Plan

Plan

Groupe commutatif

Soit $*$ une loi de composition interne sur E, $(E, *)$ est un groupe si

- $*$ est associative

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$$

- $*$ admet un élément neutre e

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x$$

- tout élément de E admet un symétrique pour $*$

$$\forall x \in E, \exists x' \in E \text{ tq } x * x' = x' * x = e$$

- si $*$ est commutative alors le groupe est commutatif

$$\forall (x, y) \in R^2, x * y = y * x$$

Corps commutatif

$(R, +, \times)$ est un corps commutatif :

- $(R, +)$ est un groupe commutatif
- $(R^*, \times)$ est un groupe commutatif
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$(R, +)$ groupe commutatif

L'ensemble des réels muni de l'addition vérifie les propriétés énoncées plus haut, de plus :

- l'élément neutre de $+$ dans R est 0
- le symétrique de x réel pour la loi $+$ est son opposé $-x$

$(R^*, \times)$ groupe commutatif

L'ensemble des réels muni de la multiplication vérifie aussi les bonnes propriétés et :

- l'élément neutre de $\times$ dans R^* est 1
- le symétrique de x réel pour la loi $\times$ est son inverse $\frac{1}{x}$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition

$$\forall (x, y, z) \in R^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

Plan

Définition

Soit E un ensemble non vide,soit $+$ une loi de composition interne sur E et soit $\cdot$ une loi de composition externe définie de $R \times E$ dans E
$(E, +, \cdot)$ a une structure d'espace vectoriel sur R si

- (E,+) est un groupe commutatif .
- $(E, \cdot)$ vérifie les 4 propriétés décrites ci-aprés

Les notations utilisées pour les éléments remarquables de $(E, +)$ sont les suivantes

- l'élément neutre de E pour la loi $+$ est noté O_E
- l'élément symétrique de x, $x \in E$ pour la loi $+$ est noté $-x$

Les 4 propriétés de la loi externe

$$\forall (\alpha, \beta) \in R^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \quad (1)$$

$$\forall \alpha \in R, \forall (x, y) \in E^2, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \quad (2)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in R^2, \forall x \in E, (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \quad (3)$$

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x \quad (4)$$

Quelques exemples

Les structures présentées ci-dessous sont des espaces vectoriels sur R

- $(R^2, +, \cdot)$
- $(R^n, +, \cdot)$
- $(M_n(R), +, \cdot)$