Llista 2

1 Corbes i llurs longituds

1. Calcula la longitud dels arcs següents del pla:

$$\begin{array}{llllll} \text{(a)} & r = e^{-\theta} & \text{(b)} & r^2 = \cos 2\theta & \text{(c)} & r = \sin 3\theta \\ \text{(d)} & r = 1 + \cos\theta & \text{(e)} & r = |\sin 2\theta| & \text{(f)} & r = 1 + \cos\frac{\theta}{2} \end{array}$$

2. Considerem l'arc a l'espai donada per la parametrització $x = \cos t, y = \sin t, z = h(t)$, amb $h : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ creixent. Fes-ne un dibuix i calcula la seva longitud pel cas $h(t) = t, h(t) = t^2$.

3. Dibuixa i calcula la longitud del gràfic $y = -\log(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Calcula la longitud de la catenària $y = a\cosh\frac{x}{a}, -a \leq x \leq a$ (la catenària és la forma que té un cable o cadena penjant entre dos punts per acció del propi pes).

5. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ amb components $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$, definim la integral

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = (\int_a^b \gamma_1(t)\, dt, \cdots, \int_a^b \gamma_m(t)\, dt).$$

   Demostra que

$$\| \int_a^b \gamma(t)\, dt \| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\, dt.$$

6. Sense utilitzar la interpretació geomètrica, demostra que si $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ és un arc simple de classe C^1 llavors

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

7. Determineu el punt on els dos arcs

$$\alpha(t) = (e^t, 2\cos t, t^2 - 2), \quad \beta(s) = (s, 2, s^2 - 3)$$

   es tallen i calculeu l'angle d'intersecció.

8. Siguin $r(t)$, $v(t) = r'(t)$, $a(t) = r''(t)$ la posició, velocitat i acceleració d'una partícula a l'espai, on t és el temps. Se sap que $a(t) = (0, t, t)$, $v(1) = (0, 5, 0)$, $r(1) = (0, 0, 0)$. Determineu $v(t)$, $r(t)$ i $r(2)$.

9. Suposem que l'arc de classe C^1, $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ descriu el moviment d'una partícula.

   (a) Demostreu que si la partícula es mou a la superfície d'una esfera de centre $(0,0,0)$, aleshores els vectors de posició, $\gamma(t)$ i de velocitat $\gamma'(t)$ són ortogonals.

   (b) demostreu que si el mòdul de la velocitat és constant, aleshores l'acceleració i la velocitat són ortogonals.

10. Demostra que si γ és un arc simple de longitud finita que uneix dos punts d'un domini U dins U, que no és un segment, aleshores hi ha una poligonal més curta que també els uneix dins U. En particular, si $d_U(P,Q) \neq \|P-Q\|$, $d_U(P,Q)$ no és accessible.

11. Calcula explicitament $d_U(P,Q)$ quan U és el semiplà $y > 0$ desprovist del segment que uneix $(0,0)$ amb $(0,1)$.

12. Demostra que si γ és un arc de classe C^1 i $\gamma(t_0) \neq 0$, aleshores hi ha $\delta > 0$ tal que γ és un homeomorfisme entre $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ i la seva imatge.

13. Un filferro està donat per

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + z = 2.$$

Calcula la seva massa i centre de masses si la densitat de massa és proporcional a la distància a l'eix z.

2 Diferencial i derivades parcials

14. Estudieu la continuïtat, existència i continuïtat de les derivades parcials, i diferenciabilitat de les funcions següents:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^3 - y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (f) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } xy > 0 \\ x - y^2 & \text{si } xy \leq 0 \end{cases}$

15. Calcula el pla tangent a la superficie $z = x^2y + e^{xy}$ en els punts $(1,0,1), (0,1,1)$.

16. Calculeu l'equació del pla tangent i la recta normal a les superfícies i punts donats:

(a) $z = 9x^2 + y^2, \quad (1,1,10)$ (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad (3,5,-4)$
(c) $z = x^2 + y^3, \quad (3,1,10)$ (d) $\cos \pi x - x^2y + e^{xy} + yz = 4, \quad (0,1,2)$

17. Sigui $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per $f(x,y) = \sqrt{\|xy\|}$. Demostreu que f no és derivable a $(0,0)$. Si $g(x) = \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$, calculeu la diferencial de g en els punts $x \neq 0$. Què passa a l'origen ?

18. Sigui $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ amb la propietat $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Proveu que f és diferenciable a l'origen.

19. Doneu un exemple d'una funció contínua al $(0,0)$ amb derivada direccional $D_uf(0,0)$ per a totes les direccions però que $u \to D_uf(0,0)$ no sigui lineal.

20. Donada $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ diferenciable, sabem que el pla $x - 2y + z = 3$ és tangent a la gràfica en el punt $(1,1,4)$. Determineu la diferencial de f en $(1,1)$.

