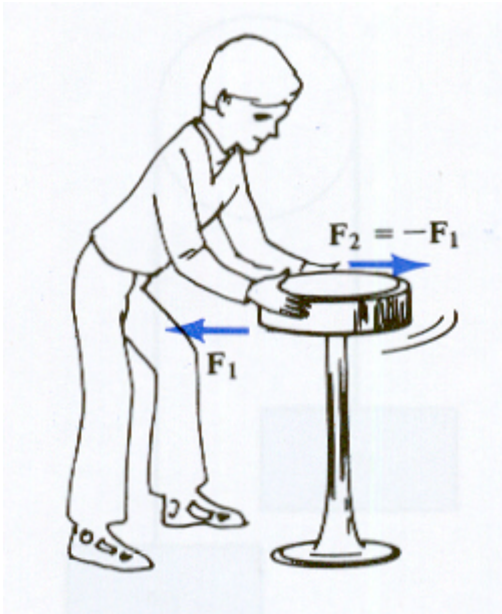
Physique Générale I

Chapitre 4

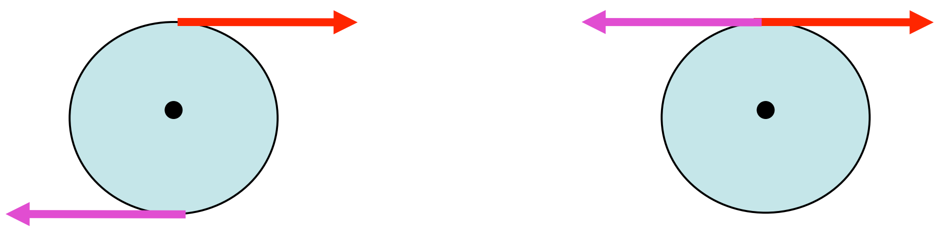
La Statique

Introduction



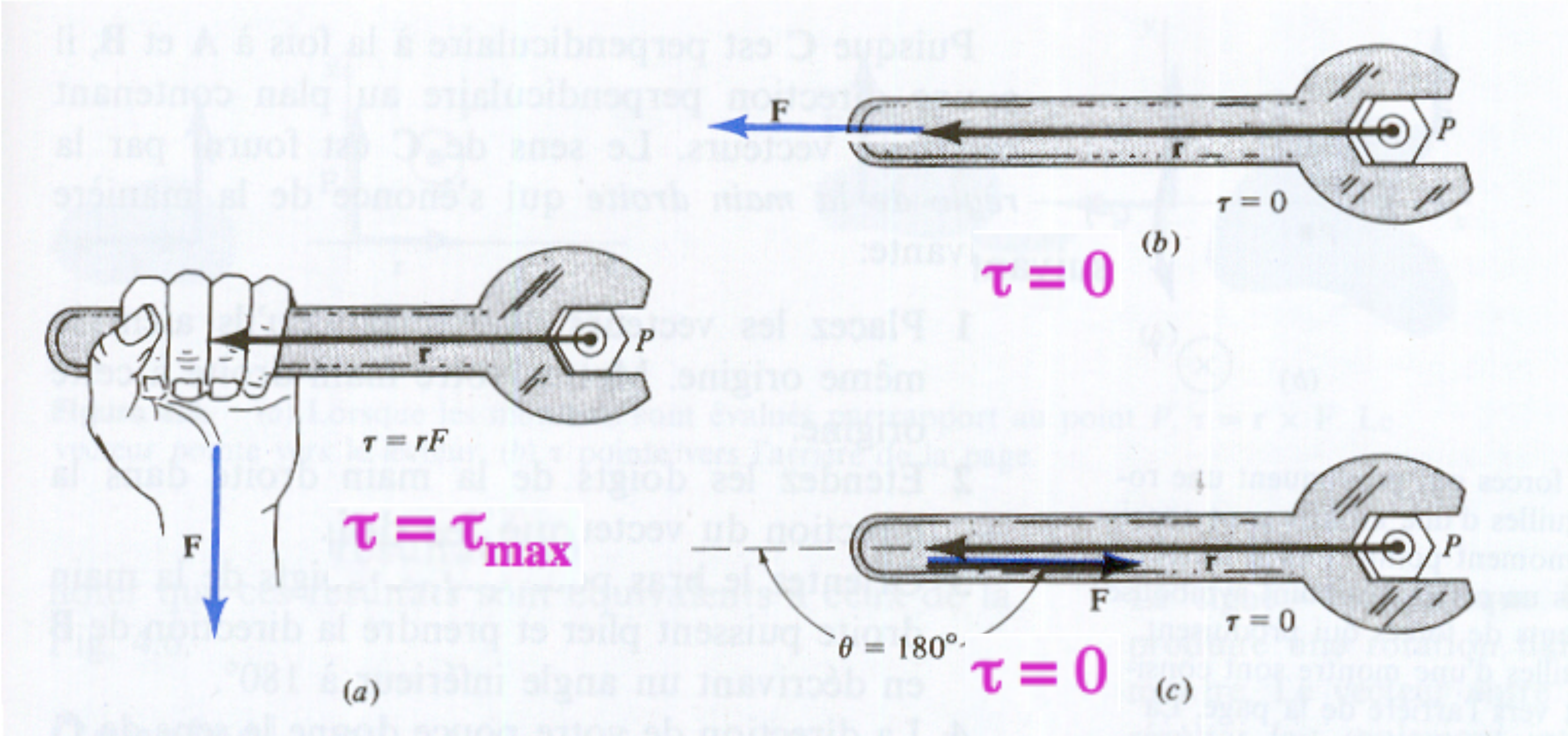
- **$\Sigma_i F_i = F_1 + F_2 = 0$**
  Pas une condition suffisante à l'absence de mouvement pour un corps étendu.

- **Point d'application de la force :**
  Joue un rôle important.



- **Moment d'une force par rapport à un point**
  Capacité qu'a cette force de produire un mouvement de rotation autour de ce point.

