Chapitre 4

Intégrales surfaciques

4.1 Rappels sur le produit vectoriel

On rappelle la formule du produit vectoriel, qui nous sera nécessaire pour calculer un vecteur orthogonal à une surface.

Définition 4.1. *Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est un vecteur*

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel a les propriétés fondamentales suivantes.

Proposition 4.2. *On a :*

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.
2. $(\alpha \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.
3. $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{w} + \vec{v}_2 \times \vec{w}$,
4. (Produit Mixte) $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

La conséquence principale de ces propriétés est

Corollaire 4.3. *On a $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$ et $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$.*

4.2 Intégrales surfaciques

Les intégrales surfaciques sont l'analogue des intégrales doubles pour les intégrales curvilignes.

intégrales simples $\rightsquigarrow$ intégrales doubles
intégrales curvilignes $\rightsquigarrow$ intégrales surfaciques

Rappelons nous qu'une surface S est un objet de dimension 2, comme une sphère ou une nappe par exemple, qui vit, la plupart du temps, dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$. Pour pouvoir intégrer une fonction f sur S, on a besoin d'une paramétrisation $\varphi(x, y)$ de S, où (x, y) varient dans une région U de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.4. *La sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ peut être paramétrée à l'aide des coordonnées sphériques par*

$$\varphi(\theta, \sigma) = (\sin(\theta)\cos(\sigma), \sin(\theta)\sin(\sigma), \cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3,$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est la coordonnée de latitude *et $\sigma \in [0, 2\pi)$ est la coordonnée de longitude.*

Exemple 4.5. *Le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée par*

$$\varphi(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3,$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ici le domaine de φ est tout $\mathbb{R}^2$).

Pour être très précis, lorsque l'on calcule des intégrales surfaciques, il faut faire attention à choisir des paramétrisations que ne sont pas trop "singulières".

Définition 4.6. *On va dire que φ paramètre S de façon* régulière *si*

1. *φ de classe $\mathcal{C}^1$,*
2. *les vecteurs tangents*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$$

sont non-nuls et non-colinéaires pour tous (x, y).

Un objet important pour l'intégration surfacique est la notion de vecteur normal.

Définition 4.7. *Soit S une surface paramétrée de façon régulière par $\varphi(x, y)$. Le* vecteur normal *à S au point $\varphi(x, y)$ est*

$$n_\varphi(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y).$$

Par construction, le vecteur $n_\varphi(x, y)$ est perpendiculaire aux deux vecteurs tangents $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$, d'où le nom de vecteur normal.

Exemple 4.8. *Si l'on considère à nouveau la paraboloïde $z = x^2 + y^2$ paramétrée par $\varphi(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$, alors les vecteurs tangents sont donnés par*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

On remarque que φ est une paramétrisation régulière dont le vecteur normal est

$$n_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en arrive finalement à la définition de l'intégrale surfacique.

Définition 4.9. *Soit S une surface paramétrée de façon régulière par $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ et soit $f\colon S \to \mathbb{R}$ une fonction continue à intégrer. L'*intégrale surfacique de f sur S *est*

$$\iint_S f = \iint_U f(\varphi(x,y)) \cdot ||n_\varphi(x,y)||\, dx\, dy.$$

Exemple 4.10. *Intégrer la fonction constante $f(x,y,z) = 1$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Solution. On utilise la paramétrisation de $\mathbb{S}^2$ avec les coordonnées sphériques donnée par

$$\varphi(\theta,\sigma) = (\sin(\theta)\cos(\sigma), \sin(\theta)\sin(\sigma), \cos(\theta)).$$

Les vecteurs tangents sont donnés par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\sigma)\\ \cos(\theta)\sin(\sigma)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\sin(\sigma)\\ \sin(\theta)\cos(\sigma)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Le vecteur normal est donc donné par

$$n_\varphi(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\sigma)\\ \cos(\theta)\sin(\sigma)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\sin(\sigma)\\ \sin(\theta)\cos(\sigma)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(\theta)^2\cos(\sigma)\\ -\sin(\theta)^2\sin(\sigma)\\ \cos(\theta)\sin(\theta)\end{pmatrix}.$$

Sa norme est donc

$$||n_\varphi(\theta,\sigma)|| = \sqrt{\sin(\theta)^4\cos(\sigma)^2 + \sin(\theta)^4\sin(\sigma)^2 + \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2} = \sin(\theta).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{S}^2} 1 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\theta)^2\, d\sigma\, d\theta\\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta\\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

4.2.1 Applications de l'intégrale surfacique

La première interprétation est celle de l'aire de la surface

Proposition 4.11. *L'aire d'une surface S paramétrée de façon régulière par $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ est*

$$\text{aire}(S) = \iint_U ||n_\varphi(x,y)||\, dx\, dy.$$

4.2.2 Propriétés de l'intégrale surfacique

Proposition 4.12. *Soient U et V deux domaines de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ et $\psi\colon V \to \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations régulières d'une surface S. Alors, pour toute fonction continue f, on a*

$$\iint_U f(\varphi(x,y)) \cdot \|n_\varphi(x,y)\|\, dx\, dy = \iint_V f(\psi(x,y)) \cdot \|n_\psi(x,y)\|\, dx\, dy.$$

Cela signifie que l'intégrale de f sur la surface S ne dépend pas de la paramétrisation de S.