

Représentation des nombres

Algo & Prog avec R

Arnaud Malapert

13 octobre 2020

Université Côte d'Azur, CNRS, I3S, France
`firstname.lastname@univ-cotedazur.fr`

Représentation des nombres

- ▶ Système positionnel : binaire, décimal, octal, et hexadécimal.
- ▶ Nombre non signé seulement (positif).
- ▶ Représentation en machine des entiers naturels seulement !

Prérequis

Savoir additionner, soustraire, multiplier, et diviser ! Surtout par 2 !

Évaluation : Gagner un max de points en peu de temps !

- ▶ 3 points du même QCM dans le contrôle terminal.
- ▶ Exercices de programmation autour des algorithmes de conversion.
- ▶ Activité de programmation d'une appli web de conversion.

1. Système positionnel
 - Entiers naturels
 - Nombres fractionnaires
2. Multiplication et division égyptiennes
3. Arithmétique binaire
4. Représentation des nombres en machine

Système positionnel

Représentation des nombres

On représente les nombres grâce à des symboles.

Représentation unaire : un symbole de valeur unique.

▶ $I=1$, $II = 2$, $III = 3$, let $IIIIIIII = 10$.

▶ Le calcul est facile.

▶ $I + III = IIII$;

▶ $II \times III = II III = IIIII$

▶ mais cela devient vite *incompréhensible*

Chiffres Romains : plusieurs symboles ayant des valeurs différentes.

▶ Le nombre de symboles est théoriquement infini.

▶ $I=1$, $V=5$, $X = 10$, $L = 50$

▶ Le calcul est impossible.

Système positionnel : symboles dont la valeur dépend de la position

- ▶ $999 = 900 + 90 + 9$
- ▶ À Babylone, système sexagésimal (60) (Ile millénaire av J-C).
- ▶ Transmission de l'orient vers l'occident avec le zéro (env. 825 ap. J-C) ¹

Un brin de cynisme

Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de la valeur que par leur position.

Napoléon Bonaparte

1. « Al-jabr wa'l-muqâbalah » Muhammad ibn Mūsā al-Khwarizmi

Système positionnel

Utilisation d'une base b

- ▶ Les nombres sont représentés à l'aide de b symboles distincts.
- ▶ La valeur d'un chiffre dépend de la base.

Un nombre x est représenté par une suite de symboles :

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0.$$

Décimale ($b = 10$), $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Binaire ($b = 2$), $a_i \in \{0, 1\}$

Hexadécimale ($b = 16$), $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Les bases les plus utilisées sont : 10, 2, 3, 2^k , 12, 16, 60, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$...

Notation

$(x)_b$ indique que le nombre x est écrit en base b .

Système positionnel

Entiers naturels

Représentation des entiers naturels

En base b

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^n a_i b^i$$

- ▶ a_0 est le chiffre de poids faible,
- ▶ a_n est le chiffre de poids fort.

En base 10

$$(1998)_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$

En base 2

$$\begin{aligned}(101)_2 &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 4 + 0 + 1 = 5.\end{aligned}$$

Méthode simple

- ▶ On applique simplement la formule.
- ▶ Cela revient donc à une simple somme.
- ▶ En pratique, on peut utiliser la multiplication égyptienne.

Schéma de Horner

- ▶ Méthode générale pour calculer l'image d'un polynôme en un point.
- ▶ Moins d'opération que la méthode simple.
- ▶ Plus efficace pour une machine, pas nécessairement pour un humain.

Une reformulation judicieuse de l'écriture en base b

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 &= \sum_{i=0}^n a_i b^i \\ &= ((\dots ((a_n b + a_{n-1})b + a_{n-2}) \dots)b + a_1)b + a_0 \end{aligned}$$

Algorithme simple et efficace

- ▶ Initialiser l'accumulateur : $v = 0$.
- ▶ Pour chaque chiffre a_i en partant de la gauche : $v \leftarrow (v \times b) + a_i$.

