

L2 STUE : Mathématiques 4

TD 4

Intégrales curvilignes : suite

Exercice 1. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le chemin défini en coordonnées polaires par $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$.

1. Écrire $\gamma(t)$ en coordonnées cartésiennes.
2. Calculer $\|\gamma'(t)\|$ et en déduire une formule pour la longueur du chemin γ .
3. Appliquer la formule précédente au cas $\theta(t) = t$ et $r(t) = \alpha t$ pour $\alpha > 0$, et pour $t \in [0, T]$.
Esquisser la courbe que ces coordonnées polaires paramètrent.

Exercice 2. Dans une région montagneuse, on modélise la température souterraine $T(x)$ en fonction de la profondeur x selon la loi empirique :

$$T(x) = T_0 + \alpha x,$$

où $T_0 = 15^\circ\text{C}$ dénote la température à la surface et $\alpha = 0.03^\circ\text{C/m}$ est le gradient géothermique moyen. Un filon minéral suit un chemin souterrain modélisé par $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (10t, 5t^2)$ avec $t \in [0, 2]$, où x est la profondeur en mètres et y est la position horizontale en mètres.

Calculer la température moyenne rencontrée le long de ce filon.

Circulation de champ de vecteurs

Exercice 3. Soit $X(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ un champ de vecteurs défini pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

1. Calculer la circulation de X le long du cercle centré en l'origine et de rayon $r > 0$. En déduire qu'il n'est pas conservatif.
2. Calculer la circulation de X le long du cercle centré en $(2, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 4. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 et \vec{F} le champ de vecteur

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + z)\vec{i} - 3xy\vec{j} + x^2\vec{k}.$$

Calculer sa circulation entre le point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point P de coordonnées $(1, 2, -1)$ le long des chemins suivants :

1. $\gamma(t) = (t^2, 2t, -t)$.
2. Le segment de droite $[O, P]$.

Que remarquez-vous ? Proposer une explication.

Exercice 5. Calculer $\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle$ dans les cas suivants :

1. γ parcourt le bord du carré $[-1, 1]^2$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (-y, x)$.
2. γ parcourt le bord du carré $[-1, 1]^2$ dans le sens horaire et $X(x, y) = (x - y, x + y)$.
3. γ parcourt le bord de $[0, \pi/2]^2$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$.
4. γ parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon $r > 0$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (xy^2, -x^2y)$.

5. γ parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon $r > 0$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (xy, xy)$.
6. γ parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon $r > 0$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (2y, x)$.

Exercice 6. [À faire après l'exercice 5.] Parmi les champs de vecteurs suivant, déterminer lesquels sont conservatifs et, pour ceux qui le sont, donner une fonction dont ils sont le gradient.

1. $X(x, y) = (-y, x)$, défini sur \mathbb{R}^2 .
2. $X(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$ défini sur \mathbb{R}^2 .
3. $X(x, y) = (y^2, 2xy + 2y)$ défini sur \mathbb{R}^2 .
4. $X(x, y, z) = (3x^2y + 2yz^2, x^3 + 2xz^2 - 2yz^2, 4xyz - 2y^2z)$ défini sur \mathbb{R}^3 .
5. $X(x, y, z) = (2xe^y, x^2e^y + \ln(|z|), \frac{y}{z})$ défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$.
6. $X(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^\alpha} (x, y, z)$ défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ avec $\alpha > 0$ réel.

Exercice 7. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Représenter graphiquement (et au mieux) le gradient de f .
2. Représenter sur le même dessin les lignes de niveau de f .
3. Reprendre les question précédentes avec la fonction $g(x, y) = xy$.
4. Qu'observez-vous entre les lignes de niveau et le gradient de ces fonctions ?

Exercice 8. Soit $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par $X(x, y) = (ye^{-x}, e^x)$ et soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 . On définit le champ de vecteurs $Y(x, y) = f(x) \cdot X(x, y)$.

1. Le champ X est-il conservatif ?
2. Montrer que le champ de vecteurs Y est conservatif si et seulement si $f'(x) = k(x)f(x)$ pour une fonction $k(x)$ que vous devez déterminer explicitement.
3. En déduire que pour $f(x) = \exp\left(\frac{-e^{-2x}}{2} - x\right)$ le champ de vecteurs Y est conservatif.