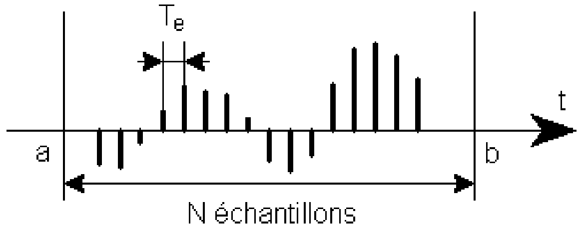
TP MATLAB
Transformée de FOURIER

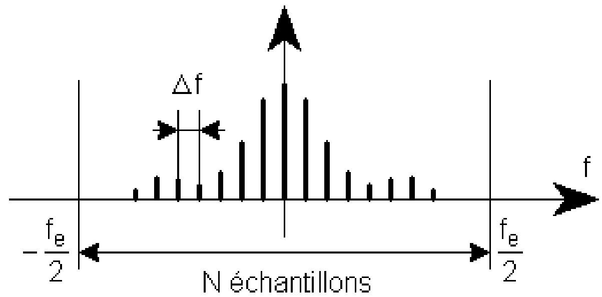
I. La fonction Transformée de FOURIER discrète

Description

On considère un signal analogique $x_a(t)$, fonction continue de la variable temps. Pour constituer le signal discret x(n) de N valeurs, on "échantillonne" ce signal $x_a(t)$ avec une période T_e, sur l'intervalle [a, b[. En pratique, cela revient à constituer x(n) selon :

$$x(n) = x_a(\,(n-1).T_e + a\,) \quad \text{avec } T_e = (b-a)\,/\,N \quad \text{et} \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$





T_e est la **période d'échantillonnage**
$f_e = 1/T_e$ est la **fréquence d'échantillonnage**

La fonction Matlab `X=tfour(x)` donne la transformée de FOURIER discrète de ce signal discret x(n) dans un vecteur X de N valeurs. Ce vecteur X correspond à l'échantillonnage de la fonction transformée de FOURIER de $x_a(t)$. Les fréquences représentées sont les fréquences de $-f_e/2$ à $f_e/2$ (ou à peu près). L'écart, en fréquence, entre deux échantillons successifs dans X est donc de :

$$\Delta f = f_e/N = 1\,/(T_e\,.\,N) = 1/(b-a) \text{ Hertz} \quad (\text{ ou } s^{-1}\text{ }).$$

La fonction Matlab `x=tfourinv(X)` permet de calculer la transformée de FOURIER inverse de la fonction discrétisée X et donc de retrouver x.

Application

On choisit N = 32768 échantillons, a = -5 secondes et b = 5 secondes.
Avec ces paramètres, on échantillonne les 8 fonctions suivantes :

$x_0(t) = C$

$x_1(t) = \cos(2.\pi.f_0.t)$

$x_2(t) = \sin(2.\pi.f_0.t)$

$x_3(t) = \exp(-\beta.t).U(t)$

$x_4(t) = \delta(t-\Delta t)$

$x_5(t) = \exp(i.2.\pi.f_0.t)$

$x_6(t) = \text{rect}_\tau(t)$

$x_7(t) = \exp(-\pi.t^2)$

pour différentes valeurs de C, f_0, β, τ et Δt.

Questions :

- Quelle est la période d'échantillonnage ?
- Quelle est la fréquence d'échantillonnage ?
- Affichez ces fonctions ainsi que leurs spectres (utiliser les spectres amplitude / phase ou partie réelle / imaginaire selon les plus représentatifs).
- Pour les fonctions périodiques, on choisira une fréquence f_0 qui donne un nombre entier de périodes entre a et b.
- Que se passe-t-il lorsque la fréquence f_0 choisie donne un nombre non-entier de périodes entre a et b ? Donner un exemple et expliquer.
- Vérifiez que la fonction `tfourinv(X)` permet bien de récupérer le signal d'origine.
- Essayez de construire une version périodique de $x_6(t)$. Comment se transforme son spectre ? Expliquez.
- La fonction $x_7(t)$ est une gaussienne. Calculez sa transformée de Fourier théorique et vérifiez sur les graphiques, sachant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

ATTENTION :
*Les graphiques "temporels" des fonctions devront avoir **l'échelle des abscisses en secondes**, les graphiques "fréquentiels" devront avoir **l'échelle des abscisses en Hertz**. On repérera donc les pas de discrétisation temporelle et fréquentielle, la fréquence nulle, les fréquences extrêmes représentées … Utilisez pour cela, les fonctions Matlab plot, figure, hold on, hold off, axis … pour les affichages, et real, imag, abs et angle pour avoir la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument des fonctions complexes.*

II. Echantillonnage et aliasing

On considère la famille de fonctions g_f , de paramètre f, définies par :

$$g_f(t) = \sin(2\pi.f.t) + 2.\sin(2\pi.(f + \Delta f).t) + 3.\sin(2\pi.(f + 2.\Delta f).t) \quad \text{avec } \Delta f = 40$$

Questions :

- Quels sont les spectres théoriques des fonctions g_{800} et g_{2400} ?
- Reprenez les paramètres précédents (soit N = 32768 échantillons, a= -5 secondes et b=5 secondes) et échantillonnez les deux fonctions précédentes. Expliquez les différences observées par rapport aux versions théoriques.
- Pour quelles valeurs positives de la fréquence f obtient-on (ou plutôt a-t-on l'impression d'obtenir) un simple sinus ? Quelles sont les valeurs possibles de la fréquence de ce simple sinus ? Quelle est son amplitude ? Expliquez.

III. Transmission par modulation d'amplitude

Description

La transmission d'informations à travers un canal unique (câbles, fibres optiques, air, espace...) nécessite bien souvent le codage et l'adaptation de ces informations au canal de transmission (utilisation des fréquences qui se propagent ...).
Le problème est le suivant : on veut transmettre simultanément plusieurs signaux $s_i(t)$ vers un destinataire distant à travers un seul canal (de l'air par exemple). Le signal reçu c(t) contient tous les $s_i(t)$ et on veut pouvoir extraire indifféremment chacun de ces signaux de c(t).
La modulation d'amplitude est une des façons les plus simples pour résoudre ce problème : on se sert des $s_i(t)$ pour moduler l'amplitude de signaux sinusoïdaux de fréquences f_i . Chaque émetteur construit son propre signal modulé. Le signal résultat transmis et donc reçu est alors :

$$c(t) = \sum_i s_i(t).\cos(2\pi f_i t)$$

Le signal c(t) doit ensuite être « démodulé » au point de réception pour extraire chacun des signaux $s_i(t)$. On construit pour cela de signal $d_i(t)$ en remultipliant c(t) par $\cos(2\pi.f_i.t)$ pour reconstruire $s_i(t)$.

- Que donne le calcul théorique pour le spectre du signal modulé c(t) et le spectre du signal démodulé $d_i(t)$?
- Quel est l'effet de la modulation d'un cosinus par un signal $s_i(t)$?
- Quels sont les critères de choix des f_i ?
- Quels traitements faut-il ensuite appliquer à $d_i(t)$ pour retrouver $s_i(t)$?

Application

En reprenant les paramètres précédents (N = 32768 échantillons, a= -5 secondes et b=5 secondes), réalisez les opérations de modulation et démodulation avec Matlab avec différentes valeurs de porteuses f_i et pour les signaux suivants :

$s_1(t)= \sum_{n=1}^{5} n.\cos(2\pi.20.n.t)$ $s_2(t)= \sum_{n=1}^{5} (6-n).\cos(2\pi.20.n.t)$