21. Sigui $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Comproveu que per tota corba diferenciable $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbf{R}^2$ amb $\gamma(0) = (0,0)$ l'aplicació $f \circ \gamma$ és diferenciable a 0. Tot i això, veieu que f no és diferenciable a $(0,0)$.

3 Regla de la cadena

22. Una funció $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ diem que és homogènia de grau m si $f(tx) = t^m f(x)$ per tot $t \in \mathbf{R}$ i per tot $x \in \mathbf{R}^n$. Si f és a més diferenciable proveu que

$$mf(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

(Indicació: Considereu $g(t) = f(tx)$ i calculeu $g'(1)$.)

23. Siguin $g(x,y) = (e^{x+y}, \cos x, \sin y)$ i $f(x,y,z) = (\int_0^{xy^2z} (1+t)e^t \, dt, x+y+z)$. Calculeu $Dg(0,0), Df(1,1,0)$ i $D(f \circ g)(0,0)$.

24. Feu servir la regla de la cadena per a calcular $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$ als casos següents:

(a) $f(x,y) = xe^y + y \sin x \quad , \gamma(t) = (t, t^2)$

(b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$

25. Si $u = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$, calculeu $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ i $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ on r, θ són les coordenades polars habituals.

26. Siguin $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ i $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t + t^2 \cos t + t^4, t + t^2 \sin t + t^4)$. La funció f transforma la corba α en una altra corba $\beta(t) = f(\alpha(t))$. Calculeu el vector tangent de β en $t = 0$.

27. Analitza a quins dominis del pla les funcions

$$u = x^2 - xy, v = y^2 + xy$$

formen un sistema de coordenades i calcula x_u, x_v, y_u, y_v només en termes de x, y.

4 Gradients

28. Calculeu, en cada cas, el vector tangent a la corba intersecció de la superfície i el pla donats al punt que s'especifica:

(a) $z = e^{-x} \cos y, \quad x = 0, \quad (0,0,1)$

(b) $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, \quad y = 3, \quad (2,3,6)$

29. Sigui $f(x,y,z) = yx^2 + y(\log x)(\arctan(x^2 z \sin y + z \cos z))$. Calculeu les derivades parcials de f al punt (1,0,0). En quina direcció la derivada direccional és màxima ?

30. Calculeu la derivada direccional de $f(x,y,z) = xyz$ segons la direcció del vector velocitat de la corba $\gamma(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 3t)$ a l'instant $t = \frac{\pi}{3}$. És aquesta la màxima derivada direccional de f en aquest punt ?

31. La temperatura d'una placa metàl.lica és $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$. A partir del punt de coordenades $(2,-3)$, determineu la trajectòria segons la qual la temperatura creix el més ràpid possible. (Compareu amb el problema anterior).

32. A partir del punt $(1,1,1)$, repetiu el problema anterior amb la següent distribució de temperatura a l'espai: $T(x,y,z) = 8 - 3x - y$

33. Una partícula surt del punt $(1,1,\sqrt{3})$ de la superfície $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ en una direcció normal a la superfície en aquest punt i amb una velocitat de 10 unitats per segon. Quan i on arribarà al pla $z = 0$?

34. Determineu la recta tangent a la corba intersecció de les superfícies $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$, $x^2+y^2+z^2=11$ al punt $(1,1,3)$.

35. Demostra que les corbes de nivell de dues funcions f,g diferenciables es tallen perpendicularment en tot punt si i només si $f_xg_x+f_yg_y=0$.

36. Troba la família de corbes $g(x,y)=c$ que talla perpendicularment en tot punt a les corbes de nivell $x^4+y^2=c$.

37. Sigui $T(x,y)=20-(x^6+y^4)$ una distribució de temperatures al pla, de forma que $(0,0)$ és el punt que està a màxima temperatura. Una persona situada al punt $(1,\sqrt{3})$ vol desplaçar-se cap a $(0,0)$ seguint el criteri d'anar en cada moment en la direcció de màxim increment de temperatura. Trobeu la trajectòria que seguirà i la distància que recorrerà.

38. Troba, quan sigui possible, totes les funcions $f(x,y), f(x,y,z)$ tals que

    (a) $\nabla f(x,y)=(1+y\cos xy, x\cos xy)$.

    (b) $\nabla f(x,y)=(xy,xy)$

    (c) $\nabla f(x,y,z)=(y,z,x)$.

    (d) $\nabla f(x,y,z)=(yze^{xyz}, xze^{xyz}+z\cos yz, xye^{xyz}+y\cos yz)$.

