Physique Générale I

Chapitre 5

Le mouvement circulaire

Introduction

Mécanique de Newton : déterministe

Si on connait au temps t :

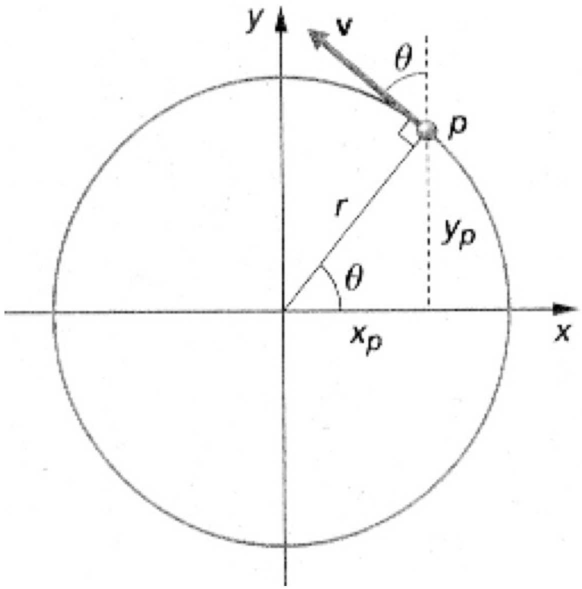
- les forces agissant sur un objet
- la position initiale
- la vitesse initiale

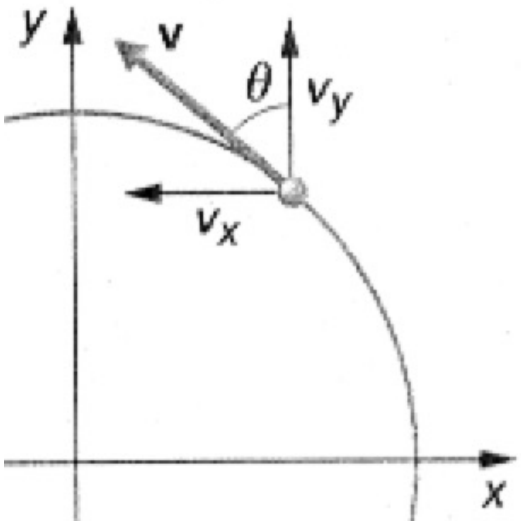
On est capable de déterminer son mouvement
C'est à dire prédire où il sera en $(t+\Delta t)$.

Ces lois s'appliquent :

- au mouvement rectiligne
- au mouvement général à deux dimensions
- **au mouvement circulaire**
  - voiture sur une trajectoire circulaire
  - satellite en orbite
  - point d'un corps en rotation

Accélération centripète





- **Position :**

$$x_P = r\cos\theta$$
$$y_P = r\sin\theta$$

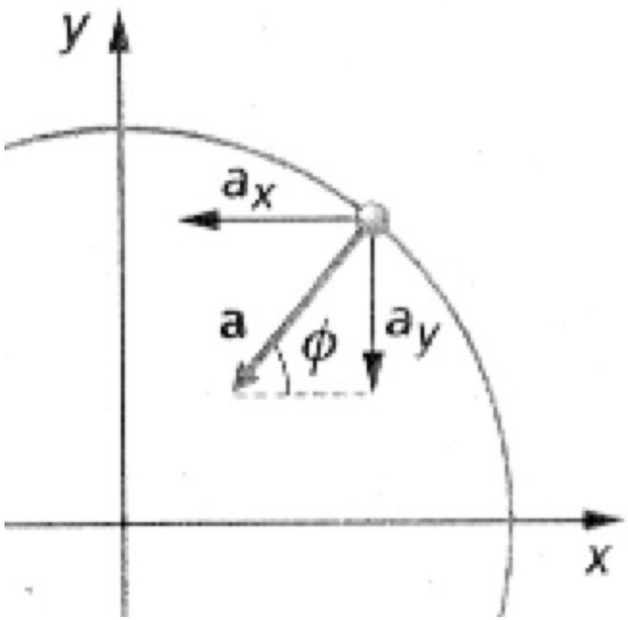
- **Vitesse :**

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} = -v\sin\theta\ \hat{\mathbf{x}} + v\cos\theta\ \hat{\mathbf{y}}$$
$$= -v\frac{y_P}{r}\ \hat{\mathbf{x}} + v\frac{x_P}{r}\ \hat{\mathbf{y}}$$

- **Accélération :**

$$\mathbf{a} = -\frac{v}{r}\underbrace{\frac{dy_P}{dt}}_{v_y}\hat{\mathbf{x}} + \frac{v}{r}\underbrace{\frac{dx_P}{dt}}_{v_x}\hat{\mathbf{y}}$$
$$= -\frac{v^2}{r}\cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} - \frac{v^2}{r}\sin\theta\ \hat{\mathbf{y}}$$

Accélération centripète



$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{v^2}{r}\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

