# L2 STUE : Mathématiques 4

TD 1

## Rappels sur les intégrales unidimensionnelles

**Exercice 1.** *Trouver une primitive des fonctions $f(x)$ suivantes :*

1. $x^\alpha$, *pour tous* $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $(x-a)^\alpha$, *pour tous* $a$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\sin(-3x)$ *et* $\cos(2x)$
4. $\cos(x)\sin^2(x)$
5. $\sin^2(x)$
6. $e^{-2x}$
7. $a^x$ *pour tous* $a > 0$
8. $\frac{1}{x+1}$
9. $\frac{x}{x+1}$ *et* $\frac{x^2}{x+1}$
10. $\frac{\ln(x)}{x}$
11. $\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
12. $\tan(x)$
13. $\sqrt{1+2x}$
14. $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$
15. $\frac{1}{x^2}$
16. $\frac{1}{x^2+1}$
17. $\frac{1}{x^2-1}$

**Exercice 2.** *Calculer les intégrales suivantes par intégration par partie :*

1. $\int_0^{\pi/2} x\cos(3x)\,dx$
2. $\int_{-\infty}^0 e^x \sin(2x)\,dx$
3. $\int_{-1}^0 x^2 e^x\,dx$
4. $\int_0^1 \arctan(x)\,dx$
5. $\int_0^2 x\ln(x)\,dx$
6. $\int_0^1 \ln(x)\,dx$

**Exercice 3.** *Calculer les intégrales suivantes par changement de variables :*

1. $\int_0^1 \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$
3. $\int_{-3}^1 x\sqrt{x+3}\,dx$
4. $\int_0^5 \frac{1}{x^2+25}\,dx$
5. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$
6. $\int_0^{3\sqrt{2}/2} \sqrt{9-x^2}\,dx$

**Exercice 4.** *On souhaite mesurer l'érosion d'une vallée fluviale dans une chaîne de montagnes. On suppose que le taux d'érosion en centimètres par an est modélisé par une loi de puissance donnée par la fonction*

$$E(t) = \frac{10}{(t+1)^2},$$

*où $t$ est le temps en année depuis le début des mesures. Trouver une fonction qui donne le quantité totale de matériau érodé de la vallée en centimètres après $t$ années et calculer l'épaisseur érodée au cours des 20 premières années.*

**Exercice 5.** *Le taux de reproduction d'une bactérie dans une culture est donné par la fonction exponentielle*

$$r(t) = 2.25^t,$$

*où $t$ est une unité d'heures et $r(t)$ se mesure en millier de bactéries par heure. On suppose qu'au début de la culture $10'000$ bactéries sont présentes. Trouver une formule qui donne le nombre de bactéries en culture à n'importe quel temps $t > 0$ et calculer le nombre de bactéries présentes après deux heures de culture.*

**Exercice 6.** *Calculer l'aire des formes géométriques suivantes sans utiliser d'intégrale en plusieurs variables :*

1. *Le croissant borné par la parabole d'équation* $y = x(3-x)$ *et la droite d'équation* $y = x$.
2. *L'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *avec des paramètres* $a, b > 0$.

**Exercice 7.** *Calculer les trois intégrales suivantes :*

$$\int_1^2 \frac{\ln(2x)}{(x+1)^2}\,dx, \quad \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \quad \int_0^2 \frac{\exp(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x}\exp(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$