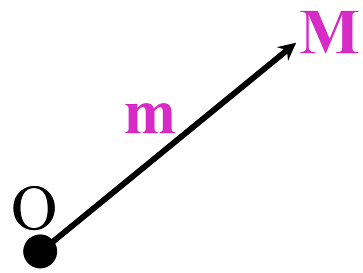
Physique Générale I

Chapitre 2

Le mouvement à deux dimensions

Introduction

Espace à 3 dimensions



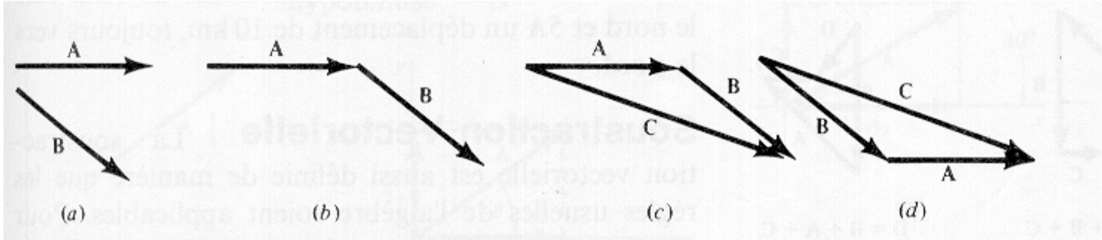
- **Prenant un point de référence O,**
  la position d'un point de l'espace est définie
  par un vecteur (**m**) possédant :
  - une grandeur (norme ou module) (m, $|m|$)
  - une direction et un sens

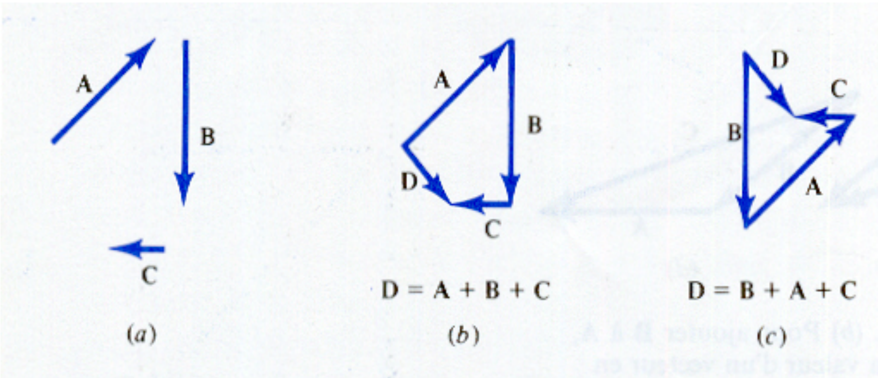
- **Certaines grandeurs sont**
  - **vectorielles : r, v, a, E, …**
  - scalaires : t, T, K, U, …

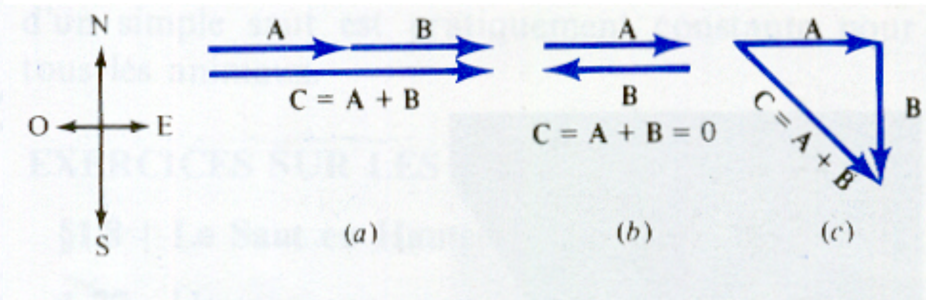
Caractériser le mouvement =
déterminer l'évolution du vecteur position

Addition de deux vecteurs

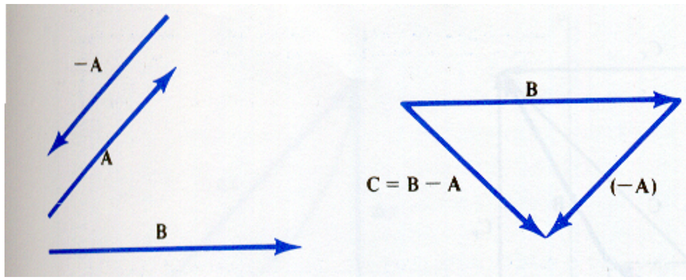
C = A+B







C = B-A = B+(-A)



