Techniques de synthèse non linéaires (AM / FM)

Matthias Robine

matthias.robine@labri.fr

Synthèse additive

- modèle sinusoïdal

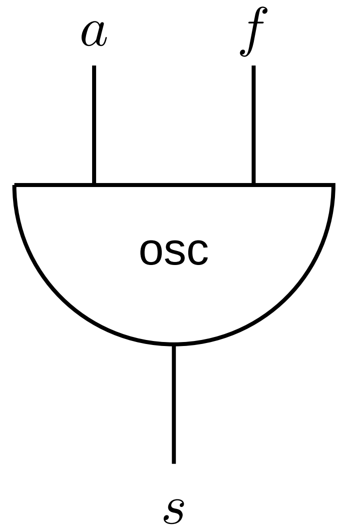
$$s(t) = \sum_{p=1}^{P} a_p(t) \cos\left(\phi_p(t)\right)$$

où P est le nombre de partiels et

$$\phi_p(t) = \phi_p(0) + 2\pi \int_0^t f_p(u) du$$

Les fonctions $f_p(t)$, $a_p(t)$ et $\phi_p(t)$ sont la fréquence, l'amplitude et la phase du p-ième partiel.

Brique de base : oscillateur



$$s(t) = a\sin(2\pi f t)$$

- 2 entrées :
  - a : amplitude
  - f : fréquence
- 1 sortie : s

exemple : $a = 1$, $f = 440$ Hz

Synthèse linéaire

- 1 partiel $\leftrightarrow$ 1 oscillateur
- Bijection entre l'ensemble des partiels et celui des oscillateurs

Synthèse non linéaire

- Produire un grand nombre de partiels. . .
- . . . à l'aide d'un nombre réduit d'oscillateurs

$\Rightarrow$ efficacité

- On trouve en sortie des fréquences qui n'étaient pas en entrée

Remarque préliminaire

Considérons les deux signaux sonores s_1 et s_2 suivants :

$$s_1(t) = \cos(2\pi 5t) \cos\left(2\pi 4000t - \frac{\pi}{2}\right)$$

c'est-à-dire l'équation du modèle additif avec $P = 1$,
$a_1(t) = \cos(2\pi 5t)$, $f_1(t) = 4000$ Hz, $\phi_1(0) = -\pi/2$, et

$$s_2(t) = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi 3995t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi 4005t - \frac{\pi}{2}\right)$$

c'est-à-dire l'équation du modèle additif avec $P = 2$,
$a_1(t) = 1/2$, $f_1(t) = 3995$ Hz, $\phi_1(0) = -\pi/2$,
$a_2(t) = 1/2$, $f_2(t) = 4005$ Hz, $\phi_2(0) = -\pi/2$.

Remarque préliminaire

- Perception ?
  - s_1 : une fréquence (4000 Hz) modulée par un trémolo (5 Hz)
  - s_2 : deux fréquences (3995 Hz et 4005 Hz) d'amplitudes constantes (0.5)
- Mathématiquement : $s_1 = s_2$
  du fait des équations trigonométriques suivantes :

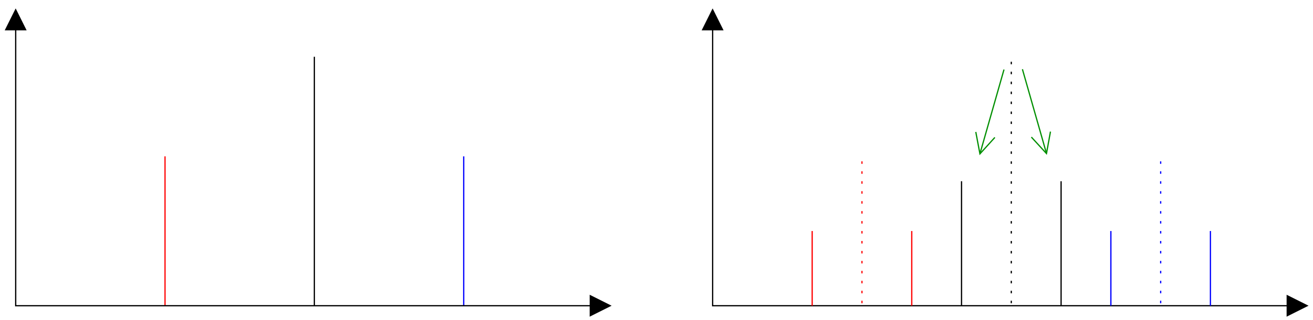
$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \\
\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]
\end{aligned}$$

Modulation d'amplitude (AM)

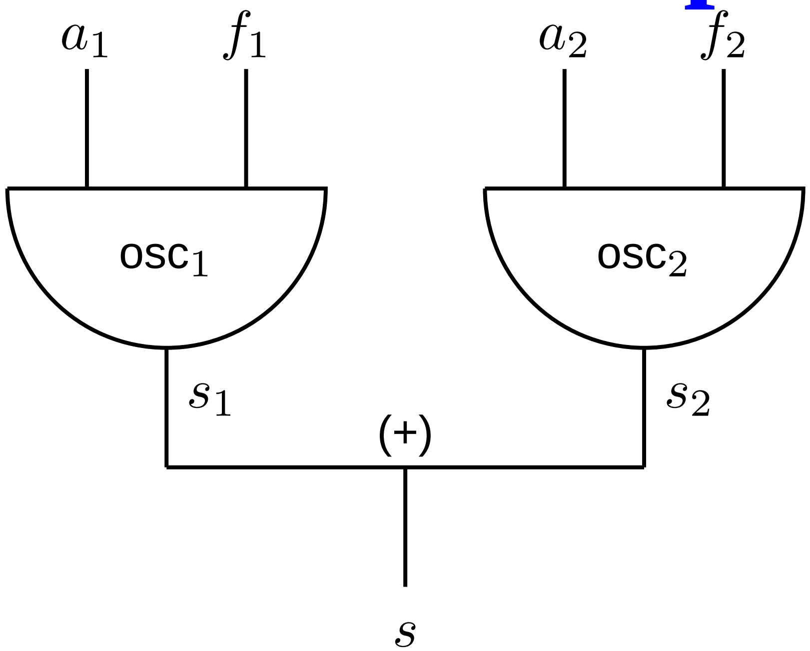
Multiplier un ensemble de n oscillateurs (son modulé) par un autre oscillateur (oscillateur modulant) afin de créer un timbre plus complexe

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \cos(a_k)\right)}_{n} \underbrace{\cos(b)}_{1} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \cos(a_k - b) + \sum_{k=1}^{n} \cos(a_k + b)\right]}_{2n}$$

