = \emptyset$ , car  $S_2$  est vide.
  - $S_1 = \{1, 2, 3\}$  et  $S_2 = \{3, 4, 5\}$ , car leur intersection est non vide.
  - $S_1 = \{1, 2\}$  et  $S_2 = \{4, 5\}$ , car 3 est dans  $S$ , mais n'appartient ni à  $S_1$  ni à  $S_2$ .

### Définition 1.2 – Partition parfaite d'un multienemble pair

Un multienemble d'entiers  $S$  est dit *pair* si la somme des entiers de  $S$  est pair.

Une *partition parfaite* d'un multienemble pair est une partition telle que la valeur absolue de la différence entre la somme des entiers de  $S_1$  et la somme des entiers de  $S_2$  est 0.

### Exemple – Partition parfaite d'un multienemble pair

$S = \{1, 2, 3, 4\}$  est un multienemble pair.

- $S_1 = \{1, 3\}$  et  $S_2 = \{2, 4\}$  ne forment pas une partition parfaite.
- $S_1 = \{1, 4\}$  et  $S_2 = \{2, 3\}$  forment une partition parfaite.

### Définition 1.3 – Partition parfaite d'un multienemble impair

Un multienemble d'entiers  $S$  est dit *impair* si la somme des entiers de  $S$  est impair.

Une *partition parfaite* d'un multienemble impair est une partition telle que la valeur absolue de la différence entre la somme des entiers de  $S_1$  et la somme des entiers de  $S_2$  est 1.

### Exemple – Partition parfaite d'un multienemble impair

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  est un multienemble impair.

- $S_1 = \{2, 4\}$  et  $S_2 = \{1, 3, 5\}$  ne forment pas une partition parfaite.
- $S_1 = \{1, 2, 5\}$  et  $S_2 = \{3, 4\}$  forment une partition parfaite.

### Définition 1.4 – Problème de partitionnement

En informatique, le problème de partitionnement consiste à déterminer si une partition parfaite d'un ensemble d'entiers existe. C'est un problème *NP-complet*. Cependant, il existe plusieurs algorithmes qui résolvent efficacement le problème que ce soit de manière approchée ou optimale. Pour ces raisons, il est réputé "le plus facile des problèmes difficiles" [1].

## 2 Partition parfaite des entiers de 1 à $n$

### Exercice 2.1

Trouver une partition parfaite des entiers de 1 à  $n$  pour  $n = 4, 5, 6, 7, 8$ .

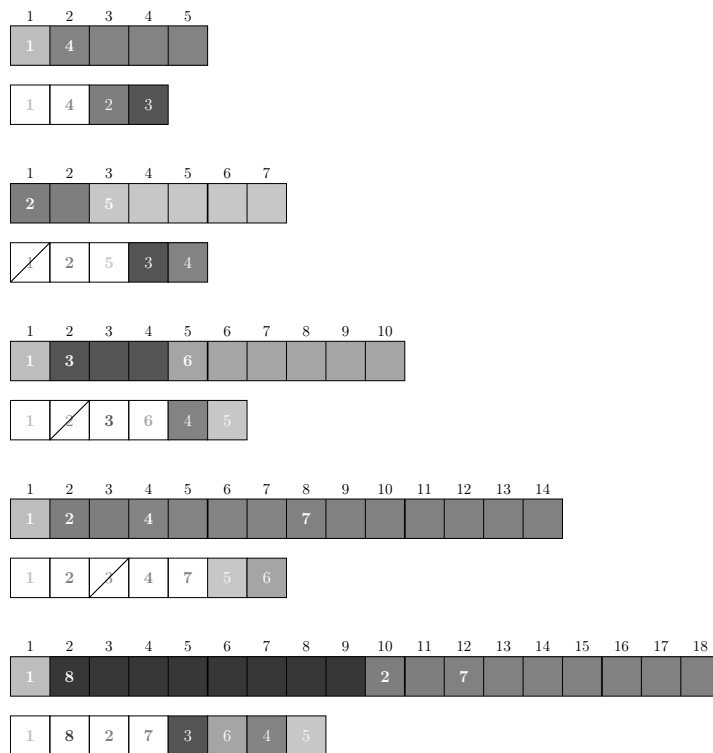


FIGURE 1 – Partition parfaite des entiers de 1 à  $n$ .

