Physique Générale I

Chapitre 6

Travail - Energie - Puissance

Introduction

Force = raison de l'accélération
Energie / potentiel = origine de la force

La mécanique de Newton est déterministe:

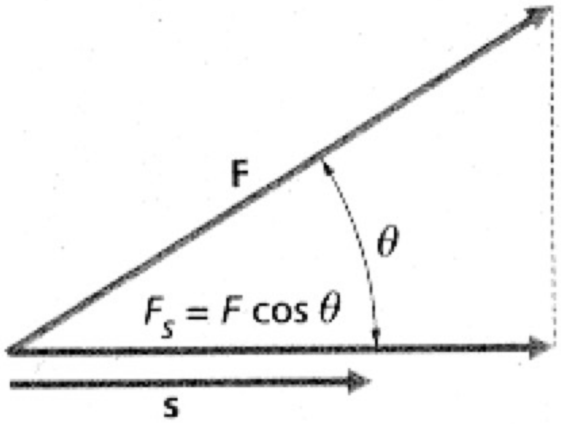
Si on connait en F(t) x(t) v(t), on peut prédire x(t+Δt).

En pratique : résolution parfois fastidieuse (numérique!)

Solution : notions globales + lois de conservation

variation d'énergie = travail effectué par une force

Le travail



Intuition/définition :
Seule la composante de la force dans la direction du déplacement peut effectuer un travail

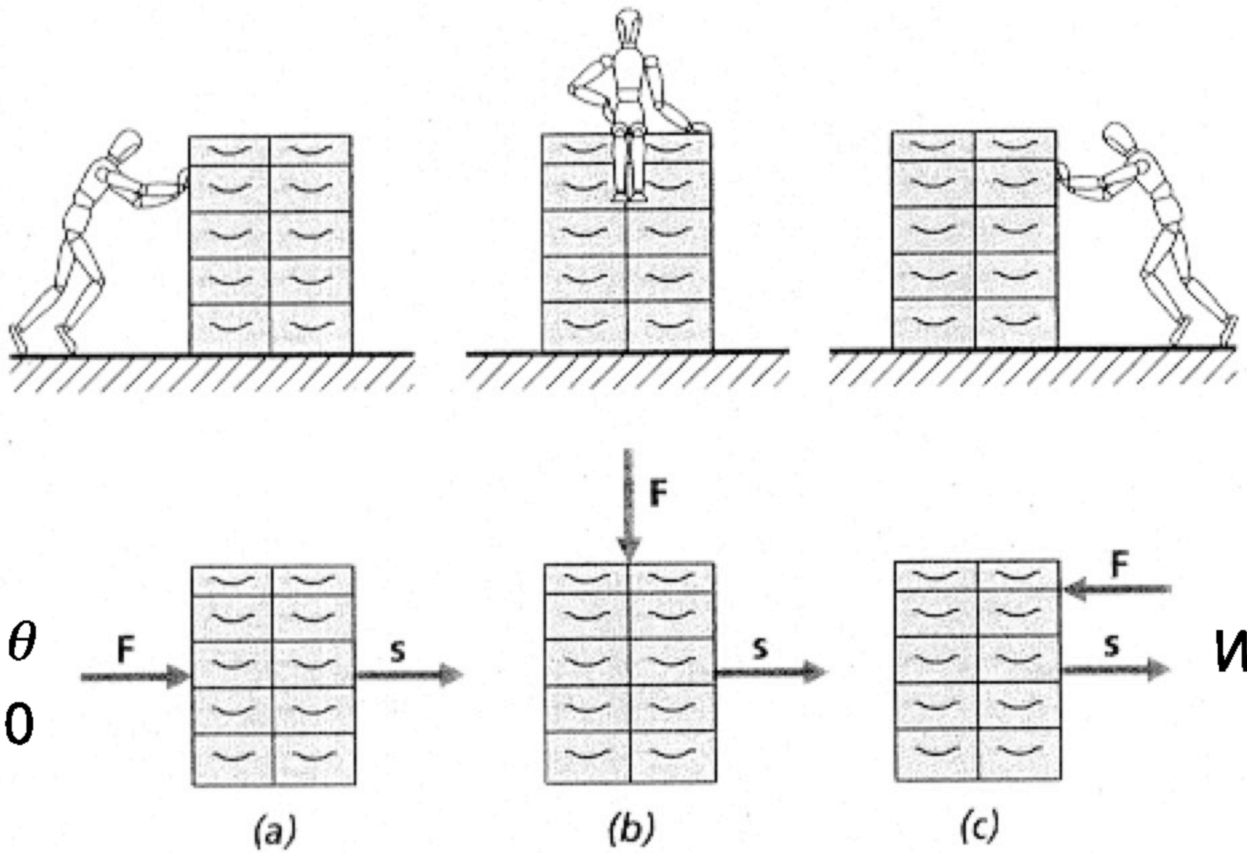
Le travail W: $W = F_s\ s = F\ s\ \cos\theta$ [J = N.m]

unité : le Joule (kg m^2 / s^2)

Produit Scalaire :
opération entre deux vecteurs dont le résultat est un scalaire: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\,B\cos\theta$