- **module :**

$$\mathbf{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{v^2}{r}$$

- **direction :**

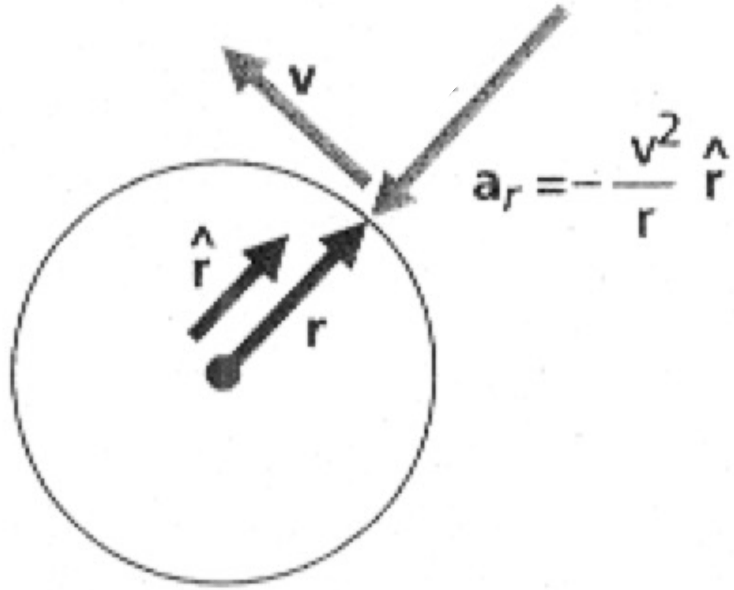
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r).\sin\theta}{-(v^2/r).\cos\theta}$$

$$= \mathrm{tg}\theta \rightarrow \text{radiale}$$

signes “-” : **centripète**

Accélération centripète

$$\boxed{\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}}$$



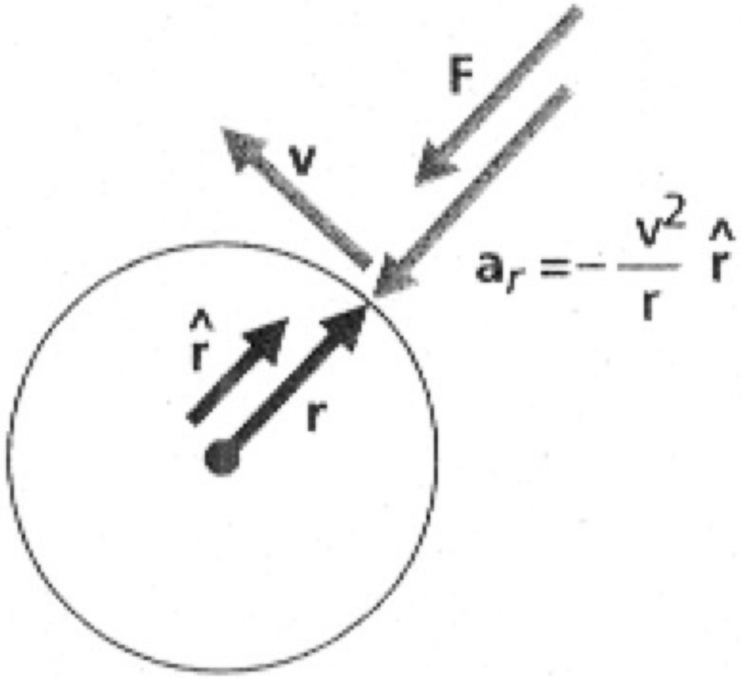
Un objet sur une trajectoire circulaire possède une accélération :

- radiale (perpendiculaire à v)
- Centripète (orientée vers le centre)

Force centripète

Un objet sur une trajectoire circulaire possède une accélération radiale centripète :

$$\mathbf{a}_\mathbf{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$



- **1$^{\text{ère}}$ loi de Newton**

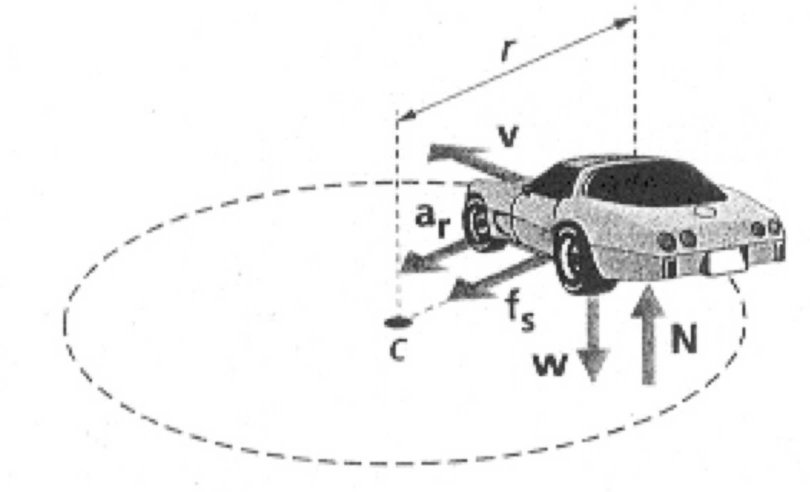
  ∃ une force centripète $\mathbf{F}_\mathbf{r}$

- **2$^{\text{ème}}$ loi de Newton**

$$\mathbf{F}_\mathbf{r} = m\,\mathbf{a}_\mathbf{r} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

L'origine de cette force peut varier :
- voiture : forces de frottement
- satellite : force d'attraction gravitationnelle
- électron : force coulombienne

Voiture sur une trajectoire circulaire



La seule force à même de produire une accélération centripète est le **frottement statique** entre les pneus et la route