Moment d'une force

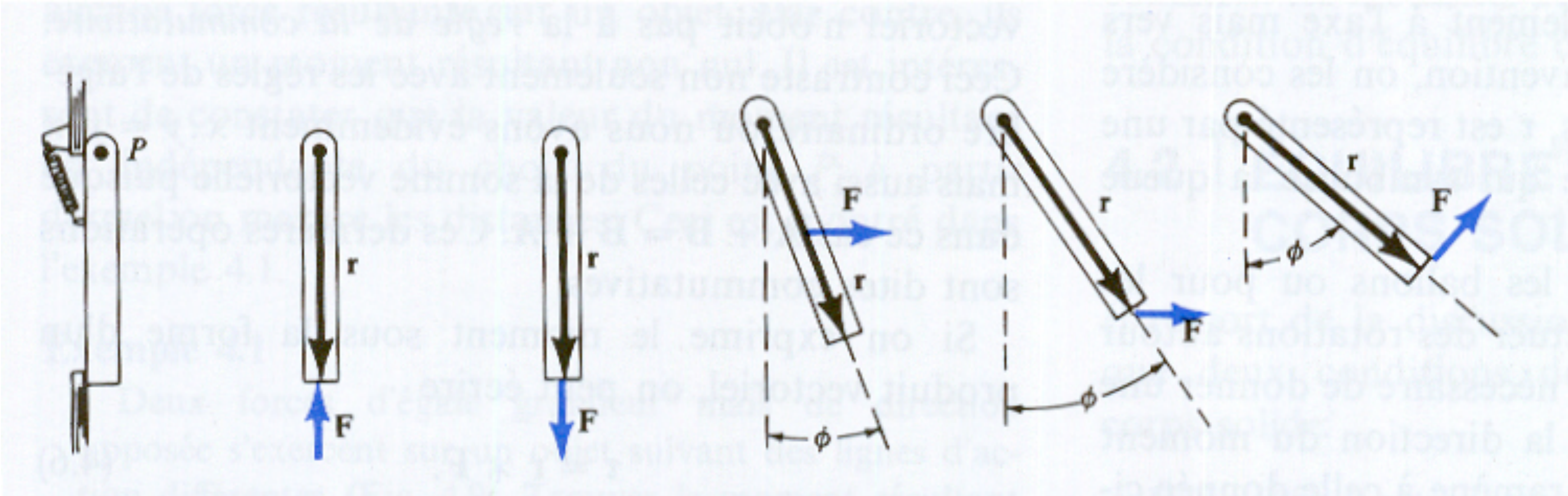


$\tau = 0$ pour $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

$\tau = \tau_{max}$ pour $\theta = 90^\circ$

τ proportionnel à $\sin\theta$

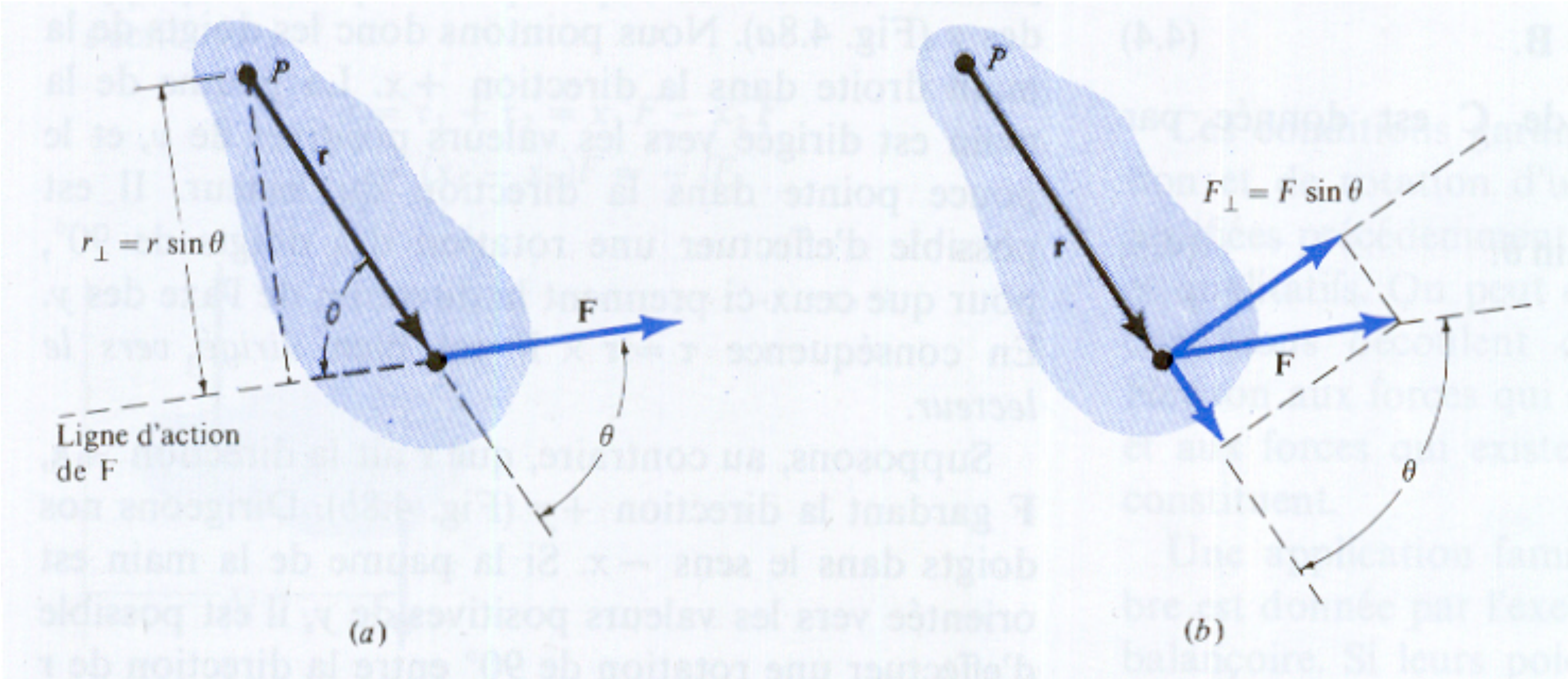
Moment d'une force



$\tau = 0$ $\quad$ $\tau = 0$ $\quad$ $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$