Génération de $2n$ partiels avec seulement $n+1$ oscillateurs



Combinaison d'oscillateurs : en parallèle



$$s(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t) + a_2 \sin(2\pi f_2 t)$$

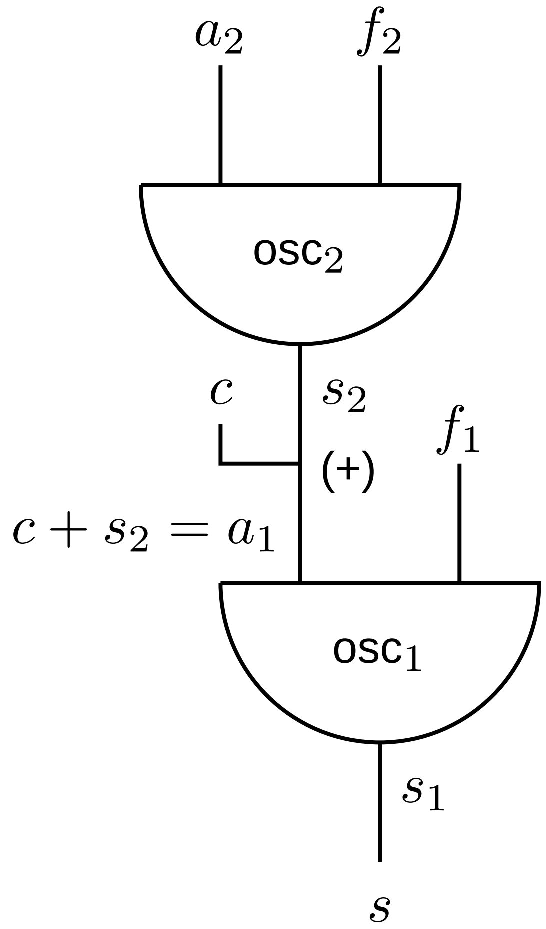
$\rightarrow$ addition des fonctions sinus : $\sin(\cdots) + \sin(\cdots)$

synthèse additive (linéaire)

exemple :

$a_1 = 0.5$, $f_1 = 440$, $a_2 = 0.5$, $f_2 = 700$

Combinaison d'oscillateurs : en série (cas 1)

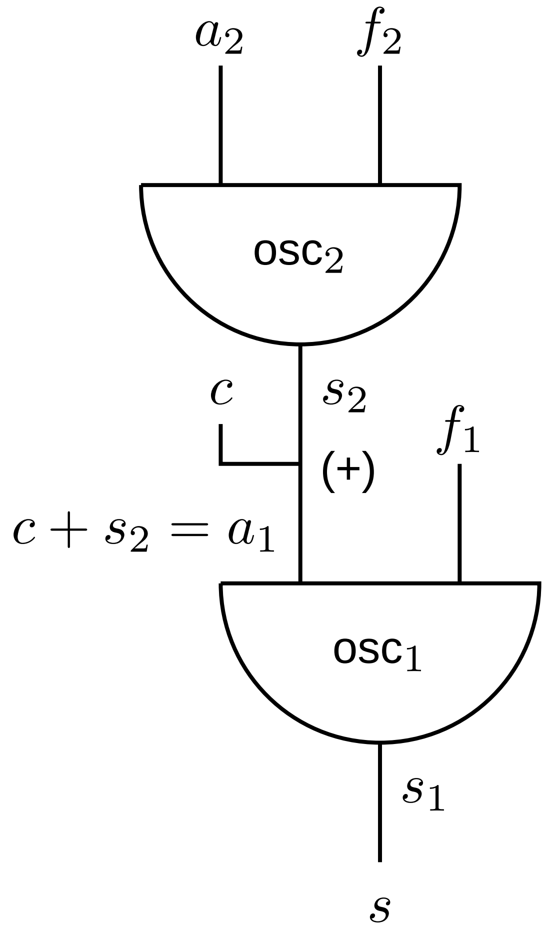


$$s = (c + a_2 \sin(2\pi f_2 t)) \cdot \sin(2\pi f_1 t)$$

$\rightarrow$ multiplication des fonctions sinus : $\sin(\cdots) \cdot \sin(\cdots)$

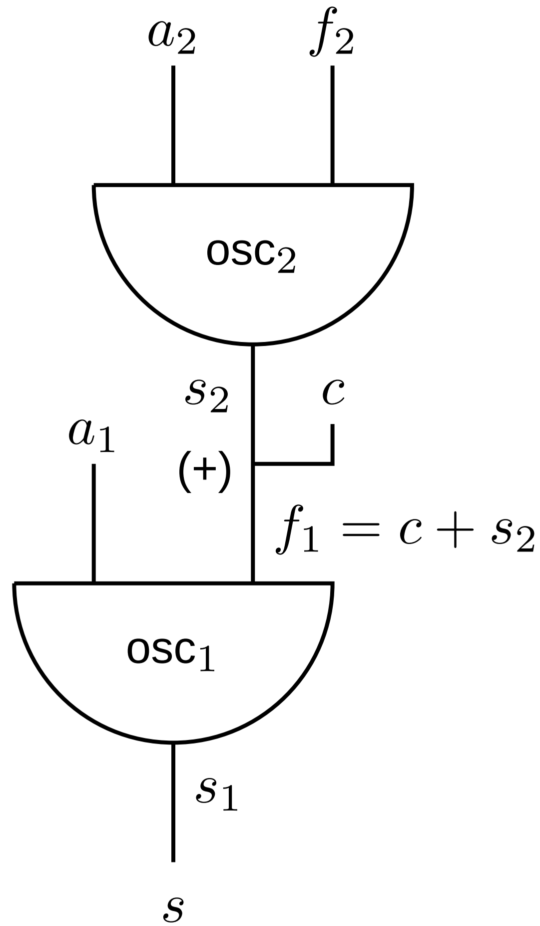
modulation d'amplitude (AM)

Combinaison d'oscillateurs : en série (cas 1)



exemple :
$a_1 = 0.5$, $f_1 = 440$, $a_2 = 0.5$, $f_2 = 10$, $c = 0.5$

Combinaison d'oscillateurs : en série (cas 2)