La force centripète nécessaire au maintien sur la trajectoire ne peut être supérieure à $f_s(\max)$

$$F_r = \frac{mv^2}{r} \leq f_s(\max) = \mu_s N = \mu_s mg$$

Vitesse maximale

$$v \leq \sqrt{\mu_s r g}$$

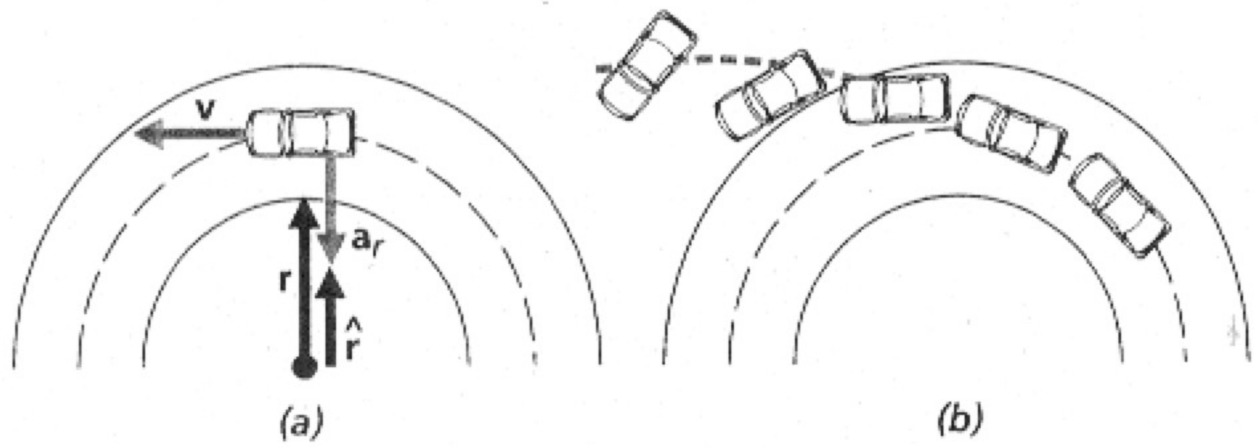
Rayon minimum

$$r \geq \frac{v^2}{\mu_s g}$$

Indépendant de *m*

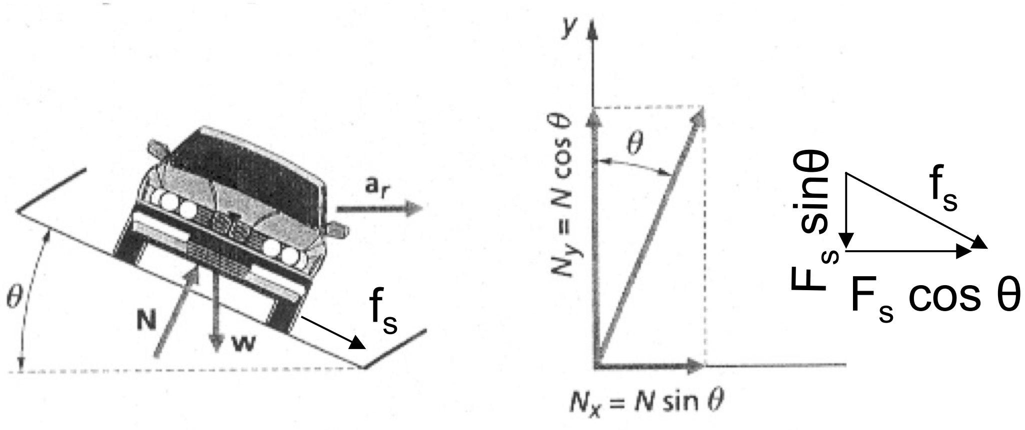
Dérapage

Si les forces de frottement ne peuvent fournir l'accélération centripète nécessaire au maintient sur la trajectoire circulaire **dérapage**



Les forces de frottement **cinétique** étant inférieures aux forces de frottement **statique**, on dérape d'autant plus …

Virages relevés



Lorsqu'on relève un virage, une partie de N contribue à fournir a_r.

$$\text{Selon y}: N\cos\theta = w + f_s \sin\theta \quad \rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta} + f_s \,\mathrm{tg}\theta$$

$$\text{Selon x}: ma_r = N\sin\theta + f_s\cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = mg\,\mathrm{tg}\theta + f_s\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta\right)$$

$$= mg\,\mathrm{tg}\theta + \frac{f_s}{\cos\theta}$$

$$\text{Sans frottements}: f_s = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Si	r = 900m
	v = 30 m/s = 108 km/h
Alors	θ = 6°

En présence de frottements

$$\text{Selon y}: N\cos\theta = w + \mu_s N\sin\theta \quad \rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$\text{Selon x}: ma_r = N\sin\theta + f_s\cos\theta$$

