Ce cours est ouvert à la consultation mais ne doit pas être imprimé pour des raisons d'économie de papier

2

CHAPITRE 3

ENTIERS NATURELS ET ARITHMETIQUE

83

I ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

Définition:

L'ensemble des entiers naturels est un ensemble totalement ordonné (≤) , non vide, qui de plus vérifie les propriétés suivantes:

1.Toute partie non vide de N admet un plus petit élément.

2.Toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.

3.N n'admet pas de plus grand élément.

84

Les opérations dans N

*Nous connaissons deux lois de composition interne dans N, l'***addition** *et la* **multiplication**.

L'addition et la multiplication sont **commutatives, associatives.**

L'addition admet un **élément neutre 0.**

La multiplication admet un **élément neutre 1.**

La multiplication est **distributive par rapport à** *l'addition.*

85

II RECURRENCE

Propriété :

Soit A une partie de N contenant 0 telle que :

$\forall n \in N, n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Alors *A = N*

Dém: par l'absurde. Soit B=N \ A …

Cette propriété nous amène à présenter le raisonnement par récurrence.

86

Principe de récurrence:

Soit P(n) un prédicat défini sur N.

Si $P(n_0)$ *est une proposition vraie,* $n_0 \in N$.

Si $\forall n \geq n_0 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie*

Alors *P(n) est vraie pour tout* $n \geq n_0$

87

Exemples:

1. *Montrer :*

Pour $x \in R$, $x \neq 1$; $n \in N$

$$1+x+x^2+....+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2. *Démontrer , $n \in N$*

$$\sum_{k=1}^{k=n} kk! = (n+1)! - 1$$

88

Formule du binôme de Newton
Un peu de dénombrement (TD)

Aprés avoir défini C_n^p, nombre de parties de E à p éléments ou nombre de combinaison de n éléments pris p à p.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Montrer par récurrence sur N que $(1+x)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p x^p$

Plus généralement :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

89

On en déduit le card(P(E))

Card(P(E)) est le nombre de sous-ensembles de E.

Or C_n^p est le nombre de sous-ensembles de E ayant p éléments, lorsque E admet n éléments.

Donc $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ est le cardinal de P(E) et pour x=1

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$$

90

Définition:

Une propriété P(n) telle que :

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$, s 'appelle une **propriété héréditaire à partir de n_0.**

91

III ARITHMETIQUE DES ENTIERS
III1. Division euclidienne dans N:

Théorème:

$\forall (a, b) \in N \times N^*, \exists$ un couple unique (q, r) d'entiers naturels t.q :

$a = bq + r, 0 \leq r \angle b$

Définition:

Effectuer la **division euclidienne** *de a par b, c'est déterminer les entiers q et r .*

92

Remarque:

- **a** *est le* **dividende, b** *est le* **diviseur**
- **q** *est le* **quotient, r** *est le* **reste.**

- *Lorsque r=0, b* **divise** *a et on le note :* **b | a**
- *$(a, b) \in N \times N^*$, $b \mid a \Leftrightarrow \exists k \in N$ t.q $a = k.b$*

93

Exemples:

1. Effectuer la division euclidienne de 184 par 7.

$184 = 7 \times 26 + 2$

$q = 26$ et $r = 2$.

2. $8 \mid 184$, en effet : $184 = 8 \times 23$

$q = 23$ et $r = 0$

94

III2. PGCD de deux entiers naturels

Tout d'abord remarquons que **1 divise tout entier.**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Définition 1:

d est un **diviseur commun** *de a et b* **si** *d est à la fois un diviseur de a et de b.*

Soit E l'ensemble des diviseurs communs de a et b.

- $E \neq \emptyset$, en effet $1 \in E$.
- *De plus, a et b majorent tout élément de E*

95

Définition2:

D'après les propriétés de N, E est non vide et majoré donc admet **un plus grand élément** *appelé le* **pgcd(a, b).**

pgcd(a, b) | a et pgcd(a, b) | b et pgcd(a, b) est le plus grand entier qui vérifie cette propriété.