5 Dependència funcional

39. Doneu un exemple d'un domini U del pla i una funció f diferenciable en U amb $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ i que no sigui una funció de y

40. Sigui $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x>0$. Sigui $f:A\longrightarrow\mathbf{R}$ diferenciable satisfent:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

    Proveu que existeix $h:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ derivable tal que $f(x,y)=h(\frac{y}{x})$.

41. (a) Demostra que les funcions $u=x^2+y+z, v=x^2+y^2$ són funcionalment independents en $U=\{(x,y,z): x,y,z>0\}$.

    (b) Troba una tercera funció w en U tal que (u,v,w) sigui un sistema de coordenades en U.

    (c) Demostra que una funció diferenciable f en U depen funcionalment de u,v si i només si

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}+x(2y-1)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

42. Demostra que les funcions $u = x + 2y - 3z, v = 2x - y + 5z$ són funcionalment independents en tot l'espai i que una funció diferenciable f en depèn funcionalment si i només si

$$7f_x - 11f_y - 5f_z = 0.$$

6 Derivades d'ordre superior. Fórmula de Taylor

43. Sigui $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudieu la diferenciabilitat de f a $(0,0)$ i comproveu que $D_{1,2}(0,0) \neq D_{2,1}(0,0)$.

44. Demostra que la solució general de l'equació d'ona al pla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, és $f(x,y) = \Phi(x+y) + \Psi(x-y)$, amb Φ, Ψ funcions arbitràries a la recta, dues vegades derivables. Indicació: treballa en el sistema de coordenades $u = x+y, v = x-y$. Fes el mateix amb l'equació $f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy} = 0$.

45. Demostra que una funció f dues vegades diferenciable a l'obert $U = \{(x,y) : x, y > 0\}$ és de la forma $f(x,y) = \Phi(xy) + \Psi(\frac{y}{x})$, amb Φ, Ψ funcions dues vegades diferenciables a la recta, si i només

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Indicació: demostra prèviament que $u = xy, v = \frac{y}{x}$ és un sistema de coordenades a U.

46. Troba la solució general $f(x,y), f(x,y,z)$ de les següents equacions en derivades parcials:

(a) $y\frac{\partial f}{\partial y} = f$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyf$

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

(d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0$

47. Busca solucions amb variables separades, $u(x,y) = X(x)Y(y)$ de les equacions

$$u_y = yu_x, xu_x = u + yu_y.$$

48. Comprova que en les coordenades

$$u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), v = xy,$$

l'equació de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ es transforma en la mateixa equació.

49. Desenvolupeu per la fórmula de Taylor:

    (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$ en potències de $(x - 1)$ i $(y - 2)$.
    (b) $f(x, y) = x^y$ en un entorn de $(1, 1)$ (fins els termes d'ordre 3).
    (c) $f(x, y) = \log(x + y)$ en un entorn de $(1, 1)$.
    (d) $f(x, y, z) = e^{a(x+y+z)}$, $a \in \mathbf{R}$, al voltant de $(0, 0, 0)$.
    (e) $f(x, y, z) = x^y + z$ en $(1, 1, 0)$ (fins els termes d'ordre 3).

50. (a) Sigui $P(x_1, ...x_n)$ un polinomi de grau m en les variables $x_1, ...x_n$. Demostreu que per a tot $a \in \mathbf{R}^n$, P és el polinomi de Taylor de grau m de P al voltant de a.
    (b) Expresseu el polinomi $x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ en potències de $(x - 1)$, $(y - 1/2)$.
    (c) El mateix per $x^3 + y^3 + xy^2$ en potències de $(x - 1)$, $(y - 1)$.
    (d) Calculeu el polinomi de Taylor de grau n de $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ al voltant de $(0, 0, 0)$.

51. Aquest és un problema sobre funcions convexes a $\mathbf{R}^n$. La definició de funció convexa és la següent. Sigui U un obert convex de $\mathbf{R}^n$ i $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua. Diem que f és convexa a U si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

per a tot $x, y \in U$ i $t \in (0, 1)$. Això significa que el segment que uneix dos punts de la gràfica queda per sobre de la gràfica. Diem que f és estrictament convexa si la desigualtat precedent és estricta, és a dir, si

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$$

per a tot $x, y \in U$ i $t \in (0, 1)$.

(a) Si f és de classe $\mathcal{C}^1$ a U demostreu que f és convexa si i només si

$$f(x) \geq f(x_0) + (Df)_(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in U.$$

Demostreu també que f és estrictament convexa si i només si

$$f(x) > f(x_0) + (Df)(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in U,\ x \neq x_0.$$

(b) Si f és de classe $\mathcal{C}^2$ a U demostreu que f és convexa si i només si la forma quadràtica hessiana és semi-definida positiva en tot punt x de U. També f és estrictament convexa si i només si la hessiana és definida positiva en tot punt x de U.