### Définition 2.1 – Algorithme

Un *algorithme* répond à un problème. Il est composé d'un ensemble d'étapes simples nécessaires à la résolution, dont le nombre varie en fonction de la taille des données.

### Remarque 2.1

Plusieurs algorithmes peuvent répondre à un même problème.

### Remarque 2.2

Un algorithme peut répondre à plusieurs problèmes.

### Exercice 2.2

Donner un algorithme pour trouver une partition parfaite des entiers de 1 à  $n$ .

Indice : Distinguer les cas en fonction du reste  $r$  de la division euclidienne de  $n$  par 4. C'est-à-dire qu'il existe  $k \geq 0$  et  $0 \leq r \leq 3$  tels que  $n = 4 \times k + r$ .  $\triangleleft$

### Algorithme 2.1 – Partition parfaite des entiers de 1 à $n$ .

- Soit  $n = 4 \times k + r$  le quotient  $k$  et le reste  $r$  ( $0 \leq r \leq 3$ ) de la division euclidienne de  $n$  par 4.
  - Si  $r = 1$ , alors éliminer l'objet 1.
  - Si  $r = 2$ , alors ranger l'objet 1 et éliminer l'objet 2.
  - Si  $r = 3$ , alors ranger les objets 1 et 2 et éliminer l'objet 3.
- Répéter  $2 \times k$  fois l'action suivante (ou de manière équivalente, répéter tant que le sac n'est pas rempli) :
  - ranger le plus petit et le plus grand objet.

### Remarque 2.3

Ce problème admet une symétrie évidente puisque l'on peut inverser la partition, c'est-à-dire échanger les ensembles  $S_1$  et  $S_2$ . De manière générale, on peut toujours échanger des objets entre  $S_1$  et  $S_2$  si cela ne change pas leurs sommes.

### Exercice 2.3

- Trouver une partition parfaite des entiers de 1 à 16.
- Remarquez que toutes les paires d'objets formées par l'algorithme ont la même somme. Trouvez d'autres partitions parfaites par échanges successifs.

Type	Niveau	Sac	Capacité
1	Facile	11, 8, 7, 5, 2, 1	17
	Intermédiaire	16, 12, 10, 9, 6, 5, 3, 2, 1	32
	Difficile	16, 15, 13, 12, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1	47
2	Facile	14, 13, 11, 7, 5, 3	26
	Intermédiaire	16, 15, 14, 13, 12, 9, 8, 6, 1	47
	Difficile	16, 15, 13, 12, 11, 10, 8, 7, 6, 4, 3, 2	53
3	Facile	13, 11, 9, 8, 6, 4	25
	Intermédiaire	16, 15, 14, 10, 9, 8, 6, 5, 3	43
	Difficile	16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 8, 7, 6, 4, 3	59
4	Facile	16, 15, 11, 4, 2, 1	24
	Intermédiaire	18, 15, 13, 10, 8, 5, 3, 2	37
	Difficile	18, 17, 16, 15, 14, 5, 2, 1	44

TABLE 1 – Instances du problème de partitionnement.

## 3 Algorithmes gloutons

### Définition 3.1 – Algorithme glouton

Un *algorithme glouton* est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local. Dans certains cas, cette approche aboutit à un optimum global, mais dans le cas général c'est une heuristique qui n'aboutit pas nécessairement à un optimum global.

### Algorithme 3.1 – Algorithme glouton

- Déterminer la capacité du sac : la somme des objets divisée par deux.
- Trier les objets par ordre décroissant.
- Répéter tant qu'il reste des objets et que le sac n'est pas rempli :
  - ranger le plus grand objet dans le sac si la capacité le permet.
  - Sinon éliminer l'objet.

### Exercice 3.1

Appliquer l'algorithme glouton sur une instance de type 1 du tableau 1 page 5.

### Exercice 3.2

Appliquer l'algorithme glouton sur une instance de type 2 du tableau 1 page 5.