96

III3. Théorème de Bezout

Définition:

Les deux entiers naturels a et b sont **premiers entre eux** *si* **pgcd(a, b) = 1**, *nous pouvons alors énoncer*

Théorème de Bezout :

Les deux propositions sont équivalentes:

a et b sont premiers entre eux

$\exists (u, v) \in Z^2$ t.q $a.u+b.v = 1$

97

Démonstration d'une implication:

$\exists (u, v) \in Z^2$ t.q $a.u+b.v = 1 \Rightarrow$ *a et b sont premiers entre eux*

Soit d un diviseur commun à a et b, alors d divise a.u et b.v et aussi a.u + b.v, or a.u +b.v =1

D'où d divise 1, donc d = 1

a et b sont premiers entre eux

98

III4. Recherche pratique du pgcd

Faisons d'abord deux remarques préliminaires:

- $a = b.q$ ($b|a$) $\Rightarrow pgcd(a, b) = b$
- $a = b.q+r \Rightarrow pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$

(à démontrer)

D'où une recherche algorithmique du pgcd appelé

Algorithme d'Euclide

99

Algorithme d'Euclide

Le but est donc de rechercher le pgcd(a, b), a et b entiers naturels différents de 0.

écrivons les divisions euclidiennes successives:

$a = bq_1+r_1 \quad 0<= r_1< b$

$b = r_1q_2+r_2 \quad 0<= r_2< r_1$

$r_1 = r_2q_3+r_3 \quad 0<= r_3< r_2$

……………………..

$r_{n-1} = r_nq_{n+1}+r_{n+1} \quad 0<= r_{n+1}< r_n$

Les restes successifs forment une suite d'entiers positifs strictement décroissante,donc on parvient nécessairement à un reste nul, soit r_{n+1}.

Il suffit alors de remonter:

$pgcd(a, b) = pgcd(b, r_1) \ldots =pgcd(r_{n-1}, r_n) = r_n$

Remarque:

Dans cette présentation le nombre d'étapes est de n+1.

il est nécessairement majoré par b, donc fini!

Ecriture de l'algorithme:

fonction pgcd (a, b :entiers) : entier
var q, r :entiers
début
- $r \leftarrow b$
- tant que $r \neq 0$
- début
- $q = E(a/b)$
- $r = a - b.q$
- $a \leftarrow b$
- $b \leftarrow r$
- fin de tant que

Retourner (a)
fin

Remarque:

- Les entiers a et b sont des entiers non nuls, d'après la définition du pgcd.
- Si a et b sont tels que a<b, la première boucle de l'algorithme nous ramène à échanger a et b et dans ce cas là, on retrouve la recherche du pgcd(a, b) avec $a \geq b$.

Recherche du pgcd de 1764 et 3465

	$1= q_1$	$1= q_2$	$27= q_3$
$3465= a$	$1764= b$	$1701= r_1$	$63= r_2$
$1701= r_1$	$63= r_2$	$0= r_3$	

Pgcd(3465, 1764) = 63

III5. PPCM de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Définition 1:

$m \in N^*$ est un multiple de a $\Leftrightarrow \exists k \in N \,/\, m = k.a$

Définition 2:

$m \in N^*$ est un multiple commun à a et b

$\Leftrightarrow$ m est un multiple de a et un multiple de b

$\Leftrightarrow \exists k_1 \in N \wedge \exists k_2 \in N \,/\, m = k_1.a \wedge m = k_2.b$

Définition 3:

Considérons $M_{a\,b}$ le sous-ensemble de N^* des multiples communs à a et b. Cet ensemble est non vide puisque le produit a.b est un multiple commun donc appartient à M_{ab}.