Algorithme simple et efficace

- ▶ Initialiser l'accumulateur : $v = 0$.
- ▶ Pour chaque chiffre a_i en partant de la gauche : $v \leftarrow (v \times b) + a_i$.

$$(10110)_2 = (22)_{10}$$

a_i	v	Calcul de v
1	1	$2 \times 0 + 1$
0	2	$2 \times 1 + 0$
1	5	$2 \times 2 + 1$
1	11	$2 \times 5 + 1$
0	22	$2 \times 11 + 0$

$$(12021)_3 = (142)_{10}$$

a_i	v	Calcul de v
1	1	$3 \times 0 + 1$
2	5	$3 \times 1 + 2$
0	15	$3 \times 5 + 0$
2	47	$3 \times 15 + 2$
1	142	$3 \times 47 + 1$

Traduction entre des puissances de 2

Du binaire vers une base 2^k

Regrouper les bits par k en partant de la droite et les traduire.

D'une base 2^k vers le binaire

Traduire chacun des symboles en un nombre binaire.

Du binaire vers l'héxadécimal (2^4)

Regrouper les bits par 4 en partant de la droite.

(00)10	0101	1110	0001	1101	1111
2	5	E	1	D	F

Du binaire vers l'octal (2^3)

Regrouper les bits par 3 en partant de la droite.

(00)1	001	011	110	000	111	011	111
1	1	3	6	0	7	3	7

D'une base 2^k vers une base 2^p

1. Passer par le binaire : $(x)_{2^k} \rightarrow (x)_2 \rightarrow (x)_{2^p}$.
2. Généraliser la méthode précédente si k est un diviseur/multiple de p .
3. Appliquer un algorithme de traduction vers une base quelconque.

Traduction vers une base quelconque

Nombre entier

On procède par divisions euclidiennes successives :

- ▶ On divise le nombre par la base,
- ▶ puis le quotient par la base,
- ▶ ainsi de suite jusqu'à obtenir un quotient nul.

La suite des restes obtenus correspond aux chiffres de a_0 à a_n dans la base visée.

$$(44)_{10} = (101100)_2$$

$$44 = 22 \times 2 + 0 \quad a_0 = 0$$

$$22 = 11 \times 2 + 0 \quad a_1 = 0$$

$$11 = 5 \times 2 + 1 \quad a_2 = 1$$

$$5 = 2 \times 2 + 1 \quad a_3 = 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0 \quad a_4 = 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1 \quad a_5 = 1$$

$$(44)_{10} = (1122)_3$$

$$44 = 14 \times 3 + 2 \quad a_0 = 2$$

$$14 = 4 \times 3 + 2 \quad a_1 = 2$$

$$4 = 1 \times 3 + 1 \quad a_2 = 1$$

$$1 = 0 \times 3 + 1 \quad a_3 = 1$$

Traduction depuis une base quelconque

Il faut diviser dans la base d'origine.

Les calculs sont donc difficiles pour un humain !

$$(101100)_2 = (1122)_3$$

$$101100 = 1110 \times 11 + 10 \quad a_0 = 2$$

$$1110 = 100 \times 11 + 10 \quad a_1 = 2$$

$$100 = 1 \times 11 + 1 \quad a_2 = 1$$

$$1 = 0 \times 11 + 1 \quad a_3 = 1$$

Passez par le décimal !

$$(x)_b \rightarrow (x)_{10} \rightarrow (x)_{b'}.$$

- ▶ Traduire $(10101)_2$ en écriture décimale.
- ▶ Traduire $(10101101)_2$ en écriture décimale.
- ▶ Traduire $(10101001110101101)_2$ en écriture hexadécimale.
- ▶ Traduire $(1AE3F)_{16}$ en écriture binaire.
- ▶ Traduire $(1AE3F)_{16}$ en écriture octal.
- ▶ Traduire $(927)_{10}$ en écriture binaire.
- ▶ Traduire $(1316)_{10}$ en écriture binaire.

Système positionnel

Nombres fractionnaires

Représentation des nombres fractionnaires

En base b

La formule est la même, mais il existe des exposants négatifs.