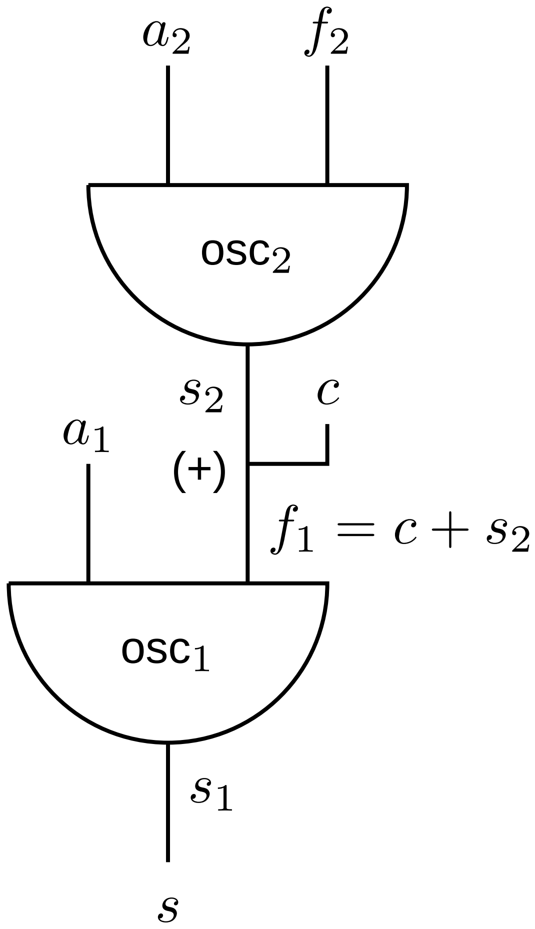


$$s = a_1 \sin(2\pi(c + a_2 \sin(2\pi f_2 t))t)$$

$\rightarrow$ composition des fonctions sinus : $\sin(\sin(\cdots))$

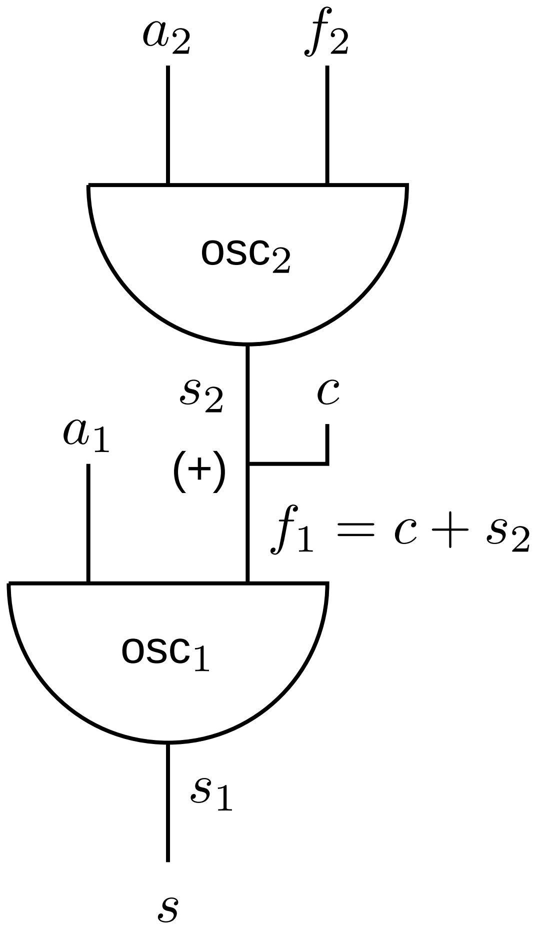
modulation de fréquence (FM) [de phase...]

Combinaison d'oscillateurs : en série (cas 2)



exemple : (harmonique)
$a_1 = 0.5$, $f_1 = 440$, $a_2 = \pi$, $f_2 = 220$, $c = 0$

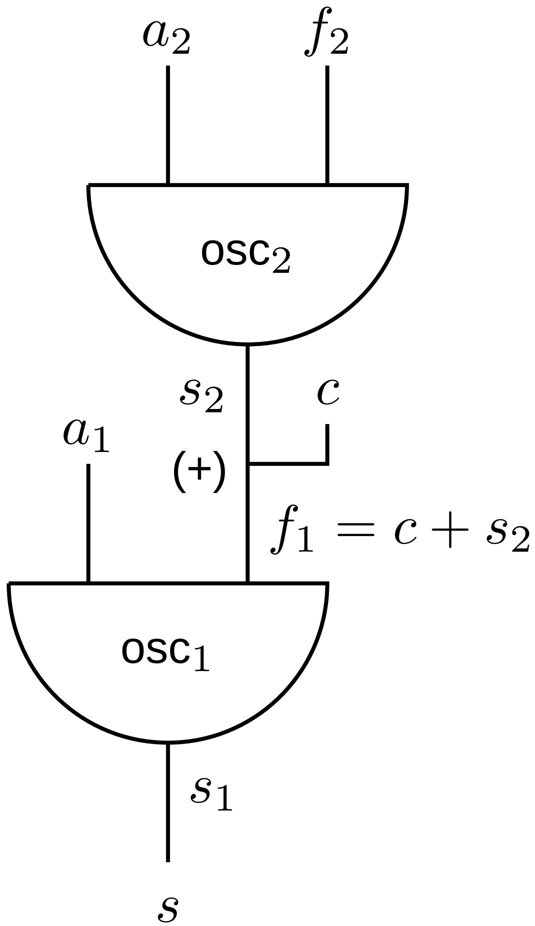
Combinaison d'oscillateurs : en série (cas 2)



exemple : (inharmonique)

$a_1 = 0.5$, $f_1 = 440$, $a_2 = \pi$, $f_2 = 123$, $c = 0$

Combinaison d'oscillateurs : en série (cas 2)



exemple : (dynamique)

$a_1 = 0.5$, $f_1 = 440$, $a_2 = 0 \rightarrow \pi \rightarrow \cdots$, $f_2 = 123 \rightarrow 440 \rightarrow \cdots$, $c = 0$

Combinaison d'oscillateurs

- Modulations AM et FM utilisées en radio ($f_2 << f_1$)
- Ecoute du signal modulé : trémolo ou vibrato
- Et si f_1 et f_2 sont proches ?

$\rightarrow$ spectre très riche, timbre complexe

- John Chowning (1966) [CCRMA, Stanford]
- Publication dans le Journal de l'AES en 1973 :

  The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation
- Synthétiseur Yamaha DX7 en 1983

Modulation de fréquence (FM)

$$s(t) = A(t)\sin\left(2\pi f_c(t)t + I(t)\sin\left(2\pi f_m(t)t\right)\right)$$

- A : amplitude
- f_c : fréquence porteuse (*carrier*)
- f_m : fréquence modulante
- I : indice de modulation

Principe mathématique

$$\sin\left(\theta + a\sin\left(\beta\right)\right) = J_0(a)\sin(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)\left(\sin(\theta + k\beta) + (-1)^k\sin(\theta - k\beta)\right)$$

où $J_k(a)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre k au point a

[*Handbook of mathematical functions*, *National Bureau of Standards*, 1966]

On peut relier cette équation à la précédente (FM) en prenant $\theta = 2\pi f_c t$, $\beta = 2\pi f_m t$ et $a = I$.