### Algorithme 3.2 – Algorithme glouton répété

- Répéter jusqu'à ce que le sac soit rempli ou contienne tous les objets :
- appliquer l'algorithme glouton ;
  - éliminer le plus grand objet.

### Exercice 3.3

Appliquer l'algorithme glouton répété sur une instance de type 2 du tableau 1 page 5.

### Exercice 3.4

Appliquer l'algorithme glouton répété sur une instance de type 3 du tableau 1 page 5

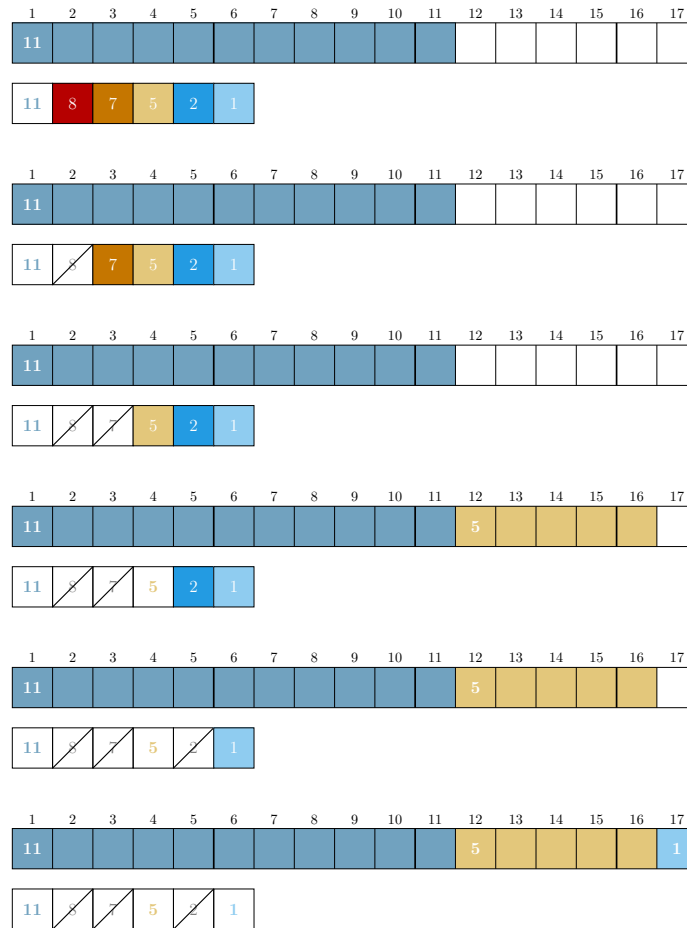


FIGURE 2 – Solution de l'instance facile de de type 1.

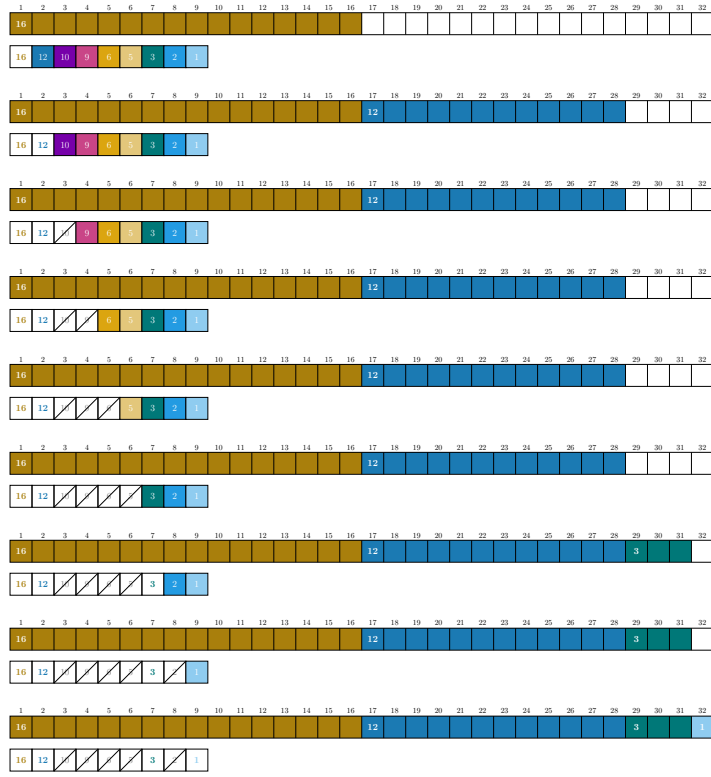


FIGURE 3 – Solution de l'instance intermédiaire de type 1.