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k} = \sum_{i=-k}^n a_i b^i$$

En base 10

$$19.98 = 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}.$$

En base 2

$$\begin{aligned}(101,01)_2 &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 = 5,25.\end{aligned}$$

Traduction vers une base quelconque

Nombre fractionnaire

- ▶ On décompose le nombre en partie entière et fractionnaire si $x > 0$:

$$x = E[x] + F[x].$$

- ▶ On convertit la partie entière par la méthode précédente :

$$E[x] = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0.$$

- ▶ On convertit la partie fractionnaire :

$$F[x] = 0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}.$$

- ▶ Finalement, on additionne la partie entière et fractionnaire :

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \dots$$

Partie fractionnaire

- ▶ on multiplie $F[x]$ par b . Soit a_{-1} la partie entière de ce produit,
- ▶ on recommence avec la partie fractionnaire du produit pour obtenir a_{-2} ,
- ▶ et ainsi de suite ...
- ▶ on stoppe l'algorithme si la partie fractionnaire devient nulle.

$$(0,734375)_{10} = (0,BC)_{16}$$

$$0,734375 \times 16 = 11,75 \quad a_{-1} = B$$

$$0,75 \times 16 = 12 \quad a_{-2} = C$$

Traduction de 0,3 en base 2

$$(0,3)_{10} = (0,01001100110011\dots)_2$$

$$0,3 \times 2 = 0,6 \quad a_{-1} = 0$$

$$0,6 \times 2 = 1,2 \quad a_{-2} = 1$$

$$0,2 \times 2 = 0,4 \quad a_{-3} = 0$$

$$0,4 \times 2 = 0,8 \quad a_{-4} = 0$$

$$0,8 \times 2 = 1,6 \quad a_{-5} = 1$$

$$0,6 \times 2 = 1,2 \quad a_{-6} = 1$$

$$0,2 \times 2 = 0,4 \quad a_{-7} = 0$$

La conversion d'un nombre fractionnaire ne s'arrête pas toujours.

- ▶ En base b , on ne peut représenter exactement que des nombres fractionnaires de la forme X/b^k
- ▶ La conversion d'un nombre entier s'arrête toujours.

Il faudra arrondir ...

- ▶ Traduire $(10101101)_2$ en écriture décimale.
- ▶ Traduire $(10101001110101101)_2$ en écriture hexadécimale.
- ▶ Traduire $(1AE3F)_{16}$ en écriture décimale.
- ▶ Traduire $(1AE3F)_{16}$ en écriture binaire.
- ▶ Traduire $(13.1)_{10}$ en écriture binaire.

Multiplication et division égyptiennes

Principe

- ▶ Décomposition d'un des nombres en une somme.
On décompose généralement le plus petit.
- ▶ Création d'une table de puissance pour l'autre nombre
- ▶ Très souvent, traduction du décimal vers le binaire.
Il existe des variantes en fonction de la complexité de l'opération.
- ▶ Il suffit de savoir multiplier par deux et additionner !

Multiplication égyptienne : $x \times y$

- On construit la ligne $i + 1$ en multipliant par deux 2^i et $x \times 2^i$ tant que $2^{i+1} < y$.

$$189 \times 21 = 3969$$

i	a_i	2^i	189×2^i
0		1	189
1		2	378
2		4	756
3		8	1512
4		16	3024

Multiplication égyptienne : $x \times y$

- ▶ On construit la ligne $i + 1$ en multipliant par deux 2^i et $x \times 2^i$ tant que $2^{i+1} < y$.
- ▶ On traduit 21 en binaire en remontant dans le tableau.
- ▶ On calcule $\sum_0^n a_i(x \times 2^i)$.

$$189 \times 21 = 3969$$

i	a_i	2^i	189×2^i		
0	1	1	189	✓	(1 -1 = 0)
1	0	2	378		
2	1	4	756	✓	(5 -4 = 1)
3	0	8	1512		
4	1	16	3024	✓	(21 -16 = 5)
			3969		

Méthode générale

Des opérations plus complexes faisant intervenir par exemple des fractions exigeaient une décomposition avec :

- ▶ les puissances de deux,
- ▶ les fractions fondamentales,
- ▶ les dizaines.