Repère cartésien

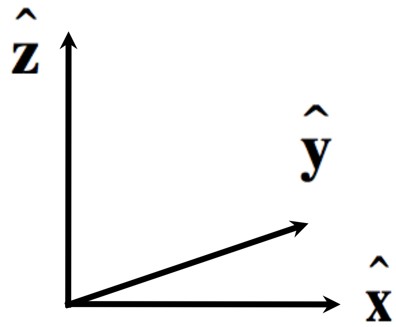
Repère cartésien

système composé de 3 vecteurs

- de grandeur unitaire (symbole ^)

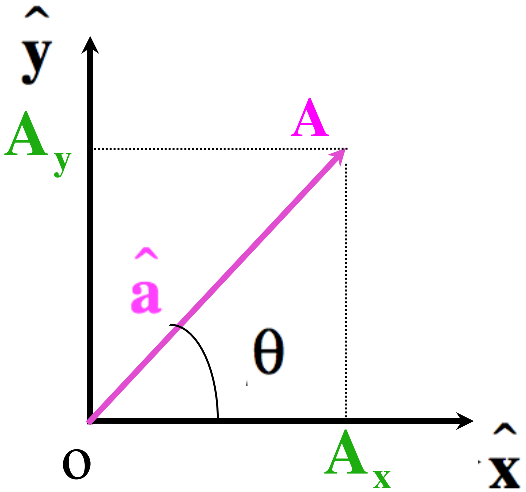
- orthogonaux entre eux.

• Exemple : **repère droitier**



Composantes d'un vecteur

Cas à deux dimensions



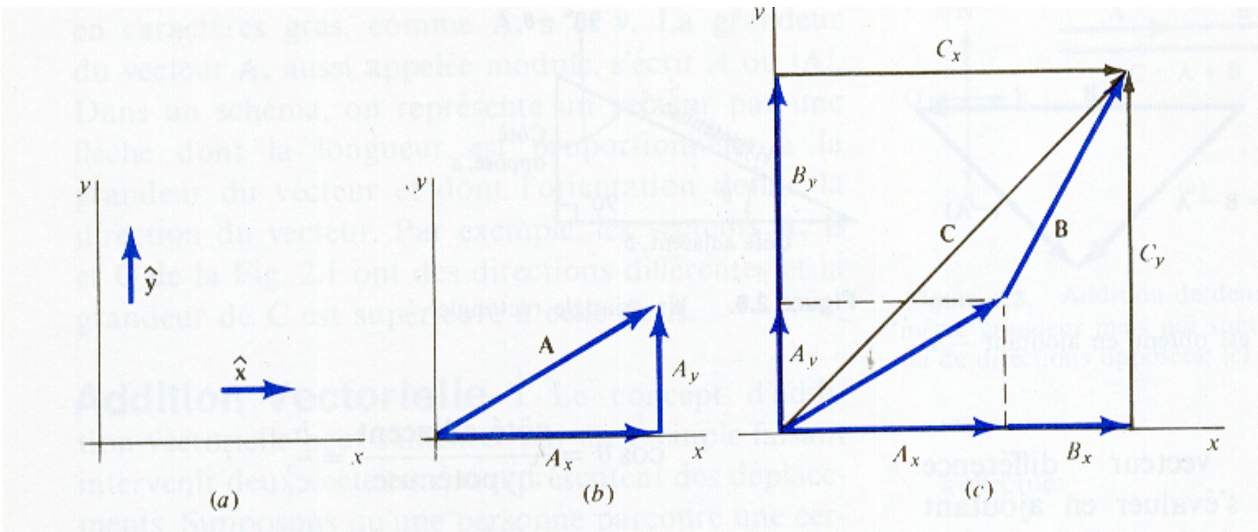
$$\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{a}} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}}$$

$$\text{composantes}: \; A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$

$\dfrac{A_y}{A_x} = \mathrm{tg}\,\theta$	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Opérations sur les vecteurs

- **Addition :** $\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}}$
- **Soustraction :** $\mathbf{A}-\mathbf{B} = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{y}}$
- **Multiplication par un scalaire :** $\alpha\mathbf{A} = (\alpha A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\alpha A_y)\hat{\mathbf{y}}$



Le mouvement à deux dimensions

- **Position (s), vitesse (v) et accélération (a) sont représentées par des vecteurs.**