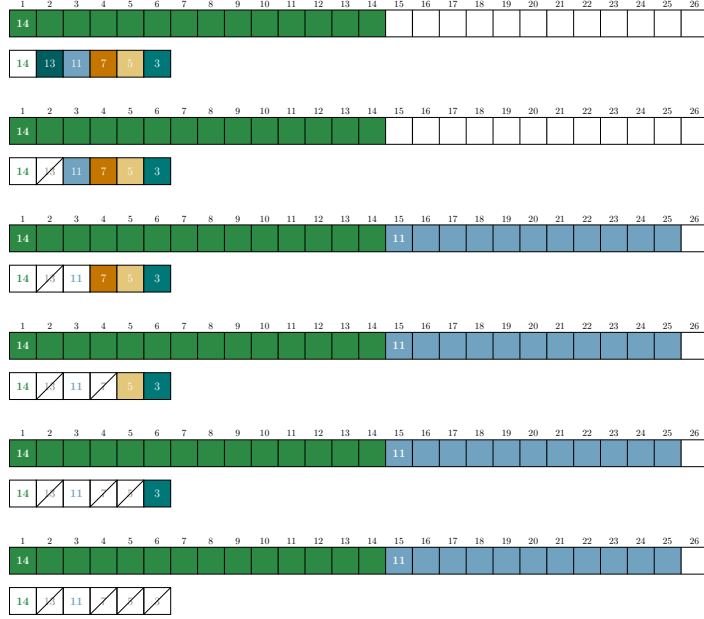


FIGURE 4 – Solution de l'instance facile de type 2.

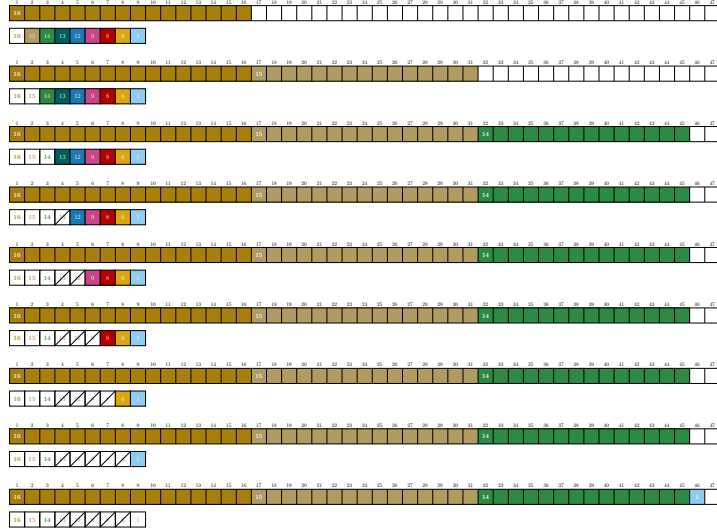


FIGURE 5 – Solution de l'instance intermédiaire de type 2.

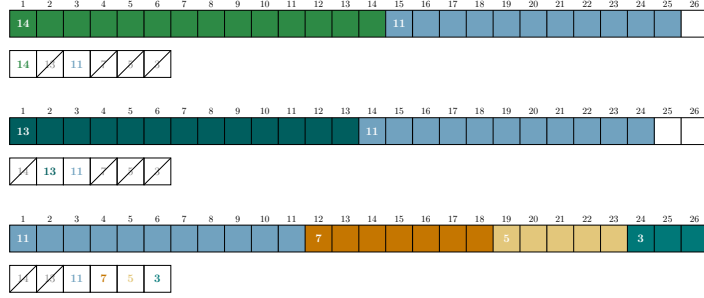


FIGURE 6 – Solution de l'instance facile de type 2.

