CHAPITRE V

APPLICATIONS LINEAIRES

DEFINITION 1

(E, +, .) et (F, +, .) sont des e.v sur R.
Une application linéaire de E dans F est une application **f** compatible avec la structure d'espace vectoriel de E et de F, **ie**:

- $\forall (X_1, X_2) \in E^2$, $f(X_1+X_2) = f(X_1) + f(X_2)$
- $\forall \lambda \in R$, $\forall X \in E$, $f(\lambda.X) = \lambda.f(X)$

Ces deux propriétés peuvent être rassemblées:
$\forall \lambda_1 \in R$, $\forall \lambda_2 \in R$, $\forall (X_1, X_2) \in E^2$,
$f(\lambda_1.X_1+ \lambda_2.X_2) = \lambda_1.f(X_1) + \lambda_2.f(X_2)$

DEFINITIONS 2

1. Une application linéaire de E dans F s'appelle un ***homomorphisme ou morphisme*** de E dans F.

2. Si F = R , f est une ***forme linéaire.***

3. Une application linéaire de **E** dans **E** s 'appelle un ***endomorphisme*** de E.

4. Une application linéaire ***bijective*** de E dans F s 'appelle un ***isomorphisme*** de E dans F.

5. Une application linéaire ***bijective*** de **E** dans **E** s 'appelle un ***automorphisme*** de E.

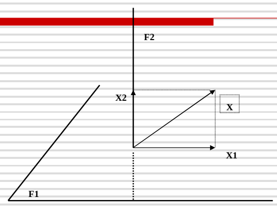
On désigne par la suite par ***L(E,F)*** l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

REMARQUE:
f est une application linéaire de E dans F alors
$$f(o_E) = o_F \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

EXEMPLES:

- $\begin{aligned} R &\to R \\ x &\to ax \end{aligned}$ est linéaire
- $\begin{aligned} R &\to R \\ x &\to ax+b \end{aligned}$ ***n'est pas linéaire***
- Soit $E = F_1 \oplus F_2$ Tout vecteur de E peut s'écrire:

$x = x_1 + x_2, x_1 \in F_1\ x_2 \in F_2$
$L'application : E \to E$
$x \to x_1$ ***est un endomorphisme de E et s'appelle la projection sur F_1 parallèlement à F_2.***
$(ex : dans\ R^2)$



THEOREME

Soit f une application linéaire de E dans F, $f \in L(E,F)$
où dim(E)=n et dim(F)=m,
f est définie de manière unique par la donnée des images des vecteurs
d'une base quelconque de E .

$$\text{Soit } (e_1, e_2, .., e_n) \text{ une base de E, alors } \forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

Image de f

Définition:
f est une application linéaire de E dans F, $f \in L(E,F)$.
L'image de f est le sous-ensemble de F, noté Im(f),
des images des vecteurs de E.
Im(f) = {y ∈ F tq ∃ x ∈ E tq y=f(x) }
Remarque:
Im(f) se note aussi f(E)

Théorème :
Im(f) est le sous-espace vectoriel de F engendré par les images des vecteurs d'une base de E. De plus la dimension de Im(f) définit le ***rang*** de f noté ***rg(f) démonstration***

Noyau de f

Définition:
f est une application linéaire de E dans F, $f \in L(E,F)$
Le noyau de f est le sous-ensemble de E, noté Ker(f),
formé des antécédents du vecteur nul de F, O_F.
Ker(f) = {x ∈ E tq f(x) = O_F }
Remarque:
•Le symbole Ker vient de l'allemand *Kernel* qui signifie *noyau*.
•Nous savons déjà que $O_E \in$ Ker(f) puisque f(O_E) = O_F.

Théorème :
Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E. ***démonstration***

EXEMPLE:

$$f : R^2 \to R^3$$
$$(x, y) \to (x + y, x - y, y)$$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f

Propriétés de f liées au noyau et à l'image de f

Théorème :

$f \in L(E,F)$
• f est une application linéaire injective ⇔ Ker(f) = {O_E}.
• f est une application linéaire surjective ⇔ Im(f) = F.

démonstration

THEOREME DES DIMENSIONS

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et

$f \in L(E,F)$
dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E)

démonstration

THEOREME

Soient (E, +, .) et (F, +, .) deux espaces vectoriels sur R et
$f \in L(E,F)$
dim(E) = dim(F) alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- ***f injective***
- ***Ker(f) = {O_E}***
- ***f surjective***
- ***Im(f) = F***
- ***f bijective.***

Dans ce cas là E et F sont isomorphes.

De manière plus générale:

1. *Deux espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes.*

Si $B = \{e_1, e_2, \;\; , e_n\}$ ***et*** $B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \;\; , \varepsilon_n\}$ ***sont deux bases de E et F***
on considère alors l'homomorphisme bijectif défini par :
$f(e_i) = \varepsilon_i, 1 \le i \le n$

2. *On en déduit:*

Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à R^n.

Exemple

Soit f l'application définie par:

$$f : R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \to (z-y, x-z, y-x)$$

En fait $f(X) = u \wedge X$ ***où u est le vecteur*** $(1,1,1)$
et $\wedge$ ***désigne le produit vectoriel.***

Trouver le noyau,l'image et le rang de f

$Ker(f)$ ***est en fait*** $R.u = \langle u \rangle$

Im(f) est le plan orthogonal à $R.u = \langle (-1,0,1), (0,1,-1) \rangle$