CHAPITRE VI
MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

1. Matrice d'une application linéaire dans des bases données.

Définition

Soit E et F deux espaces vectoriels sur R de dimension respective n et p:

$$B = \{e_1, e_2, \quad, e_n\} \text{ une base de } E$$
$$B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \quad, \varepsilon_p\} \text{ une base de } F$$

f est déterminée par la donnée des images dans F des vecteurs de B

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_i, 1 \le i \le p, \forall 1 \le j \le n$$

On appelle matrice de f dans les bases B et B' le tableau suivant:

$$\begin{array}{cc} & f(e_1)f(e_2)\ldots f(e_j)\ldots f(e_n) \\ \begin{array}{c}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \\ \varepsilon_i\\ \\ \varepsilon_p\end{array} & \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \\ a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{ij}, \ldots a_{in} \\ \\ a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pj} \ldots a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Notation:

$$M(f, B, B') = A = (a_{i,j}) \; 1 \le i \le p, 1 \le j \le n$$
$$A \in M_{pn}(R)$$

Remarque

Si E=F est un R-ev de dimension n, si *B est* une base de E et f un endomorphisme de E alors, la matrice de f dans la base *B* est la matrice *M(f,B,B)* ***notée M(f,B)***

2. Traduction analytique d'une application linéaire. Utilisation de A.

Dans les conditions précédentes

Soit x un vecteur de E:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \text{ et par linéarité : } f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j), \text{c'est à dire :}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_i \right)$$

$$\text{Soit : } f(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i$$

Considérons maintenant y=f(x), y s'exprime dans la base de F soit: $f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \varepsilon_i$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

En identifiant les deux expressions de f(x), on obtient:

$$\text{c'est à dire en détaillant :}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \\ y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

EXEMPLE

Soit l'application linéaire f définie par:

$$f : R^3 \to R^4$$
$$(x,y,z) \to (2x+y+z, y+z, x, x+y)$$

Déterminer :

$M(f,(e_1,e_2,e_3),(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4))$ *où* (e_1,e_2,e_3) *est la base canonique de* R^3 *et* $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ *la base canonique de* R^4 $,\ M \in M_{43}(R)$

3. Inverse d'une matrice d'une application linéaire.

Soit $A \in M_n(R)$

On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(R)$ t.q:

$$AB = BA = I_n$$

Si une telle matrice B existe alors B est l'inverse de A.

B = A^{-1} de plus B est défini de manière unique.

Théorème

Si A =*M(f,B), B* étant une base de E et f endomorphisme de E,
A est inversible si et seulement si f est bijective.

On en déduit:

A inversible $\Leftrightarrow$ *les vecteurs colonnes de A forment une famille libre de* R^n

A inversible $\Leftrightarrow$ *les vecteurs lignes de A forment une famille libre de* R^n

4. Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$

Considérons alors les vecteurs colonnes de A, Soit :

$C_1, C_2, ...C_n$

Le rang de A est le rang de $(C_1, C_2, ...C_n)$ *c'est à dire la dimension du sous - espace vectoriel engendré par* $(C_1, C_2, ...C_n)$.

Exemple:

Rang d'une matrice triangulaire

5. Changements de base

E est un R-ev de dimension n. Soit *B* et *B'* deux bases de E.

$$B = (e_1, e_2, ...e_n)$$
$$B' = (e'_1, e'_2, ...e'_n)$$

On peut exprimer B' dans B, on obtient :

$$\begin{cases} e'_1 = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{21}e_2 + ... + \lambda_{n1}e_n \\ e'_2 = \lambda_{12}e_1 + \lambda_{22}e_2 + ... + \lambda_{n2}e_n \\ \\ e'_n = \lambda_{1n}e_1 + \lambda_{2n}e_2 + ... + \lambda_{nn}e_n \end{cases}$$

6. Matrices de passage

P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de B' à B.

On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice P

$$P = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (e'_1\ e'_2\ ....e'_n) \\ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & ......\lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & ......\lambda_{2n} \\ \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & ......\lambda_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Formules de changements de base:

U a pour coordonnées $(x_1, x_2, ..x_n) = {}^tX$ *dans B.*

U a pour coordonnées $(x'_1, x'_2, ..x'_n) = {}^tX'$ *dans B'.*

Alors on peut passer de X' à X par la formule :

