L2 STUE : Mathématiques 4

TD 6

Le théorème de Green

Exercice 1. *Vérifier le théorème de Green pour les ensembles et les champs de vecteurs suivants :*

1. $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ *et* $X(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$.
2. D *est le disque centré en l'origine de rayon* $R > 0$ *et* $X(x, y) = (xy^2, -x^2y)$.
3. D *est le disque centré en l'origine de rayon* $R > 0$ *et* $X(x, y) = (xy, xy)$.
4. D *est le disque centré en l'origine de rayon* $R > 0$ *et* $X(x, y) = (2y, x)$.

Exercice 2. *À l'aide du théorème de Green, calculer la circulation du champ de vecteurs* $X(x, y) = (x - y, x + y)$ *le long du bord du carré* $[-1, 2]^2$.

Exercice 3. *Soit* $a > 0$ *un nombre réel, on cherche à déterminer l'aire de*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}.$$

1. *Vérifier que pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *le chemin* $\gamma(t) = (a\cos(t)^3, a\sin(t)^3)$ *est entièrement contenu dans* Ω. *Que paramètre-t-il ?*
2. *En vous rappelant où l'on a déjà rencontré ce chemin* γ, *faites un dessin de* Ω *lorsque* $a = 1$.
3. *Rappeler comment utiliser le théorème de Green et le champ de vecteurs* $X(x, y) = (-y, x)$ *pour calculer l'aire de* Ω, *puis calculer cette aire.*

Exercice 4. *Soit* $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Soit* γ *son bord et soit le champ de vecteurs* $X = (xy^2, 2xy)$. *Calculer la circulation de* X *le long de* γ *de deux manières.*

1. *Premièrement, en utilisant un paramétrage de* γ.
2. *Deuxièmement, en utilisant le théorème de Green.*

Les théorèmes de Stokes et de la divergence

Exercice 5. *Vérifier le théorème de Stokes pour la surface*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0\}$$

orientée dans la direction positive de y *et les champs de vecteurs*

1. $X(x, y, z) = (x, y, z)$.
2. $X(x, y, z) = (z^2, x, y^2)$.
3. $X(x, y, z) = (z, x, 2zx + 2xy)$.

Exercice 6. *Utiliser le théorème de Stokes pour calculer la circulation du champ de vecteurs* $X(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$ *le long du bord du triangle de sommets* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *parcouru dans le sens anti-horaire.*

1. *Vérifier que le triangle est contenu dans le plan d'équation* $x + y + z = 1$.
2. *Déterminer une paramétrisation* $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^3$ *de ce triangle où* D *est un domaine de* $\mathbb{R}^2$.

3. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer la circulation.

Exercice 7. *Vérifier le théorème de la divergence lorsque V est la boule centrée en l'origine de rayon 1 et $X(x, y, z) = (-y, x, z)$.*

Exercice 8. *Utiliser le théorème de la divergence pour calculer le flux*

$$\iint_S \left\langle X, d\vec{(}S) \right\rangle,$$

où X est le champ de vecteurs $X(x, y, z) = (\sin(\pi x), zy^3, z^2 + 4x)$ et S est le bord de la boite délimitée par $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, $1 \leq z \leq 4$.

Exercice 9. *On modélise une artère par par un cylindre de longueur $L > 0$ et de rayon $R > 0$. Plus précisément, on considère le cylindre*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq L\}.$$

La vitesse du sang à l'intérieur de l'artère est donnée par le champ de vecteurs

$$V(x, y, z) = \left(0, 0, v_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right)\right),$$

où $v_0 > 0$ est la vitesse maximale du sang au centre de l'artère.

1. *Calculer le flux sanguin traversant la section horizontale de l'artère en $z = 0$.*
2. *Vérifier ce résultat en utilisant le théorème de la divergence sur le cylindre C.*