Donc M_{ab} est une partie de N^*, non vide . Elle admet un plus petit élément

le plus petit commun multiple de a et b

Notation: ***ppcm(a, b)***

106

III6. Nombres entiers naturels premiers

Remarque:

- *Un entier naturel n non nul a au plus n diviseurs.*
- *Tout entier naturel est un diviseur de 0.*
- *1 admet un seul diviseur, lui-même.*

Définition:

Un entier naturel est premier lorsqu'il admet **exactement deux diviseurs.**

107

Remarques et exemples:

- *Tout entier strictement supérieur à 1 est donc premier lorsqu'il n'admet comme diviseurs que lui-même et 1.*
- *7 est premier puisqu'il n'admet que 2 diviseurs, lui-même et 1.*
- *12 n'est pas premier, voici l'ensemble de ses diviseurs : {1, 2, 3, 4, 6, 12}*

108

THEOREME FONDAMENTAL DE L'ARITHMETIQUE

Soit n un entier naturel différent de 0 et de 1.

Alors soit n est premier, soit n se décompose en un produit fini de nombres premiers.

En d'autres termes:

$n \in N, n \neq 0$ et $n \neq 1$

alors n est premier ou $\exists p_1, p_2, \ldots p_k$ des entiers naturels premiers tq $n = \prod_{i=1}^{i=k} p_i^{\alpha_i}$

avec $k \in N^*$ et $\alpha_i \in N^*$

109

III7. Ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs notés Z est muni de deux opérations + et $\times$ qui sont

- *Associatives*
- *Commutatives*
- *Z admet un élément neutre pour chacune (0 et 1)*
- *Tout entier relatif z admet un opposé -z*

110

III7.1. Division euclidienne dans Z

$\forall (a, b) \in Z \times Z^*$, $\exists$ un couple unique $(q, r) \in Z^2$ t.q

$a = b.q + r, \quad 0 \leq r < |b|$

q est le quotient, r est le reste .

Si r = 0, b divise a et on note **b|a.**

111

Remarque:

Les notions définis dans l 'ensemble des entiers naturels, peuvent être étendues à l 'ensemble des entiers relatifs, notamment:

- *nombres premiers entre eux*
- *théorème de Bezout*
- *pgcd*
- *ppcm*
- *nombres premiers (4 diviseurs au lieu de 2)*

III7.2. Congruences dans Z

La notion de congruence sera abordé plus largement dans le chapitre des relations. En voici simplement une définition.

Définition 1:

Soient z et z ' deux entiers relatifs, soit n∈N

z et z ' sont congrus modulo n *ou*

z est congru à z ' modulo n $\Leftrightarrow$

z-z ' est divisible par n

Autre définition et remarque:

Définition 2 et notation :

$$\forall (z, z') \in Z^2, z \equiv z' (n) \Leftrightarrow \exists k \in Z \text{ t.q } z - z' = k.n$$

Remarque:

Lorsque 0 <z '< n, l'écriture z = z ' + k.n montre que

z ' est le reste de la division euclidienne de z par l 'entier naturel n.

Remarque:

On étudiera les congruences dans le chapitre IV, notamment pour n=2 et n=3

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Déterminer le pgcd des couples d'entiers suivants :

- *a=406 et b=696*
- *a=1540 et b=693*
- *a=462 et b=264*
- *En effectuant l'algorithme d'Euclide présenté sous forme de tableau*

CHAPITRE 4

LES RELATIONS

I PRODUIT CARTESIEN

I1. Produit cartésien de deux ensembles:

Soient E et F deux ensembles donnés, le produit cartésien de E et de F (ou produit de E par F) est l'ensemble des couples (x, y) où x est élément de E et y élément de F.

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Remarques:

- ***x et y sont les composantes du couple***
- ***(x, y)=(x', y')⇔x=x' et y=y'***
- ***Lorsque E = F le produit s'appelle carré cartésien de E , noté E×E ou E²***

I2. Généralisation:

Le concept de produit cartésien peut être généralisé à un nombre fini d'ensembles.

Soient $E_1, E_2, \ldots E_n$, $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ *sera l'ensemble suivant:*

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ tels que } x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$$

Soit E, E^n *sera l'ensemble suivant:*

$$E^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ tels que } x_1 \in E, x_2 \in E, \ldots, x_n \in E\}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est appelé un n-uplet*

Le produit cartésien n'est pas commutatif.

A×B ≠ B×A

Le produit cartésien n'est pas associatif.

