ALGEBRE LINEAIRE

BC

2009-2010

Ce support de cours n'est pas fait pour être imprimé mais pour être consulté.D'autre part, il ne contient que des définitions, une partie essentielle de ce cours est développée au tableau sous forme d'exercices et de démonstrations.

Système de n équations linéaires à n inconnues

Soit le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

a_{ij} et b_i sont des réels pour tout $(i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2$

Le système est équivalent à l'écriture matricielle suivante:

$$AX = B$$

A est la matrice ayant pour coefficients les réels

a_{ij}, $i \in \{1,\cdots,n\}$ et $j \in \{1,\cdots,n\}$
X est le vecteur des inconnues $(x_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ et B est le vecteur des constantes $(b_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$

Ceci s'écrit

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$$
$$X = (x_j)_{1\leq j\leq n}$$
$$B = (b_i)_{1\leq i\leq n}$$

A matrice triangulaire

Lorsque la matrice A associée au système est triangulaire le ssytème devient:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ddots & & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Si tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls alors le système (S) admet une unique solution obtenue par substitution en résolvant d'abord la dernière équation puis l'avant dernière etc...

Solutions obtenues par substitution

Les solutions se présentent alors sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_n & = & \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} & = & \frac{[b_{n-1} - a_{n-1,n}(\frac{b_n}{a_{nn}})]}{a_{n-1,n-1}} \\ \ldots & & \ldots \\ x_{n-p} & = & \frac{[b_{n-p} - \sum_{k=n-p+1}^{k=n} a_{n-p,k}x_k]}{a_{n-p,n-p}} \end{array}\right.$$

$$\forall p = 2, n-1$$

La méthode de Gauss est constituée de 2 parties

- la première partie permet de rendre le système (S) ou la matrice A triangulaire.
- la deuxième partie est la résolution du système triangulaire par substitutions successives.

Pivot de Gauss

Pour rendre triangulaire le système (S) ou la matrice A, procédons par étape et commençons par annuler (si c'est possible) tous les coeffients de la première colonne de A au dessous de a_{11}. Il s'agira ensuite d'itérer ce procédé.

- Si $a_{11} \neq 0$, a_{11} est le pivot.
- Sinon on échange la ligne 1 avec la première ligne l telle que $a_{l1} \neq 0$.
- Considérons donc que le pivot est a_{11}, Il s'agit maintenant d'annuler tous les coefficients a_{i1} de la première colonne pour $i = 2, n$.

Pivot de Gauss : Formule de transformation pour la colonne 1

- pour la ligne i

$$L_i \longrightarrow L_i - (\frac{a_{i1}}{a_{11}})L_1$$

  $\forall i, 2 \leq i \leq n$

- au niveau des éléments
  -

$$a_{ij} \longrightarrow a_{ij} - (\frac{a_{i1}}{a_{11}})a_{1j}$$

$$b_i \longrightarrow b_i - (\frac{a_{i1}}{a_{11}})b_1$$

$\forall i, 2 \leq i \leq n$ et $\forall j, 1 \leq j \leq n$

Au terme de cette opération le système admet deux lignes triangulées, L_1 et L_2.

Pivot de Gauss

Considérons la matrice extraite de A soit $A_1 = (a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ cette fois nous cherchons à annuler la première colonne de A_1 ou deuxième colonne de A au-dessous de a_{22}.

- Si $a_{22} \neq 0$, a_{22} est le pivot.
- Sinon on échange la ligne 2 avec la première ligne l telle que $a_{l2} \neq 0$.
- Considérons donc que le pivot est a_{22},Il s'agit maintenant d'annuler tous les coefficients a_{i2} de la deuxième colonne de A pour $i = 3, n$.

Pivot de Gauss : Formule de transformation pour la colonne 2

- pour la ligne i

$$L_i \longrightarrow L_i - (\frac{a_{i2}}{a_{22}})L_2$$

$\forall i, 3 \leq i \leq n$

- au niveau des éléments
  -

$$a_{ij} \longrightarrow a_{ij} - (\frac{a_{i2}}{a_{22}})a_{2j}$$

$$b_i \longrightarrow b_i - (\frac{a_{i2}}{a_{22}})b_2$$

$\forall i, 3 \leq i \leq n$ et $\forall j, 2 \leq j \leq n$

Au terme de cette opération le système admet trois lignes triangulées, L_1 , L_2 et L_3.

Pivot de Gauss : Supposons que k-1 lignes soient triangulées

Considérons la matrice extraite de A soit $A_{k-1} = (a_{ij})_{k \leq i,j \leq n}$ cette fois nous cherchons à annuler la première colonne de A_{k-1} ou k^{ieme} colonne de A au-dessous de a_{kk}.

- Si $a_{kk} \neq 0$, a_{kk} est le pivot.
- Sinon on échange la ligne k avec la première ligne l telle que $a_{lk} \neq 0$.
- Considérons donc que le pivot est a_{kk},Il s'agit maintenant d'annuler tous les coefficients a_{ik} de la k^{ieme} colonne de A pour $i = k + 1, n$.

Pivot de Gauss : Formule de transformation pour la colonne k

- pour la ligne i

$$L_i \rightarrow L_i - (\frac{a_{ik}}{a_{kk}})L_k$$

  $\forall i, k+1 \leq i \leq n$

- au niveau des éléments
  -
$$a_{ij} \rightarrow a_{ij} - (\frac{a_{ik}}{a_{kk}})a_{kj}$$
$$b_i \rightarrow b_i - (\frac{a_{ik}}{a_{kk}})b_k$$

  $\forall i, k+1 \leq i \leq n$ et $\forall j, k \leq j \leq n$

Au terme de cette opération le système admet k+1 lignes triangulées, L_1 , $L_2 \cdots L_{k+1}$.

Remarques

- Le système (S) (ou la matrice A) est triangulé(e) au terme de n-1 itérations.
- Le test $a_{ii} \neq 0$ est en réalité transformé en $a_{ii} > \varepsilon$ lorsqu'il s'agit d'implémenter cette méthode, afin d'éviter les phénomènes d'instabilité numérique.
- Par contre s'il s'agit de faire des calculs "à la main" notamment en td, il est possible de simplifier les calculs en effectuant des combinaisons linéaires des lignes au lieu de diviser par le pivot.

organigramme pivot de gauss

$p = 1$

$p = n$ **si oui** $\longrightarrow$ résoudre en substituant

si non

$\downarrow$

optimiser le pivot

permuter lignes si nécessaire

$\downarrow$

Faire $i = p + 1$ à n

$C = -\dfrac{a_{ip}}{a_{pp}}$

$L_i = L_i + C \cdot L_p$

$\downarrow$

$p = p + 1$

Résoudre le système suivant

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcr} x+y+3z & = & 1 \\ 4x+y-2z+t & = & 3 \\ 2x-y+z+3t & = & 11 \\ 3x+5y-z-2t & = & -3 \end{array}\right.$$

Résoudre le système suivant

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t & = & 0 \\ y+z+t+u & = & 0 \\ x+2y+3z & = & 2 \\ y+2z+3t & = & -2 \\ z+2t+3u & = & 2 \end{array}\right.$$