Matrice changement de base, application linéaire, diagonalisation de matrice

Matrice de passage

On considère la base canonique dans $\mathbb{R}^3$ $e := \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

Considérons une autre base par exemple $B := \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (4, 3, -2), u_3 = (2, -3, 2)\}$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ exprimé dans la base canonique e. On cherche à connaître ses coordonnées $x' = (x_1', x_2', x_3')$ dans la base B. On a l'équation :

$$x_1' * u_1 + x_2' * u_2 + x_3' * u_3 = x \quad (1)$$

équivalente à (il suffit de faire un développement pour le montrer) :

$$Px' = x \quad (2)$$

avec P la matrice constitué en colonne des vecteurs de la base B.

$P =$

1	4	2
1	3	-3
1	-2	2

qu'on appel matrice de passage de la base de la base B à e. (souvent formulé dans le sens inverse dans les cours). De même qu'on a :

$$x' = P^{-1}x \quad (3)$$

avec p^{-1} matrice de passage de e à B.

Matrice d'application linéaire exprimé dans une nouvelle base

Def application linéaire : $f : E \to F$, E muni d'une base B et F muni d'une base B' et tq $f(x) = Ax$ avec $A \in M^{dim(F) * dim(E)}$. On note $Mat(f)_{B,B'} = A$, traduit par Aest la matrice de l'application linéaire f entre les sous espace vectoriels E et F respectivement muni des bases B et B'.

Soit l'application linéaire $f := \{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x) = Ax, A \in M_{3*3}\}$, $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique e. On note $Mat_{e,e}(f) = A$ la matrice définissant f dans la base canonique e.

On veut déterminer $Mat_{B,B}(f)$ avec $B := \{u_1 = (1, 1, 1),\ u_2 = (4, 3, -2),\ u_3 = (2, -3, 2)\}$, soit donc la matrice définissant f dans la base B. On note x_B x exprimé dans la base B.

On a pour f muni de $Mat_{e,e}(f) = A$:

$$f(x) = Ax = APx_B$$

car on a $Px_B = x$ cf (2). On a donc $Mat_{B,e}(f) = AP$et on peut écrire $f(x_B) = APx_P$pour f muni de $Mat_{B,e}(f)$.

De plus on a toujour pour f muni de $Mat_{B,e}(f)$:

$$f(x_B)_B = P^{-1}APx_B$$

car on a $x_B = P^{-1}x$ cf (3). Ainsi on peut écrire $Mat_{B,B}(f) = P^{-1}AP$. (4)

Matrice diagonalisable

Def : On dit que v est un vecteur propre de A si on a $Av = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (A est donc forcément carré)
Prop : Une base de vecteur propre détermine un matrice diagonale constituée des valeurs propres associées.

Preuve de la prop :
Soit ma base de vecteurs propres $B := (v_1, ..., v_p)$ de A déterminant une matrice de passage P. On a donc comme matrice de f dans cette base $Mat_{B,B}(f) = P^{-1}AP$ qu'on notera D cf (4).

On a donc :

$$A = PDP^{-1}$$

Soit v_1 notre premier vecteur propre. On a :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$PDP^{-1}v_1 = \lambda_1 v_1$$

D'après (3), $P^{-1}v_1$ est l'expression de $v_1$dans la base B at vaut donc logiquement $(1,\ 0,\ ...,\ 0)$. On a donc :

$$PD\ (1,\ 0,\ ...,\ 0) = \lambda_1 v_1$$

si on développe on a :

$$P(d_{1,1},\ d_{2,1},\ ...,\ d_{p,1}) = \lambda_1 v_1$$

or P est constitué en colonne par $(v_1,\ v_2,\ ...,\ v_p)$. Donc on a :

$$v_1 d_{1,1} + v_2 d_{2,1} + ... + v_p d_{p,1} = \lambda_1 v_1$$

Ce qui implique par indépendance des vecteurs $(v_1,\ v_2,\ ...,\ v_p)$ que :

$$d_{1,1} = \lambda_1 \text{ et } d_{2,1} = ... = d_{p,1} = 0$$

En généralisant ce cas on aboutit au fait que D est bien une matrice diagonale ayant pour valeurs les valeurs propres associés aux vecteurs propre de la base B.