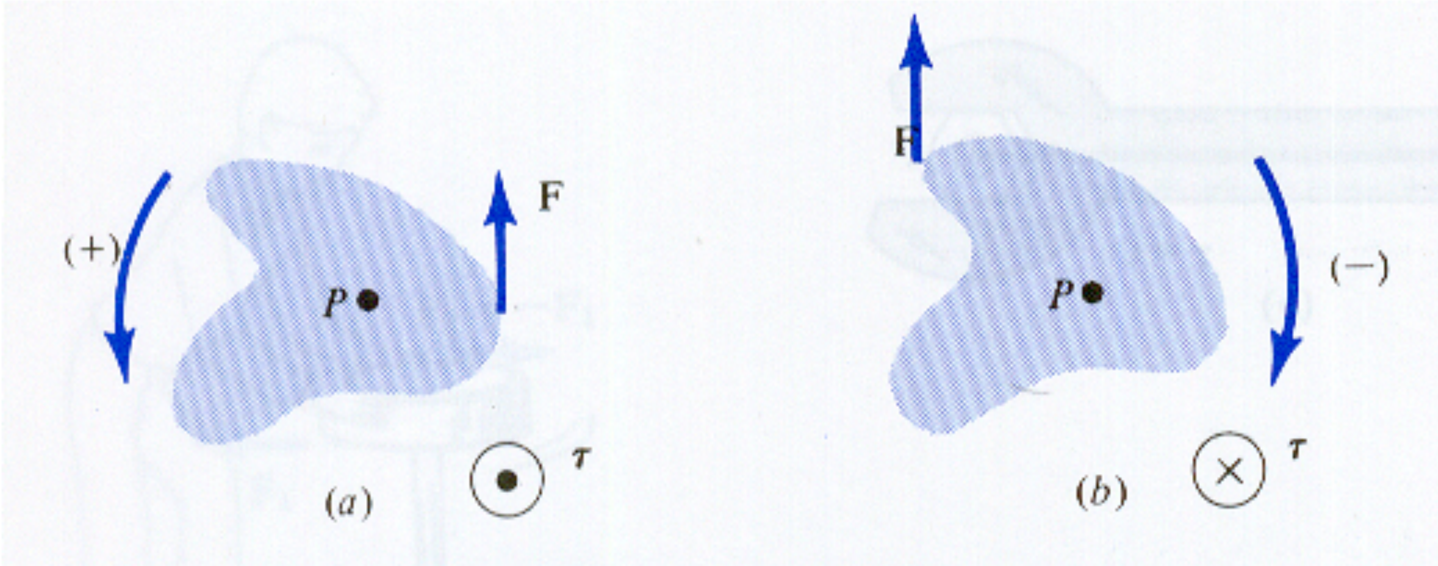
τ proportionnel à **r et F**

Amplitude de τ



$$\tau = r\,F \sin\theta$$
$$= r\,F_\perp$$
$$= r_\perp\,F$$

Direction de τ



La direction de τ est la direction de l'axe autour duquel se fait la rotation

$$(\tau \perp \mathbf{r}, \tau \perp \mathbf{F})$$

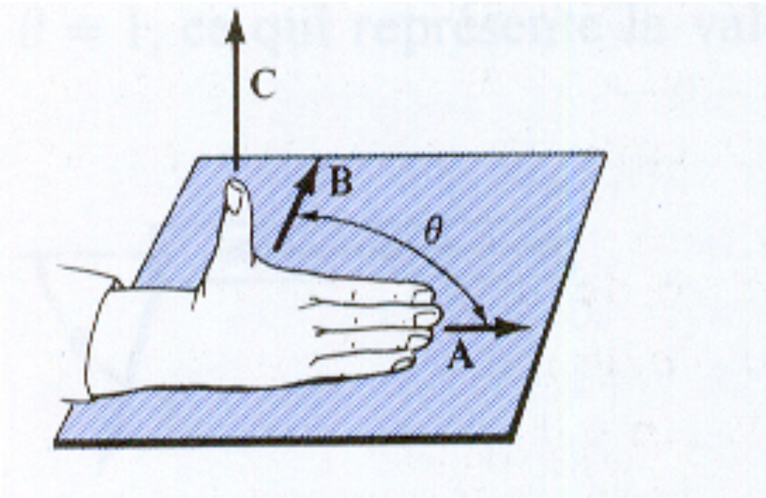
Le sens positif est celui produisant une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

Produit vectoriel

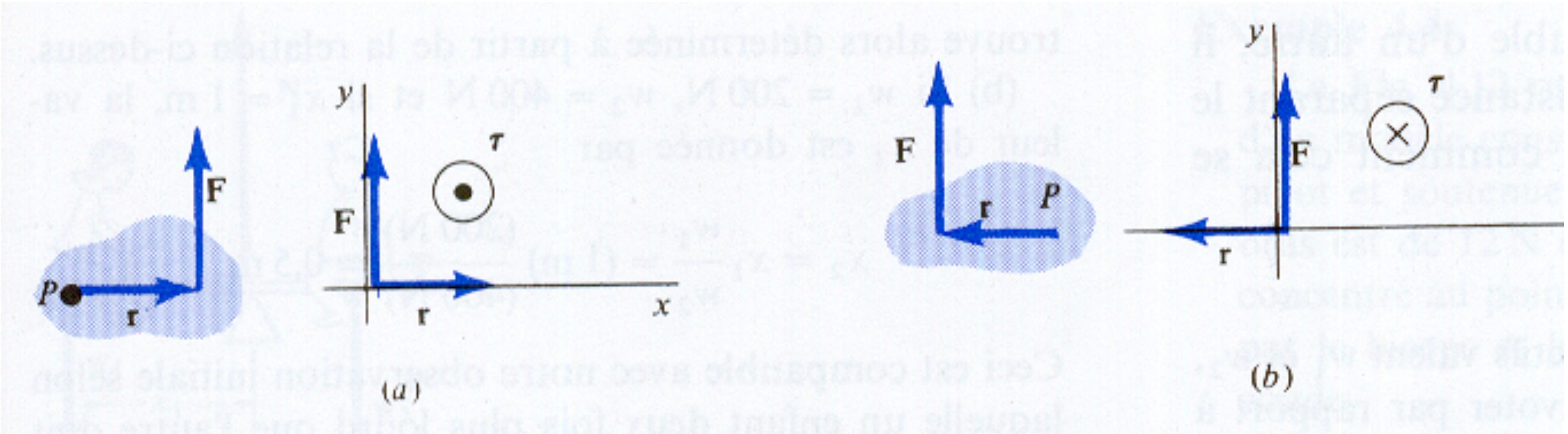
Le moment d'une force (par rapport à un point) est un **vecteur** :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$$

