L1 MASS : Algèbre Linéaire Cours 22 janvier 2006

Quelques exemples de systèmes linéaires en économie

Exemple 1 : Avantages fiscaux de dons aux oeuvres de charité ([1] §10.2)

Une entreprise fait un bénéfice avant impôts de 100 000 F. Elle s'est engagée à verser 10% de son bénéfice net d'impôts à la caisse de secours de la Croix Rouge. Elle doit payer un impôt local pour la taxe professionnelle égal à 5% de son bénéfice (après donation à la Croix Rouge) et un impôt national sur les sociétés de 40% de son bénéfice (après que la donation et l'impôt local aient été prélevés). Quels sont les montants de l'impôt local, de l'impôt national, et de la donation à la Croix Rouge versés par l'entreprise ?

Solution : Ecrivons C, L, N pour les montants respectifs de la contribution à la Croix Rouge, de l'impôt local, et de l'impôt national. Le bénéfice après impôts est de $100\,000-(L+N)$; d'où $C = 0{,}1 \cdot \big(100\,000 - (L+N)\big)$. Nous pouvons l'écrier comme

$$C + 0{,}1L + 0{,}1N = 10\,000.$$

L'impôt local est 5% du bénéfice net de la donation, ce qui nous donne une équation $L = 0{,}05 \cdot (100\,000 - C)$ ou

$$C + 0{,}05L = 5\,000.$$

L'impôt national est de 40% du bénéfice après déduction de C et de L ; cela donne $N = 0{,}4 \cdot [100\,000 - (C+L)]$ ou

$$0{,}4C + 0{,}4L + N = 40\,000.$$

Nous pouvons résumer les paiements à effectuer par le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} C + 0{,}1L + 0{,}1N = 10\,000, \\ 0{,}05C + L = 5\,000, \\ 0{,}4C + 0{,}4L + N = 40\,000. \end{cases} \qquad (*)$$

Il y a plusieurs façons de résoudre ce système. Par exemple, on peut résoudre l'équation du milieu pour L en termes de C, substituer cette relation dans les première et troisième équations, et ensuite résoudre facilement le système de deux équations à deux inconnues résultant pour trouver

$$C = 5\,956, \qquad L = 4\,702, \qquad N = 35\,737$$

au franc le plus proche. Remarquons que le bénéfice après impôts et après contribution est de 53 605 F.

Nous pouvons utiliser ce modèle linéaire pour déterminer que l'entreprise aurait eu comme bénéfice de 57 000 F si elle n'avait pas fait de donation à la Croix Rouge.

Exercice 1. Supposons que la firme ne fasse aucune donation aux bonnes oeuvres. Ecrivez et résolvez le système d'équations qui décrit ses impôts local et national. Quel est le coût net de sa donation de 5 936 F ?

Exemple 2 : Modèles linéaires de production ([1] §10.2)

Nous supposons d'abord que notre économie a n biens. Chacun des biens est produit par un **processus de production**, qui n'est qu'une liste de quantités de biens : tant de bien 1, tant de bien 2, etc. Ces quantités sont les montants d'inputs nécessaires pour la production d'une unité de l'output du processus. Par exemple, la fabrication d'une automobile nécessite certaines quantités d'acier, de plastique, d'électricité, et ainsi de suite. En fait, certains processus de production, tels que ceux de l'acier ou des automobiles, utilisent une partie de leur output pour la production ultérieure.

On va considérer un modèle *linéaire* de production. La production de 2, 3, ou k unités d'un bien nécessitent 2, 3, ou k fois les inputs de la production d'une unité du bien, pour chacun des biens. Nous allons supposer que la production de 2 automobiles nécessitent 2 fois les inputs d'acier, de plastique, d'électricité, etc., par rapport aux inputs pour la production d'une automobile, et que la production de 1000 automobiles nécessitent 1000 fois les inputs de la production d'une automobile et ainsi de suite. En termes micro-économiques, on dit que le processus de production a des **rendements d'échelle constants**.

Avant de faire une analyse abstraite, prenons un exemple simple. Considérons une exploitation d'agriculture biologique qui ne produit que deux biens : du maïs et de l'engrais. Le maïs est produit à partir de grains de maïs (en sémences) et d'engrais. L'engrais est produit à partir de vieux plants de maïs (et éventuellement en nourissant les vaches avec du maïs, qui produisent à leur tour un produit utile). Supposons que la production de 1 tonne de maïs requiert comme inputs 0,1 tonne de maïs et 0,8 tonne d'engrais. La production d'une tonne d'engrais requiert 0,5 tonne de maïs et pas d'engrais.

Nous pouvons décrire chacun des deux processus de production par un couple de nombres (a, b), où a représente la quantité de maïs utilisée comme input, et b représente la quantité d'engrais utilisée comme input. Le processus de production du maïs est donc représenté par $(0{,}1; 0{,}8)$. Le processus de production d'engrais est décrit par $(0{,}5; 0)$.

La question la plus importante pour ce modèle est : que peut-on produire pour la consommation ? Y a-t-il un moyen d'utiliser les deux processus de production et de laisser du maïs et de l'engrais pour la consommation individuelle ?