La technique est rigoureusement la même mais offre plus de liberté au scribe quant à la décomposition du petit nombre.

$$243 \times 27 = 6561$$

1	243
2	486
4	972
20	4860
<hr/>	
27	6561

$$\text{Papyrus Rhind : } \frac{1}{14} \times \frac{7}{4} = \frac{1}{8}$$

1	$\frac{1}{14}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{28}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{56}$	
<hr/>		
$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{8}$	$(\frac{4+2+1}{56})$

Division égyptienne : $x \div y$

Par quoi doit-on multiplier y pour trouver x ?

- On construit la ligne $i + 1$ en multipliant par deux 2^i et $y \times 2^i$ tant que $y \times 2^{i+1} < x$.

$$539 \div 7 = 77$$

i	2^i	7×2^i
0	1	7
1	2	14
2	4	28
3	8	56
4	16	112
5	32	224
6	64	448

Division égyptienne : $x \div y$

Par quoi doit-on multiplier y pour trouver x ?

- ▶ On construit la ligne $i + 1$ en multipliant par deux 2^i et $y \times 2^i$ tant que $y \times 2^{i+1} < x$.
- ▶ On décompose x par les $y \times 2^i$ en remontant dans le tableau.
- ▶ On calcule la somme des 2^i de la décomposition.

$$539 \div 7 = 77$$

i	2^i	7×2^i		
0	1	7	✓	$(7 - 7 = 0)$
1	2	14		
2	4	28	✓	$(35 - 28 = 7)$
3	8	56	✓	$(91 - 56 = 35)$
4	16	112		
5	32	224		
6	64	448	✓	$(539 - 448 = 91)$
	77			

Division dont le résultat est fractionnaire

$$234 \div 12 = 19.5$$

i	2^i	12×2^i
0	1	12
1	2	24
2	4	48
3	8	96
4	16	192

Division dont le résultat est fractionnaire

$$234 \div 12 = 19.5$$

i	2^i	12×2^i		
0	1	12	✓	(6)
1	2	24	✓	(18)
2	4	48		
3	8	96		
4	16	192	✓	(42)

Division dont le résultat est fractionnaire

$$234 \div 12 = 19.5$$

i	2^i	12×2^i		
-1	$\frac{1}{2}$	6	✓	(0)
0	1	12	✓	(6)
1	2	24	✓	(18)
2	4	48		
3	8	96		
4	16	192	✓	(42)
	19.5			

Exercices

1. Multipliez 187 par 11.
2. Multipliez 2012 par 1515 (indice : utilisez la méthode générale).

Exercices

1. Multipliez 187 par 11.
2. Multipliez 2012 par 1515 (indice : utilisez la méthode générale).

187 \times 11

i	a_i	2^i	11×2^i
0	1	1	187
1	1	2	374
2	0	4	748
3	1	8	1496
		11	2057

2012 \times 1515

5	10060
10	20120
500	1006000
1000	2012000
1515	3048180

Arithmétique binaire

Représentation de l'information en machine

- ▶ Informations en général représentées et manipulées sous forme binaire.
- ▶ L'unité d'information est le chiffre binaire ou bit (binary digit).
- ▶ Les opérations arithmétiques de base sont faciles à exprimer en base 2.
- ▶ La représentation binaire est facile à réaliser : systèmes à deux états obtenus à l'aide de transistors.