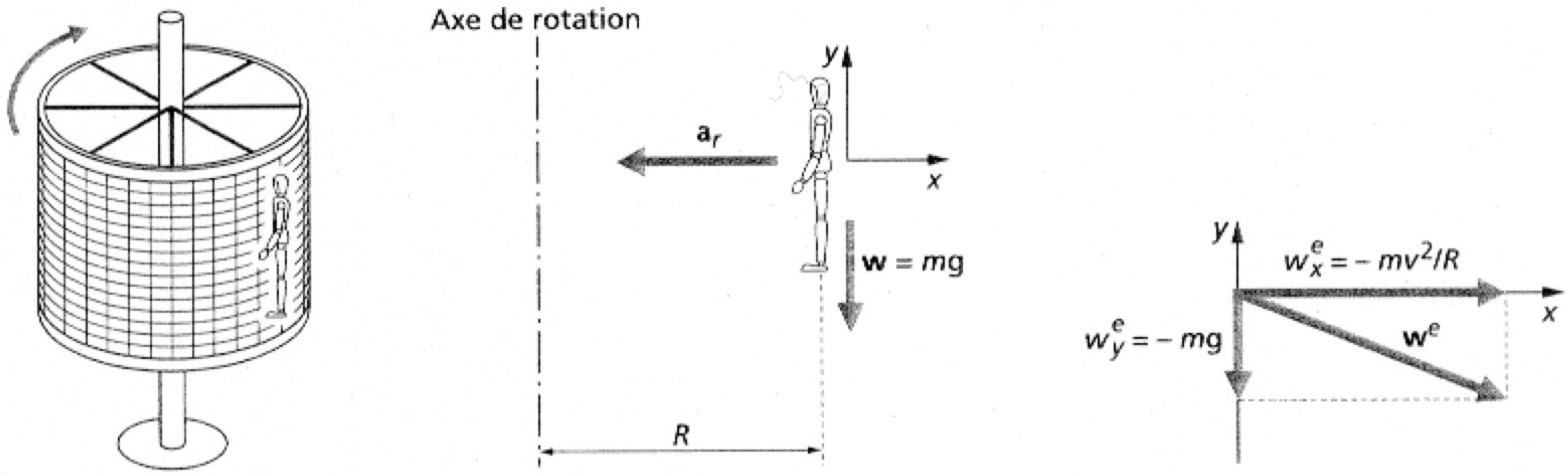
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mg\sin\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} + \frac{\mu_s mg\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$v^2 = \frac{rg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$v^2 = rg\frac{(\mathrm{tg}\,\theta + \mu_s)}{(1 - \mu_s\mathrm{tg}\,\theta)}$$

Si r = 900m, θ = 6˚,
Alors
$\mu_s = 0.1 \rightarrow v = 43$ m/s = 154 km/h
$\mu_s = 0.5 \rightarrow v = 75$ m/s = 270 km/h
$\mu_s = 0.8 \rightarrow v = 93$ m/s = 336 km/h

Poids effectif



Quelle composante de w^e est la plus grande?

Quelle force résiste à w?

Mouvement circulaire uniformément accéléré

Mouvement dans lequel le module de la vitesse est modifié.

On peut décomposer le vecteur **accélération** en

-une composante tangentielle (|| v)

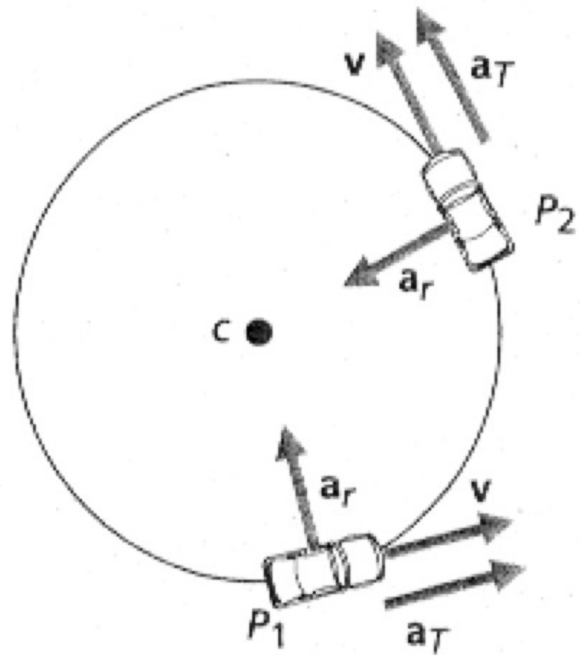
Responsable de la variation du module de **v**

$$\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$

- une composante radiale (⊥v)

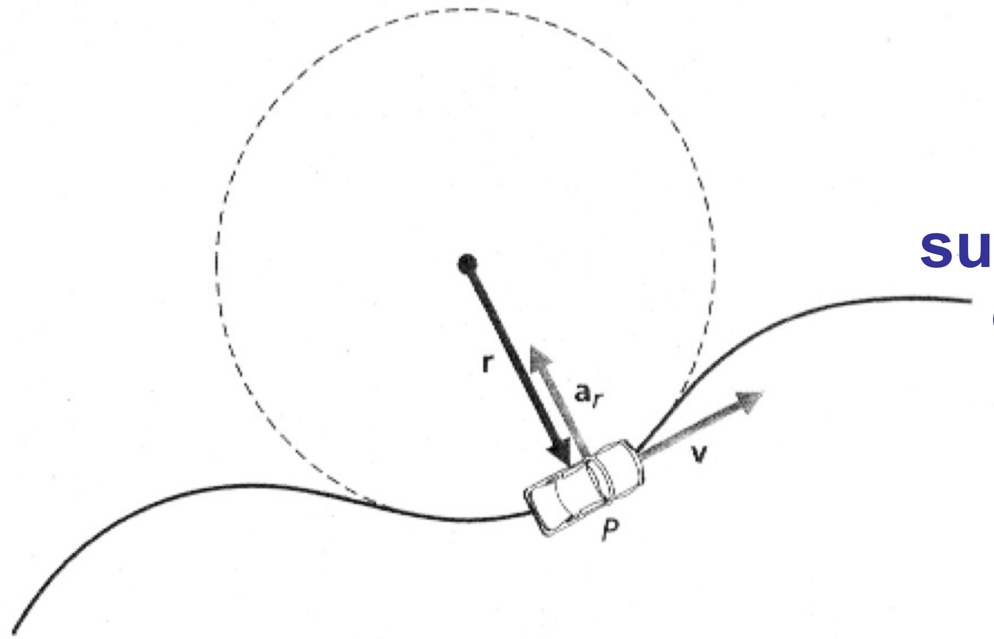
responsable de la variation de direction de **v**