(A×B)×C ≠ A×(B×C)

Exemples:

- *A={x, y, z} ; B={1,2}*
- *A={x, y, z} ; B={1,2}; C={α}*

Exercices

A et B deux ensembles donnés

Montrer que :

$$A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$$

Que peut-on conclure au sujet d'ensembles A et B si:

$$(A \times B) \cap (B \times A) \neq \phi$$

II RELATIONS

II1. Relation et prédicat:

Définition 1:

Soient E et F deux ensembles et E×F leur produit cartésien.
Une relation sur E×F est un prédicat défini sur E×F .

$\forall x \in E, \forall y \in F$

x est en relation avec y par R $\Leftrightarrow xRy$

$\Leftrightarrow R(x, y)$

124

Quelques relations connues

dans R

$<\,;\,>\,;\,\leq\,;\,\geq\,;\,=\,;\,\neq\,;$

Dans Z

$\equiv; \mid ;$

Dans P(E)

$\subset$

125

II2. Relation et graphe:

Définition 2:

Le graphe de la relation R est le sous-ensemble correspondant G de E×F.

La relation R est définie à l'aide de son graphe G

$$G = \{(x, y) \in E \times F \text{ t.q } x \text{ R } y\}$$

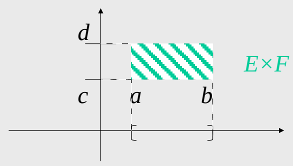
126

Exemple 1

Soit E et F deux parties de R.

E=[a, b]; F=[c, d]

Voici une **représentation cartésienne** *de E×F*



Soit G_R=E×F, comment définir cette relation à l'aide d'un prédicat?

127

Exemple 2

A={1, 2, 3, 4, 5, 6}

B={2, 6, 8, 9}

G_R={(1,2),(1,6),(1,8),(1,9),(2,2),(2,6),(2,8), (3,6),(3,9),(4,8),(6,6)}

Comment définir cette relation à l'aide d'un prédicat?

128

Exemple 3

Soit E un ensemble donné.

On appelle identité de E et on note $\mathbf{I_E}$ ***ou*** $\mathbf{1_E}$ *la relation binaire définie sur E par:*

$$\forall (x, y) \in E^2, x\, 1_E\, y \Leftrightarrow x = y$$

Comment définir cette relation à l'aide de son graphe, noté Δ_E *?*

129

On en conclut le résultat suivant

Soit R une relation définie sur $E \times F$,
E et F deux ensembles donnés.
Soit G_R son graphe;

$$\forall (x, y) \in E \times F, x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G_R$$

Remarque et définition:

- *E et F sont deux ensembles donnés.*

L'ensemble des relations définies sur E×F est l'ensemble des parties de E×F , soit P(E×F)

- *Soit E un ensemble.*

Une ***relation binaire définie sur E*** *est une relation définie sur E×E*

III PROPRIETES DES RELATIONS

R est une relation définie sur $E \times E$ ou ***relation binaire définie sur E***

1. ***R est réflexive*** $\quad \forall x \in E, x R x$
2. ***R est antiréflexive*** $\quad \forall x \in E, x\overline{R}x$

3. R est symétrique

$$\forall (x, y) \in E^2, xRy \Rightarrow yRx$$

remarque:

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, xRy \Leftrightarrow yRx$$

4. R est antisymétrique

$$\forall (x, y) \in E^2, [xRy \wedge yRx] \Rightarrow x = y$$

5. R est transitive

$$\forall (x, y, z) \in E^3, [xRy \wedge yRz] \Rightarrow xRz$$

6. R est circulaire

$$\forall (x, y, z) \in E^3, [xRy \wedge yRz] \Rightarrow zRx$$

EXERCICES

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

1. *La relation divise sur Z est réflexive.*
2. *La relation < sur R est antiréflexive.*
3. *Soit la relation binaire S définie sur Z par:*
   $\forall (x,y) \in Z^2, xSy \Leftrightarrow x + y$ *est impair*
   Montrer que S est antiréflexive

CHAPITRE V

RELATIONS D’ EQUIVALENCE
RELATIONS D’ORDRE
APPLICATIONS

136

I RELATIONS D’ EQUIVALENCE

I.1 Définition et exemples:

