# L2 STUE : Mathématiques 4

TD 5

**Exercice 1** (Aire d'un graphe)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction. Le* graphe de $f$ *est la surface $S$ paramétrée par $\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y))$.*

1. *Calculer les dérivées partielles de $\varphi$ et en déduire que la paramétrisation $\varphi$ de $S$ est régulière.*
2. *Trouver un champ de vecteurs normal à $S$ et montrer que*

$$\text{aire}(S) = \iint_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dx\, dy.$$

3. *Calculer cette aire lorsque $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $U$ est le disque unité.*

**Exercice 2.** *Soit $T$ la surface paramétrée par $\psi\colon (0,2\pi) \times (1,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\psi(\theta, z) = \left(\frac{\cos(\theta)}{z}, \frac{\sin(\theta)}{z}, z\right).$$

1. *Représenter graphiquement $T$.*
2. *Calculer l'aire de la surface de $T$.*
3. *Déterminer le volume emprisonné par $T$, c'est-à-dire le volume de l'ensemble*

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1/z\}.$$

**Exercice 3.** *Soit $S$ la surface paramétrée par $\varphi\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ où $\varphi(x,y) = (x,y,x^2+y)$. Calculer*

$$\iint_S x.$$

**Exercice 4.** *Calculer l'intégrale*

$$\iint_S x^2y^2z,$$

*où $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.*

**Exercice 5.** *Soit $\psi\colon U = (0,2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par*

$$\psi(s,t) = (\cos(s), \sin(s), \sin(t)).$$

1. *Montrer que l'image de $\psi$ est le cylindre*

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}.$$

2. *Vérifier que $\psi$ est injective.*

*On note à présent $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\varphi(s,t) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\cos(s), \sin(t)).$$

3. *Montrer que l'image de $\varphi$ est égale à la sphère unité.*
4. *Montrer que $\varphi$ est injective.*

*Finalement, calculer $\|n_\psi(s,t)\|$ et $\|n_\varphi(s,t)\|$. En déduire l'aire de sphère unité et du cylindre $C$.*

**Exercice 6.** *Calculer l'aire d'un hélicoïde paramétré par*

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta),$$

*où* $(r,\theta) \in (0,1) \times (0,2\pi)$.

**Exercice 7.** *Calculer l'aire d'un tore paramétré par*

$$\varphi(u,v) = \big((R+\cos(u))\cos(v), (R+\cos(u))\sin(v), \sin(u)\big)$$

*où* $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ *et* $R > 0$ *est un paramètre fixé.*