L2 STUE : Mathématiques 4

TD 4

Intégrales curvilignes : suite

Exercice 1. *Soit* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *le chemin défini en coordonnées polaires par* $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$.

1. *Écrire* $\gamma(t)$ *en coordonnées cartésiennes.*
2. *Calculer* $\|\gamma'(t)\|$ *et en déduire une formule pour la longueur du chemin* γ.
3. *Appliquer la formule précédente au cas* $\theta(t) = t$ *et* $r(t) = \alpha t$ *pour* $\alpha > 0$, *et pour* $t \in [0, T]$. *Esquisser la courbe que ces coordonnées polaires paramètrent.*

Exercice 2. *Dans une région montagneuse, on modélise la température souterraine* $T(x)$ *en fonction de la profondeur* x *selon la loi empirique :*

$$T(x) = T_0 + \alpha x,$$

où $T_0 = 15°C$ *dénote la température à la surface et* $\alpha = 0.03°C/m$ *est le gradient géothermique moyen. Un filon minéral suit un chemin souterrain modélisé par* $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (10t, 5t^2)$ *avec* $t \in [0, 2]$, *où* x *est la profondeur en mètres et* y *est la position horizontale en mètres.*

Calculer la température moyenne rencontrée le long de ce filon.

Circulation de champ de vecteurs

Exercice 3. *Soit* $X(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ *un champ de vecteurs défini pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$.

1. *Calculer la circulation de* X *le long du cercle centré en l'origine et de rayon* $r > 0$. *En déduire qu'il n'est pas conservatif.*
2. *Calculer la circulation de* X *le long du cercle centré en* $(2,0)$ *et de rayon* 1.

Exercice 4. *Soit* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *un repère orthonormé de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\vec{F}$ *le champ de vecteur*

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\,\vec{i} - 3xy\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}.$$

Calculer sa circulation entre le point O *de coordonnées* $(0,0,0)$ *et le point* P *de coordonnées* $(1,2,-1)$ *le long des chemins suivants :*

1. $\gamma(t) = (t^2, 2t, -t)$.
2. *Le segment de droite* $[O,P]$.

Que remarquez-vous ? Proposer une explication.

Exercice 5. *Calculer* $\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle$ *dans les cas suivants :*

1. γ *parcourt le bord du carré* $[-1,1]^2$ *dans le sens trigonométrique et* $X(x,y) = (-y, x)$.
2. γ *parcourt le bord du carré* $[-1,1]^2$ *dans le sens horaire et* $X(x,y) = (x-y, x+y)$.
3. γ *parcourt le bord de* $[0, \pi/2]^2$ *dans le sens trigonométrique et* $X(x,y) = (\sin(x), \cos(y))$.
4. γ *parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon* $r > 0$ *dans le sens trigonométrique et* $X(x,y) = (xy^2, -x^2y)$.

5. *γ parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon $r > 0$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (xy, xy)$.*
6. *γ parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon $r > 0$ dans le sens trigonométrique et $X(x, y) = (2y, x)$.*

Exercice 6. [À faire après l'exercice 4.] *Parmi les champs de vecteurs suivant, déterminer lesquels sont conservatifs et, pour ceux qui le sont, donner une fonction dont ils sont le gradient.*

1. *$X(x, y) = (-y, x)$, défini sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *$X(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$ défini sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *$X(x, y) = (y^2, 2xy + 2y)$ défini sur $\mathbb{R}^2$.*
4. *$X(x, y, z) = (2x^2y + 2yz^2, x^3 + 2xz^2 - 2yz^2, 4xyz - 2y^2z)$ défini sur $\mathbb{R}^3$.*
5. *$X(x, y, z) = (xe^y, x^2e^y + \ln(|z|), \frac{y}{z})$ défini sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{z = 0\}$.*
6. *$X(x, y, z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^\alpha}(x, y, z)$ défini sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ avec $\alpha > 0$ réel.*

Exercice 7. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

1. *Représenter graphiquement (et au mieux) le gradient de f.*
2. *Représenter sur le même dessin les lignes de niveau de f.*
3. *Reprendre les question précédentes avec la fonction $g(x, y) = xy$.*
4. *Qu'observez-vous entre les lignes de niveau et le gradient de ces fonctions ?*

Exercice 8. *Soit $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par $X(x, y) = (ye^{-x}, e^x)$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On définit le champ de vecteurs $Y(x, y) = f(x) \cdot X(x, y)$.*

1. *Le champ X est-il conservatif ?*
2. *Montrer que le champ de vecteurs Y est conservatif si et seulement si $f'(x) = k(x)f(x)$ pour une fonction $k(x)$ que vous devez déterminer explicitement.*
3. *En déduire que pour $f(x) = \exp\left(\frac{-e^{-2x}}{2} - x\right)$ le champ de vecteurs Y est conservatif.*