$\Rightarrow$ Seulement 2 oscillateurs pour générer un ensemble (potentiellement infini. . .) de partiels distants de f_m

Fonctions de Bessel (définition)

Les fonctions de Bessel de première espèce
sont les solutions de l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0, \quad k \geq 0 \quad (\text{ordre})$$

Ces fonctions de Bessel sont données par l'équation :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} \quad (n \geq 0)$$

$$\text{où} \quad \Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (n > 0)$$

Si n est un entier, on a $\Gamma(n+1) = n!$ (factorielle n).

Fonctions de Bessel (formulation)

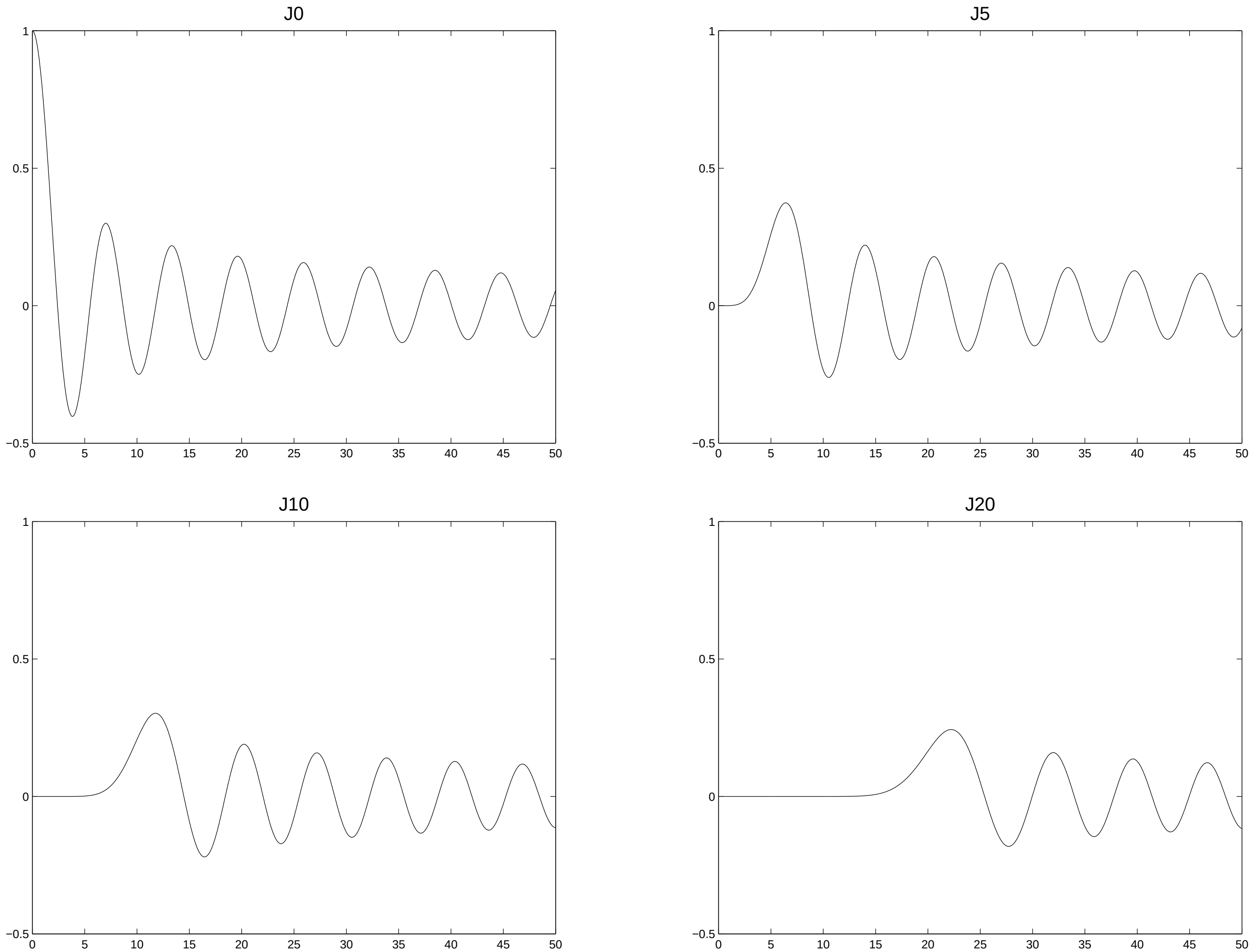
Finalement, par récurrence :

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} J_0(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \\ J_1(x) & = & \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots \end{array} \right.$$

Fonctions de Bessel (graphes)

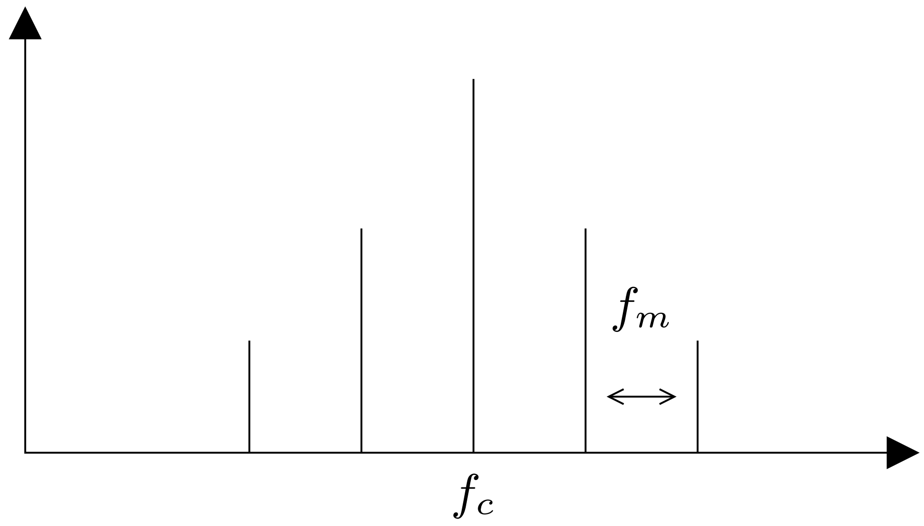


Exemples de fonctions de Bessel de première espèce

Fonctions de Bessel (observations)

- Sortes de “sinusoïdes amorties”
- Pour $I = 0$, seule l’amplitude de la porteuse est $\neq 0$ (car $J_0(0) = 1$ et $\forall k > 0, J_k(0) = 0$)
- Quand I augmente, le spectre s’enrichit de nouveaux partiels
  - de part et d’autre de la fréquence centrale f_c, qui fixe l’origine du spectre
  - la fréquence modulante f_m détermine l’espacement des partiels en fréquence
- En faisant varier I, on fait varier toutes les amplitudes en même temps…

Spectre du signal modulé



- f_c fixe l'origine du spectre
- f_m détermine l'espacement des partiels
- I contrôle la largeur de bande du spectre (nombre de partiels $P \approx I - 2$ pour I suffisamment grand)
- Les amplitudes suivent les fonctions de Bessel...