52. Demostreu que si U és un domini acotat convex, i f és una funció contínua convexa en el compacte $\overline{U}$, no constant, aleshores el màxim absolut de f és a la frontera. Demostreu que si K és un polihedre convex de l'espai, i f és una funció convexa contínua en K, no constant, el màxim absolut de f és a un dels vertexs.

7 Punts crítics, màxims i mínims relatius i absoluts, lliures o condicionats

53. Sigui $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ diferenciable. Se sap:

    (a) $f \geq 0$.

    (b) f té límit $+\infty$ a l'infinit.

    (c) f té un únic punt crític (a, b).

    Demostreu que (a, b) és el mínim absolut de f.

54. Estudieu els punts crítics de $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$.

55. Determineu els extrems relatius de les funcions següents:

    (a) $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$.

    (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy + xz - 2z$

    (c) $f(x, y) = \log(2 + \sin xy)$

    (d) $f(x, y) = \sin x \cos y$

    (e) $f(x, y, z) = xyz(1 - x)(1 - y)(1 - z)$.

56. Troba els màxims i mínims relatius de $f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ en $U = \{x, y, z > 0\}$. Té f un màxim o un mínim absolut en U?

57. Trobeu i classifiqueu els punts crítics de

    (a) $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

    (b) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$.

    (c) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y$

    (d) $f(x, y) = x^3 + x^2 + 2\alpha xy + y^2 + 2\alpha x + 2y, \alpha > 0$.

58. Calculeu els extrems relatius i punts de sella de $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2xy + z^2 + 2xyz + 2y^2z$.

59. Determineu els extrems absoluts de les funcions següents en els conjunts indicats

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en la recta $3x + 2y = 6$.

    (b) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ en la recta $x + y = 1$

    (c) $f(x,y) = x - y$ a la hipèrbola $x^2 - y^2 = 2$.

    (d) $f(x,y,z) = x + y + z$ a la corba donada per $x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1$.

    (e) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ a la recta $x + y = \frac{\pi}{4}$.

    (f) $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$ en el triangle limitat per les rectes $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

    (g) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ en $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$.

    (h) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ en $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

    (i) $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ en $\{(x,y) : x^2 + y^2 - xy \leq 1\}$

    (j) $f(x,y) = x^3 + y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3y^2$ en $x^2 + y^2 \leq 1$

60. Sigui $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert i $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(U)$. Sigui $a \in U$ un punt crític de f tal que el determinant de la matriu hessiana de f al punt a no és zero. Demostreu que existeix una bola B centrada al punt a i continguda a U tal que a és el únic punt crític de f a B.

61. (a) Sigui f un funció C^1 a la recta $\mathbf{R}$. Suposeu que f té exactament un punt crític x_0 que és un mínim local. Demostreu que x_0 també és un mínim absolut.

    (b) Considereu a $\mathbf{R}^2$ la funció

    $$f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

    Comproveu que f té un únic punt crític, que és un mínim local, però f no té cap mínim absolut.

62. Sigui $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Demostreu que sobre tota recta $y = mx$ la funció té un mínim relatiu a $(0,0)$. Vegeu que f NO té un mínim relatiu a $(0,0)$.

63. Sigui $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$. Proveu que el 0 és el valor mínim de f.

64. Donats n punts del pla , trobeu el punt tal que la suma dels quadrats de les distàncies als n punts sigui mínima.

65. Calculeu el punt més proper a l'origen de la corba intersecció del paraboloide $z = x^2 + y^2$ amb el pla $x + 2y + z = 4$.

66. Demostrar que l'equació

$$2x^3y^3z^2 - 3x^2y^4z^2 - x^4y^2z^2 + x^2y^2z^3 + 2x^3y^2z^2 - 6x^2y^3z^2 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 2x - 6y + z = 0$$

defineix implicitament z com a funció de x, y en l'entorn del punt $(0, -1, -3)$ i que aquesta funció implícita té un extrem relatiu en el punt $(0, -1)$.

67. Calcular el màxim i mínim absolut de la funció

$$11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz - 8yz - 24x + 24y$$

en el tetraedre delimitat pels plans $x = 0, y = 0, z = 0, x - y + z = 3$.

68. Calcula els extrems lliures de $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - \frac{9}{2}x^2 - 3y^2 - 6xy$ en tot el pla. Hi ha màxims i mínims absoluts?

69. Es vol construir una habitació en forma de paralelepíped aillada tèrmicament. Els tres parells de cares oposades s'han d'aillar amb materials diferents, de costs A euros/m2, B euros/m2 i C euros/m2. Si es disposa d'un pressupost fixat de D euros, quina és l'habitació de volum màxim que es pot construir?

