



UNIVERSITÉ
CÔTE D'AZUR

Approximation du nombre π

Algo & Prog avec R

A. Malapert, B. Martin, M. Pelleau, et J.-P. Roy

11 septembre 2021

Université Côte d'Azur, CNRS, I3S, France
`firstname.lastname@univ-cotedazur.fr`

Le nombre π

- ▶ π est défini comme le rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre dans le plan euclidien.
- ▶ De nos jours, les mathématiciens définissent π par l'analyse réelle à l'aide des fonctions trigonométriques elles-mêmes introduites sans référence à la géométrie.
- ▶ Le nombre π est **irrationnel**, ce qui signifie qu'on ne peut pas l'écrire comme une fraction.
- ▶ Le nombre π est **transcendant** ce qui signifie qu'il n'existe pas de polynôme à coefficients rationnels dont π soit une racine.

Calcul de π par la formule de Leibniz

On utilisera la formule de Leibniz issue du développement en série de Taylor en 0 de $\arctan(x)$ évalué au point 1 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Elle a été découverte en Occident au XVIIe, mais apparaît déjà chez Madhava, mathématicien indien de la province du Kerala, vers 1400.

c.f. Wikipedia

Nous allons développer un algorithme d'approximation de π .

ITÉRATION Comment améliorer l'approximation courante ?

TERMINAISON Mon approximation courante est-elle assez bonne ?

Est-ce que le calcul prend trop de temps ?

INITIALISATION Comment initialiser la première approximation ?

Algorithme d'approximation de π

ITÉRATION

Pour **améliorer** l'approximation, étant en possession de la somme acc des i premiers termes, on voudra obtenir la somme des $i + 1$ premiers. Il suffira donc d'incrémenter i , **puis** d'ajouter $\frac{(-1)^i}{2i+1}$ à acc .

```
i <- i + 1
term <- (-1)**i / (2*i + 1)
acc <- acc + term
```

TERMINAISON

Mon approximation courante a est-elle **assez bonne** ? Elle est assez bonne lorsque je n'arrive plus à l'améliorer. Notons h la précision.

Est-ce que le calcul **prend trop de temps** ? Notons n le nombre maximum de termes à calculer.

```
abs(term) < h || i > n
```

INITIALISATION

```
i <- 0
acc <- 1
```

Programme d'approximation de π

```
LeibnizPi <- function(n = 10**4, h = 2**(-20)) {  
  i <- 0  
  term <- 1  
  acc <- 1  
  while( (i <= n) && 4*abs(term) > h) {  
    i <- i + 1  
    term <- (-1)**i / (2*i + 1)  
    acc <- acc + term  
  }  
  return(4*acc)  
}
```

```
> LeibnizPi(n = 100, h = 0)  
[1] 3.131789  
> LeibnizPi(n = 100000, h = 0)  
[1] 3.141583  
> pi  
[1] 3.141593
```

Analyse de la convergence vers π

```
ErreurRelativePi <- function(v) return(1 - v/pi)
ErreurRelativeLeibnizPi <- function(n) {
  approxPi <- LeibnizPi(n = n, h = 0)
  return(ErreurRelativePi(approxPi))
}
```

Formule de Leibniz

n	Erreur
100	0.003121
1000	0.000318
10000	0.000032
100000	0.000003

Approximation rationnelle

Fraction	Erreur
$\frac{22}{7}$	-0.000402499435
$\frac{355}{113}$	-0.000000084914
$\frac{103993}{33102}$	0.000000000184
$\frac{104348}{33215}$	-0.000000000106

Observation

La formule de Leibniz converge lentement.

Analyse des performances du programme

Calculons le temps nécessaire pour atteindre une précision donnée sans limiter le nombre d'itérations.

```
> system.time(LeibnizPi(n = Inf, h = 10**(-4)))  
utilisateur      système      écoulé  
      0.006      0.000      0.006
```

- ▶ Le temps d'exécution et le nombre d'itérations augmentent linéairement avec la précision.
- ▶ La recherche d'une estimation très précise de π demande un temps de calcul important.
- ▶ En extrapolant ces résultats, il faudrait 5×10^8 secondes (≥ 15 ans) pour obtenir une estimation de π à la précision machine (approximativement 15 décimales).
- ▶ Certaines formules convergent beaucoup plus rapidement.

Précision	Temps (s)
10^{-4}	0.006
10^{-5}	0.147
10^{-6}	0.599
10^{-7}	5.347
10^{-8}	52.860

Optimisation du programme

Exploitions la récurrence pour accélérer les calculs.

Les multiplications, divisions, et puissances sont plus coûteuse en temps de calcul que les additions et soustractions.

```
LeibnizPi2 <- function(n = 10**4, h = 2**(-20)) {  
  i <- 0  
  term <- 1  
  acc <- 1  
  h <- h / 4 ## éviter la multiplication du test  
  signe <- 1 ## mémoriser le signe du terme  
  denom <- 1 ## mémoriser le dénominateur du terme  
  while( (i <=n) && abs(term) > h) {  
    i <- i + 1  
    signe <- -1 * signe # éviter une puissance  
    denom <- denom + 2 # éviter une multiplication  
    term <- signe / denom  
    acc <- acc + term  
  }  
  return(4*acc)  
}
```


Comparaison de programmes

Précision	Temps (s)
LeibnizPi	5.347
LeibnizPi2	4.157
En langage C	0.007

- ▶ Les optimisations du programme offrent un gain supérieur à 20%.
- ▶ R est donc un langage interprété de haut niveau ce qui se paie au niveau des performances.
- ▶ Le langage C, entre autres, est beaucoup plus rapide.
- ▶ Le langage C est un langage impératif, généraliste et de bas niveau où chaque instruction du langage est compilée.

Questions?

Retrouvez ce cours sur le site web

[`www.i3s.unice.fr/~malapert/R`](http://www.i3s.unice.fr/~malapert/R)

La formule d'Euler-Wallis converge vers $\frac{\pi}{2}$

Ce produit peut s'écrire sous la forme :

$$P(n) = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \cdots \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

Récurrance

```
P <- function(n) {  
  if (n <= 0) return(0)  
  else {  
    t <- 4*(n**2)  
    return((t/(t-1)) * P(n-1))  
  }  
}
```

Vectorisation (plus tard)

```
P <- function(n) {  
  if (n <= 0) return(0)  
  terms <- 4*(1:n)**2  
  return(prod(terms/(terms-1)))  
}
```

Itération

```
P <- function(n) {  
  if (n <= 0) return(0)  
  acc <- 1  
  i <- 0  
  while(i < n) {  
    i <- i + 1  
    t <- 4*(i**2)  
    acc <- acc * t/(t-1)  
  }  
  return(acc)  
}
```

Elle converge lentement ...

```
> 2*P(100)
[1] 3.133787
> 2*P(10000)
[1] 3.141514
> 2*P(100000)
[1] 3.141585
> 2*P(100000)
[1] 3.141585
> 2*P(1000000)
[1] 3.141592
> pi
[1] 3.141593
```