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_T$$

Mouvement quelconque



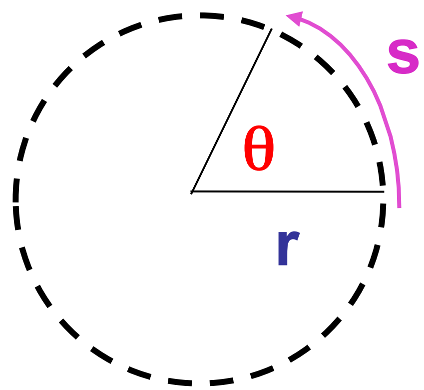
décomposé en une succession de mouvements circulaires uniformément accéléres (MCUA)

On peut séparer la trajectoire en tronçons sur lesquels $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_T$ est constante.

Chacun de ces tronçons correspond à un MCUA particulier

Position angulaire

Lorsqu'un objet décrit une trajectoire circulaire, il y a une correspondance
distance parcourue ~ angle balayé



360˚	$s = 2\pi r$	$\theta = 2\pi$
180˚	$s = \pi r$	$\theta = \pi$
90˚	$s = \pi/2\ r$	$\theta = \pi/2$

Angle en radian : $\theta = s / r$ **[rad]**

Le radian est une unité sans dimension

Relation entre variables linéaire (s) et angulaire (θ)

$$s = \theta\, r$$

Correspondance degré / radian

Angle			
Degré	Radian	Cosinus	Sinus
0	0	$\sqrt{4}/2 = 1$	$\sqrt{0}/2 = 0$
30	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
90	$\pi/2$	$\sqrt{0}/2 = 0$	$\sqrt{4}/2 = 1$

Vitesse angulaire

Variation de la position angulaire
sur un intervalle de temps donné

- Vitesse angulaire moyenne : $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$

- Vitesse angulaire instantanée : $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$

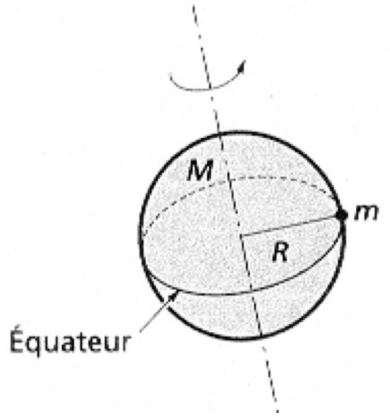
La vitesse angulaire est un vecteur dont
- la direction : axe de rotation
- le sens : règle de la main droite

- Relation entre vitesses angulaire (ω) et linéaire (v)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} \cdot v \quad \rightarrow \quad v = r \cdot \omega$$

$$s = r \cdot \theta$$

Exemple : rotation des étoiles



Considérons une étoile en rotation
Masse *M*, rayon *R*, masse volumique ρ

- Pour que la masse *m* reste sur l'étoile :

$$F_g \geq m a_r \rightarrow G\frac{mM}{R^2} \geq m\omega^2 R \rightarrow \omega^2 \leq G\frac{M}{R^3} = \frac{4}{3}\pi G\rho$$

$$\rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$$

- Masse volumique et vitesse critique

\- soleil : ω = (1/27) tours/jour < ω_c = 8 tours/jour

\- pulsar : ω = 30 tours/seconde implique $\rho \sim 10^{12} \times \rho_{soleil}$

Accélération angulaire

Variation de la vitesse angulaire
sur un intervalle de temps donné

- Accélération angulaire moyenne :

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \; [\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$$

- Accélération angulaire instantanée :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$$

L'accélération angulaire est un vecteur dont
- la direction suit l'axe de rotation
- le sens suit la règle de la main droite

Accélération angulaire

Relation entre accélérations angulaire (α) et linéaires (a_t et a_r)