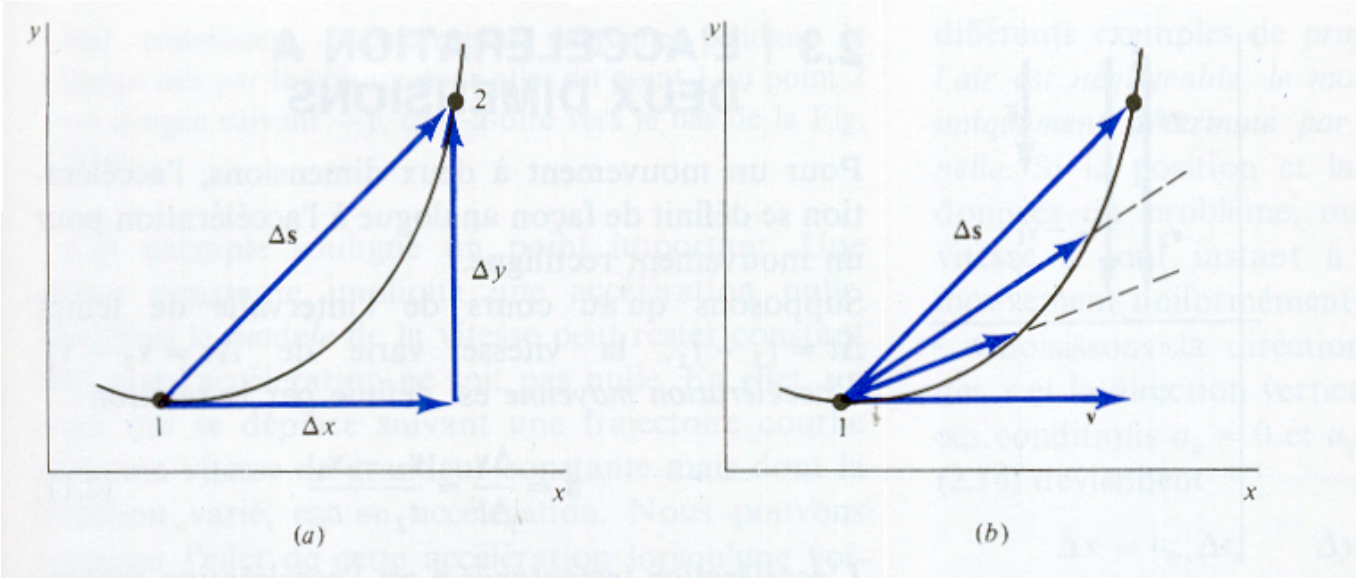
- **Les composantes de ces vecteurs dans une direction donnée satisfont entre-elles aux mêmes relations que dans le cas du mouvement rectiligne.**

Problème du mouvement à deux dimensions

=

Deux problèmes de mouvement rectilignes simultanés et couplés au travers de la variable temps

Le vecteur vitesse



Vitesse moyenne:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{(s_{x2} - s_{x1})\hat{\mathbf{x}} + (s_{y2} - s_{y1})\hat{\mathbf{y}}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta s_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\Delta s_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{y}}$$

$$= \overline{v_x}\;\hat{\mathbf{x}} + \overline{v_y}\;\hat{\mathbf{y}}$$

Vitesse instantanée:

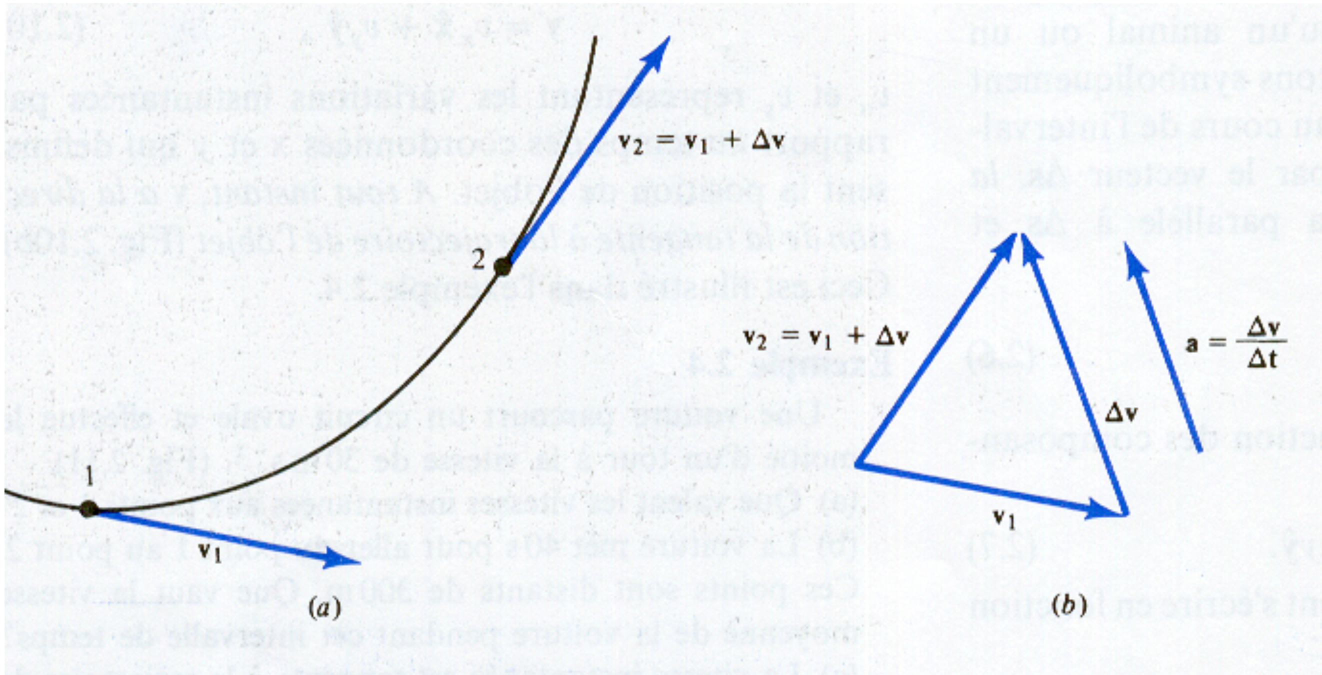
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}$$

