Propriétés

$$\forall x \in E, 0 \cdot x = O_E \tag{5}$$

$$\forall \lambda \in R, \lambda \cdot 0_E = O_E \tag{6}$$

$$\forall \lambda \in R, \forall x \in E, \lambda \cdot x = O_E \Rightarrow \lambda = 0 ou x = O_E \tag{7}$$

$$\forall \lambda \in R, \forall x \in E, \lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) \tag{8}$$

Plan

Définitions

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur R . Soit F une partie de E ($F \subset E$), F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable pour $+$
- F est stable pour .

stabilité du $+$

$\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$

stabilité du $\cdot$

$\forall \alpha \in R, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$

La stabilité du $+$ et du $\cdot$ est équivalente à la stabilité d'une combinaison linéaire

$\forall (\alpha, \beta) \in R^2, \forall (x, y) \in F^2, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$

Condition nécessaire pour que F partie de E soit un sous-espace vectoriel de E

F est un sous-espace vectoriel de E $\Rightarrow O_E \in F$

Quelques sous-espaces vectoriels

1. $\{O_{R^n}\}$ et R^n sont des sous-espaces vectoriels de R^n
2. $F_1 = \{(x,y,z) \in R^3 / x = y\}$ est un sous-espace vectoriel de R^3
3. $F_2 = \{(x,y,z) \in R^3 / x = y \text{ et } y = z\}$ est un sous-espace vectoriel de R^3. C'est en fait l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de R^3. $F_2 = F_1 \cap \{(x,y,z) \in R^3 / y = z\}$

Ces sous-ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels?

1. $X_1 = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y = 0\}$
2. $X_2 = \{(x,y) \in R^2 / 2x + y = 3\}$
3. $X_3 = \{(x,y) \in R^2 / x + y = 0 \text{ ou } 2x + y = 0\}$. Ce sous-ensemble de R^2 est en fait une réunion de sous-espaces vectoriels et n'est pas un sous-espace vectoriel de R^2.
   $X_3 = \{(x,y) \in R^2 / x + y = 0\} \cup \{(x,y) \in R^2 / 2x + y = 0\}$

Intersection de deux sous-espaces de E

Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur R et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

- $O_E \in F_1 \text{ et } O_E \in F_2 \Rightarrow O_E \in F_1 \cap F_2$
- $\forall(\alpha,\beta) \in R^2, \forall(x,y) \in (F_1 \cap F_2)^2, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_1 \text{ et } \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_2 \Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_1 \cap F_2$

Conclusion

- $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$
- $F_1 \cap F_2$ est stable pour $+$ et $\cdot$

Donc $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel

Démontrons le sur l'exemple précédent $X_3 = \{(x,y) \in R^2 / x + y = 0 \text{ ou } 2x + y = 0\}$
Il n'y a pas stabilité du $+$, en effet $(1,-1) \in X_3$ et $(\frac{-1}{2}, 1) \in X_3$ mais $(\frac{1}{2}, 0) \notin X_3$ car ce vecteur ne vérifie aucune des deux équations.

théorème

Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur R et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E alors
$F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E $\Leftrightarrow F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$

Somme de sous-espaces vectoriels

Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur R et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, alors la somme des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 noté $F_1 + F_2$ est le sous-espace vectoriel suivant de E :

$$F_1 + F_2 = \{x \in E / \exists x_1 \in F_1 \text{ et } \exists x_2 \in F_2 \text{ avec } x = x_1 + x_2\}$$

Montrons que $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

- $O_E = O_E + O_E$ de plus $O_E \in F_1 \text{ et } O_E \in F_2 \Rightarrow O_E \in F_1 + F_2$
- $$\begin{aligned} \forall(\alpha,\beta) \in R^2, \forall(x,y) \in (F_1 + F_2)^2, \alpha \cdot x + \beta \cdot y &= \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) \\ &= (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) \\ &\Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_1 + F_2 \end{aligned}$$
- $F_1 + F_2$ est donc non vide et stable pour une combinaison linéaire de vecteurs.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Considérons toujours le même espace vectoriel E, mais cette fois F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.
Cela signifie que tout élément x de E se décompose sous la forme : $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.
Si de plus cette décomposition est unique, alors les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont supplémentaires.

CNS pour que F_1 et F_2 soient supplémentaires : $E = F_1 \oplus F_2$

F_1 et F_2 sont supplémentaires $\Leftrightarrow$

- $E = F_1 + F_2$
- $F_1 \cap F_2 = \{O_E\}$