

L2 STUE : Mathématiques 4

TD 2

Intégrales multiples

Exercice 1. Calculer les intégrales doubles suivantes en choisissant bien l'ordre d'intégration des variables lorsque nécessaire.

1.

$$\iint_R ye^{y^2-4x} dx dy,$$

où $R = [0, 2] \times [0, \sqrt{8}]$.

2.

$$\iint_R xy \cos(x^2 y) dx dy,$$

où $R = [-2, 3] \times [-1, 1]$.

3.

$$\iiint_C xyz dx dy dz$$

où C est le cube $[0, 1]^3$.

4.

$$\int_0^1 \int_0^{z^2} \int_0^3 y \cos(z^5) dx dy dz.$$

Exercice 2. On souhaite calculer l'aire du domaine $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ et } x \geq y^2\}$.

1. Faire un dessin de A et montrer que A peut s'écrire comme une partie en tranches verticales.
2. Exprimer l'aire de A à l'aide d'une intégrale double et la calculer.

Exercice 3. On souhaite calculer les intégrales suivantes à l'aide des bons changements de variables. Commencer par esquisser les volumes décrits.

1. Soit \mathbb{D}^- le demi-disque inférieur de rayon 4 et centré en l'origine. Calculer

$$\iint_{\mathbb{D}^-} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy.$$

2. Déterminer à l'aide d'une intégrale triple le volume du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et dont la hauteur est comprise entre -1 et 1 .

Exercice 4. On modélise de manière très simple le relief du Cervin par la fonction

$$z(x, y) = 4478 - x^2 - y^2,$$

où $z(x, y)$ est l'altitude en mètres et x, y sont des coordonnées en kilomètres depuis le centre du sommet. On suppose que la base de la montagne au point de départ de l'ascension à une altitude de 3262m est un disque de 2km de rayon.

Calculer le volume de la montagne au-dessus du niveau de cette base.

Exercice 5. Une médecin analyse un scanner cérébral et identifie une tumeur de forme sphérique dont la densité cellulaire suit la distribution suivante

$$\rho(x, y, z) = 1200 \cdot e^{-0.001(x^2+y^2+z^2)},$$

où x, y, z sont les coordonnées en millimètres depuis le centre de la tumeur et $\rho(x, y, z)$ se mesure en cellules tumorales par millimètre cube. La tumeur est approximativement sphérique avec un rayon de 15mm.

Calculer le nombre de cellules tumorales à l'aide d'une intégrale triple.