$$= \frac{ds_x}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{ds_y}{dt}\hat{\mathbf{y}}$$

$$= v_x\;\hat{\mathbf{x}} + v_y\;\hat{\mathbf{y}}$$

Vecteur vitesse : **tangent** à la trajectoire

Le vecteur accélération



Accélération moyenne:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{(v_{x2} - v_{x1})\hat{\mathbf{x}} + (v_{y2} - v_{y1})\hat{\mathbf{y}}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{y}}$$

$$= \overline{a_x}\ \hat{\mathbf{x}} + \overline{a_y}\ \widehat{\mathbf{y}}$$

Accélération instantanée:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{y}}$$

$$= a_x\ \hat{\mathbf{x}} + a_y\ \hat{\mathbf{y}}$$

Lois du mouvement

Les composantes (a_x,v_x,s_x) et (a_y,v_y,s_y) :
satisfont entre elles aux lois du MRUA

Mouvement plan = composition de deux MRUA

Vitesse ou accélération constante :

≠ module du vecteur constant

= module <u>et</u> direction constants
= chacune des composantes constante

Lois du mouvement à 2 dimensions

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{x}} + a_y\hat{\mathbf{y}} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_x = \text{cste} \qquad a_y = \text{cste}$$

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} \qquad v_x = \frac{ds_x}{dt} \quad v_y = \frac{ds_y}{dt}$$

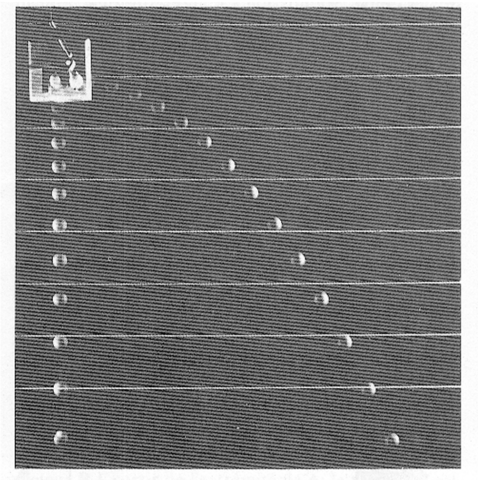
$$v_x = v_{x0} + a_x\Delta t \qquad v_y = v_{y0} + a_y\Delta t$$

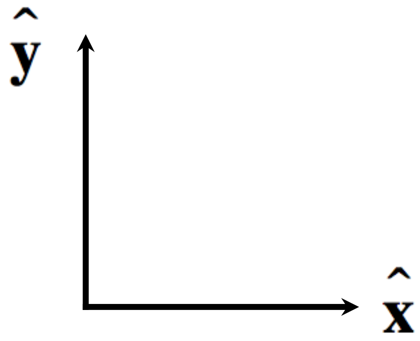
$$\mathbf{s} = s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}$$

$$\Delta s_x = v_{x0}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 \qquad \Delta s_y = v_{y0}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2$$

$$\Delta s_x = \frac{(v_x^2 - v_{x0}^2)}{2a_x} \qquad \Delta s_y = \frac{(v_y^2 - v_{y0}^2)}{2a_y}$$

Application : les projectiles





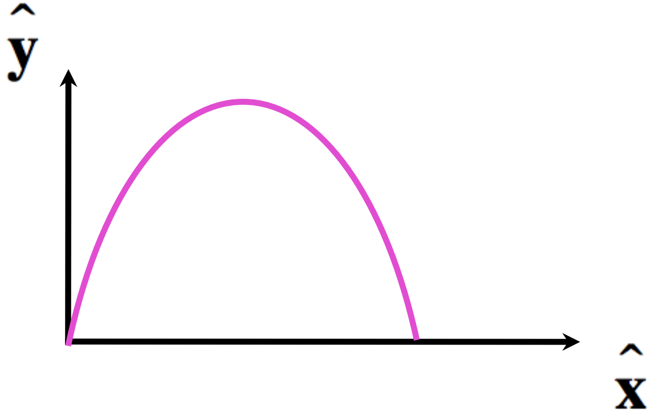
Repère : $\hat{\mathbf{x}}$ horizontal
$\hat{\mathbf{y}}$ vertical

Equations du mouvement :

Direction horizontale	Direction verticale
MRU	MRUA
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_{x0}$	$v_y = v_{y0} - g\Delta t$
$\Delta x = v_{x0}\Delta t$	$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2} g\, (\Delta t)^2$

Les projectiles

Trajectoire parabolique



La trajectoire en fonction du temps d'un objet en chute libre dans un graphe *x-y* est une PARABOLE.