- dont **l'amplitude** est → $\tau = r\,F \sin\theta$
- dont **la direction** est → $\perp$ **r** et **F**
- dont **le sens** est → donné par la règle de la main droite

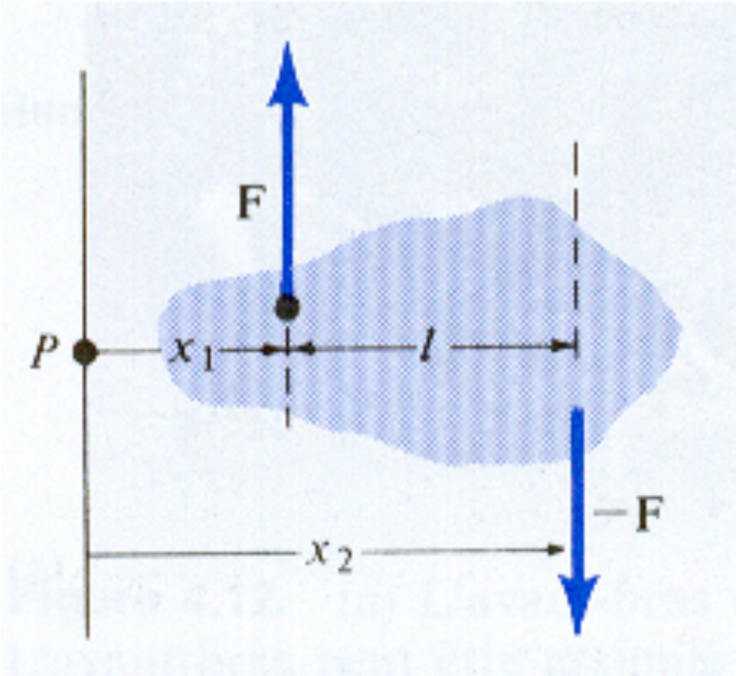


Produit vectoriel



<u>Propriété :</u> $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = - \mathbf{F} \times \mathbf{r}$

Couple de forces



= **deux forces**

- de même **amplitude**
- de même **direction**
- de **sens** contraire
- dont les lignes d'action sont **différentes.**

- **La force résultante est nulle**
- **Le moment de force résultant $\tau = l \times F$**

$$\tau = x_1 F - x_2 F$$
$$= (x_1 - x_2) F$$
$$= - l F$$

Conditions d'équilibre

(Corps solide étendu)

- **Equilibre de translation :**

  force résultante **nulle**

$$\Sigma_i \mathbf{F}_i = 0$$

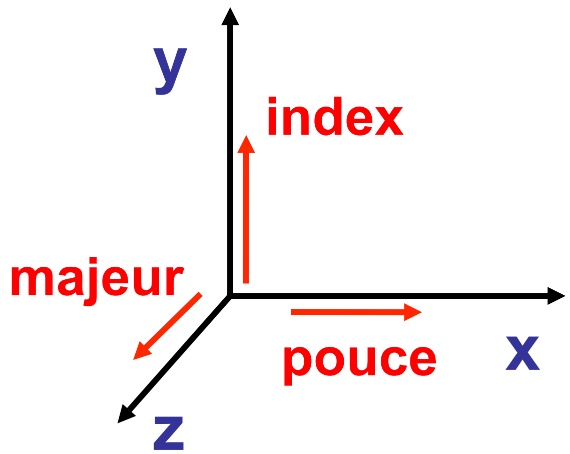
- **Equilibre de rotation :**

  moment de forces résultant (p. rapp. pt qcq) **nul**

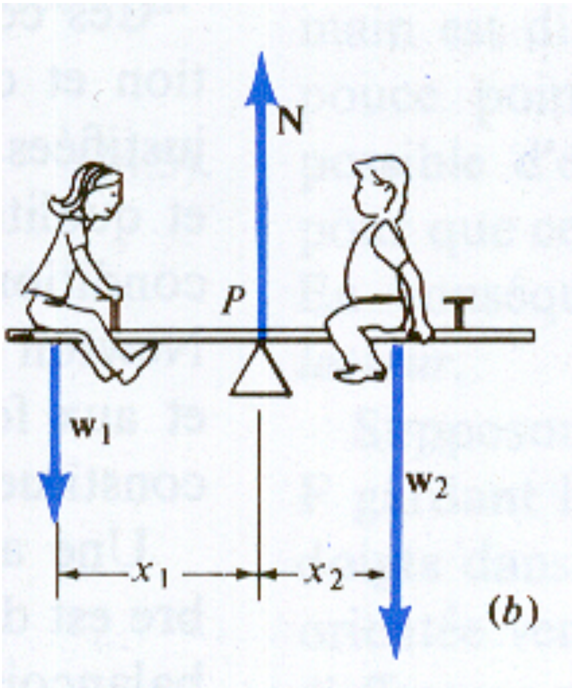
$$\Sigma_i \tau_i = 0$$

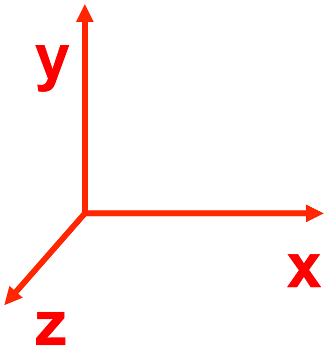
Note :