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{F} = F\ s\ \cos\theta$$

Le travail



$$W = F s \cos\theta$$
$$= +F s \geq 0$$

La personne effectue un travail sur l'objet

$$W = F s \cos\theta$$
$$= 0$$

$$W = F s \cos\theta$$
$$= -F s \leq 0$$

L'objet effectue un travail sur La personne

Généralisation

On a fait l'hypothèse implicite que F était constante

Courts intervalles où F est constante:

$$\Delta W_i = F_i \cos\theta_i \, \Delta S_i$$

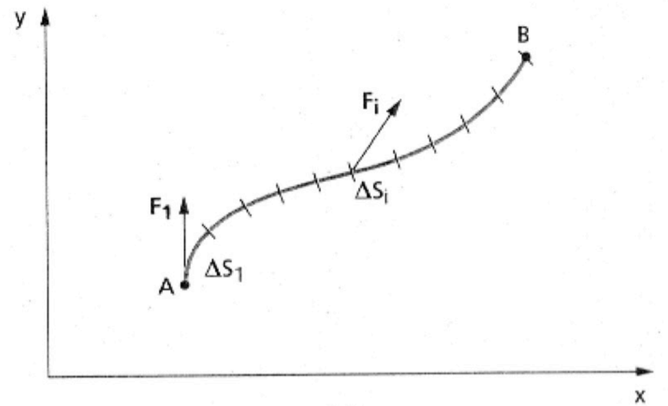
Travail effectué de A → B:

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i F_i \cos\theta_i \, \Delta S_i$$

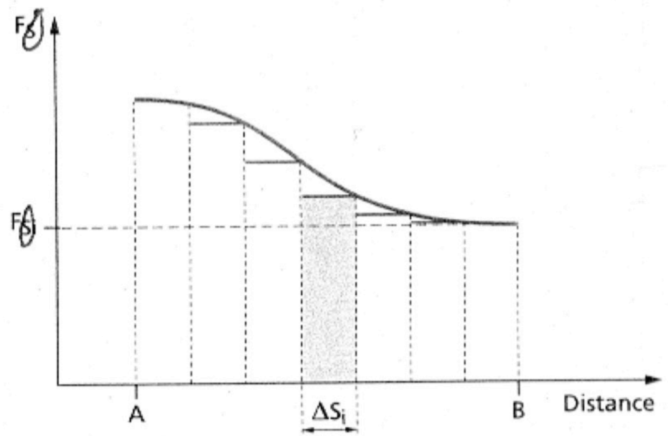
Prenant la limite pour $\Delta S_i \rightarrow 0$

$$W = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i F_i \cos\theta_i \, \Delta S_i$$

$$= \int_A^B F \cos\theta \, ds = \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{s}$$



(a)



aire sous courbe $F_s(s)$

Energie cinétique

Energie = capacité à effectuer un travail

Energie cinétique = capacité à effectuer un travail de par son mouvement

Principe fondamental :

L'énergie cinétique finale d'un objet

=

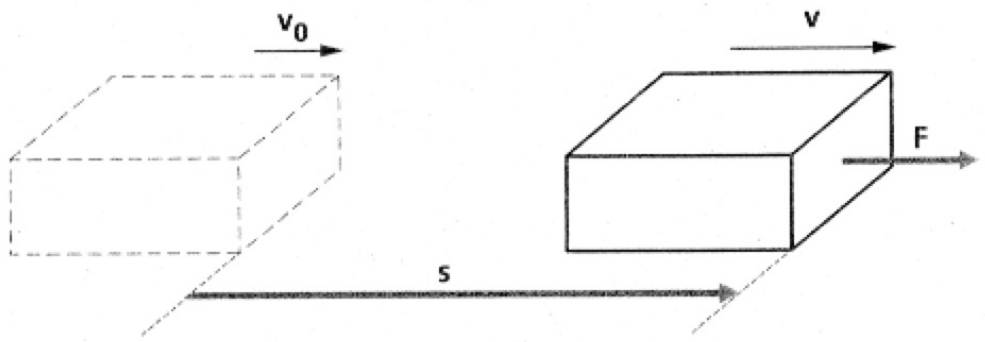
l'énergie cinétique initiale

+

le travail de toute les forces agissant sur l'objet (positif ou négatif)

$$K = K_0 + W$$

Expression de l'énergie cinétique



objet en mouvement
- masse m
- vitesse v_0

- Pour accélérer jusqu'à v, appliquer **F** sur une distance d :

  $F = m\, a$ et $v^2 = v_0^2 + 2\, a\, d$

- Le travail effectué :

  $W = F \,.\, d = m\, a\, d = m\, (v^2 - v_0^2)\, d / 2d$

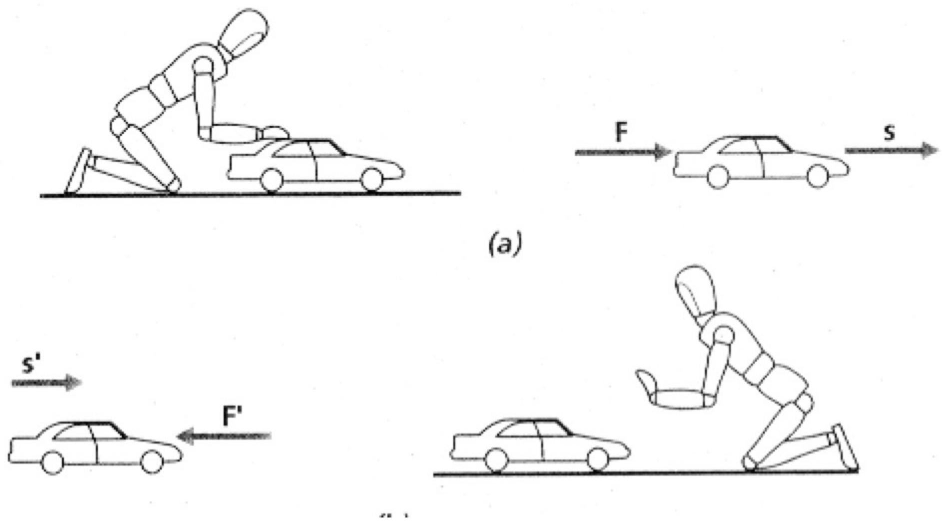
  $= mv^2/2 - mv_0^2/2 = K - K_0$

$$\longrightarrow \boxed{K = \frac{mv^2}{2}} + \underbrace{C}_{=0}$$

pour que K=0 quand v=0

Expression de l'énergie cinétique

On exerce une force de 5N
sur une distance de 1m
La masse de la voiture :
m = 0.1 kg