L'accélération angulaire est reliée à l'accélération tangentielle

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

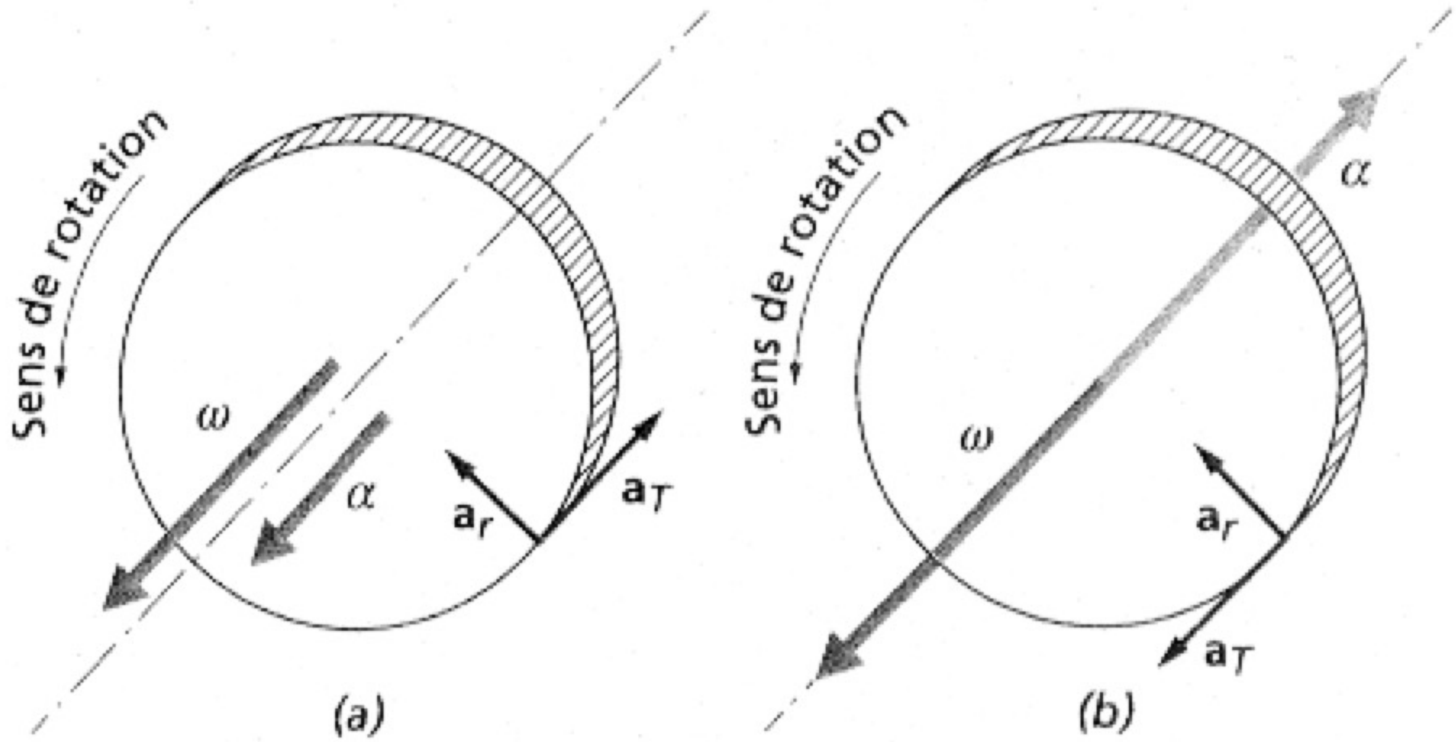
$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad a_T = r \cdot \alpha$$

L'accélération radiale est reliée à la vitesse angulaire

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

$$v = r \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_r = -\omega^2 \cdot r\ \hat{\mathbf{r}}$$

Vitesse et accélération angulaires



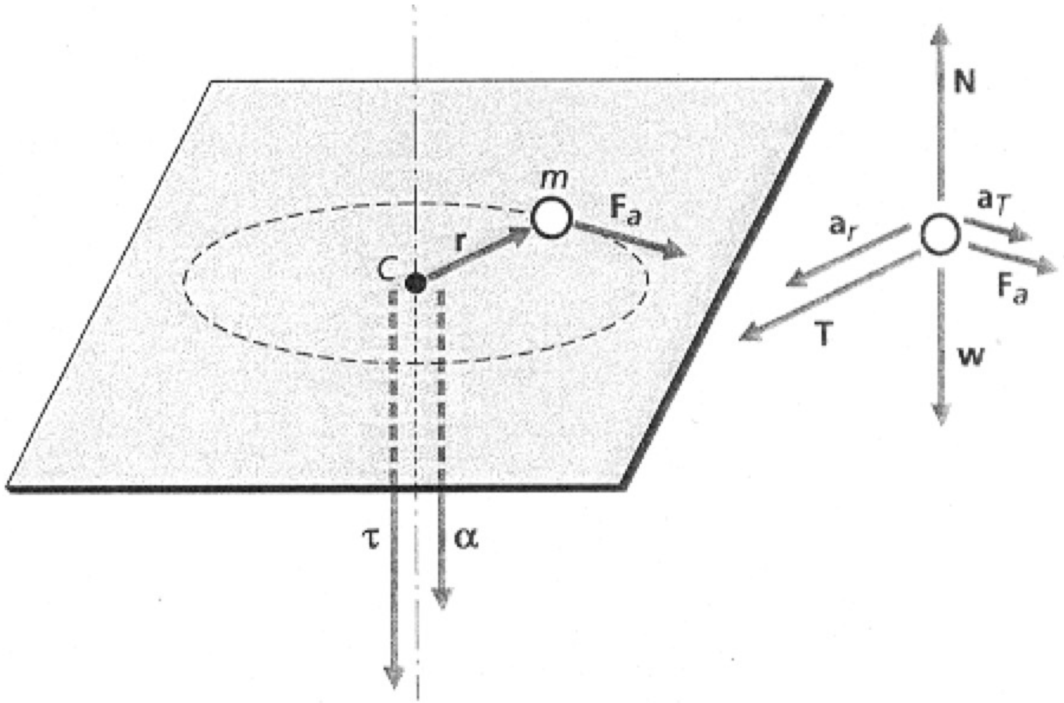
Accélère

Freine

Mouvements de translation et de rotation

Grandeur	Translation	Rotation	Relation
Position	x, s	θ	$s = r\,.\,\theta$
Vitesse	v	ω	$v = r\,.\,\omega$
Accélération	a_T a_r	α	$a_T = r\,.\,\alpha$ $a_r = -\,\omega^2\,r$

Moment de force et accélération angulaire



Moment de force:

$$\tau = r \cdot F_a$$
$$= r \cdot (m\, a_T)$$
$$= r \cdot (m\, r.\alpha)$$
$$= m\, r^2\, \alpha$$

$\tau = I\,\alpha$ avec $I = m \cdot r^2$

le moment d'inertie

(liste p. 127 K&S)