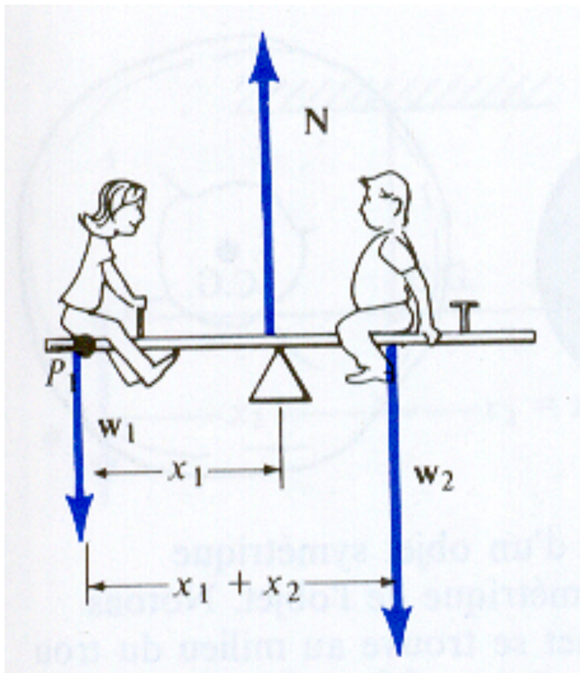
- choisir un repère droitier
- définir correctement le point d'application des forces.



Exemple





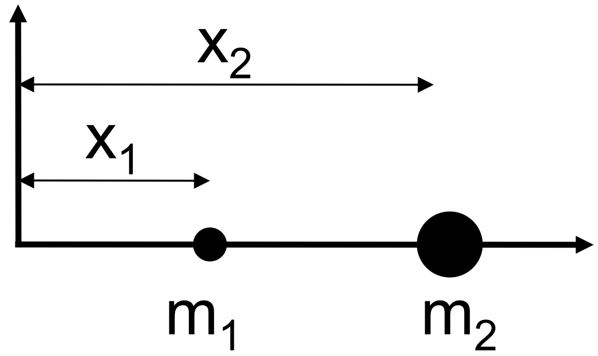


Conditions d'équilibre

$N = w_1 + w_2$	$\Sigma\, \mathbf{F} = 0$	$N = w_1 + w_2$
$(-x_1)(-w_1) + x_2(-w_2) = 0$	$\Sigma\, \tau = 0$	$x_1 N + (x_1 + x_2)(-w_2) = 0$
$x_1 w_1 - x_2 w_2 = 0$		$x_1(w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)(-w_2) = 0$
$x_1/x_2 = w_2/w_1$		$x_1 w_1 - x_2 w_2 = 0$
		$x_1/x_2 = w_2/w_1$

Le centre de masse

Système composé de 2 masses ponctuelles :



$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

si $m_1 = m_2 \rightarrow x_{CM} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

si $m_1 = 0 \rightarrow x_{CM} = x_2$

Le centre de masse

Système composé de n masses ponctuelles :

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

Dans les 3 directions de l'espace:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \qquad \mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

Mouvement de translation

$$M\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

Prenant la différentielle par rapport au temps:

$$M\frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \rightarrow M\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

Prenant la différentielle par rapport au temps:

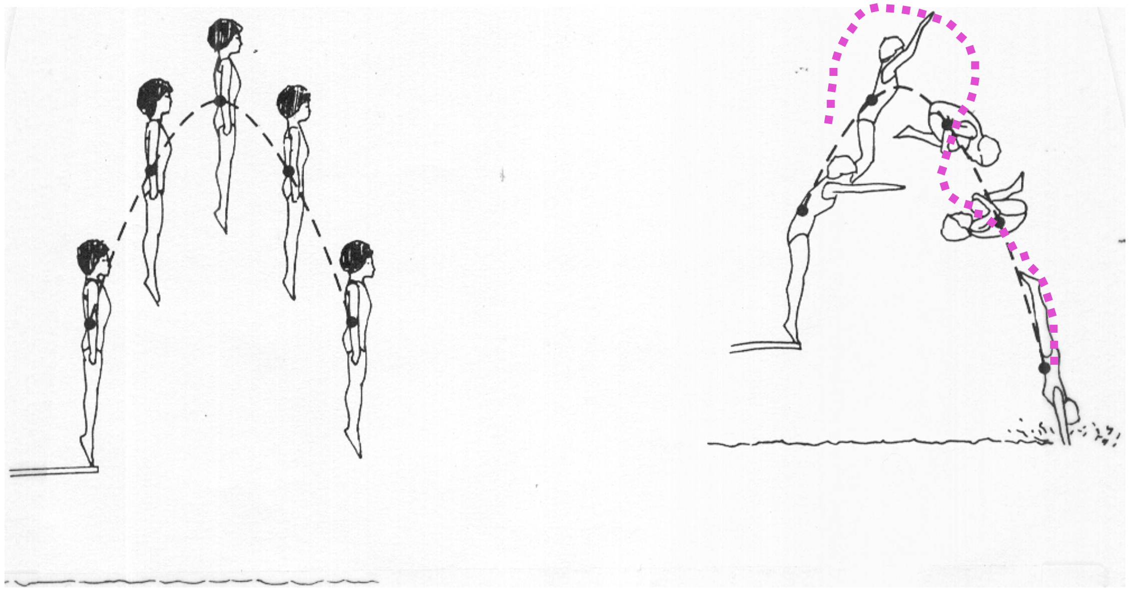
$$M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \rightarrow M\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

$$\boxed{M\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ext}}$$

Le CM d'un corps étendu se déplace comme un corps ponctuel de même masse sur lequel agirait une force externe totale $\mathbf{F}_{ext} = \Sigma_i \mathbf{F}_i$.