70. (a) Demostreu que la equació $x^2+y^2+z^2 = 2x+6y+4z-13$ defineix $y = f(x, z)$ com a funció implícita de x, z al voltant del punt $(1, 4, 2)$.
    (b) Calculeu les derivades primeres i segones de f i comproveu que $(1, 2)$ és un màxim local de f. Quina és la interpretació geomètrica d'aquest resultat?

71. Determineu els extrems absoluts de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ sobre el conjunt

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

72. Trobeu la distància de $(0, 0, 0)$ a la corba

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1,\ x + y + z = 1\}$$

73. Trobeu el paralelepípede que determina el volum més gran entre aquells que tenen superfície fixada S.

74. Un producte es fabrica en dues fàbriques diferents. Si x_1, x_2 són les unitats produïdes en cada fàbrica, la funció de cost és

$$C(x_1, x_2) = 0,25\, x_1^2 + 10x_1 + 0,15\, x_2^2 + 12\, x_2$$

Un fabricant rep un encàrrec de 1000 unitats de producte. Calculeu quantes unitats s'han de produir en cada fàbrica.

75. Trobeu la mínima distància entre la circumferència $x^2+y^2=1$ i la recta $x+y=4$.

76. Es vol muntar un radiotelescopi en un punt de la superfície d'un planeta on la interferència del camp magnètic sigui mínima. Si el radi del planeta és de 6 unitats i la força del camp magnètic ve donada per $F(x,y,z)=6x-y^2+xz+200$, basat en un sistema de coordenades amb el centre del planeta com a origen, determineu on s'ha de posar el radiotelescopi.

77. Un magatzem de $1000m^3$ de volum té forma de paral.lelepípede. El sostre, el terra i les parets laterals estan fabricats amb diferents materials. En el cas del sostre, la pèrdua de calor per unitat d'àrea és igual a 5 vegades la que es produeix al terra i en el cas de les parets laterals és igual a 3 vegades la del terra. Calculeu les dimensions del magatzem que minimitzen la pèrdua de calor.

78. La funció de temperatura en un cert sistema de coordenades és $T(x,y,z)=20+2x+2y+z^2$. Determineu les temperatures extremes a la corba intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=11$ i el pla $x+y+z=3$.

79. Entre tots els prismes amb arestes paraleles als eixos inscrits en un elipsoide d'eixos a,b,c calcula el de volum màxim.

8 Teorema de la funció inversa. Funcions definides implícitament

80. Donat el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^x+\alpha y^2 z - z & = & \beta \\ x^2+\alpha y^2 \ln z - xy & = & 0 \end{array}\right.$$

   (a) Determineu els valors de $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ pels quals aquest sistema defineix y i z com a funcions implícites de x, de classe $\mathcal{C}^\infty$, localment a $(0,1,1)$.

   (b) Per quins valors de $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ es té $y^{'}(0)=-1/2$ i $z^{'}(0)=1.$?

81. Proveu que el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin\frac{\pi}{w} & = & 0 \\ e^{x+u}-1 & = & 0 \\ 2x-u+v-w+1 & = & 0, \end{array}\right.$$

defineix implícitament tres funcions $u=u(x)$, $v=v(x)$ y $w=w(x)$ en un entorn del punt $(0,0,0,1)$. Trobeu el desenvolupament de Taylor de $v(x)$ en un entorn del punt 0 fins els termes d'ordre 2.

82. Una recta que passa per l'origen forma en el primer octant angles α, β, γ respectivament amb els semieixos coordinats positius. Trobeu una relació de dependència entre α, β, γ i considereu γ com a funció de α i β. Calculeu $\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}$ quan $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/3$.

83. Sigui $F(x, y) = e^{x^2+2y^2+2}$ Quines corbes de nivell són localment gràfiques de funcions d'una variable? La mateixa qüestió per $G(x, y) = xy$.

84. Donat un polinomi $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ amb coeficients reals, volem expressar les arrels de p en funció dels coeficients.

    (a) Suposant que p té n arrels reals, α_i, $i = 1, ..., n$, expresseu els a_i explícitament en funció de les α_i.

    (b) Doneu una condició sota la qual és possible expressar localment les α_i com a funcions de classe C^∞ dels a_i.

85. Trobeu el pla tangent a la varietat

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 25}{24}\right)^2 = 1 - \frac{z^2}{9}$$

en el punt $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$.

86. Proveu que la corba de nivell

$$x^2y^3 + 2xy + x^3y^2 + x + y = 5,$$

és un gràfic de $y = y(x)$ en un petit quadrat $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ (és a dir, talla a cada recta vertical $x = c$ en un sol punt, també podeu comprovar-ho gràficament amb MÂXIMA). Calcula les derivades $y'(1), y''(1)$.