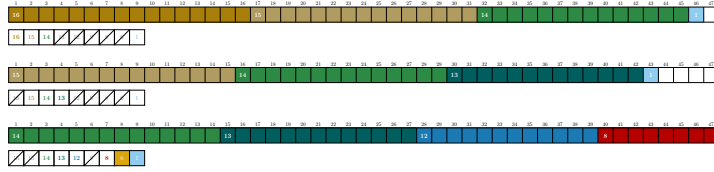


FIGURE 7 – Solution de l'instance intermédiaire de type 2.

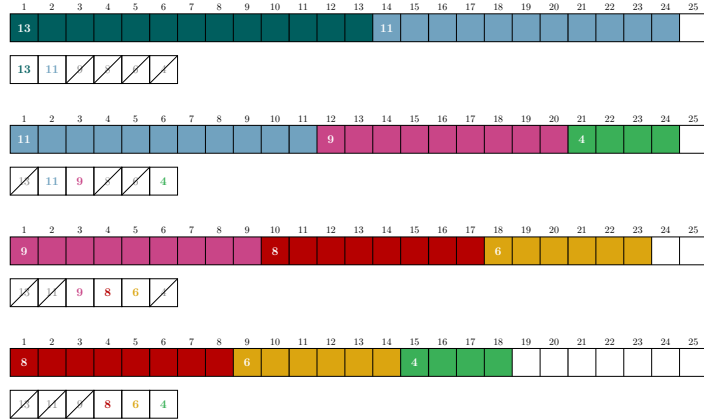


FIGURE 8 – Solution de l'instance facile de type 3.



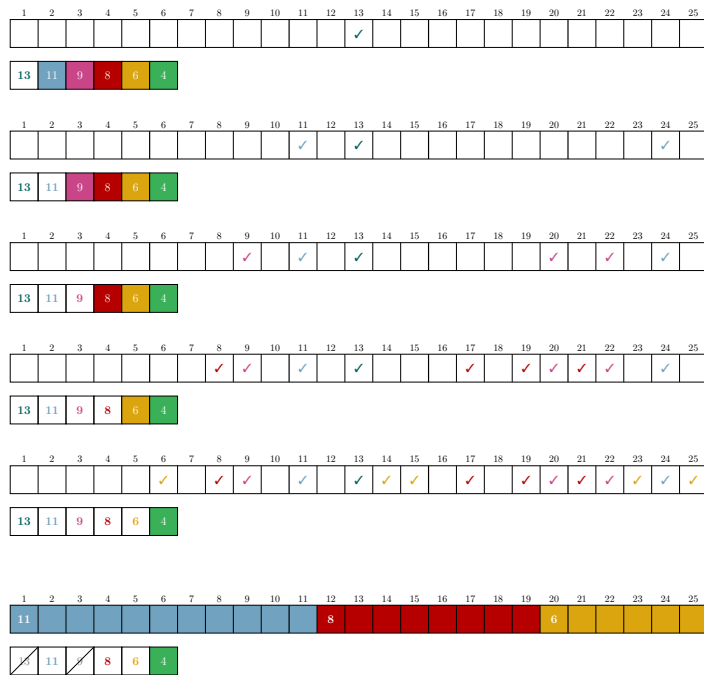


FIGURE 10 – Solution de l’instance facile de type 3.

[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	1	0	0
[20]		0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
[39]		0	0	0	0	0	0													
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	3	2	1	0	0	0
[20]		0	0	0	0	0	4	4	4	0	0	3	3	2	0	0	0	0	0	0
[39]		0	4	4	4	0	0													
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	0	0	0	3	2	1	0	0	0
[20]		5	0	0	0	5	4	4	4	0	0	3	3	2	0	5	5	5	0	0
[39]		5	4	4	4	0	0													
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	6	5	4	0	0	0	3	2	1	6	6	6
[20]		5	0	0	6	5	4	4	4	6	0	3	3	2	6	5	5	5	0	6
[39]		5	4	4	4	6	6													
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	6	5	4	0	0	0	3	2	1	6	6	6
[20]		5	0	0	6	5	4	4	4	6	0	3	3	2	6	5	5	5	0	6
[39]		5	4	4	4	6	6													



FIGURE 11 – Solution de l'instance intermédiaire de type 3.