Mouvement complexe :
translation + rotation

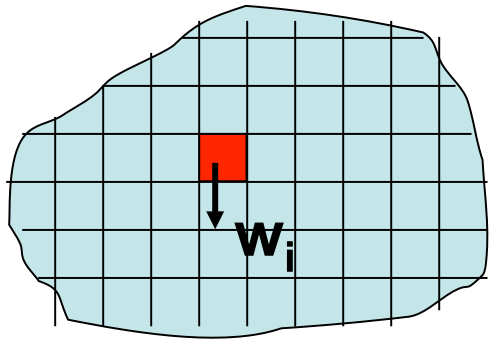
Le CM d'un corps étendu suit la trajectoire que suivrait un corps ponctuel de même masse, soumis à la même force nette $F_{ext} = \Sigma_i F_i$



Mouvement général corps étendu = **mouvement de translation du centre de masse** + **mouvement de rotation autour du centre de masse**

Le centre de gravité

Point d'application de w

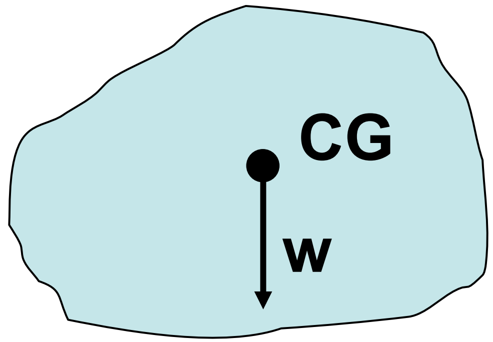


Force résultante :

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i$$

Moment de force résultant :

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g}$$
$$= (M\,\mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{w}$$
$$= \mathbf{r}_{CG} \times \mathbf{w}$$



Centre de masse = centre de gravité

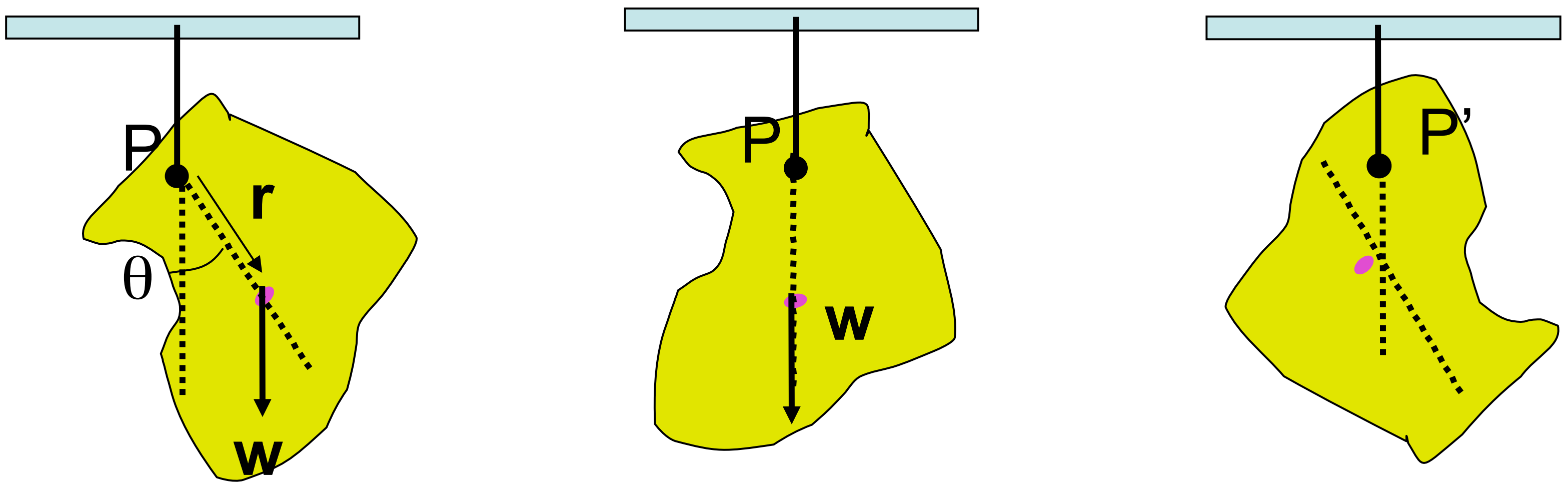
(lorsque **g** est homogène)

Le centre de gravité

Détermination expérimentale

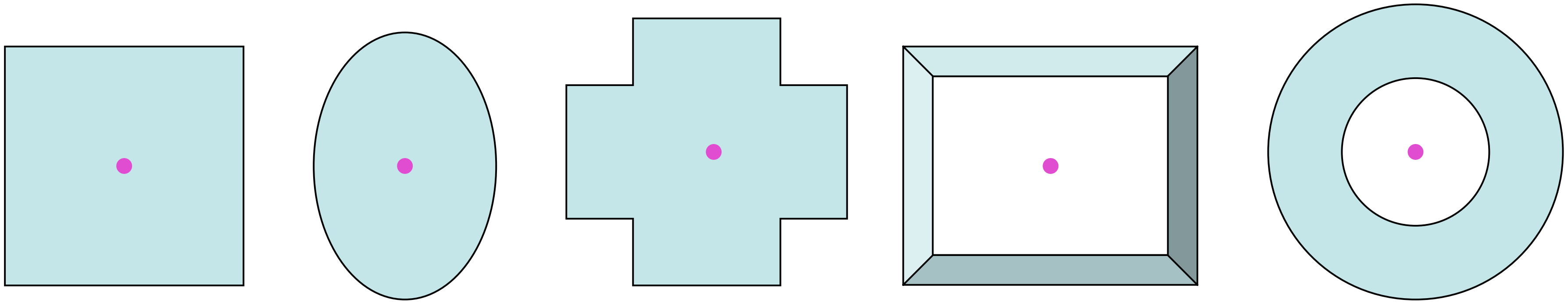
Un objet en suspension se positionne de pour que le CG se trouve par la verticale passant par le point P de suspension