- Le travail effectué :

$$W = F\ .\ S = (5\mathrm{N})\ .\ (1\mathrm{m}) = 5\ \mathrm{J}$$

- L'énergie cinétique finale :

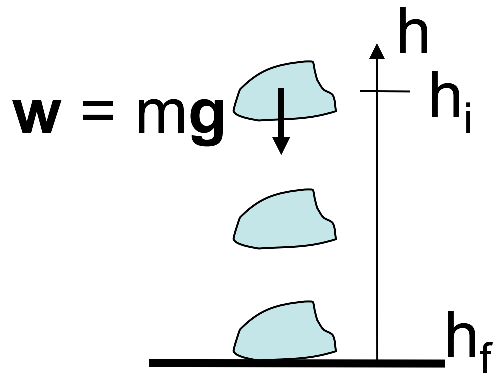
$$K = K_0 + W = 0 + 5 = 5\ \mathrm{J}$$

- La vitesse finale :

$$K = m.v^2/2 = 5\ \mathrm{J} \quad \rightarrow \quad v = (2K/m)^{1/2}$$
$$= (10/0.1)^{1/2} = 10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

L'énergie potentielle gravitationnelle

- K mesure le travail que peut effectuer un objet en raison de son mouvement
- Un objet au repos peut aussi **potentiellement** effectuer un travail



Exemple : masse à une hauteur h

Peut effectuer un travail que ne peut effectuer le même objet en $h = 0$.

Pourquoi ? Au cours de sa chute l'objet acquiert ΔK = travail de **w**

$$\Delta K = W_{grav} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = -mg\,(h_f - h_i) = mgh_i - mgh_f$$

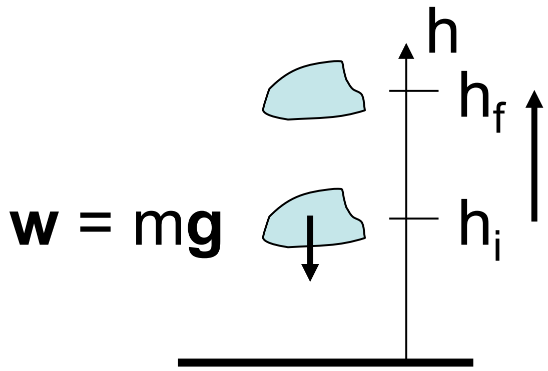
On pose: $\Delta \mathcal{U} = \mathcal{U}_f - \mathcal{U}_i = -\Delta K$

$\rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U} = mgh} + C$

$C = 0$ *pour que* $\mathcal{U} = 0$ *quand* $h = 0$

L'énergie potentielle gravitationnelle

- Déplaçant l'objet de $h_i \rightarrow h_f$, w effectue un travail :



$$W_g = -mg\,(h_f - h_i) < 0$$

- L'objet acquiert de l'énergie potentielle :

$$\Delta\,\mathcal{U} = \mathcal{U}_f - \mathcal{U}_i = -W_g > 0$$

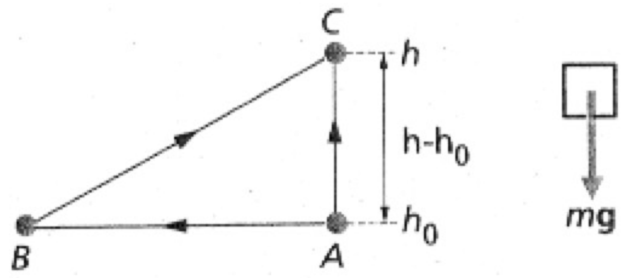
$$\Delta\,\mathcal{U} = mgh_f - mgh_i$$

$$\boxed{\mathcal{U} = mgh} + C$$

$C = 0$ pour que
$\mathcal{U} = 0$ quand $h = 0$

Forces conservatives

Force dont le travail ne dépend
que des positions initiale et finale:
pas du chemin suivi



A → C : $W_g = - mg\ (h - h_0)$

A → B → C : $W_g = 0 - mg\ (h - h_0)$

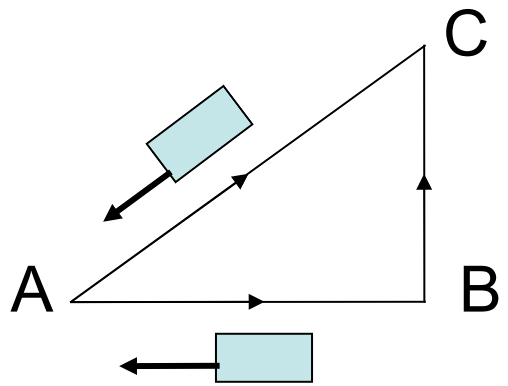
C'est cette propriété qui a permis de remplacer le travail le long d'un chemin par une différence finie

Autres forces conservatives : - force de Coulomb, magnétique,
- force de rappel d'un ressort, …

Forces dissipatives

Les forces de frottement ne sont pas conservatives.