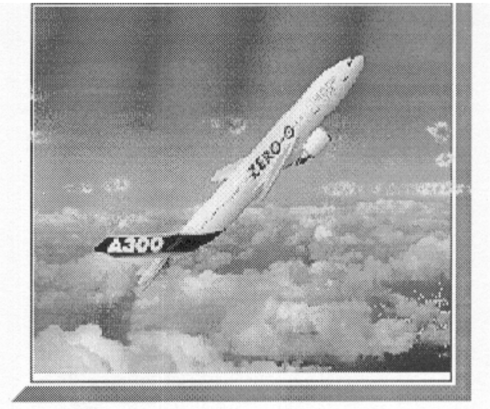
$$\Delta x = v_{x0}\Delta t \qquad \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{x0}}$$

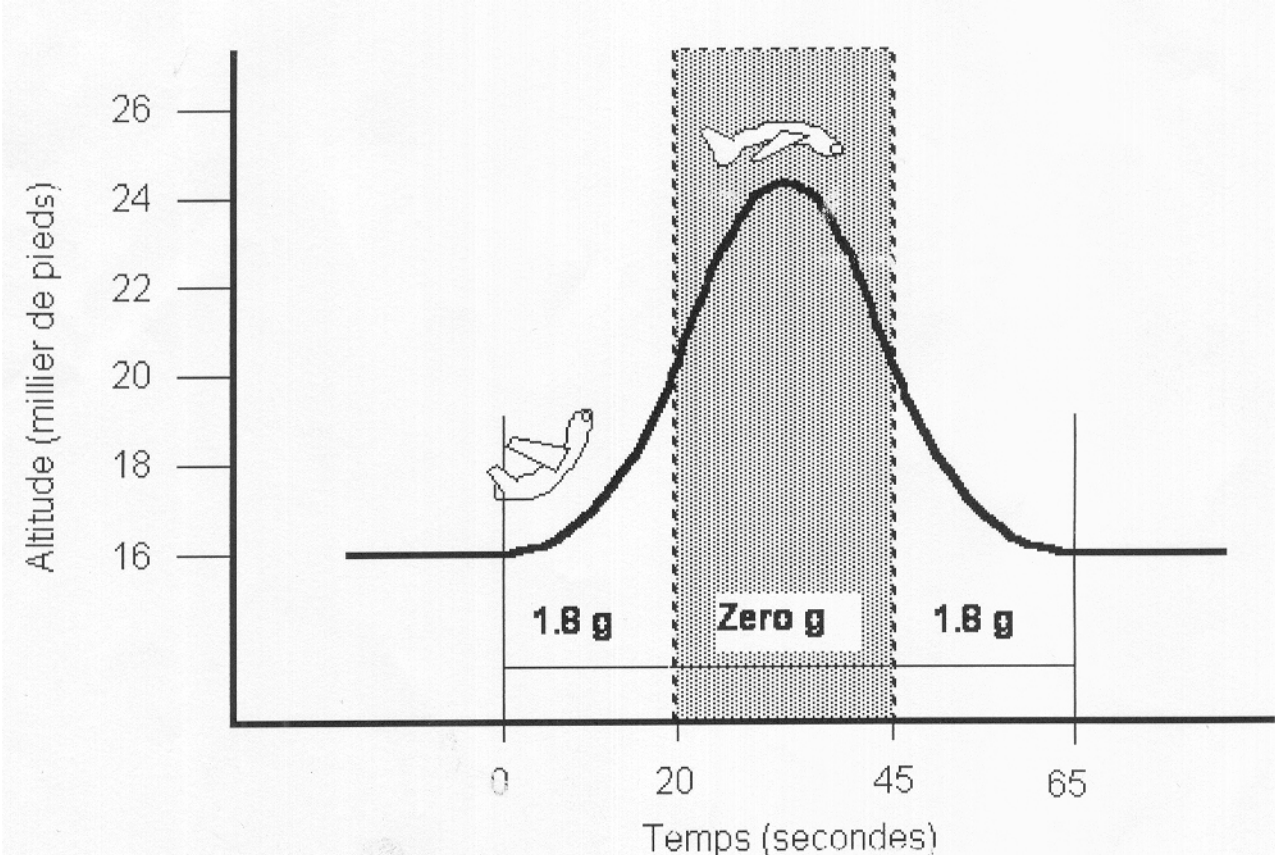
$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2 = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}\Delta x - \frac{g}{2v_{x0}^2}(\Delta x)^2$$