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{w} = r\, w \sin\theta$$



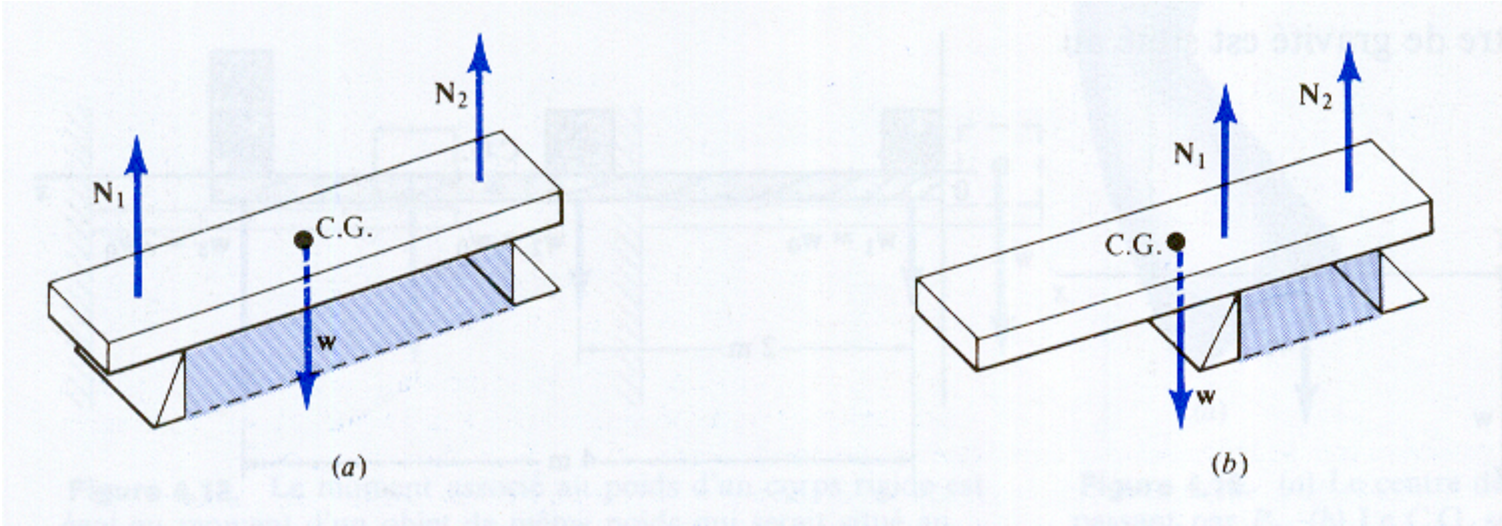
Le centre de gravité

Le centre de gravité d'un objet symétrique homogène se trouve au centre géométrique de l'objet.



Celui-ci peut être situé en dehors de l'objet.

Equilibre et stabilité



Force résultante :

$\mathbf{w} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$

Moment de force résultant :

$\tau_{CM} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{N}_1 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{N}_2 = 0$

$\quad = -x_1 N_1 + x_2 N_2 = 0$

$N_1 = \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} w, \; N_2 = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} w$

Force résultante :

$\mathbf{w} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$

Moment de force résultant :

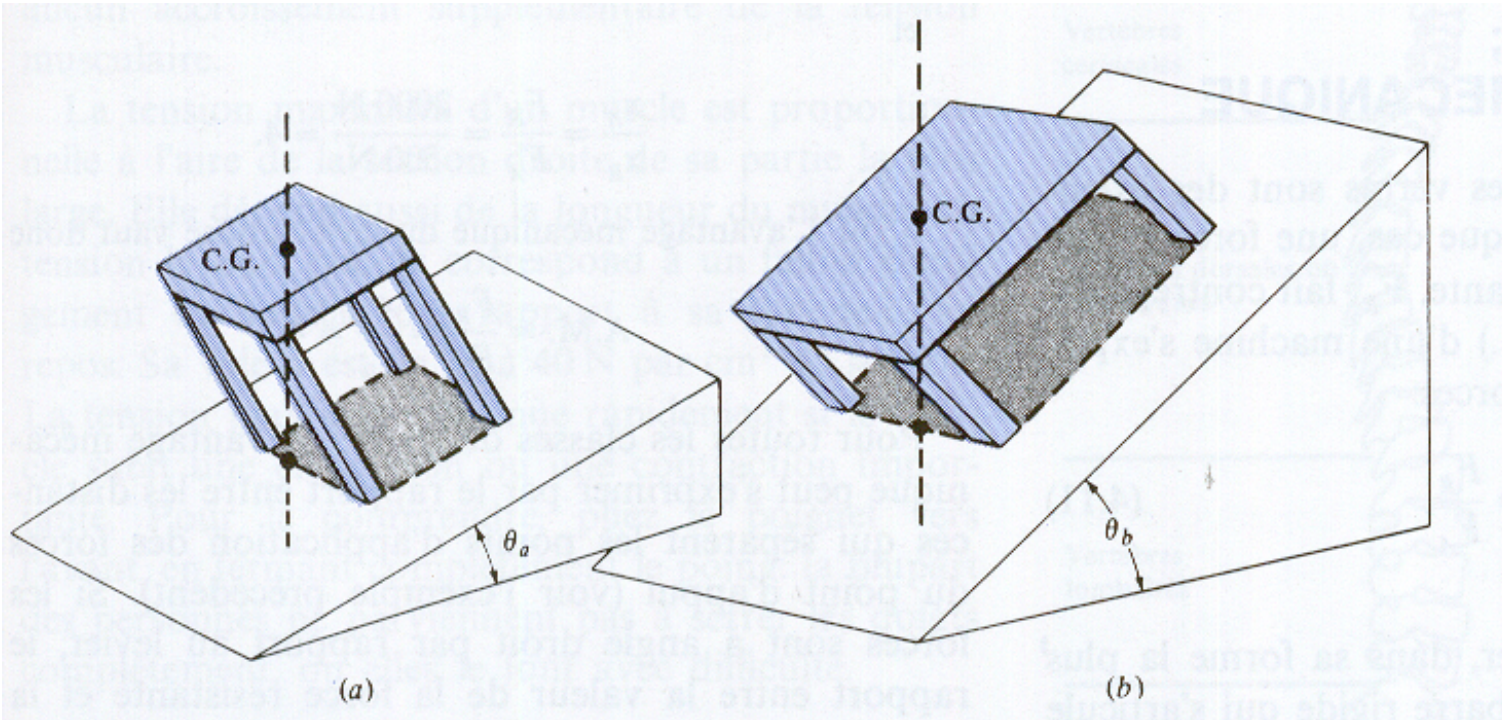
$\tau_{CM} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{N}_1 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{N}_2 = 0$