Définition 1:

Une relation R définie sur E est une relation d’équivalence sur E **si** *R est à la fois* **réflexive, symétrique** *et* **transitive.**

137

I.2 Classes d’équivalence modulo R, Ensemble quotient:

Définition 2:

R est une relation d’équivalence définie sur E, et x∈E. On appelle **classe d’équivalence de x** *(modulo R) et on note* $\overline{x}$ *l’ensemble suivant:*

$$\overline{x} = \{y \in \boldsymbol{E} \text{ tq } \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{R} \ \boldsymbol{y}\}$$

138

EXEMPLES:

1. *Sur n’importe quel ensemble E, la relation d’ égalité , 1_E est une relation d’équivalence et* $\overline{x} = \{x\}$
2. *Soit n ∈ N*, la congruence* **modulo n** *est une relation d’équivalence : Cas particulier la congruence modulo 2.*
3. *Etude de la relation définie sur R par :*

$$\forall (x, y) \in R^2, \text{x R y} \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

139

Théorème 1:

Soit R une relation d’équivalence définie sur E.
On a:

$$\forall (x, y) \in E^2, \bullet\ \overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{xRy}$$
$$\bullet\ \overline{x} \neq \overline{y} \Rightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \phi$$

Preuve:

1. *x R y et soit t* $\in \overline{x} \Rightarrow t \in \overline{y}$ *et réciproquement.*
2. *par contraposition.*

140

Théorème 2:

R est une relation d’équivalence définie sur E, alors:

1. $\forall x \in E, x \in \overline{x}$ d'où $\overline{x} \neq \phi$
2. *Une classe d'équivalence est un élément de P(E).*

141

Remarques:

1. Deux classes d'équivalence sont :

Soit **disjointes** $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$

Soit **confondues** $\overline{x} = \overline{y}$

2. D'après le théorème précédent, $\overline{x} \neq \varnothing$

142

Définition 3:

L'ensemble des classes d'équivalence modulo R est appelé **ensemble quotient de E par R** et est noté E/R

$$E/R = \{c \in P(E)\ tq\ \exists\, x \in E\ tq\ \overline{x} = c\}$$

Remarque: $E/R \subset P(E) \Leftrightarrow E/R \in P(P(E))$

143

EXEMPLES :

- Déterminer l'ensemble quotient suivant:

$$E/I_E$$

$$E/I_E = \{\{x\}, x \in E\}$$

- Considérons à nouveau la congruence modulo 2.

Alors $\mathbb{Z}/R_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

144

EXERCICES

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

$\forall (x,y) \in R^2, xTy \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$

Montrer que

a)T est une relation d'équivalence

b)Quels sont ces classes d'équivalence?

145

II RELATIONS D'ORDRE SUR E

II1. Définition, exemples:

Définition:

Soit R une relation binaire définie sur E.

On dit que R est une relation d'ordre sur E **si** R est **réflexive, antisymétrique, transitive.**

146

Notation:

Une relation d'ordre sera notée par un **signe spécifique** soit par: « $\prec$ »

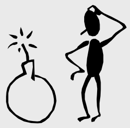
On pourra lire: « $x \prec y$ »

« x est dominé par y »

147

Exemple

Sur N, Z, Q, R les relations classiques, $\leq$, $\geq$ sont des relations d 'ordre .



Les relations $<$ et $>$ ne sont pas des relations d 'ordre car elles ne sont pas réflexives.

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Soit E un ensemble donné et soit P(E) . La relation définie sur P(E) par:

$$\forall (A,B) \in (P(E))^2, A \; R \; B \Leftrightarrow A \subset B$$

Montrer que l'inclusion est une relation d 'ordre sur E.

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Considérons la relation « divise » sur N

$$\forall (a,b) \in N^2, a \,|\, b \Leftrightarrow (\exists k \in N \text{ tq } b = ka)$$

Cette relation $|$ est une relation d 'ordre sur N.