87. Proveu que la superficie de nivell

$$xy^2z^3 + x^3yz + x^2y^2z^2 = 3,$$

és un gràfic $z = f(x, y)$ en un petit cub centrat en $(1, 1, 1)$. Calcula les derivades parcials $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ en $(1, 1)$.

88. Proveu que la intersecció de les superficies de nivell

$$yz + xz + xy = 5, xyz = 2,$$

és una corba $y = y(x), z = z(x)$ en un petit cub centrat en el punt $(1, 2, 1)$. Calculeu $y'(1), z'(1), y''(1), z''(1)$.

89. Proveu que hi ha funcions diferenciables $x = x(s,t), y = y(s,t)$ definides al voltant de $(2,-1)$ que compleixen

$$xs^2 + yt^2 = 1, x^2s + y^2t = xy - 4.$$

Quantes n'hi ha? Per a cadascuna calcula les derivades parcials x_s, x_t, y_s, y_t.

90. Demostra que el sistema d'equacions

$$x^2y + xz^2 - y^2z + 1 = 0, xy^2 - x^2z + yz^2 - 1 = 0,$$

defineix implícitament $y = y(x), z = z(x)$ amb $y(0) = 1, z(0) = 1$ en un entorn de $(0,1,1)$. Calcula el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de $y(x), z(x)$ en $x = 0$.

91. Sigui $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x,y,z) = (e^x, \sin(x+y), e^z)$. Demostreu que f té inversa local diferenciable al voltant de $(0,0,0)$ però f no té inversa global en $\mathbf{R}^3$.

92. Proveu que $f(u,v) = (e^u + e^v, e^u - e^v)$ és localment inversible en tot punt de $\mathbf{R}^2$. Proveu que la inversa local és global i trobeu-la.

93. Demostreu que $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ té inversa local a tot punt excepte a $(0,0)$ però la funció no és injectiva a $\mathbf{R}^2$. Calculeu el jacobià de la funció inversa a $(x,y) \neq (0,0)$.

94. (a) A $\mathbf{R}^3$ definim $f(x,y,z) = (e^y \cos x, e^y \sin x, z^3)$. Trobeu el punts de $\mathbf{R}^3$ on el teorema de la funció inversa sigui vàlid.
    (b) Sigui $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ -\pi < x < \pi\}$. Determineu $f(U)$ i comproveu que $f : U \to f(U)$ és invertible. Doneu la diferencial de f^{-1} en $(1,0,0)$ i en $(1,0,1)$.

95. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^k \quad (k \geq 1)$ tal que

$$|f'(t)| \leq k < 1$$

per tot $t \in \mathbf{R}$. Demostreu que l'aplicació $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definida per

$$F(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$$

és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbf{R}^2$.

96. Sigui B_a la bola centrada a l'origen i de radi a de $\mathbf{R}^n$. Demostreu que l'aplicació $f : B_a \longrightarrow \mathbf{R}^n$ definida per

$$f(x) = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - \|x\|^2}}$$

és un difeomorfisme de B_a en $\mathbf{R}^n$.

97. (a) Demostreu que si l'equació $f(x,y)=0$ defineix $x=x(y)$ al voltant del punt (x_0,y_0), i y_0 és un extrem local de $x(y)$, llavors y no es pot aïllar com a funció de x en cap entorn de x_0.

    (b) Sigui $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definida per $f(x,y)=2x^3-3x^2-2y^3-3y^2$ i $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ f(x,y)=0\}$. Comproveu que $(0,0)$ és un punt aïllat de S i que y no es pot resoldre en funció de x al voltant del punt $(3/2,0)$.

98. Demostreu que l'equació $x^3z-z^3yx=0$ defineix $z=z(x,y)$ com a funció C^∞ al voltant de $(1,1,1)$ però no al voltant de $(0,0,0)$. Calculeu les primeres derivades de z al punt $(1,1)$.

99. Donat el sistema

$$e^x+\alpha y^2z-z=\beta, x^2+\alpha y^2\ln z-xy=0,$$

determineu els valors de $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ pels quals aquest sistema defineix y i z com a funcions implícites de x, de classe $\mathcal{C}^\infty$, localment a $(0,1,1)$. Per quins valors de $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ es té $y^{'}(0)=-1/2$ i $z^{'}(0)=1$.

100. Una recta que passa per l'origen forma en el primer octant angles α, β, γ respectivament amb els semieixos coordinats positius. Trobeu una relació de dependència entre α, β, γ i considereu γ com a funció de α i β. Calculeu $\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}$ quan $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=\pi/3$.

101. Sigui $F(x,y)=e^{x^2+2y^2+2}$ Quines corbes de nivell són localment gràfiques de funcions d'una variable? La mateixa qüestió per $G(x,y)=xy$.

9 Exercicis complementaris

102. Dibuixa l'arc en el quadrant $x,y>0$ donat per

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}, a>0.$$

Troba una parametrització i calcula la longitud.