Moment d'inertie

Inertie au mouvement de rotation

Coefficient de proportionalité entre
- le moment de force total appliqué
- l'accélération angulaire résultante

$$\boxed{\Sigma_i \tau_i = I.\alpha}$$

- propriété **intrinsèque** de l'objet (masse + forme)
- dépend de la position de l'axe de rotation

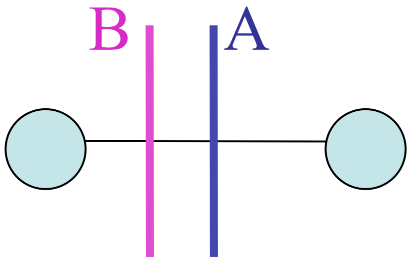
- pour un objet complexe :

$$\boxed{I = \Sigma_i m_i r_i^2}$$

Contribution forte des éléments éloignés de l'axe de rotation

Moment d'inertie

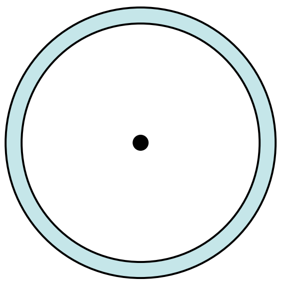
Deux masses ponctuelles : (fonction de la position de l'axe)



$I_A = m\,(L/2)^2 + m\,(L/2)^2 = m\,L^2/2$

$I_B = m\,(L/3)^2 + m\,(2L/3)^2 = 5\,m\,L^2/9$

Roue de bicyclette :



$$\begin{aligned} I &= \Sigma_i \Delta m_i R^2 \\ &= R^2 (\Sigma_i \Delta m_i) \\ &= m\,R^2 \end{aligned}$$

Définition du rayon de giration k :

$$I = m\,k^2 \quad \longrightarrow \quad k = (I/m)^{1/2}$$

MRUA et MCUA

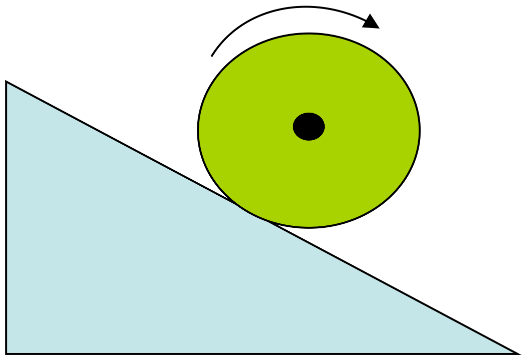
$x = r\,\theta \qquad v = r\,\omega \qquad a = r\,\alpha$

Accélération linéaire *a* constante	Accélération angulaire α constante
$v = v_0 + a\,\Delta t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\,\Delta t$
$<v> = (v_0+v)/2$	$<\omega> = (\omega_0+\omega)/2$
$\Delta x = v_0\,\Delta t + (a/2)\,(\Delta t)^2$	$\Delta\theta = \omega_0\,\Delta t + (\alpha/2)\,(\Delta t)^2$
$\Delta x = (v_0+v)/2\,\Delta t$	$\Delta\theta = (\omega_0+\omega)/2\,\Delta t$
$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta$

Loi de Newton :	
$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ $\longrightarrow$	$\tau = I\,\alpha$

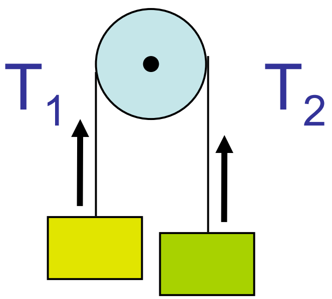
Remarques

- Combinaison rotation-translation :



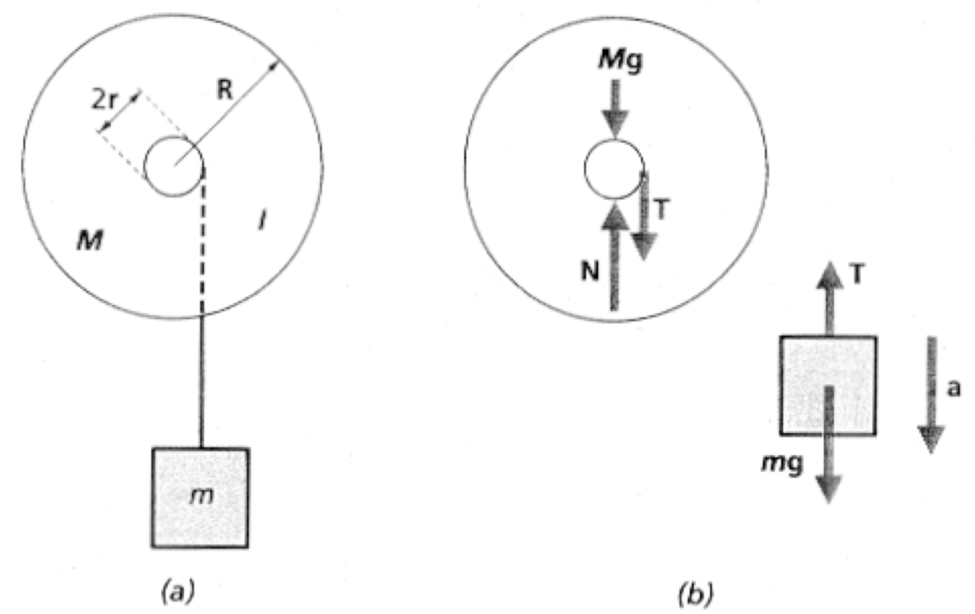
- Translation C.M. : $\Sigma_i \mathbf{F}_i = m\,\mathbf{a}$
- Rotation autour C.M. : $\Sigma_i \tau_i = I\,\alpha$
- Relation : $a = r\,\alpha$