On peut répondre en examinant un système particulier d'équations linéaires. Supposons qu'on utilise les deux processus pour produire x_M tonnes de maïs et x_E tonnes d'engrais. Le montant de maï entrant dans la production de maïs est de $0{,}1x_M$ tonnes, le montant de maïs nécessaire par tonne de maïs produite multiplié par le nombre de tonnes à produire. Le montant de maïs entrant dans la production de l'engrais est de $0{,}5x_E$ tonnes. Donc la quantité de maïs restant pour la consommation individuelle est de $x_M - 0{,}1x_M - 0{,}5x_E$ tonnes, ce qui se simplifie en $0{,}9x_M - 0{,}5x_E$ tonnes. Similairement la quantité d'engrais restant pour la consommation individuelle est de $x_E - 0{,}8x_M$ tonnes.

Supposons que nous voulions que notre exploitation produise 4 tonnes de maïs et 2 tonnes d'engrais pour la consommation. Quelles quantités totales de production de maïs et d'engrais seront nécessaires ? Donc nous cherchons des valeurs pour x_M et x_E qui satisfont aux équations

$$\begin{cases} 0{,}9x_M - 0{,}5x_E = 4, \\ -0{,}8x_M + \quad x_E = 2. \end{cases}$$

Ce système est facile à résoudre, car la deuxième équation nous donne $x_E = 2 + 0{,}8x_M$ que l'on peut substituer dans la première équation. Après quelques calculs on trouve $x_M = 10$ et $x_E = 10$. Donc on produit 10 tonnes de maïs, dont on utilise 1 pour la production de maïs, 5 pour la production d'engrais, et il en reste 4 tonnes pour la consommation. Et on produit 10 tonnes d'engrais, dont 8 s'utilisent pour la production de maïs, et 2 pour la consommation.

A ce genre de modèle on ajoute souvent un bien supplémentaire, le travail, qui est utilisé en chaque processus de production, mais qui n'est produit par aucun processus. En ce moment, on pourrait demander si l'emploi disponible suffit pour la production désirée.

Exercice 2. L'économie de l'île de Bacchus ne produit que des raisins et du vin. La production de 1 livre de raisins requiert 1/2 livre de raisins, 1 travailleur, et pas de vin. La production de 1 litre de vin requiert 1/2 livre de raisins, 1 travailleur et 1/4 litre de vin. L'île contient 10 travailleurs qui tous ensemble demandent 1 livre de raisins et 3 litres de vin. Combien de travailleurs seront employés pour satisfaire à leurs demandes ?

Exemple 3 : Prix dans une économie de subsistance ([2] pp. 370–371)

Considérons une économie qui ne produit que ce qui est nécessaire pour continuer à subsister. Supposons qu'elle ne comporte que trois biens produits selons les relation suivantes :

$$\begin{cases} 240 \text{ quintaux de blé} + 12 \text{ tonnes de fer} + 18 \text{ porcs} \longrightarrow 450 \text{ quintaux de blé} \\ 90 \text{ quintaux de blé} + 6 \text{ tonnes de fer} + 12 \text{ porcs} \longrightarrow 21 \text{ tonnes de fer} \\ 120 \text{ quintaux de blé} + 3 \text{ tonnes de fer} + 30 \text{ porcs} \longrightarrow 60 \text{ porcs} \end{cases}$$

Les porcs et le blé ne servent pas directement à produire le fer. Plutôt ils nourissent les travailleurs nécessaire pour produire le fer. Mais on les intègrera dans le modèle comme des biens nécessaires pour la production du fer.

Notons que cette économie ne dégage aucun surplus pour la consommation. Les 450 quintaux de blé produits sont totalement utilisés dans la production : 240 quintaux servent dans la production du blé, 90 quintaux dans la production du fer, et 120 quintaux dans l'élevage des porcs. Il est de même pour les 21 tonnes de fer et les 60 porcs.

Soit p_1, p_2, et p_3 les prix respectifs d'un quintal de blé, d'une tonne de fer, et d'un porc. Comme l'économie ne dégage aucun surplus, elle n'a pas le moyen de gagner un bénéfice de sa production globalement. Donc un bénéfice dans un secteur serait compensé par une déficite dans un autre, qui augmenterait ses prix, et les prix s'évolueront vers un équilibre où les dépenses de chaque secteur sont égales ѐes recettes. Cela se traduit en un système de trois équations

$$\begin{cases} 240p_1 + 12p_2 + 18p_3 = 450p_1, \\ 90p_1 + 6p_2 + 12p_3 = 21p_2, \\ 120p_1 + 3p_2 + 30p_3 = 60p_3. \end{cases}$$

Exercice 3. Résolvez ce système linéaire pour trouver les prix d'équilibre dans cette économie.

Des modèles similaires mais plus compliqués servent pour l'analyse des prix dans les économies avec surplus (modèle de Sraffa).

Références

[1] C. Simon et L. Blume, *Mathématiques pour économistes*, trad. française, De Boeck, Bruxelles, 1998.

[2] B. Guerrien, *Algèbre Linéaire pour économistes*, 4ème éd., Economica, Paris, 1997.