Rapport d'harmonicité H

$$H = \frac{f_m}{f_c}$$

- Si $H = 1$:

  Cas où $f_m = f_c$. En utilisant le fait que $\sin(-x) = -\sin(x)$ (pour les fréquences négatives) et que $\theta = \beta = 2\pi f_m t$ dans l'équation vue pour le principe mathématique, la décomposition en série de Fourier du signal sonore produit est :

$$\sin\left(\theta + a\sin\left(\theta\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(J_{k-1}(a) + (-1)^k J_{k+1}(a)\Big) \sin(k\theta)$$

  - spectre harmonique
  - fréquence fondamentale f_m

Rapport d'harmonicité H

$$H = \frac{f_m}{f_c}$$

- Si $H = 2$:

En prenant $\beta = 2\theta$, l'équation vue pour le principe mathématique devient :

$$\sin\left(\theta + a\sin\left(2\theta\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(J_k(a) + (-1)^k J_{k+1}(a)\Big)\sin((2k+1)\theta)$$

  - spectre harmonique. . .
  - uniquement des harmoniques impaires

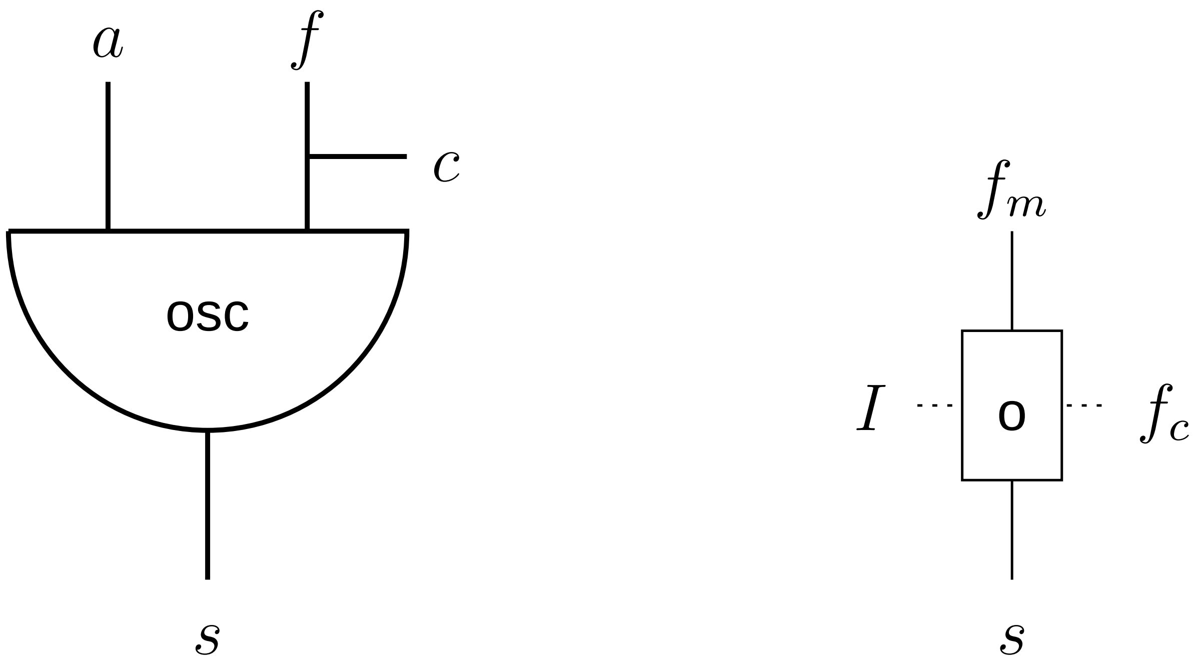
$\rightarrow$ imite les sons de clarinettes

Rapport d'harmonicité H

$$H = \frac{f_m}{f_c}$$

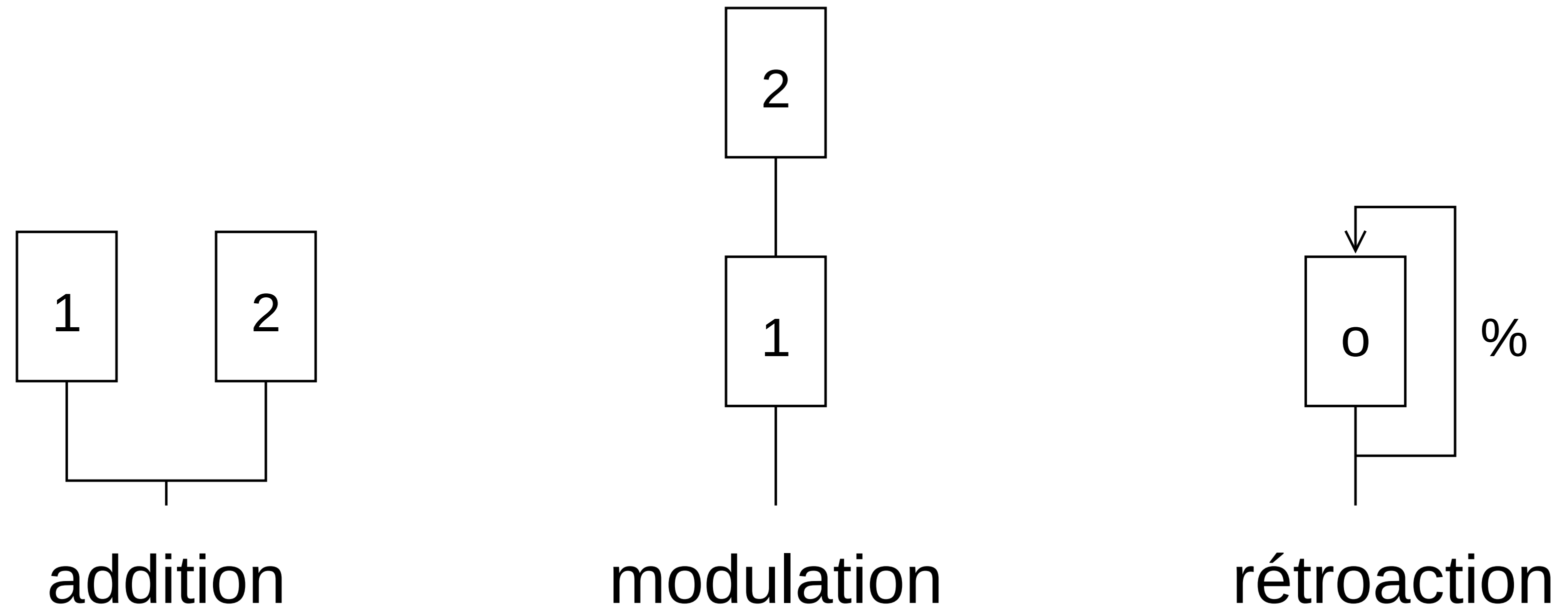
- $H = 1$: spectre harmonique complet
- $H = 2$: spectre harmonique impair
- H rationnel : spectre harmonique
- $H = \sqrt{2}$: spectre inharmonique
  $\rightarrow$ Simuler des gongs ou des cloches