II2. Ordre total, ordre partiel

Définition:

Une relation d 'ordre, $\prec$ sur un ensemble E est appelée **ordre total** *si pour tous éléments x et y de E, x et y sont comparables.*

$$\forall (x,y) \in E^2, x \prec y \vee y \prec x$$

Les relations précédemment évoquées $\leq$ ou $\geq$ sont des ordres totaux.

Définition:

Une relation, d 'ordre $\prec$ sur un ensemble E qui n 'est pas une relation d 'ordre total est une relation **d 'ordre partiel .**

En prenant la négation de la proposition précédente:

$$\exists (x,y) \in E^2 \text{ tq } \overline{x \prec y} \wedge \overline{y \prec x}$$

x et y sont alors 2 éléments non comparables.

Exemple

1. *Considérons la structure ordonnée (P(E), $\subset$) où E est un ensemble* **non vide et possède au moins 2 éléments.** *Alors*

$$\exists (\{e_1\},\{e_2\}) \in P(E)^2 \text{ tq}$$
$$\{e_1\} \not\subset \{e_2\} \wedge \{e_2\} \not\subset \{e_1\}$$

II3. Eléments remarquables d 'une partie d 'un ensemble ordonné.

II3.1 Majorants, minorants d 'une partie X de $(E,\prec)$

Définition:

$(E,\prec)$ *est une structure ordonnée, X est une partie de E, a un élément de E est un* **majorant de X si**

$$\forall x \in X,\ x \prec a$$

Définition :

$(E,\prec)$ est une structure ordonnée, X est une partie de E
b un élément de E est un minorant ***de X*** si

$$\forall x \in X,\ b \prec x$$

Exemple 1

Soient $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ ***et*** $A=\{e_1,e_2\}$

$P(A)=\{\phi,\{e_1\},\{e_2\},A\}$

On munit P(E) de la relation $\subset$ ***.***

(P(E), $\subset$ ***) est un ensemble ordonné.***

ϕ ***est un minorant de P(A).***

A est un majorant de P(A).

E est un majorant de P(A)

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Soit $(\mathbb{R},\leq)$ et $B=\{1/n,\ n\in \mathbb{N}^*\}$

0 est un minorant de B.

1 est un majorant de B.

en effet $\forall\, x\in B\quad 0\leq x\leq 1$

II3.2 Plus grand élément, plus petit élément d 'un ensemble (ou d 'une partie) ordonné(e).

Soit E un ensemble ordonné par $\prec$ *et soit X une partie de E.*

Définition :

M $\in$*E, M est* **le plus grand élément de X si :**

$$\mathbf{M \in X \ \wedge \forall\, x \in X,\ x \prec M}$$

En d'autres termes:

M est un élément de X *et* **M est un majorant de X.**

Exemples:

On reprend les exemples précédents.

A-t-on un plus grand élément?

Remarque et notation :

Par définition du plus grand élément, lorsqu'il existe celui-ci est unique et se note **max(X) (maximum)**

Preuve: par l'absurde, soient $\mathbf{M_1}$ **et** $\mathbf{M_2}$ **etc…**

Définition :

Soit E un ensemble ordonné par $\prec$ et soit X une partie de E.

m $\in$E, m est ***le plus petit élément de X si :***

$$m \in X \wedge \forall x \in X,\ m \prec x$$

En d'autres termes:

m est un élément de X *et* ***m est un minorant de X.***

Remarque et notation:

Par définition du plus petit élément, lorsqu'il existe celui-ci est unique et se note ***min(X) (minimum)***

Preuve: par l'absurde, soient m_1 et m_2 etc…

Exercices:

1. $(R, \preceq)$ $X_1 = [a, b]$; $X_2 =]a, b[$
2. $(N, \preceq)$ $X = N$
3. $(R, \preceq)$ $X = \{(-1)^k, k \in Z\}$
4. Soit $(X, |)$ où $X = \{2,4,6,8,10,28,50\}$

Déterminer min(X), max(X),s'ils existent

II3.3 Borne supérieure d'une partie majorée. Borne inférieure d'une partie minorée.

Définitions et notations :

Soit E un ensemble ordonné par $\prec$ et soit X une partie de E.