- Poulie de masse non-négligeable :



$T_1 \neq T_2$

Exercice



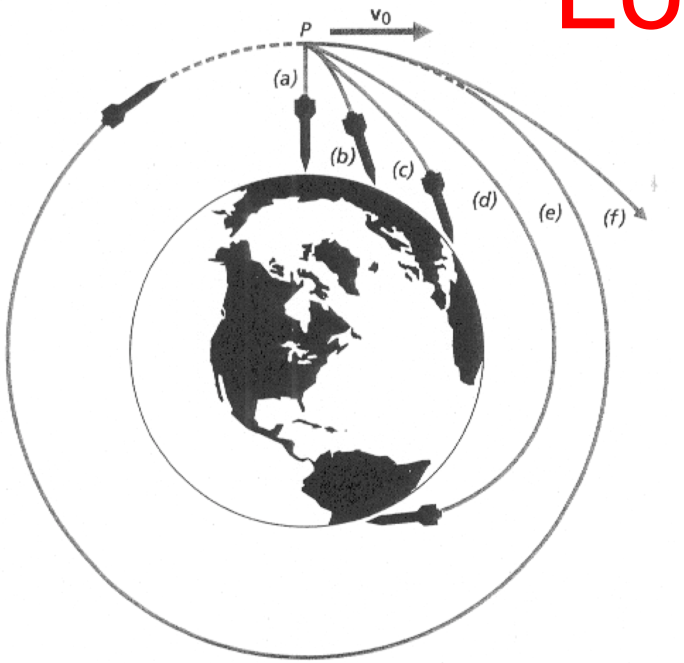
- Déterminer le moment d'inertie

- Pour la masse m :
  $m\,g - T = m\,a$

- Pour la roue :
  $\tau = I\alpha = r\,.\,T$

$$I = \frac{rT}{\alpha} = \frac{r^2 T}{a} = \frac{mr^2(g-a)}{a}$$

Loi de Kepler



- Equation du mouvement

$$G\,\frac{mM_T}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r}$$

- Au cours d'une période : le satellite parcourt 2π r

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

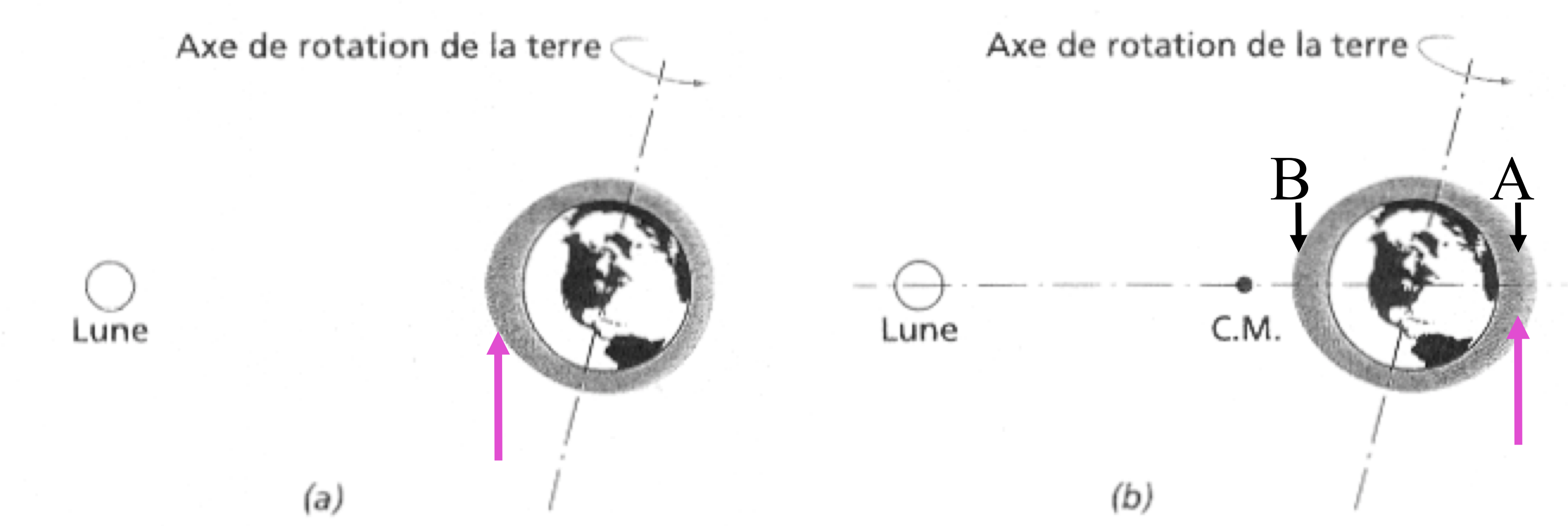
$$G\,\frac{mM_T}{r^2} = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \quad \rightarrow \quad T^2 = \underbrace{\left(\frac{4\pi^2}{M_T G}\right)}_{C} r^3$$

Satellite géostationnaire : $r_s = (T^2/C)^{1/3}$ avec T=24h

r_s = 42 400 km

Les marées

Deux marées hautes par jour :



Renflement équatorial face à la lune : dû à l'attraction de la lune

Renflement équatorial opposé à la lune : dû à la rotation du système Terre-Lune autour CM ($F_A < F_B$ et $\omega^2 R_A > \omega^2 R_B$)