Oscillateur $\rightarrow$ Opérateur



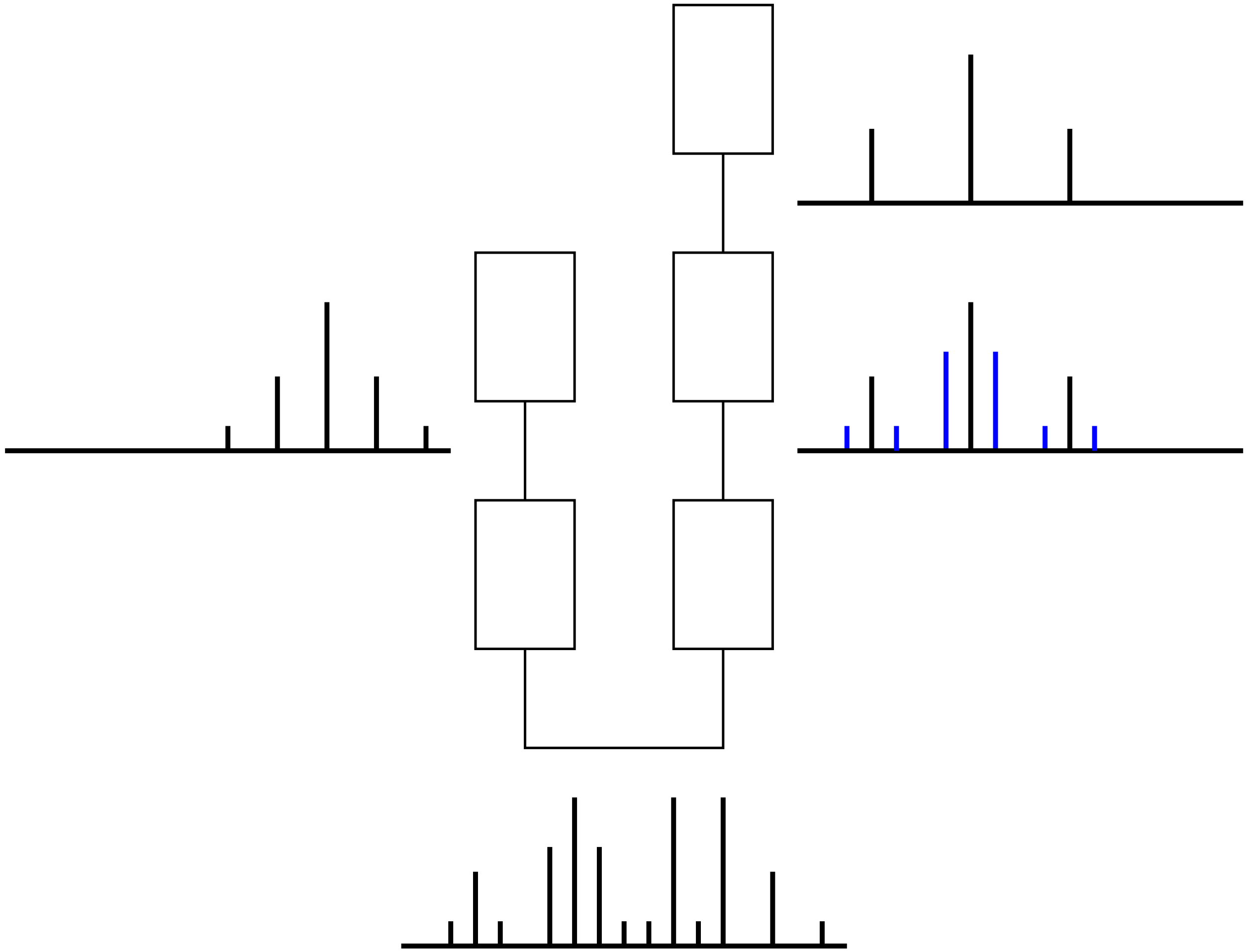
- $f = f_m$ (fréquence modulante)
- $c = f_c$ (fréquence porteuse)
- $a = I$ (indice de modulation)

Combinaison des opérateurs

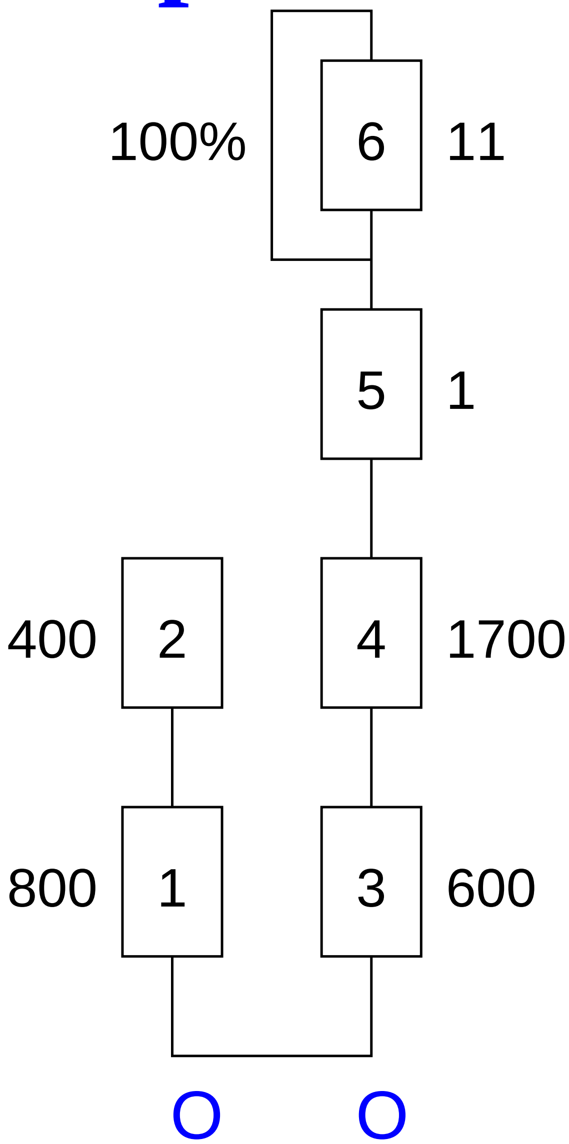


- **rétroaction** : pour générer du bruit (pseudo-aléatoire)