103. La *cicloide* és la trajectòria que segueix un punt fixat de la llanta d'una bicicleta quan aquesta es desplaça en línia recta i sense pendent en el terreny. Troba una parametrització de la cicloide i calcula la longitud que aquest punt recorre entre entre dos instants en que el punt està en contacte amb el terra.

104. Una força es diu **central** si és proporcional al vector de posició de la partícula. D'acord amb la llei de Newton, això vol dir : $\mathbf{r}''(t)=\lambda(t)\mathbf{r}(t)$ on λ és una funció escalar i $\mathbf{r}$ és el vector de posició de la partícula.

(a) Demostreu que, sota l'acció d'una força central, el vector quantitat de moviment $L = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ és constant.

(b) Deduïu de l'apartat anterior que una partícula a $\mathbf{R}^3$ sotmesa a l'acció d'una força central es mou en un pla .

105. Un filferro F està donat per les equacions

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0, z \geq 0.$$

Troba una parametrització de F. Suposant que el filferro té en el punt (x, y, z) una densitat de massa proporcional a z calcula la massa i el seu centre de masses.

106. Per a cada $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, considerem la funció

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^4 + y^4)^\alpha} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Determineu per a quins valores de α f_α és contínua.

(b) Determineu per a quins valores de α f_α és diferenciable.

107. Sigui g una funció contínua a la circumferència unitat amb la propietat de que $g(0, 1) = g(1, 0) = 0$ i $g(-x) = -g(x)$. Definim $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ per

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si $x \in \mathbf{R}^2$ i $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ està definida per $h(t) = f(tx)$ proveu que h és diferenciable. Proveu també que f no és diferenciable a $(0, 0)$ tret del cas en que g és idènticament 0.

108. En un mapa amb un sistema de coordenades cartesianes s'identifica el punt $(6, 4)$ i se sap que hi ha un possible error de 0.01 en cada coordenada. Amb l'ajut de la diferencial, obtingueu una estimació de l'error de les coordenades polars r, θ en aquest punt.

109. Sigui $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ amb $f(0) = 0$. Proveu que existeixen $g_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ contínues tals que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x).$$

(Indicació: Si $h_x(t) = f(tx)$ aleshores $f(x) = \int_0^1 h_x'(t) dt$.)

110. (a) Demostreu que la equació $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 6y + 4z - 13$ defineix $y = f(x, z)$ com a funció implícita de x, z al voltant del punt $(1, 4, 2)$.

(b) Calculeu les derivades primeres i segones de f i comproveu que $(1,2)$ és un màxim local de f. Quina és la interpretació geomètrica d'aquest resultat?

111. Mitjançant la regla de la cadena, calculeu $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial w}{\partial y}$:

(a) $w = u^2 + uv \quad , u = ye^x \ , v = xe^y$

(b) $w = u \log(u^2 + v^2) \quad , u = x^2 - y^2 \ , v = x^2 + y^2$

112. Mitjançant la regla de la cadena, calculeu $\dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$:

(a) $u = xyz, \quad x = s + t, \quad y = s - t, \quad z = st^2$

(b) $u = x\cos(yz), \quad x = s^2,\ y = t^2,\ z = s - 2t$

113. Les derivades direccionals d'una funció diferenciable $f(x,y)$ en un determinat punt, segons les direccions dels vectors $(1,1)$ i $(0,-2)$ són , respectivament, $2\sqrt{2}$ i -3. Calculeu ∇f en aquest

114. Trobeu el pla tangent a la varietat

$$\Big(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 25}{24}\Big)^2 = 1 - \frac{z^2}{9}$$

en el punt $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$. punt i també la derivada direccional de f segons la direcció del vector $(3,4)$.

115. La temperatura a la superfície d'una nau espacial ve donada per $T(x,y,z) = \exp(-(x^2 + y^2 + z^2))$ on (x,y,z) són les coordenades de la nau en un sistema de referència amb una estrella propera com a origen. Se sap que la nau es troba al punt $(1,1,1)$.

(a) En quina direcció hauria de començar a moure's per tal que la temperatura decreixi el més ràpid possible?

(b) Malauradament, el material de la nau no pot resistir variacions de la temperatura superiors a $\sqrt{3}e^{-3}$ unitats de temperatura per unitat de longitud. Com es modifica la resposta a l'apartat anterior en aquesta nova situació?

116. Demostreu que la corba $\gamma(t) = (t-2, 2-t^{\frac{3}{4}}, \ln t)$ i la superfície $z = \ln(\frac{y+2x^2+y^2}{4})$ es tallen ortogonalment al punt $(-1,1,0)$.