Ex: frottement sur un plan



$$A \rightarrow C: \quad W_{f1} = -\mu_c N\,|AC|$$
$$A \rightarrow B \rightarrow C: \quad W_{f2} = -\mu_c N\,(|AB|+|BC|) \neq W_{f1}$$

Les frottements s'opposent au mouvement

Travail fourni toujours <0

De l'énergie est **dissipée** → forces **dissipatives**

Conservation de l'énergie

- Principe fondamental : $K = K_0 + W$

- Le travail : $W = W_c + W_a$

forces **c**onservatives ↵   **a**utres forces

- $K = K_0 + W_c + W_a$ et $W_c = -(\mathcal{U} - \mathcal{U}_0)$

$$\boxed{(K + \mathcal{U}) = (K_0 + \mathcal{U}_0) + W_a}$$

Conservation de l'énergie

On appelle énergie mécanique $E_0 = K_0 + \mathcal{U}_o$

$$\boxed{E = E_0 + W_a}$$

$$\underbrace{K + \mathcal{U}}_{E} = \underbrace{K_0 + \mathcal{U}_0}_{E_0} + W_a$$

En absence de travail des forces extérieures (W_a=0),

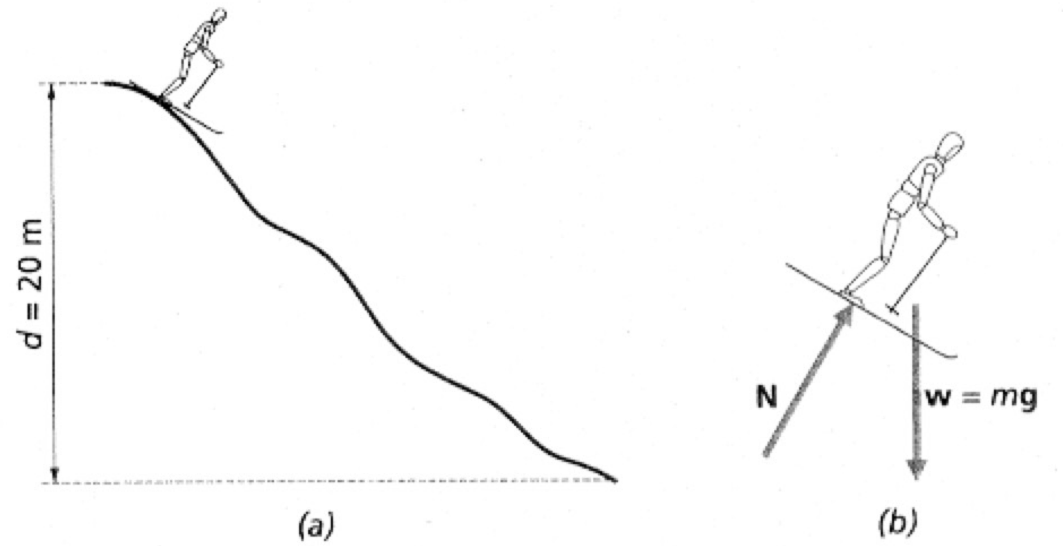
L'énergie est **conservée** ($K + \mathcal{U} = K_0 + \mathcal{U}_0$)

Résolution des problèmes :

1. Identifier **l’ensemble des forces** qui s’exercent sur l’objet
2. Pour les **forces conservatives** : inclure un terme d’énergie potentielle (ressort, attraction gravitationnelle …)
3. Pour les **forces non-conservatives** : estimer le travail effectué par la force
4. Comparer l’équation de conservation en **deux points** particuliers du mouvement

- K renseigne sur la **vitesse**
- $\mathcal{U}$ sur la **position** (au moins partiellement)

Exercice



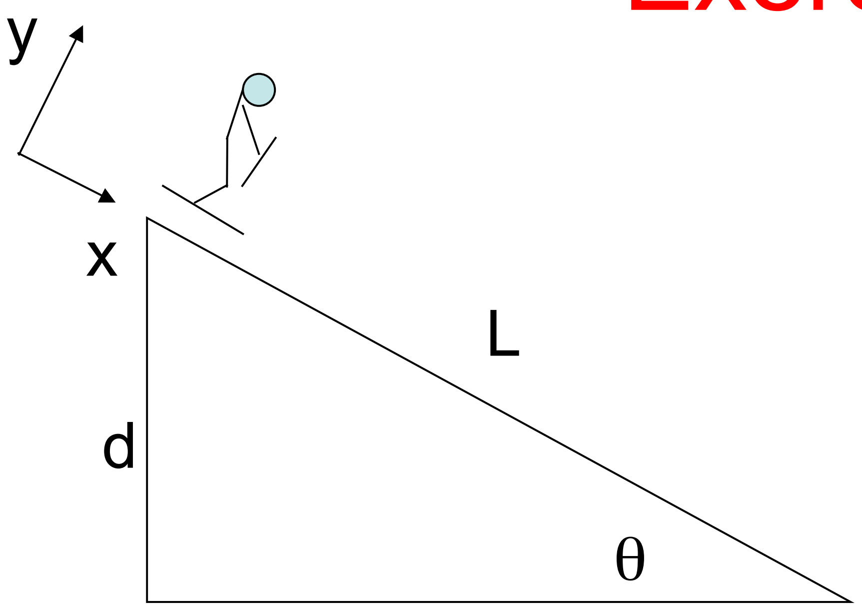
forces : $\mathbf{w} \rightarrow \Delta\mathcal{U}$

$\mathbf{N} \perp \mathbf{s} \rightarrow W_a = 0$

Vitesse en bas de la pente ?