Cascade d'oscillateurs



Exemple : cloche



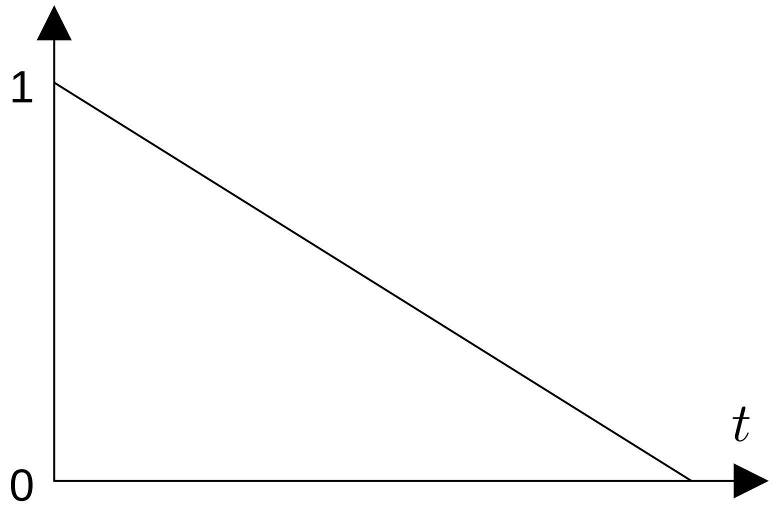
Exemple : cloche (suite)

descriptif :

- fréquences (porteuses)

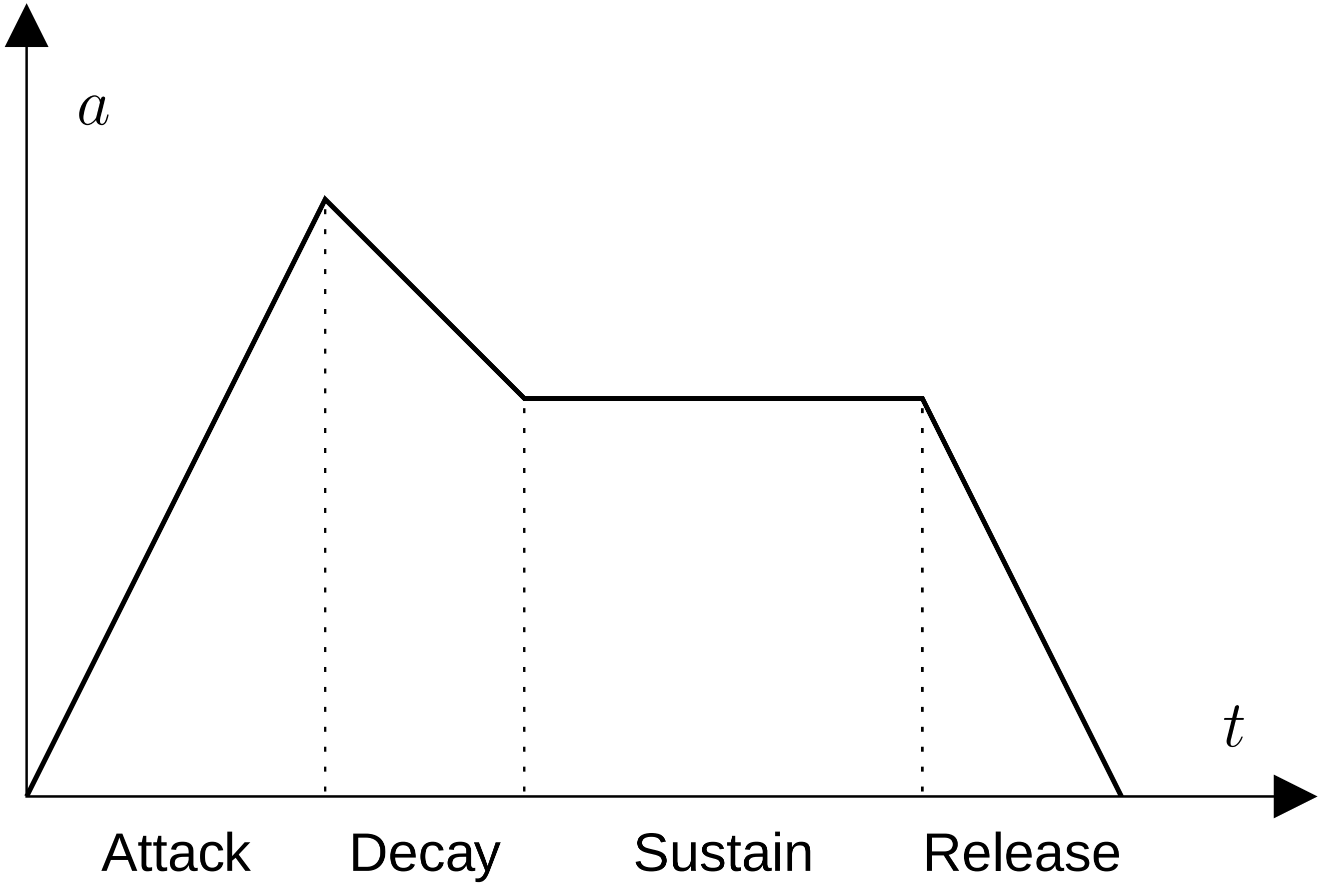
opérateur	1	2	3	4	5	6
f_c	800	400	600	1700	1	11

- amplitudes : I identique pour tous les opérateurs



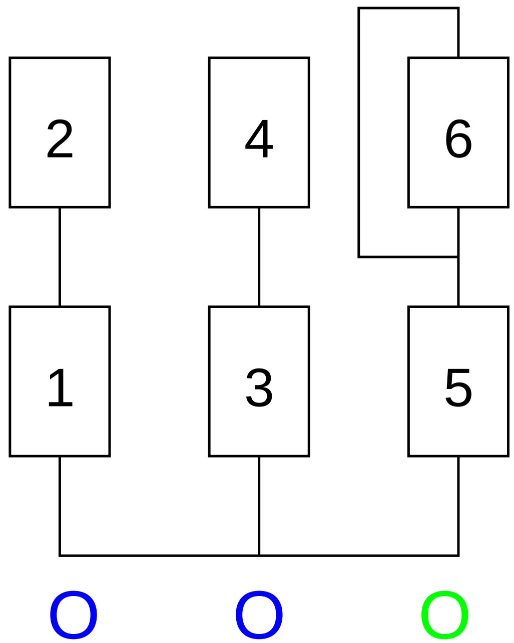
- coefficient de rétroaction : 1 (100%)