117. Troba, quan sigui possible totes les funcions $f(x,y,z)$ tals que $\nabla f = (yz^2, xz^2, \alpha xyz)$, segons els valors de $\alpha > 0$.

118. En el semipla U definit per $x > 0$ considerem la funció $u(x,y) = -y \log x$. Troba una altra funció $v(x,y)$ que amb u formi un sistema de coordenades en U i calcula quina equació del tipus

$$A(x,y)f_x + B(x,y)f_y = 0,$$

caracteritza les funcions de la forma $f(x,y) = h(u(x,y))$ per a una certa funció h d'una variable.

119. Sigui $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1. Sabem que $|f(x,y)| \leq \exp(-x^2 - y^2)$, si $x^2 + y^2 \geq 1$, que $f(1/2, 0) = 1$ i $f(0, 1/2) = -1$. Quants punts crítics, com a mínim, ha de tenir f ?

120. (El mètode de quadrats mínims) Suposem que es vol estudiar la relació entre dues variables X,Y associades a un experiment a partir dels valors concrets (x_1, y_1),...,(x_n, y_n) observats en n mesuraments. El mètode de quadrats mínims consisteix en buscar una recta $y = ax + b$ de manera que l'error quadràtic

$$E(a,b) = \sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2$$

sigui mínim. Considerem

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2 - \mu_x^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \mu_x)^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i^2 - \mu_y^2$$

$$cov_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

on μ_x, σ_x^2 (resp μ_y, σ_y^2) són la mitjana i la variància de les dades x_1,...., x_n (resp. de y_1,....,y_n) i $cov_{x,y}$ és la covariància conjunta de (x_1, y_1),...,(x_n, y_n). Demostreu:

(a) E té un únic punt crític (a_0, b_0) donat per $a_0 = \frac{cov_{x,y}}{\sigma_x^2}$, $\quad b_0 = \mu_y - a_0\mu_x$.

(b) (a_0, b_0) és el mínim absolut de la funció E.

La recta $y = a_0 x + b_0$ es diu "recta de regressió de Y sobre X corresponent a les dades (x_1, y_1),...,(x_n, y_n)".

121. Calculeu i classifiqueu els punts crítics de les següents funcions:

(a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

(b) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$

(c) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$. Quins són els valors màxim i mínim de f al quadrat $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$?

(d) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

(e) $f(x,y) = xy(x-1)$

(f) $f(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$

(g) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

(h) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$. Comproveu que 0 és el valor mínim de f.

122. En cada apartat, estudieu si existeix el màxim i el mínim absolut en la regió A, i calculeu-los quan sigui possible :

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$, A és el triangle tancat limitat per les rectes $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$

(b) $f(x,y) = (x^2 - 4x)\cos y$, $A = \{(x,y) : 1 \le x \le 3, -\pi/4 \le y \le \pi/4\}$

(c) $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$, A és el primer quadrant obert.

(d) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$, A és la regió limitada per la corba $y = x^2$ i la recta $y = 4$.

123. Comproveu, en cada cas, que la funció donada satisfà l'equació en derivades parcials corresponent:

(a) $f(x,y) = e^x \sin y$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (Equació de Laplace)

(b) $f(x,t) = \sin(x - ct)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (Equació d'ones)

(c) $f(x,t) = \dfrac{1}{2c\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (Equació de la calor)

124. Fent el canvi de variables

$$u = y + 2x, v = y + 3x,$$

troba la solució general de

$$f_{xx} - 5f_{xy} + 6f_{yy} = 0.$$

125. Feu el desenvolupament de Taylor de les següents funcions:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy^2$ en $(1,1)$.

(b) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ en $(0,0,0)$, fins el terme d'ordre n.

(c) $f(x,y,z) = x^y + z$ en $(1,1,0)$ fins el terme d'ordre 3.

126. Suposem que $x = x(s,t), y = y(s,t), z = z(s,t)$ són funcions diferenciables que compleixen

$$z = x^2 + xy, x^2 + y^2 = st + 5, x^2 - y^2 = s^2 + t^2.$$

Calcula z_s, z_t

127. Considerem la funció $f(x,y,z) = \log x + \log y + 3\log z$ i el conjunt $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5a^2 \ \ x > 0, y > 0, z > 0\}$, on $a >$ està fixat.

(a) Raoneu l'existència de màxim absolut de f sobre S i que $\inf_S f = -\infty$.

(b) Trobeu el valor màxim de f sobre S.

(c) Useu l'apartat anterior i demostreu que per a qualsevols tres nombres positius A, B, C es compleix

$$ABC^3 \leq 27\Big(\frac{A+B+C}{5}\Big)^5.$$

128. Trobeu el màxim de la funció $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 x_n)^2$ sobre els punts de la esfera unitat de $\mathbf{R}^n$. Deduïu la següent desigualtat per nombres positius

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$