$$\text{"}\ \Delta y = A\,\Delta x - B(\Delta x)^2\ \text{"}$$

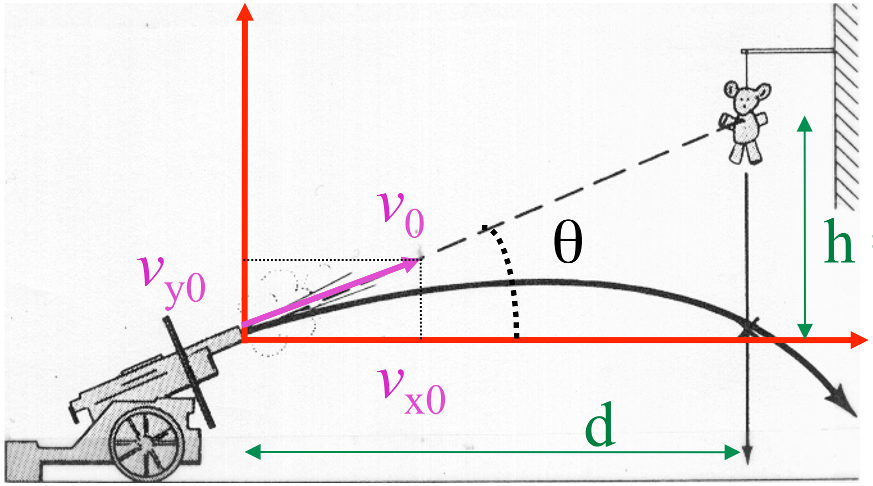
Les projectiles

Trajectoire parabolique





Tir



$\Delta x = d \rightarrow \Delta t = ?$

$$\Delta x = v_0 \cos\theta\, \Delta t = d$$

$$\rightarrow \quad \Delta t = \frac{d}{v_0 \cos\theta}$$

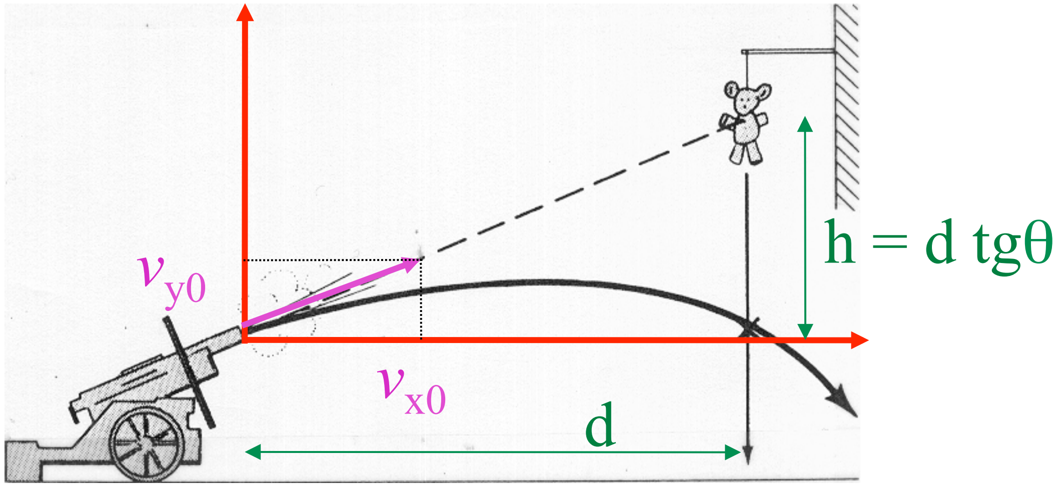
Position du projectile

$$\Delta y = y_P - 0 = v_0 \sin\theta\, \Delta t + \frac{1}{2}(-g)(\Delta t)^2$$

$$= v_0 \sin\theta \frac{d}{v_0 \cos\theta} + \frac{1}{2}(-g)\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$y_P \qquad = d\, tg\theta - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

Tir



Projectile:

$$y_P = \underbrace{d\, tg\,\theta}_{h} - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

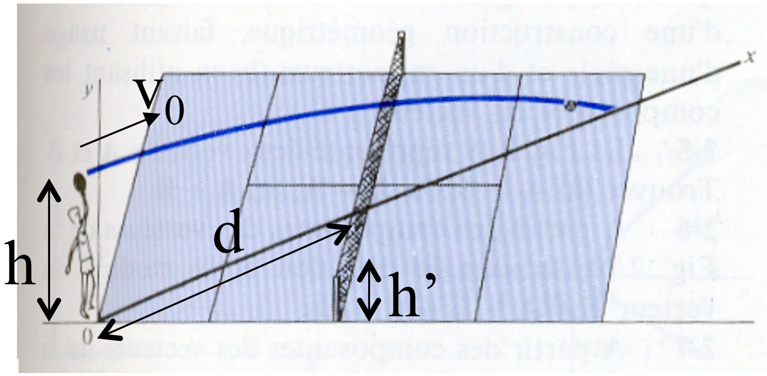
Position de l'ours:

$$\Delta y = y_S - h = \frac{1}{2}(-g)(\Delta t)^2$$

$$= \frac{1}{2}(-g)\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$y_P \qquad = h - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

