Chapitre 3

Intégrale curviligne

L'intégrale curviligne en mathématiques a pour but d'intégrer des fonctions réelles ou des champs de vecteurs le long d'une courbe dans le plan ou dans l'espace. Par exemple, en physique, le travail effectué par une particule qui subit un champs de force F en se déplaçant le long d'un chemin Γ est donné par

$$W = \int_\Gamma F(s)ds.$$

3.1 Rappels sur les courbes

Nous allons commencé par quelques rappels sur les courbes et leurs paramétrisations. Une *courbe* est un sous-ensemble 1-dimensionnel du plan ou de l'espace. Une courbe Γ peut être paramétrée par une fonction, appelée *chemin*,

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

dont l'image est précisément Γ. Dans le cas ou $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que Γ est un *lacet.* [1]

Exemple 3.1. *Soient p et q des points de $\mathbb{R}^n$, et Γ la courbe donnée par le segment entre p et q. Une paramétrisation de Γ est donnée par*

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto tq + (1-t)p. \end{aligned}$$

De même, le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est une courbe qui peut être paramétrée dans le sens anti-horaire par

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

et dans le sens horaire par

$$\begin{aligned} \gamma_2\colon [0,4\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(-t), \sin(-t)). \end{aligned}$$

1. Pour être précis, il faudrait ajouter que Γ a un sens de parcours, aussi appelé une *orientation.* Lorsque l'on paramétrise Γ à l'aide d'un chemin γ, il faut faire attention à ce que γ parcourt Γ dans “le bon sens”.

On a besoin de deux définitions plus techniques.

Définition 3.2. *Un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est* $\mathcal{C}^1$ par morceaux *si* γ *est continue et s'il existe des nombres* $x_1 < \cdots < x_d$ *de* $[a,b]$ *tels que*

1. γ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur chaque morceau de* $[a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_d\}$*, et*
2. γ' *admet des limites finies à gauche et à droite en chaque* x_i*.*

Définition 3.3. *Étant donnés un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, on dit que* $t \in [a,b]$ *un* point régulier *de* γ *si* γ' *est continue en* t *et si* $\gamma'(t) \neq 0$*. Lorsque* t *est un point régulier de* γ*, on dit que* $\gamma(t)$ *est une* valeur régulière *de* γ*. Dans le cas contraire, on dit qu'il s'agit d'une valeur ou d'un point singulier.*

On dit que γ *est un* chemin régulier *si chaque* $t \in [a,b]$ *est régulier.*

Exemple 3.4. *Le chemin*

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t,t) \end{aligned}$$

est régulier, alors que le chemin

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3,t^3) \end{aligned}$$

n'est pas régulier en $t=0$ *(il l'est partout ailleurs). On note que ces deux chemins paramétrisent la même courbe.*

3.2 Intégration le long d'un chemin

On rentre dans le vif du sujet. Supposons que l'on souhaite intégrer une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le long d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^n$. On commence par choisir une paramétrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de notre courbe Γ.

Pour trouver la bonne formule d'intégration, on "rectifie" la courbe Γ. Pour ce faire, on partitionne l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur $\Delta t = (b-a)/n$. On remplace la portion de la courbe Γ entre $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ par le segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ dont la longueur est Δs_i. Lorsque Δs_i est très petit, alors l'intégrale de f le long du segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ vaut approximativement $f(\gamma(t_i))\Delta s_i$. Autrement dit, on s'attend à ce que la valeur de l'intégrale de f le long de Γ soit donnée par

$$I = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i))\Delta s_i.$$

Le théorème des accroissements finis nous dit que

$$\Delta s_i = ||\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|| \approx ||\gamma'(t_i)|| \cdot \Delta t.$$

On obtient ainsi

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i)) \cdot ||\gamma'(t_i)|| \cdot \Delta t.$$

Cette approche heuristique motive la définition suivante.

Définition 3.5. *Soit Γ une courbe paramétrée par un chemin $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $t \mapsto f(\gamma(t))$ soit continue. On définit alors l'intégrale de f le long de la courbe Γ par*

$$\int_\Gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Exemple 3.6. *Calculer l'intégrale de la fonction $f(x,y) = 4x^3$ le long du segment Γ qui va du point $(-2,-1)$ au point $(1,2)$.*

Solution. On commence par trouver une paramétrisation de Γ. On va prendre $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+3t\\3t-1\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

et donc $||\gamma'(t)|| = 3\sqrt{2}$. On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f &= \int_0^1 4(3t-2)^3 \cdot 3\sqrt{2}\, dt\\ &= 12\sqrt{2}\left[\frac{(3t-2)^4}{12}\right]_0^1\\ &= -15\sqrt{2}.\end{aligned}$$

3.2.1 Propriétés de l'intégrale curviligne

Proposition 3.7. *L'intégrale de f le long de Γ ne dépend de la paramétrsiation choisie de Γ. Autrement dit, si $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$,*[2] *alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s))) \cdot \|(\gamma \circ \varphi)'(s)\|\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

C'est logique, quand on y pense, que l'intégrale ne dépende pas de paramétristaion. Par exemple, quand on se rappelle de ce que l'on calcule en pratique : la hauteur moyenne le long d'un chemin de randonnée ne dépend pas de la vitesse à laquelle on parcourt le chemin, ni du sens dans lequel on le parcourt.

