Plan

Théorème

Soient n vecteurs de E, $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Si ces n vecteurs forment une base de E alors toute base de E possède n éléments.

Définition

Si E admet une base ayant n éléments, d'aprés le théorème précédent, n est le nombre commun d'éléments de toute base de E. Le nombre n est appelé la ***dimension*** de l'espace E.

Notation

$dim(E) = n$

Exemples

- $dim(M_n(R)) = n^2$.
- $dim(R) = 1$, R s'appelle une droite vectorielle.
- $dim(R^2) = 2$, R^2 s'appelle un plan vectoriel.
- $dim(R^n) = n$.

Théorème

E est un espace vectoriel de ***dimension n*** alors

- Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
- De plus si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une famille de E à ***n éléments***, les propriétés suivantes sont équivalentes
  1. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une base de E.
  2. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une famille libre de E.
  3. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une famille génératrice de E.

Remarque

Tout sous-espace vectoriel de E, E étant de dimension finie, est un sous-espace vectoriel de dimension finie. De plus, si F est un sev de E

$$\begin{aligned} dim(F) &\leq dim(E) \\ dim(F) &= dim(E) \Leftrightarrow F = E \end{aligned}$$

Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée

Soit B une base de E, $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et soit X un vecteur de E alors X s'écrit dans la base B c'est à dire :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^n / X = \lambda_1.X_1 + \lambda_2.X_2 + \cdots + \lambda_n.X_n$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ s'appelle les coordonnées du vecteur X dans la base B.
De plus X s'écrit de manière unique dans cette base.

Théorème de la base incompléte.*(admis)*

$(E, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension finie alors

- De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
- Toute famille libre de E peut être complété en une base de E.

Théorème : Formule de Grassmann

$(E, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension finie. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2)$$

idée démonstration

1. On commence par prendre une base de l'intersection $F_1 \cap F_2$
2. Cette base est une famille libre de F_1 et une famille libre de F_2, on peut donc compléter cette famille dans F_1 en une base de F_1 et dans F_2 en une base de F_2.
3. A partir de ces deux bases, on construit une base de E.
4. Il reste ensuite à compter les éléments de chaque base.

Exercices

1. Soit $E =< (2,2,1,0),(1,4,2,-1),(2,1,-1,0),(2,-5,-4,2) >$
   1. Trouver une base de E.
   2. Montrer que le vecteur $(1,-1,1,1) \in E$
2. $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur R. Montrer le résultat suivant :

   $$(V_1, V_2, \cdots V_n) estunefamillelibredeE \Rightarrow (V_1, V_1 + V_2, \cdots V_1 + V_2 + \cdots + V_n) estaussiunefamillelibredeE.$$

3. E est un espace vectoriel et F et G sont deux sous-espaces de E. Montrer :

   $$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$$