$X = PX'$

De même si f est un endomorphisme de E, si $A = M(f,B)$ *et* $A' = M(f,B')$

$A' = P^{-1}AP$

Matrices semblables

1. Soient A et A' deux matrices éléments de $M_n(R)$.

S'il existe P une matrice inversible, $P \in M_n(R)$ telle que:

$$A' = P^{-1}AP$$

Alors les matrices A et A' sont semblables

EXEMPLE 1

Soit f l'endomorphisme de R^3 de matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer Ker(f), Im(f). Soit $B' = (i, j, k)$ définie par :

$i = e_1 - e_2$; $j = e_2 - e_3$; $k = e_1 + e_2 + e_3$

Trouver $A' = M(f, B')$. Vérifier que $tr(A) = tr(A')$

EXEMPLE 2

Soit f l'endomorphisme de R^4 :

$(x, y, z, t) \to (x, -x + 4y + z - 2t, 2x + y + 2z - t, x + 2y + z)$

Soit E la base canonique de R^4 :

1. Déterminer M(f, E)

2. Soit $v_1 = (1, 1 - 4, -1)$; $v_2(0,1,0,1)$; $v_3 = (0,0,1,0)$; $v_4 = (0,1,-2,0)$

Déterminer $B = M(f, V)$ où $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

En déduire B^{-1} puis A^{-1}.

EXEMPLE 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $u = (3, -2, 1)$; $v = (-5, 1, 2)$; $w = (1, 1, 2)$

$V = (u, v, w)$ est une base de R^3. Déterminer $A' = M(f, V)$.

En déduire que rang(A) = 2

Calculer A'^3, en déduire A^3

EXEMPLE 4

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Calculer J^2, J^3 En déduire par récurrence sur $n \geq 1$:*

$J^n = 4^{n-1} J$

Généralisation ?

EXEMPLE 5

Calculer A^2, A^3, A^4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indications :

La matrice B est nilpotente ie : $\exists p \in N / B^p = 0$ et $B^{p-1} \neq 0$ (indice de nilpotence = p)

$A = I_3 + B \Rightarrow A^2 = (I_3 + B)^2$

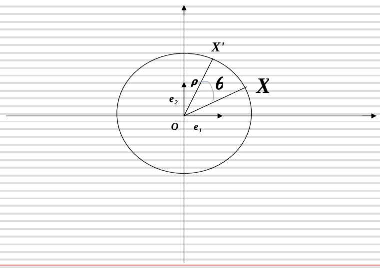
Généralisation.. formule du binôme de Newton appliqué aux matrices.

$$1.P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ -5 & -5 & 5 \\ 5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

7.Quelques études dans R² et R³

1.Rotation de centre O et d'angle θ dans $R^2, \theta \in [0, 2\pi[$



Dans la base (e_1, e_2),

$$r(e_1) = \cos\theta . e_1 + \sin\theta . e_2 \quad r(e_2) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).e_1 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).e_2$$

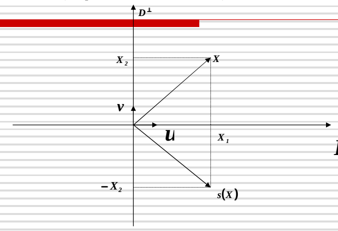
$$\text{or } \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta \text{ et } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$

$$\text{d'où } M(r, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Le vecteur $X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *a donc pour image le vecteur* $X'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *tel que :*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ soit : } \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

2. Symétrie orthogonale par rapport à une droite D. (réflexion d'axe D)



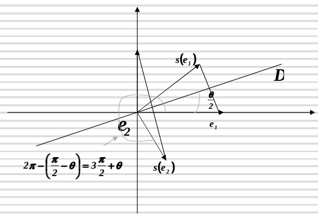
Si $X = X_1 + X_2$ alors $s(X) = X_1 - X_2$, et $s(X)$ est l'image de X par la symétrie orthogonale d'axe D.

$$M(s, (u, v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{remarque : } M^2 = I_2 \text{ ou } s^2 = \text{identité}.$$

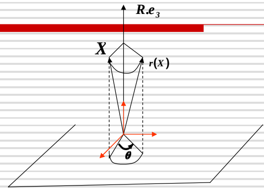
Matrice de s dans la base canonique (e_1, e_2)

Si D s'obtient par rotation d'angle $\frac{\theta}{2}$ de l'axe Re_1,

$$M(s, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



3.Rotation d'angle θ et d'axe $R.e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de R^3
$\theta \in [0, 2\pi[$



$$M(r, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{cases} r(e_1) = \cos\theta . e_1 + \sin\theta . e_2 \\ r(e_2) = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)e_1 + \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)e_2 \\ r(e_3) = e_3 \end{cases}$$

Le vecteur $X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *a pour image* $r(X)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *tel que :*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ c' est à dire : } \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$