Tennis



Données :

$v_0 = v_{x0} = 30$ m/s
h = 2,4 m
h' = 0,9 m
d = 12 m

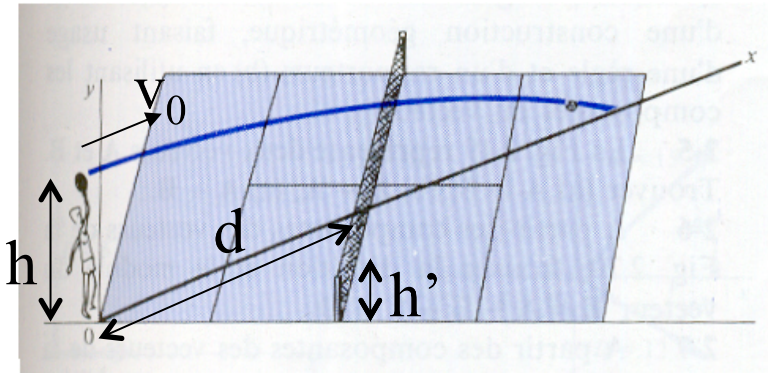
La balle passera-t-elle au dessus du filet ?

$$\Delta x = v_{x0}\Delta t = d = 12\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{x0}} = \frac{12}{30} = 0,4\,\mathrm{s}$$

$$\Delta y = \overbrace{v_{y0}}^{0}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \qquad \rightarrow \Delta y = \frac{1}{2}.9,81.(0,4)^2 = -0,78\mathrm{m}$$

$$y_f = 2,4 - 0,78 = 1,62\mathrm{m} > 0,9\mathrm{m}$$

Tennis



Données : $v_0 = v_{x0} = 30$ m/s
$h = 2{,}4$ m
$h' = 0{,}9$ m
$d = 12$ m

Où la balle atteindra-t-elle le sol ?

$$\Delta y = \overbrace{v_{y0}}^{0}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = -2,4\text{m} \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2\times 2,4}{g}} = 0,7\text{s}$$

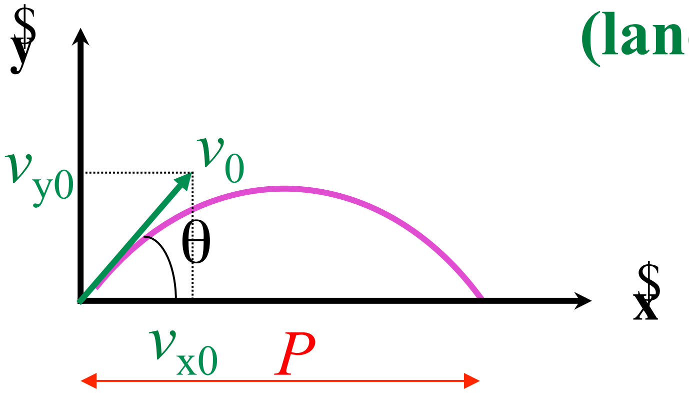
$$\Delta x = v_{x0}\Delta t = 30\times 0,7 = 21\text{m}$$

Service à l'horizontale : temps de vol indépendant de v_0
portée proportionnelle à v_0

$\Rightarrow$ **adapter l'angle de service à la vitesse**

Portée et temps de vol

(lancé depuis le sol)



$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{y0} = v_0 \sin\theta$$

Temps de vol [Δy = 0]

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2} g(\Delta t)^2 = 0$$

$$= (v_{y0} - \frac{1}{2} g\Delta t)\ \Delta t = 0$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}}$$

Portée [Δx]

$$P = v_{x0}\Delta t = v_0 \cos\theta\ \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