$$\underbrace{K_s}_{0} + \underbrace{\mathcal{U}_s}_{mgd} = \underbrace{K_p}_{\frac{mv^2}{2}} + \underbrace{\mathcal{U}_p}_{0} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

Exercice



$$F_x = w\sin\theta = m\underbrace{g\sin\theta}_{a_x}$$

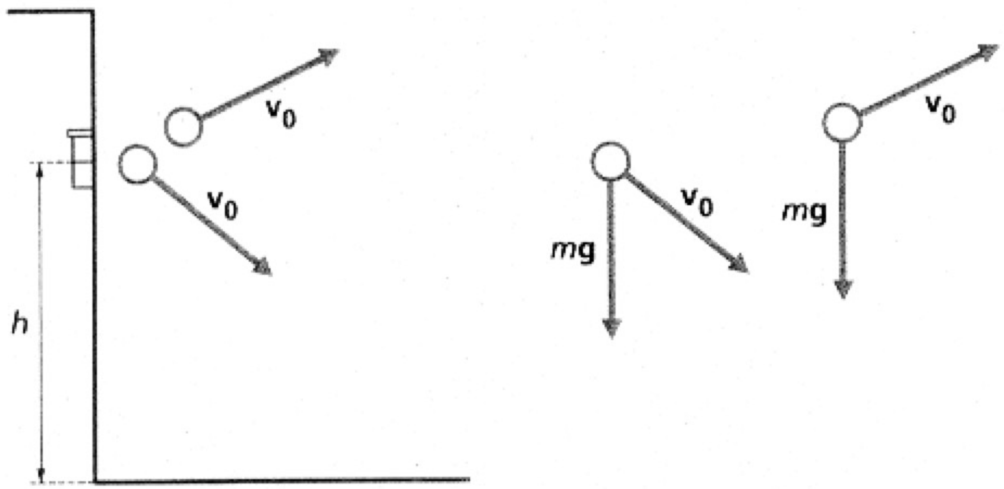
$$L = \frac{d}{\sin\theta}$$

Vitesse en bas de la pente?

$$v^2 = v_0^2 + 2\cdot a_x \cdot L$$

$$= 0 + 2\cdot g\cdot \sin\theta \cdot \frac{d}{\sin\theta} \longrightarrow v = \sqrt{2gd}$$

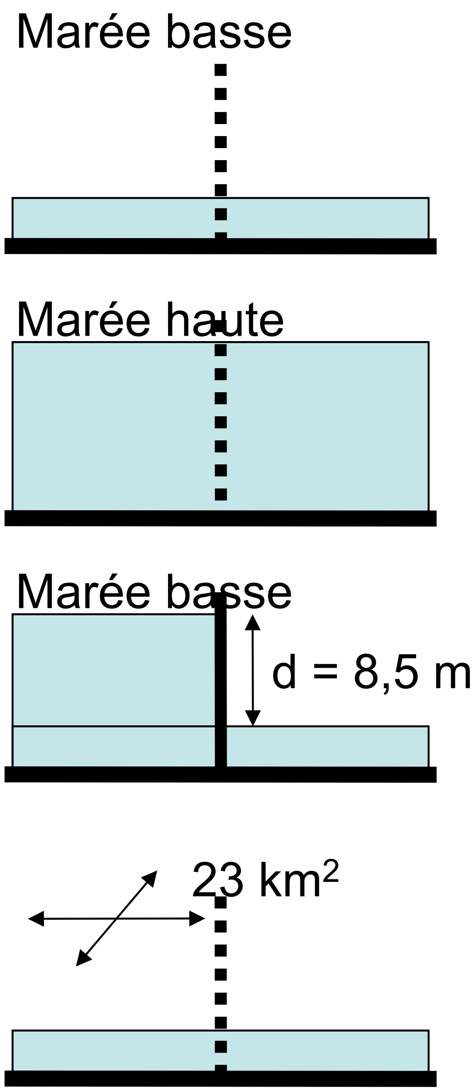
Exercice



Vitesse en atteignant le sol ?

$$\underbrace{K}_{\frac{mv^2}{2}} + \underbrace{\mathcal{U}}_{0} = \underbrace{K_0}_{\frac{mv_0^2}{2}} + \underbrace{\mathcal{U}_0}_{mgh} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Barrage sur la Rance



Quelle énergie disponible ?

$$W_a = \mathcal{U} - \mathcal{U}_0$$

$$= -m\,g\,h$$

$$\rho A d \qquad\qquad d/2$$

$$= -1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 23.10^6\,\text{m}^2 \times 8.5\,\text{m}$$

$$\times\, 9.81\,\frac{\text{m}}{s^2} \times \frac{8.5}{2}\,\text{m}$$

$$= -8.150\,10^{12}\,\text{J} = \boxed{8.15\,\text{GJ}}$$

Force d'attraction gravitationnelle

- Pour déterminer $\mathcal{U}$ nous avons supposé:

  Hypothèse : g = constante

- En toute généralité:

$$\mathbf{F_g} = -G\,\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}\,\hat{\mathbf{r}} = -G\,\frac{mM_T}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$g = -G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \text{constante si } h = 0$$

