Plan

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur R et est défini pour tout le chapître.

Plan

Combinaison linéaire de vecteurs.

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n vecteurs de E et soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ n réels. Le vecteur construit à partir de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et égal à

$$X = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$$

X est une combinaison linéaire des $x_1, x_2, \cdots, x_n$

Théorème

L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \cdots, x_n$

Notation

$< x_1, x_2, \cdots, x_n >$ est le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \cdots, x_n$

Famille génératrice de E

Soient ces n veceturs de E, $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Si tous vecteurs de E est combinaison linéaire de ces n vecteurs alors $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ forme une famille génératrice de E.

$$\forall z \in E, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^n / z = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$$

Exemples

- Prenons $E = M_n(R), < (\varepsilon_{ij}) >, i > j, 1 \leq i, j \leq n$ est le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures strictes.
- Prenons $(R^2, +, \cdot)$ $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de R^2.
- $((1,2),(2,1),(1,0))$ est une famille génératrice de R^2.

Famille libre, famille liée

Soient n vecteurs de E, $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Ces n vecteurs forment une famille libre de E ou sont linéairement indépendants si

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^n \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n = O_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Une famille est liée ou linéairement dépendante si elle est non libre.

Exemples

- Prenons $E = M_n(R)$, $(\varepsilon_{ij}), i < j, 1 \leq i, j \leq n$ est une famille libre de $M_n(R)$.
- Prenons $(R^2, +, \cdot)$ $((1,0),(0,1))$ est une famille libre de R^2.
- $((1,2),(2,1),(1,0))$ est une famille liée de R^2.

Proposition

Soient n vecteurs de E, $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Ces n vecteurs forment une famille liée de E si et seulement si

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^n \textit{ non tous nuls tels que}$$
$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n = O_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Que signifie non tous nuls?

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ ne peuvent pas être nuls tous à la fois, mais dans la combinaison linéaire précédente certains peuvent être nuls! On peut alors juste dire

$$\exists\lambda_i \in R \textit{ tel que } \lambda_i \neq 0$$

$\exists$ signifie "il existe au moins" un i tel que...

Propriétés

- Une famille à 1 élément (x) est libre $\Leftrightarrow x \neq O_E$
- Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
- Toute *sous-famille* d'une famille libre est libre
- Toute *sur-famille* d'une famille génératrice est génératrice

Plan

Définition

Une base de l'espace vectoriel E est une famille de E à la fois libre et génératrice. Cette base est aussi une famille libre *maximale* et une famille génératrice *minimale*.

Exemples

- Prenons $E = M_n(R)$, (ε_{ij}), $\forall(i,j)$, $1 \leq i, j \leq n$ est une base de $M_n(R)$ Cette base s'appelle la base canonique de $M_n(R)$.
- Prenons $(R^2, +, \cdot)$ $((1,0),(0,1))$ est une base de R^2, c'est aussi la base canonique de R^2.
- $((1,2,3),(2,1,0),(0,0,1))$ est une base de R^3.