1. Major(X) = $\{a \in E \text{ tq } \forall x \in X,\ x \prec a\}$

Major(X) est l'ensemble des majorants de X. De plus X est une partie ***majorée de E si Major(X) $\neq \varnothing$***

2.

Minor(X) = $\{b \in E \text{ tq } \forall x \in X,\ b \prec x\}$

Minor(X) est l'ensemble des minorants de X.

De plus

X est une partie ***minorée de E si Minor(X) $\neq \varnothing$***

Définitions :

1. *Soit X une partie majorée de (E, $\prec$). Considérons l'ensemble des majorants de X. Si* ***Major(X) admet un plus petit élément*** *alors il s'appelle* ***la borne supérieure de X et il est unique.***

Notation: $Sup_E(X) = \min(Major(X))$

$Sup_E(X)$ est le plus petit des majorants de X.

2.

Soit X une partie minorée de $(E, \prec)$*. Considérons l'ensemble des minorants de X. Si* ***Minor(X) admet un plus grand élément*** *alors il s'appelle* ***la borne inférieure de X et il est unique.***

Notation: $\mathbf{Inf_E(X) = max(Minor(X))}$

$\mathbf{Inf_E(X)}$ ***est le plus grand des minorants de X.***

166

Proposition 1:

Soit X une partie de $(E, \prec)$*.Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *X admet un plus grand élément.*
2. *X admet une borne supérieure et* $Sup_E(X) \in X$

Preuve:

167

Proposition 2:

Soit X une partie de $(E, \prec)$*.Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *X admet un plus petit élément.*
2. *X admet une borne inférieure et* $Inf_E(X) \in X$

Preuve:

168

Exemples 1 et 2

1. *Dans* $(R, \leq)$

$inf_R([a,b]);\ inf_R(]a,b[)$

$sup_R([a,b]);\ sup_R(]a,b[)$

2. *Dans* $(P(E), \subset)$

Que peut-on dire de $sup_{P(E)}(\{X, Y\})$?

$inf_{P(E)}(\{X, Y\})$?

Où X et Y sont éléments de P(E).

169

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

1. *Dans* $(R, \leq)$

Soit $X = \{1/n + (-1)^n, n \in N^*\}$

$sup_R(X)$ *et* $inf_R(X)$

170

Diagramme de Hasse

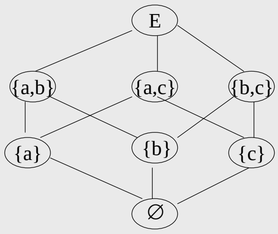
Le diagramme de Hasse de $(E, \prec)$ ***est une représentation graphique qui contient toutes les informations concernant la relation d'ordre représentée:*** $\forall (x, y) \in E^2$,

$x \prec y$ ***si partant du sommet x on peut atteindre le sommet y en montant le long des arêtes .***

171

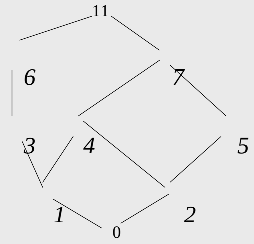
Diagramme de Hasse : $(P(E), \subset)$

$E = \{a, b, c\}$



172

Diagramme de Hasse de (E,$\prec$)



écrire le graphe de cette relation.

173

- *Y-a-t-il un plus petit élément dans E?*
- *Y-a-t-il un plus grand élément dans E?*
- *Soit* $X = \{1,2,4,5,7\}$ *, déterminer s'ils existent*

➢ *min(X),max(X)*

➢ *Major(X),Minor(X)*

➢ $inf_E(X)$*,*$sup_E(X)$

174

Exercice:

- *Enumérer les éléments de D*70.*
- *Faire le diagramme de Hasse de (* D^*_{70}*, |) .*
- *Quel est le minimum de (* D^*_{70}*, |) ?*
- *Quel est le maximum de (* D^*_{70}*, |) ?*
- *Soit X={5,7,35}*

Déterminer s'ils existent

➢ *Min(X), max(X)*

➢ *Major(X), Minor(X) puis* $inf_E(X)$*,* $sup_E(X)$

175