Force conservative

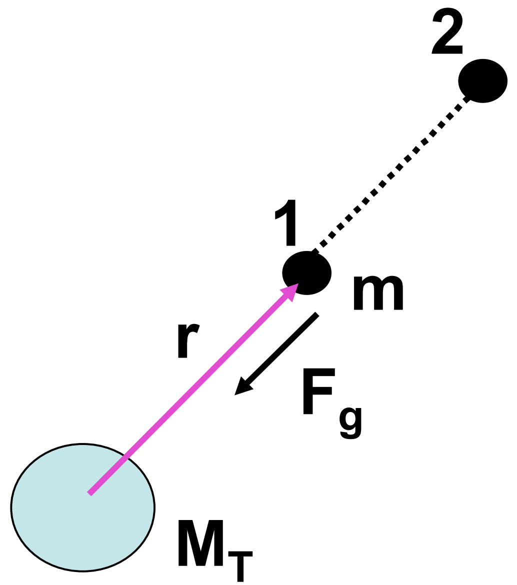
- $\mathbf{F_g}$ est conservative :

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \mathbf{F_g} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_1^2 -G \frac{mM_T}{r^2} dr$$

$$= G \frac{mM_T}{r} \Bigg|_1^2$$

$$= \underbrace{G \frac{mM_T}{r_2}}_{-\mathcal{U}_2} - \underbrace{G \frac{mM_T}{r_1}}_{-\mathcal{U}_1}$$



Energie potentielle gravitationnelle

- On définit l'énergie potentielle:

$$\Delta W = -\Delta \mathcal{U} = -(\mathcal{U}-\mathcal{U}_0)$$

$$\boxed{\mathcal{U} = -G\,\frac{m\,M_T}{r}} + C$$

$= 0$ pour que $\mathcal{U} = 0$
lorsque $r = \infty$

Connection avec $\mathcal{U}$ = mgh

$$\mathcal{U} = -G\,\frac{mM_T}{(R_T + h)}$$

$$= -G\,\frac{mM_T}{R_T}\,\frac{1}{(1+\dfrac{h}{R_T})}$$

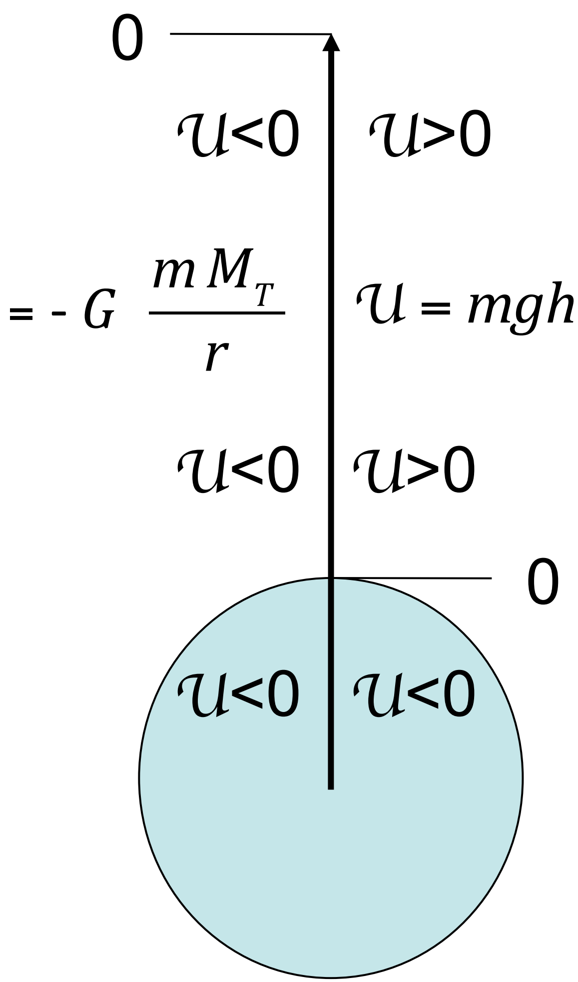
si $x = \dfrac{h}{R_T} \ll 1$

$$\frac{1}{(1+x)} \simeq (1 - x + \ldots)$$

$$\simeq -G\,\frac{mM_T}{R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T} + \ldots\right)$$

$$= \underbrace{-G\,\frac{mM_T}{R_T}}_{C} + m\underbrace{\frac{GM_T}{R_T^2}}_{g}h$$

$$= mgh + C$$



Energie d'un satellite

- Energie potentielle :

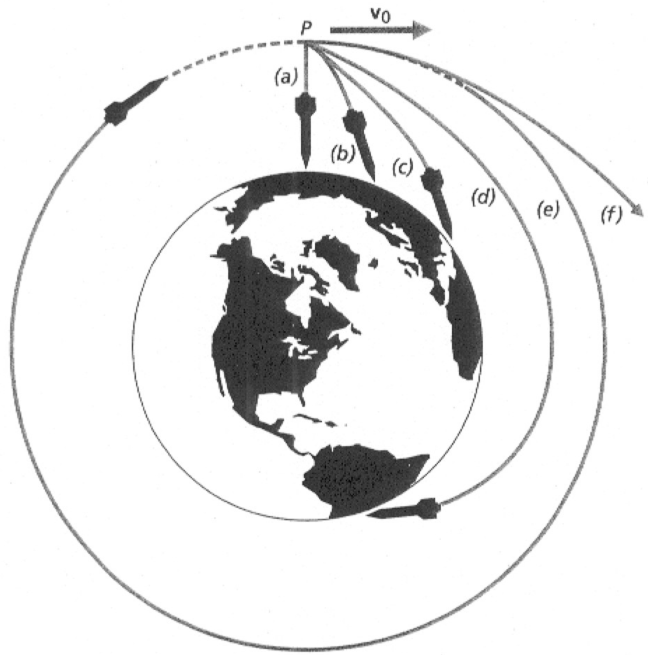
$$\mathcal{U} = - G \frac{m M_T}{r}$$

- Energie cinétique :

$$G\frac{mM_T}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow mv^2 = G\frac{mM_T}{r}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r} = -\frac{1}{2}\mathcal{U}$$