Proposition 3.8. *Soit Γ une courbe qui admette une paramétrisation qui soit $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Soient de plus f et g des fonctions telles que $\int_\Gamma f$ et $\int_\Gamma g$ sont bien définies. On a alors*

1. $\displaystyle\int_\Gamma \lambda f + g = \lambda \int_\Gamma f + \int_\Gamma g$
2. $\displaystyle f \geq g \Rightarrow \int_\Gamma f \geq \int_\Gamma g$
3. $\displaystyle\left|\int_\Gamma f\right| \leq \int_\Gamma |f|$

2. Cette hypothèse nous assure que les deux paramétrisation parcourent Γ dans le même sens.

3.2.2 Applications de l'intégrale curviligne

L'application principale de l'intégrale curviligne est le calcule de longueur de courbes.

Proposition 3.9. *La longueur d'une courbe* Γ *est*

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma 1.$$

Autrement dit, si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est une paramétrisation* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux de* Γ*, alors*

$$L(\Gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

3.3 Circulation d'un champs de vecteurs

On l'a mentionné en introduction, le travail d'une particule qui subit un champs de forces s'exprime comme une intégrale curviligne. C'est le moment de formaliser cette idée.

Définition 3.10. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^n$*, rappelons qu'un champ de vecteurs sur* A *est une application continue* $X\colon A \to \mathbb{R}^n$*.*

Exemple 3.11. *Un exemple classique de champs de vecteurs et le* gradient *d'une fonction* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *que l'on définit comme*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

3.3.1 Définition

Définition 3.12. *Soient* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *un chemin* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* X *un champ de vecteurs défini (au moins sur) sur* $\gamma([a,b])$*. On définit la* circulation *du champ de vecteur* X *le long de* γ *par*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_a^b \big\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\, dt,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *désigne le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^n$*.*

Il découle de la définition, que la circulation d'un champ de vecteur vérifie les même propriétés qu'une intégrale classique. Cependant, la circulation d'un champ X est différente de l'intégrale curviligne du champ de vecteur X.

Exemple 3.13. *Soit* $X(x,y) = (0,1)$ *le champ de vecteur constant et soit* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *le chemin* $\gamma(t) = (t,0)$*. Alors*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle dt = 0.$$

En revanche, l'intégrale curviligne de X *le long de* γ *donne*

$$\int_\gamma X(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On note au passage que la circulation d'un champ de vecteur est un nombre tandis que son intégrale curviligne est un vecteur.

3.3.2 Interprétation

L'interprétation physique de la circulation d'un champ de vecteur est celle du *travail d'une force*. On suppose qu'une particule se déplace le long d'un chemin γ est soumis à un champ de force $\overrightarrow{F}$ (par exemple gravitationnel ou magnétique). Le travail effectué par la particule sera donné par

$$\int_\gamma \langle \overrightarrow{F}, d\gamma \rangle$$

.

3.3.3 Propriétés de la circulation

Comme pour l'intégrale curviligne, la circulation n'est pas complètement indépendante du choix de la paramétrisation ; il faut prendre en compte l'orientation des courbes. Si $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que φ *préserve l'orientation* si $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ et qu'elle *renverse l'orientation* si $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$.

Proposition 3.14. *Soient $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux et X un champ de vecteurs défini sur $\gamma([a, b])$. Soit encore $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$.*

1. *Si φ préserve l'orientation, alors $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} \langle X, d(\gamma \circ \varphi)\rangle = \int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle$.*
2. *Si φ renverse l'orientation, alors $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} \langle X, d(\gamma \circ \varphi)\rangle = -\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle$.*

3.3.4 Un champ particulier : le gradient

L'intégrale d'un champ de vecteurs donné par le gradient d'une fonction f est simple à déterminer comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.15. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a*

$$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma\rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est un lacet, alors

$$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma\rangle = 0.$$

En d'autres termes, la circulation d'un gradient ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée de la courbe γ le long de laquelle on intègre.

Cependant, cette indépendance du chemin n'est pas une loi universelle pour les champs de vecteurs.

Exemple 3.16. *Prenons le champs de vecteur $X(x, y) = (-y, x)$ et le chemin $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Si X était un gradient, on aurait $\int_\gamma X \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$, mais on a en réalité*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0.$$

Lorsqu'un champ de vecteurs a la propriété que ses intégrales le long de lacets sont zéro, alors on dit que le champs est conservatif.

Définition 3.17. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. On dit que X est* conservatif *si pour tout lacet γ à valeurs dans U qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = 0$.*

En particulier, tout gradient est un champ conservatif. En fait, on peut même monter que les champs conservatifs sont des gradients.

Proposition 3.18. *Soit A un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $X\colon A \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. Il y équivalence entre*

1. *Le champ X est conseratif.*
2. *Il existe une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X = \nabla f$.*