

## L2 STUE : Mathématiques 4

### TD 6

## Le théorème de Green

**Exercice 1.** Vérifier le théorème de Green pour les ensembles et les champs de vecteurs suivants :

1.  $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$  et  $X(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$ .
2.  $D$  est le disque centré en l'origine de rayon  $R > 0$  et  $X(x, y) = (xy^2, -x^2y)$ .
3.  $D$  est le disque centré en l'origine de rayon  $R > 0$  et  $X(x, y) = (xy, xy)$ .
4.  $D$  est le disque centré en l'origine de rayon  $R > 0$  et  $X(x, y) = (2y, x)$ .

**Exercice 2.** À l'aide du théorème de Green, calculer la circulation du champ de vecteurs  $X(x, y) = (x - y, x + y)$  le long du bord du carré  $[-1, 2]^2$ .

**Exercice 3.** Soit  $a > 0$  un nombre réel, on cherche à déterminer l'aire de

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}.$$

1. Vérifier que pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , le chemin  $\gamma(t) = (a \cos(t)^3, a \sin(t)^3)$  est entièrement contenu dans  $\Omega$ . Que paramètre-t-il ?
2. En vous rappelant où l'on a déjà rencontré ce chemin  $\gamma$ , faites un dessin de  $\Omega$  lorsque  $a = 1$ .
3. Rappeler comment utiliser le théorème de Green et le champ de vecteurs  $X(x, y) = (-y, x)$  pour calculer l'aire de  $\Omega$ , puis calculer cette aire.

**Exercice 4.** Soit  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Soit  $\gamma$  son bord et soit le champ de vecteurs  $X = (xy^2, 2xy)$ . Calculer la circulation de  $X$  le long de  $\gamma$  de deux manières.

1. Premièrement, en utilisant un paramétrage de  $\gamma$ .
2. Deuxièmement, en utilisant le théorème de Green.

## Les théorèmes de Stokes et de la divergence

**Exercice 5.** Vérifier le théorème de Stokes pour la surface

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$$

orientée dans la direction positive de  $y$  et les champs de vecteurs

1.  $X(x, y, z) = (x, y, z)$ .
2.  $X(x, y, z) = (z^2, x, y^2)$ .
3.  $X(x, y, z) = (z, x, 2zx + 2xy)$ .

**Exercice 6.** Utiliser le théorème de Stokes pour calculer la circulation du champ de vecteurs  $X(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$  le long du bord du triangle de sommets  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  parcouru dans le sens anti-horaire.

1. Vérifier que le triangle est contenu dans le plan d'équation  $x + y + z = 1$ .
2. Déterminer une paramétrisation  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de ce triangle où  $D$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$ .

3. Utiliser le théorème de Stokes pour calculer la circulation.

**Exercice 7.** Vérifier le théorème de la divergence lorsque  $V$  est la boule centrée en l'origine de rayon 1 et  $X(x, y, z) = (-y, x, z)$ .

**Exercice 8.** Utiliser le théorème de la divergence pour calculer le flux

$$\iint_S \left\langle X, d\vec{S} \right\rangle,$$

où  $X$  est le champ de vecteurs  $X(x, y, z) = (\sin(\pi x), zy^3, z^2 + 4x)$  et  $S$  est le bord de la boîte délimitée par  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $1 \leq z \leq 4$ .