- Energie mécanique :

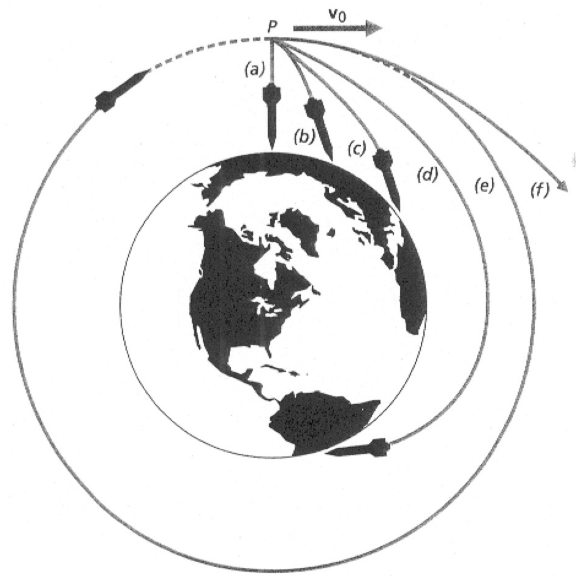
$$E = K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}\mathcal{U}$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r}$$

Travail nécessaire pour placer un satellite en orbite : r = 2R$_T$

- Energie initiale :

$$E_0 = \mathcal{U}_0$$
$$= -G\,\frac{mM_T}{R_T}$$



- Energie finale :

$$E = K + U$$
$$= -\,\frac{1}{2}G\,\frac{m\,M_T}{2R_T}$$

-Travail nécessaire:

$$W_a = E - E_0$$
$$= \frac{3}{4}G\,\frac{m\,M_T}{R_T}$$

Travail pour placer un satellite en orbite – suite

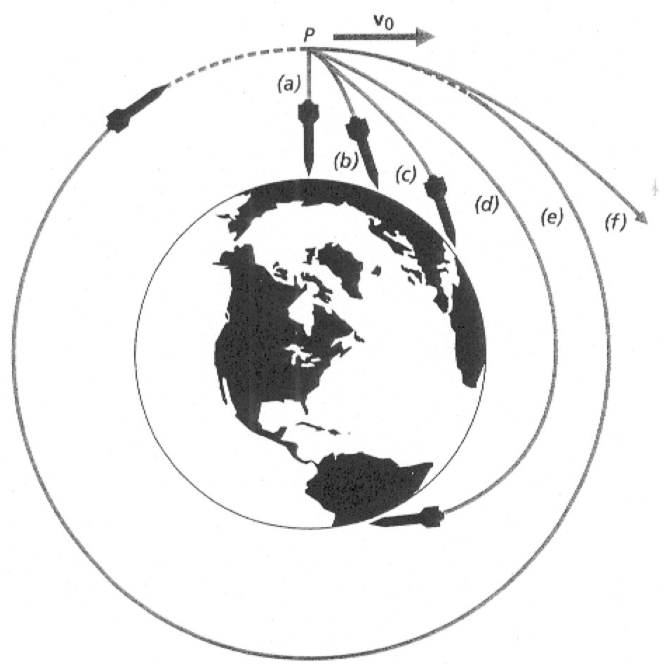
-Travail :

$$W_a = \frac{3}{4} G \frac{m M_T}{R_T}$$

-Energie cinétique (catapulte):

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{4} G \frac{m M_T}{R_T}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} G \frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2} g\, R_T}$$



Vitesse de libération d'un satellite

Déf: Vitesse initiale minimum permettant d'échapper à l'attraction terrestre

- On a :

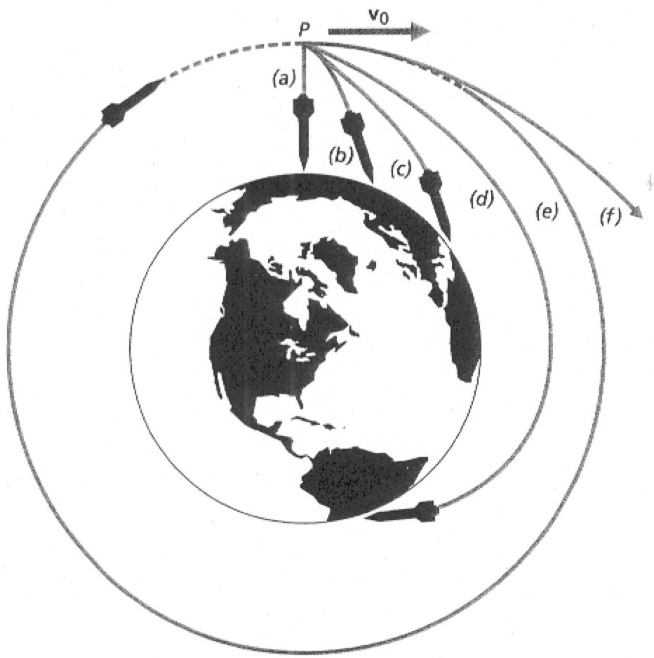
$$\underbrace{K}_{\geq 0} + \underbrace{\mathcal{U}}_{0} = \underbrace{K_0}_{mv_0^2/2} + \underbrace{\mathcal{U}_0}_{-GmM_T/R_T}$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} \geq G\frac{mM_T}{R_T}$$

- Vitesse de libération :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.81 \times 6.38\ 10^6} \simeq 40\,000 \text{ km/h}$$