#### Exercice 4.2

Appliquer la programmation dynamique sur une instance de type 4 du tableau 1 page 5

[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
[20]		0	0	0	0	0	0												
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0
[20]		0	0	0	0	0	0												
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	1	0	0
[20]		0	0	0	0	0	0												
[1]	Inf	0	0	0	4	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	1	0	0
[20]		4	4	0	0	0	0												
[1]	Inf	0	5	0	4	0	5	0	0	0	3	0	5	0	2	1	5	5	5
[20]		4	4	5	5	0	0												
[1]	Inf	6	5	6	4	6	5	6	0	0	3	6	5	6	2	1	5	5	5
[20]		4	4	5	5	6	0												
[1]	Inf	6	5	6	4	6	5	6	0	0	3	6	5	6	2	1	5	5	5
[20]		4	4	5	5	6	0												

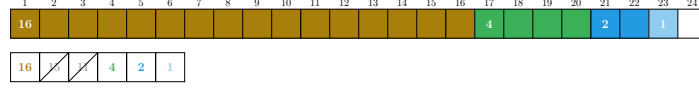


FIGURE 12 – Solution de l'instance facile de type 4.

[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[20]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1
[20]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	1
[20]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3	0	2	0	0	0	0
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	2	0	0	1
[20]	0	0	0	0	4	0	4	0	0	3	0	0	3	0	2	0	0	0	0
[1]	Inf	0	0	0	0	0	0	0	5	0	4	0	0	3	0	2	0	0	1
[20]	0	0	5	0	4	0	4	5	0	3	0	0	3	0	2	0	0	5	0
[1]	Inf	0	0	0	0	6	0	0	5	0	4	0	0	3	0	2	0	0	1
[20]	0	6	5	0	4	0	4	5	0	3	0	6	3	0	2	0	0	5	0
[1]	Inf	0	0	7	0	6	0	0	5	0	4	7	0	3	0	2	7	0	1
[20]	0	6	5	0	4	7	4	5	0	3	7	6	3	0	2	7	0	5	0
[1]	Inf	0	8	7	0	6	0	8	5	0	4	7	8	3	0	2	7	8	1
[20]	0	6	5	8	4	7	4	5	8	3	7	6	3	8	2	7	8	5	0
[1]	Inf	0	8	7	0	6	0	8	5	0	4	7	8	3	0	2	7	8	1
[20]	0	6	5	8	4	7	4	5	8	3	7	6	3	8	2	7	8	5	0

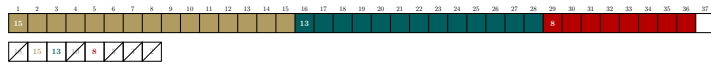


FIGURE 13 – Solution de l'instance intermédiaire de type 4.

## 5 Tester et Générer

### Algorithme 5.1 – Algorithme Tester-et-Générer

- Déterminer la capacité.
- Trier les objets par ordre décroissant.
- Descente : Répéter tant que le dernier objet n'est pas dans le sac :
  - Répéter pour chaque objet :
    - ranger l'objet dans le sac si la capacité le permet.
    - Si le sac est rempli, arrêter l'algorithme.
    - Sinon, effectuer un retour arrière simple : retirer le plus petit objet du sac.
- Retour arrière sauté quand le plus petit objet du deck est dans le sac.
  - Retirer les objets du sac trouver jusqu'à ce que vous trouviez le plus petit objet que vous n'avez pas pu faire rentrer.
  - Sinon éliminer l'objet.

### Exercice 5.1

Appliquer Tester-et-Générer sur une instance de type 3 du tableau 1 page 5.

### Exercice 5.2

Appliquer Tester-et-Générer sur une instance de type 4 du tableau 1 page 5.

## 6 Problèmes connexes

### Algorithme 6.1

test

### Allons plus loin

test

## Références

[1] Stephan Mertens. The easiest hard problem : Number partitioning, 2003.





FIGURE 15 – Solution de l’instance intermédiaire de l’exercice 3