

<p>Résolution de systèmes linéaires de <math>n</math> équations à <math>n</math> inconnues</p> <p>Préambule</p> <p>Matrices à coefficients réels</p> <p>Espace vectoriel sur le corps des réels</p> <p><b>Espace vectoriel de dimension fini</b></p>	<p>Combinaison linéaire, Famille libre, famille génératrice</p> <p>Bases d'un espace vectoriel <math>E</math></p> <p><b>Dimension finie d'un espace vectoriel <math>E</math></b></p>
<h1>Plan</h1>	
<p>1 Préambule</p> <p>2 Résolution de systèmes linéaires de <math>n</math> équations à <math>n</math> inconnues dans <math>R</math></p> <ul style="list-style-type: none"><li>● Résolution de systèmes triangulaires</li><li>● Méthode du pivot de Gauss</li></ul> <p>3 Matrices à coefficients réels</p> <ul style="list-style-type: none"><li>● Notion de matrices à coefficients réels</li><li>● Opérations sur les matrices</li><li>● Matrices carrées</li></ul> <p>4 Espace vectoriel sur le corps des réels</p> <ul style="list-style-type: none"><li>● Le corps des réels</li><li>● Structure d'espace vectoriel sur <math>R</math></li><li>● Sous-espace vectoriel</li></ul>	<p>5 <b>Espace vectoriel de dimension fini</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>● Combinaison linéaire, Famille libre, famille génératrice</li><li>● Bases d'un espace vectoriel <math>E</math></li><li>● <b>Dimension finie d'un espace vectoriel <math>E</math></b></li></ul>
<p>IUT Bordeaux1 Dpt-Informatique S1-S2</p>	<p><b>ALGEBRE LINEAIRE</b></p>

Résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Matrices à coefficients réels

Espace vectoriel sur le corps des réels

Espace vectoriel de dimension finie

Préambule

Combinatoire linéaire, Famille libre, famille génératrice

Bases d'un espace vectoriel E

Dimension finie d'un espace vectoriel E

Théorème

Solent n vecteurs de E,  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Si ces n vecteurs forment une base de E alors toute base de E possède n éléments.

Définition

Si E admet une base ayant n éléments, d'après le théorème précédent, n est le nombre commun d'éléments de toute base de E. Le nombre n est appelé la **dimension** de l'espace E.

Notation

$\dim(E) = n$

Exemples

- $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$ .
- $\dim(\mathbb{R}) = 1$ ,  $\mathbb{R}$  s'appelle une droite vectorielle.
- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ,  $\mathbb{R}^2$  s'appelle un plan vectoriel.
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ .

IUT Bordeaux1 Dpt-Informatique S1-S2

ALGÈBRE LINÉAIRE

Résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Matrices à coefficients réels

Espace vectoriel sur le corps des réels

Espace vectoriel de dimension finie

Préambule

Combinatoire linéaire, Famille libre, famille génératrice

Bases d'un espace vectoriel E

Dimension finie d'un espace vectoriel E

Théorème

E est un espace vectoriel de **dimension n** alors

- Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
- De plus si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est une famille de E à **n éléments**, les propriétés suivantes sont équivalentes
  - 1  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est une base de E.
  - 2  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est une famille libre de E.
  - 3  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est une famille génératrice de E.

Remarque

Tout sous-espace vectoriel de E, E étant de dimension finie, est un sous-espace vectoriel de dimension finie. De plus, si F est un sev de E
$$\begin{matrix} \dim(F) & \leq & \dim(E) \\ \dim(F) & = & \dim(E) \Leftrightarrow F = E \end{matrix}$$

IUT Bordeaux1 Dpt-Informatique S1-S2

ALGÈBRE LINÉAIRE

Résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Matrices à coefficients réels

Espace vectoriel sur le corps des réels

Espace vectoriel de dimension fini

Préambule

Combinaison linéaire, Famille libre, famille génératrice

Bases d'un espace vectoriel E

Dimension finie d'un espace vectoriel E

Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée

Soit B une base de E,  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et soit X un vecteur de E alors X s'écrit dans la base B c'est à dire :  
$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / X = \lambda_1.X_1 + \lambda_2.X_2 + \dots + \lambda_n.X_n$$
 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  s'appelle les coordonnées du vecteur X dans la base B.  
**De plus X s'écrit de manière unique dans cette base.**

IUT Bordeaux1 Dpt-Informatique S1-S2

ALGÈBRE LINÉAIRE

Résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Matrices à coefficients réels

Espace vectoriel sur le corps des réels

Espace vectoriel de dimension fini

Préambule

Combinatoire linéaire, Famille libre, famille génératrice

Bases d'un espace vectoriel E

Dimension finie d'un espace vectoriel E

Théorème de la base incomplète. (admis)

(E, +, .) est un espace vectoriel de dimension finie alors

- De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Théorème : Formule de Grassmann

(E, +, .) est un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces vectoriels de E, alors
$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

idée démonstration

- On commence par prendre une base de l'intersection  $F_1 \cap F_2$
- Cette base est une famille libre de  $F_1$  et une famille libre de  $F_2$ , on peut donc compléter cette famille dans  $F_1$  en une base de  $F_1$  et dans  $F_2$  en une base de  $F_2$ .
- A partir de ces deux bases, on construit une base de E.
- Il reste ensuite à compter les éléments de chaque base.

IUT Bordeaux1 Dpt-Informatique S1-S2

ALGÈBRE LINÉAIRE

Résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Matrices à coefficients réels

Espace vectoriel sur le corps des réels

Espace vectoriel de dimension fini

Préambule

Combinaison linéaire, Famille libre, famille génératrice

Bases d'un espace vectoriel E

Dimension finie d'un espace vectoriel E

Exercices

1 Soit  $E = \langle (2, 2, 1, 0), (1, 4, 2, -1), (2, 1, -1, 0), (2, -5, -4, 2) \rangle$

2 Trouver une base de E.

2 Montrer que le vecteur  $(1, -1, 1, 1) \in E$

2  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $R$ . Montrer le résultat suivant :  
 $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  est une famille libre de  $E \Rightarrow (V_1, V_1 + V_2, \dots, V_1 + V_2 + \dots + V_n)$  est aussi une famille libre de  $E$ .

3 E est un espace vectoriel et F et G sont deux sous-espaces de E. Montrer :  
 $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$

IUT Bordeaux1 Dpt-Informatique S1-S2

ALGÈBRE LINÉAIRE