Puissance

Déf: travail effectué par unité de temps

- **Puissance moyenne :**
  Lorsqu'un travail ΔW est effectué sur un intervalle de temps Δt :

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}]$$

- **Puissance instantanée :**
  puissance moyenne sur un intervalle de temps extrèmement court :

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Puissance

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

Remplacer la définition générale du travail:

$W = \mathbf{F}.\mathbf{ds} = F \cos\theta \, ds = F_S \, ds$

On a alors:

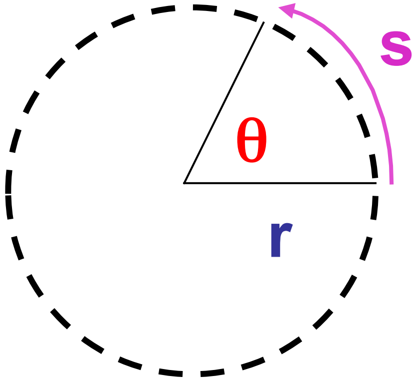
$$P = F_S \, ds / dt = \mathbf{F} . \mathbf{v}$$

Cette expression vaut pour toutes les forces et trajectoires

Mouvement de rotation

On a les relations : $s = r\theta$ $v = r\omega$

$a_T = r\alpha$ $a_r = r\omega^2$



Le travail :

$$W = s \cdot F = \theta \cdot \underbrace{r \cdot F}_{\tau} = \theta \cdot \tau$$

La puissance :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = \omega \cdot \tau$$

L'énergie cinétique :

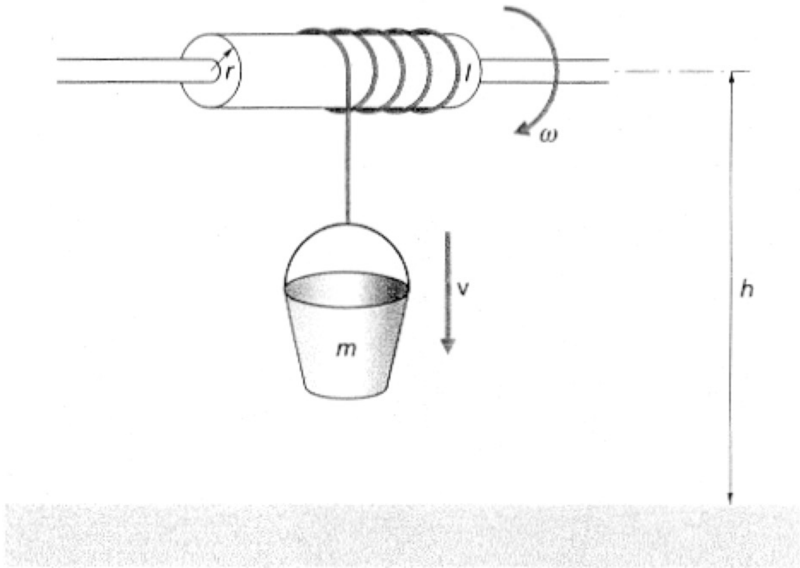
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\underbrace{mr^2}_{I}\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$W = \tau \cdot \theta$$
$$\mathcal{P} = \tau \cdot \omega$$
$$K = \frac{1}{2}I \cdot \omega^2$$

Exercice

$$\underbrace{K}_{} + \underbrace{\mathcal{U}}_{0} = \underbrace{K_0}_{0} + \underbrace{\mathcal{U}_0}_{mgh}$$

$$K \rightarrow \underbrace{K_{seau}}_{\frac{mv^2}{2}} + \underbrace{K_{treuil}}_{\frac{I\omega^2}{2} = \frac{Iv^2}{2r^2}}$$



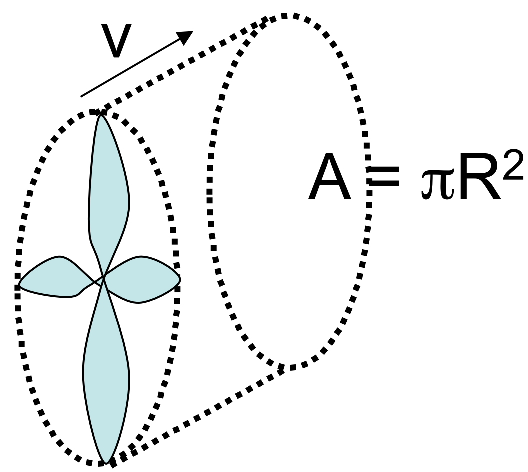
$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2} = mgh$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}} \qquad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}}}$$

$I = \frac{1}{2} M r^2$

Exercice

Une éolienne transforme en électricité 30% de l'énergie cinétique qui la traverse



- **Masse d'air traversant l'éolienne** durant Δt :

$$m = \rho \cdot (A \cdot v\Delta t)$$

- **Energie cinétique associée:**

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot v^3 \Delta t$$

- **Puissance disponible :**

$$\mathcal{P} = \frac{K}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot v^3$$

Puissance convertie:

$$\mathcal{P} = 0.3\frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot v^3$$

Opérations sur les vecteurs

Produit d'un vecteur par un scalaire → vecteur

$$\mathbf{B} = \alpha.\mathbf{A} = \alpha A_x \hat{\mathbf{x}} + \alpha A_y \hat{\mathbf{y}} + \alpha A_z \hat{\mathbf{z}}$$

Produit vectoriel entre deux vecteurs → vecteur

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\sin\theta)\hat{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Produit scalaire entre deux vecteurs → scalaire

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$