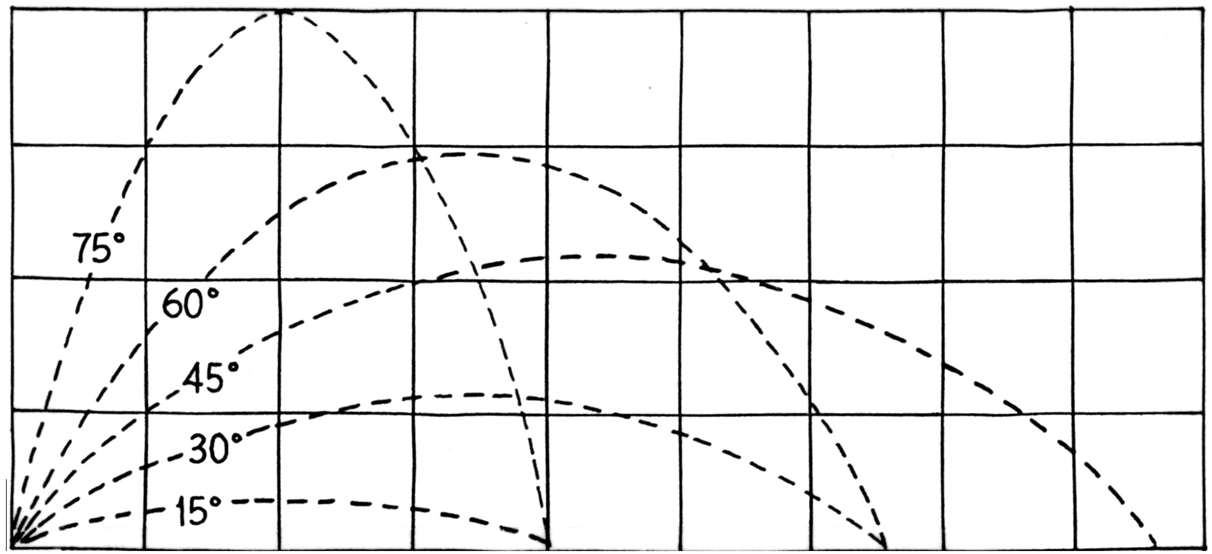
$$= \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\boxed{P = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)}$$

Angle optimum

Compromis entre portée et temps de vol

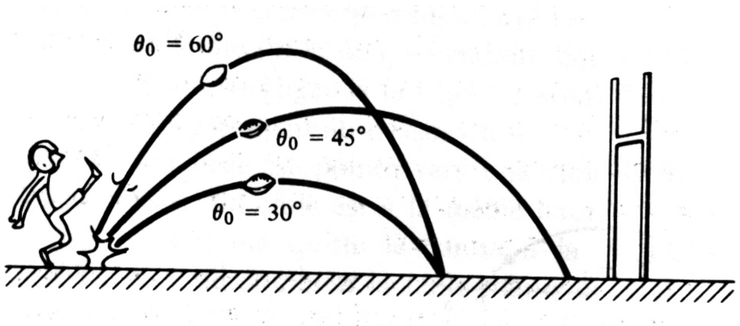
$P(\theta)$

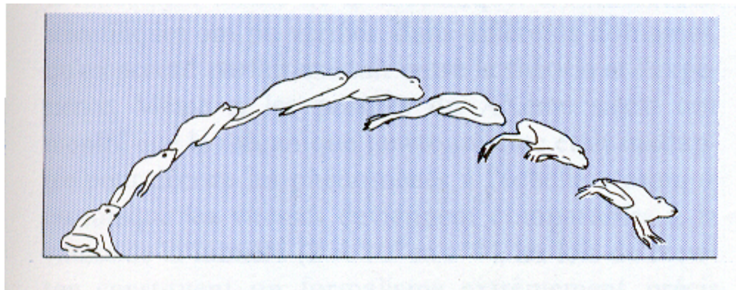


$$\Delta t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \qquad P = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

Angle optimum

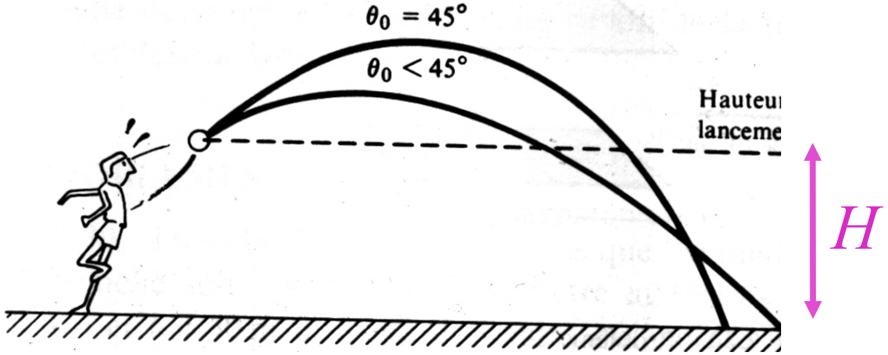
Compromis entre portée et temps de vol





Portée et temps de vol

(lancé d'une hauteur *H*)



La portée optimale n'est plus pour $\theta = 45°$

Temps de vol [Δy = -H]

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = -H$$

$$\Delta t = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gH}}{g}$$

Portée [Δx]

$$P = v_{x0}\Delta t$$

$$P = \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\theta) + \frac{v_0 \cos\theta}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gH}$$