Enveloppes ADSR

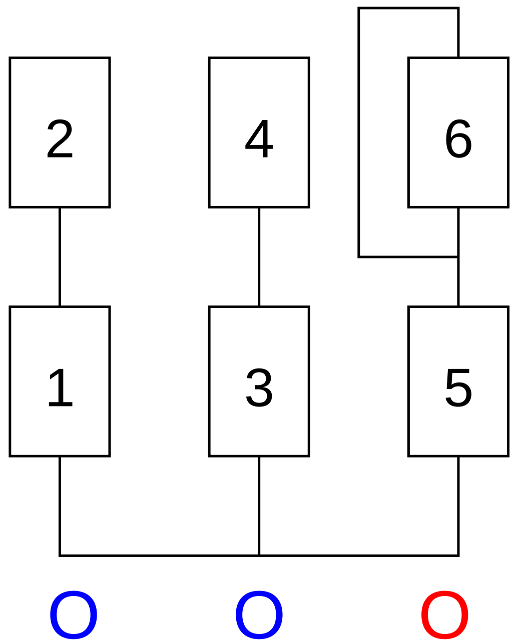


(**A**ttack **D**ecay **S**ustain **R**elease)

Exemple : *Tubular Bells*



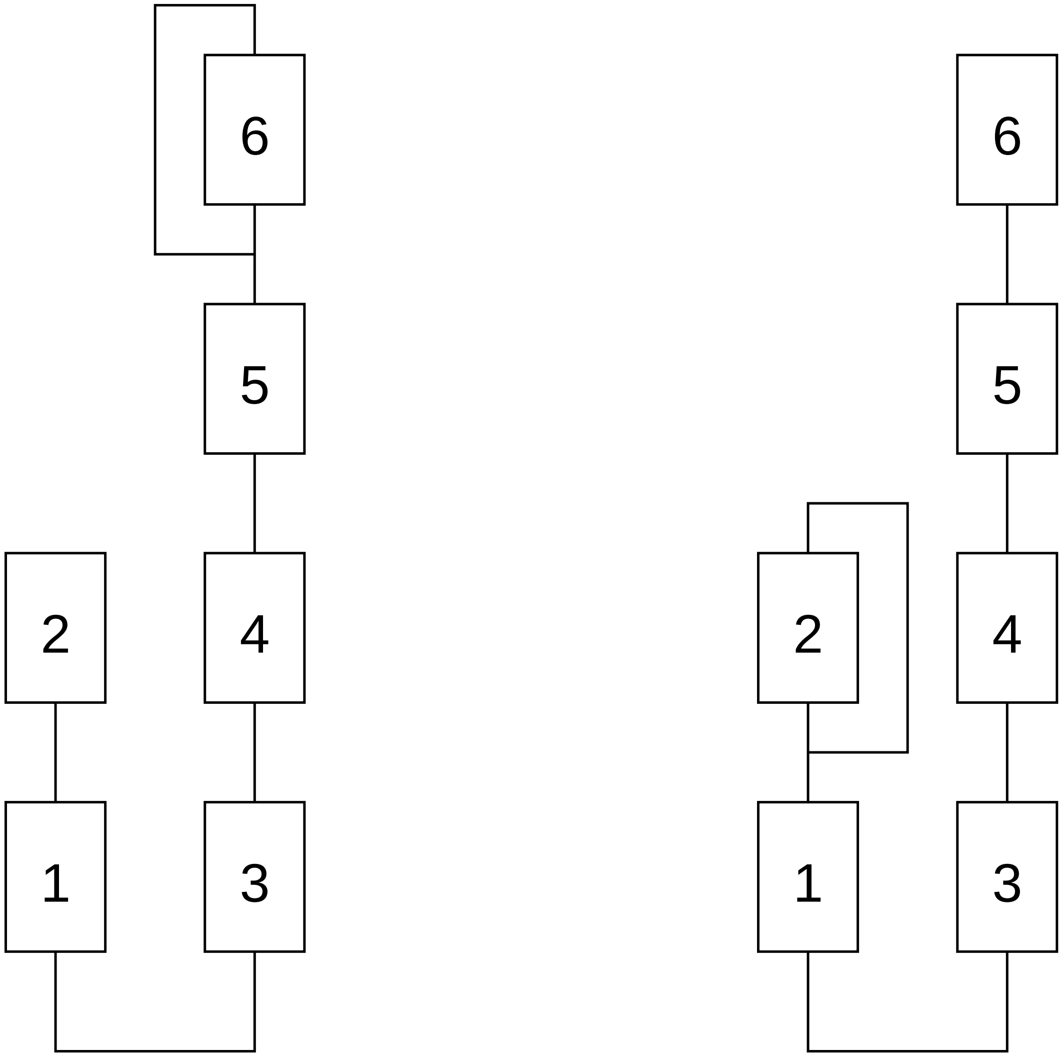
Exemple : *Tube Rise*



Synthétiseur Yamaha DX7 - 1983

- John Chowning, brevet déposé avec Yamaha
- **Synthèse FM** :
  - **6 opérateurs** (oscillateurs)
  - combinés suivant **32 algorithmes**
- succès commercial / musical
- très utilisé dans les années 80–90
- programmation des *patches* :
  - numéro d'algorithme
  - indices de modulations
  - facteur de rétroaction
  - enveloppes. . .

Algorithmes 1 et 2 (sur 32)



Exemples sonores

- Tubular Bells `b1.dx7` (31)
- Tube Rise `b1.dx7` (32)
- Gong `rom2a.dx7` (26)
- Best Bass `djw001.dx7` (15)
- Plucked Bass `b2.dx7` (32)
- Jarre 1 `dxoc13.dx7` (07)

Exemples sonores

- Take Off `rom1a.dx7` (32)
- A Monster ! `djw001.dx7` (20)
- Rasta Buzzz `djw001.dx7` (25)
- Space Show `djw001.dx7` (31)
- Airy `djw001.dx7` (23)

Bilan

- Avantages :
  - Efficacité (sons complexes avec peu d'oscillateurs)
  - Notation abstraite et concise
  - $\Rightarrow$ contrôle du son avec peu de paramètres
  - Sons inouïs et souvent très beaux
  - $\Rightarrow$ création : exploration de timbres nouveaux en jouant avec le hasard

Bilan

- Inconvénients
  - Sons purement synthétiques :
    pas de phase d'analyse
    $\Rightarrow$ quasi-impossible de reproduire des sons existants
  - Paramètres sonores éloignées de la perception

$\Rightarrow$ perte de maîtrise lors de l'édition des sons