Tables d'addition

► $0 + 0 = 0$

► $1 + 0 = 1$

► $0 + 1 = 1$

► $1 + 1 = 10$ (0 et on retient 1)

$91 + 71 = 162$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \, 1 \, 1 \, 1 \, 1 \\ 1011011 \\ + 1000111 \\ \hline 10100010 \end{array}$$

Soustraction binaire

Tables de soustraction

► $0 - 0 = 0$

► $1 - 0 = 1$

► $(1)0 - 1 = 1$ (1 et on retient 1)

► $1 - 1 = 0$

$83 - 79 = 4$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 1010011 \\ -1001111 \\ \hline 11 \\ 0000100 \end{array}$$

Limitation : résultat négatif

On ne peut traiter $x - y$ que si $x \geq y$.

Multiplication binaire

Tables de multiplication

► $0 \times 0 = 0$

► $1 \times 0 = 0$

► $1 \times 1 = 1$

$23 \times 11 = 253$

$$\begin{array}{r} 10111 \\ \times 1011 \\ \hline 11111 \\ 10111 \\ + 10111 \\ + 10111 \\ \hline 11111101 \end{array}$$

Division binaire

Soustractions et décalages comme la division décimale

- sauf que les digits du quotient ne peuvent être que 1 ou 0.
- Le bit du quotient est 1 si on peut soustraire le diviseur, sinon il est 0.

$$231 \div 11 = 21$$

1 1 1 0 0 1 1 1		1011
- 1 0 1 1		10101
<hr/>		
1 1 0 1		
- 1 0 1 1		
<hr/>		
1 0 1 1		
- 1 0 1 1		
<hr/>		
0		

Limitation : division entière

Pour l'instant, on ne peut pas calculer la partie fractionnaire.

1. Traduire $(1100101)_2$ et $(10101111)_2$ en écriture décimale.
2. Calculez la somme $(1100101)_2 + (10101111)_2$.
3. Calculez le produit $(10101111)_2 \times (1100101)_2$.
4. Calculez la soustraction $(10101111)_2 - (1100101)_2$.
5. Vérifier tous les résultats en les traduisant en écriture décimale.

Représentation des nombres en machine

Précision finie

- ▶ Codés généralement sur 16, 32 ou 64 bits.
- ▶ Un codage sur n bits permet de représenter 2^n valeurs distinctes.

Un ordinateur ne calcule pas bien !

- ▶ Pour un ordinateur, le nombre de chiffres est fixé.
- ▶ Pour un mathématicien, le nombre de chiffres dépend de la valeur représentée.
- ▶ Lorsque le résultat d'un calcul doit être représenté sur plus de chiffres que ceux disponibles, il y a dépassement de capacité.

Représentation des entiers en machine

Entiers naturels

- ▶ Un codage sur n bits : tous les entiers entre 0 et $2^n - 1$.
- ▶ La conversion d'un nombre entier s'arrête toujours.
- ▶ On ne peut traiter $x - y$ que si $x \geq y$.

Entiers relatifs : plusieurs représentations existent.

Valeur absolue signée ; complément à 1 ; complément à 2.

Tous les processeurs actuels utilisent le complément à 2.

- ▶ il y a un seul code pour 0 ;
- ▶ l'addition de deux nombres se fait en additionnant leurs codes ;
- ▶ et il est très simple d'obtenir l'opposé d'un nombre.
- ▶ les processeurs disposent de fonctions spéciales pour l'implémenter.

Représentation des nombres réels

- ▶ Les ressources d'un ordinateur étant limitées, on représente seulement un sous-ensemble $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ de cardinal fini.
- ▶ Les éléments de \mathbb{F} sont appelés nombres à virgule flottante.
- ▶ Les propriétés de \mathbb{F} sont différentes de celles de \mathbb{R} .
- ▶ Généralement, un nombre réel x est tronqué par la machine, définissant ainsi un nouveau nombre $fl(x)$ qui ne coïncide pas forcément avec le nombre x original.

Problèmes et limitations

- ▶ les calculs sont nécessairement arrondis.
- ▶ il y a des erreurs d'arrondi et de précision
- ▶ On ne peut plus faire les opérations de façon transparente

```
> 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
[1] FALSE
> 10^20 + 1 == 10^20
[1] TRUE
```

Questions?

Retrouvez ce cours sur le site web

www.i3s.unice.fr/~malapert/R