$\quad = +x_1 N_1 + x_2 N_2 = 0$

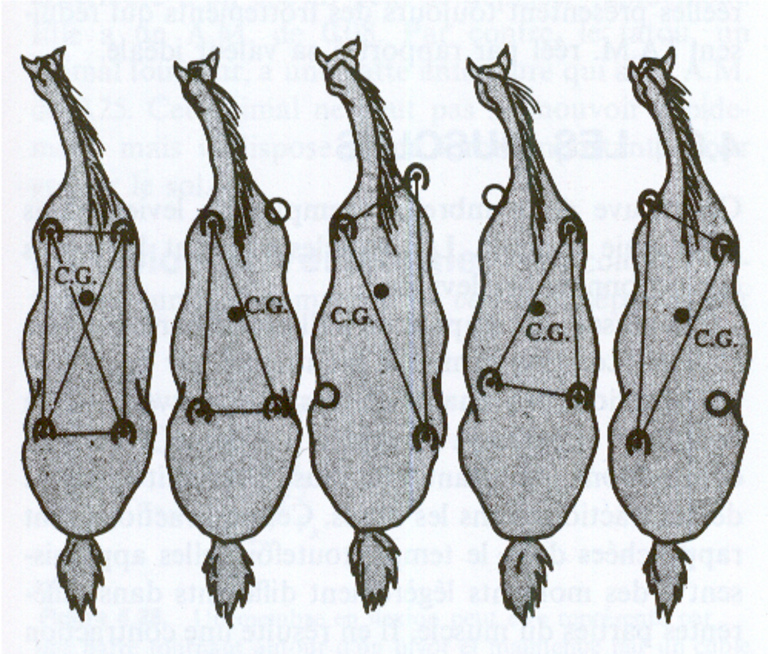
$\rightarrow$ *IMPOSSIBLE*

Equilibre et stabilité

Un objet bascule lorsque la verticale passant par le CG coupe la base en dehors du polygone de sustentation défini par les supports



Equilibre et stabilité



Cheval:
Le CG est toujours dans le triangle défini par les pattes en contact avec le sol.

Course:
Le CG est à l'avant des pieds - position instable. On lance les jambes en avant pour retrouver l'équilibre

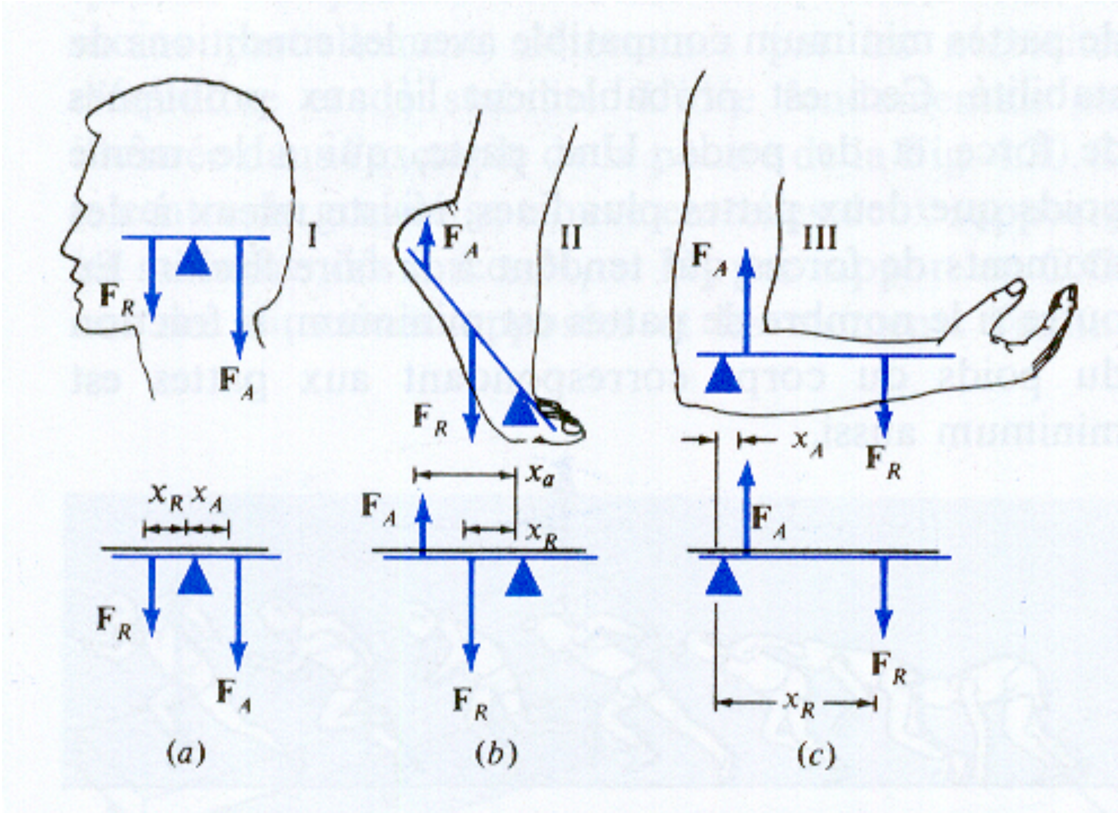
Les leviers

A l'équilibre:
$x_R F_R = x_A F_A$

Avantage mécanique:
$A.M. = F_R / F_A = x_A / x_R$

Force de résistance: F_R

Force appliquée: F_A



A.M. ≷ 1 **A.M. > 1** **A.M. < 1**