El teorema de Desargues

Jaume Aguadé
Universitat Autònoma de Barcelona

Geometria lineal. Grau de Matemàtiques

L'enunciat

- **Enunciat clàssic:** Si dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt, també estan en perspectiva respecte d'una recta.
- **Enunciat amb configuracions:** Es compleix la "configuració de Desargues".

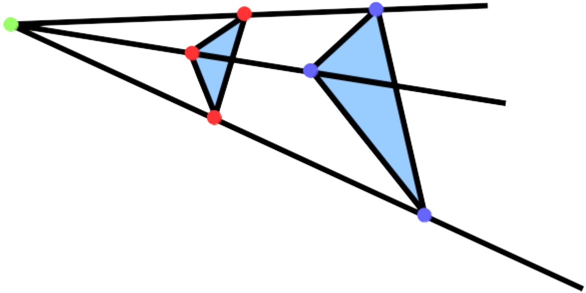
Observació: No diem en quin àmbit ens trobem. Direm que *una "geometria" compleix el teorema de Desargues* si els enunciats anteriors són certs quan entenem els conceptes de "punt" i "recta" en aquesta "geometria" concreta. Per exemple, la geometria dels espais afins que estudiem en el curs compleix el teorema de Desargues.

Triangles en perspectiva

Diem que dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt si podem donar noms A, B, C als vèrtex del primer triangle i podem donar noms A', B', C' als vèrtex del segon triangle, de manera que les rectes AA', BB' i CC' són concurrents o paral·leles.

Nota: no cal que els triangles siguin coplanars.

Dos triangles en perspectiva respecte d'un punt:

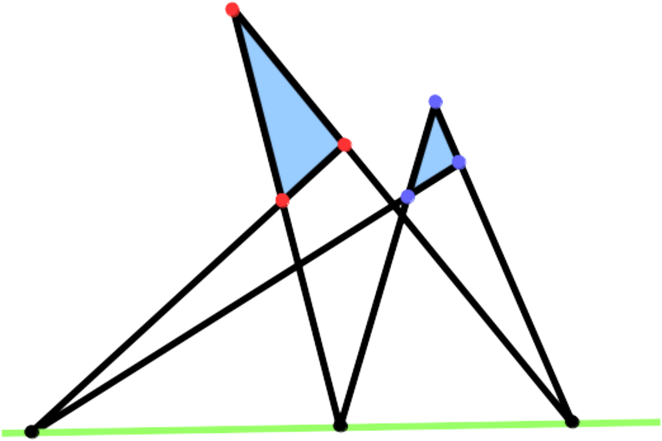


Triangles en perspectiva —2—

Diem que dos triangles estan en perspectiva respecte d'una recta si podem donar noms a, b, c a les rectes dels costats del primer triangle i noms a', b', c' a les rectes dels costats del segon triangle, de manera que els punts $a \cap a'$, $b \cap b'$ i $c \cup c'$ estan alineats.

Nota: si algun d'aquests punts d'intersecció no existeix, cal generalitzar aquesta definició usant el concepte de *punts a l'infinit* o, molt millor, formular aquest concepte en l'àmbit de la **geometria projectiva**.

Dos triangles en perspectiva respecte d'una recta:

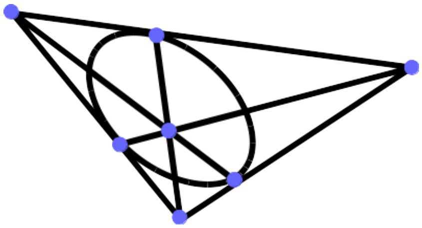


Configuracions

Una **configuració** és com una *“geometria en miniatura”*. És una parella $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ on $\mathcal{P}$ és un conjunt finit (els seus elements s'anomenen “punts”) i $\mathcal{R}$ és un conjunt de subconjunts de $\mathcal{P}$ (els seus elements s'anomenen “rectes”), de manera que per dos punts diferents hi passa com a màxim una recta.

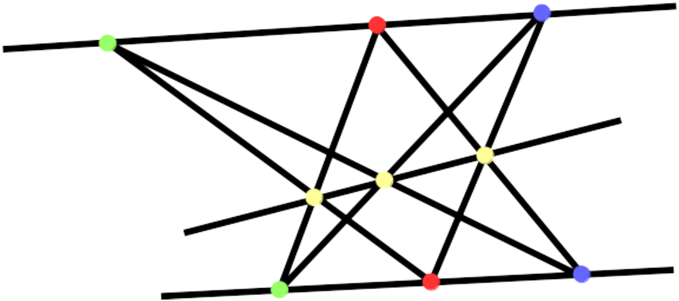
Exemple: la configuració de Fano.

Aquesta configuració està formada per 7 punts i 7 rectes, de manera que cada recta té tres punts. La configuració es pot representar amb aquest esquema gràfic.



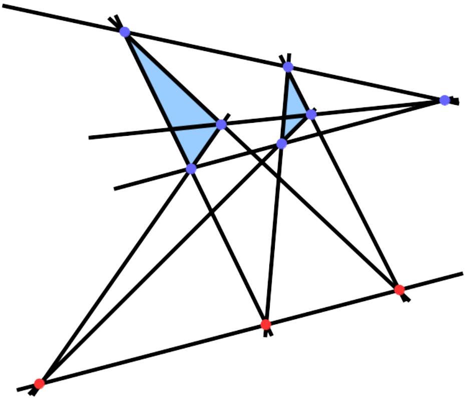
Exercici: Un màster consta de tres mòduls. Com s'ho pot fer un departament per organitzar 7 màsters si només té professorat per impartir 7 mòduls?

La configuració de Pappos (aprox. 290–350)



(Els colors dels punts només tenen una funció mnemotècnica.)

La configuració de Desargues (aprox. 1591–1661)



(Els colors dels punts i l'ombrejat de dos triangles només tenen una funció mnemotècnica.)

La configuració de Desargues:

- Té 10 punts i 10 rectes i és la configuració de dos triangles que estan en perspectiva respecte d'un puny **i** respecte d'una recta.
- És autodual: si anomenem punts a les seves rectes i rectes als seus punts, la nova configuració que obtenim és la mateixa configuració de Desargues.
- És totalment simètrica: donats punts P i P' i rectes r i r', de manera que $P \notin r$ i $P' \notin r'$, existeix un automorfisme de la configuració que transforma P en P' i r en r'. Dit d'una altra manera, podem prendre qualsevol punt i qualsevol recta (que no el contingui) com a centre de perspectiva i com a eix de perspectiva, respectivament.

Què vol dir que una configuració es verifica en un cert context geomètric?

Sigui $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ una configuració i $\mathcal{G}$ una "geometria" (és a dir, un objecte en el que tingui sentit parlar de punts, de rectes i de que un punt pertanyi o no a una recta). Sigui $\mathcal{C}_\ell$ la configuració que s'obté de $\mathcal{C}$ suprimint una recta ℓ. Direm que la configuració $\mathcal{C}$ es verifica a $\mathcal{R}$ si qualsevol inclusió $\mathcal{C}_\ell \subset \mathcal{G}$ és una inclusió $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, per tot ℓ.

Teorema de Pappos afí. La configuració de Pappos es verifica a qualsevol espai afí.

Teorema de Desargues afí. La configuració de Desargues es verifica a qualsevol espai afí.

Una geometria que no verifica Pappos

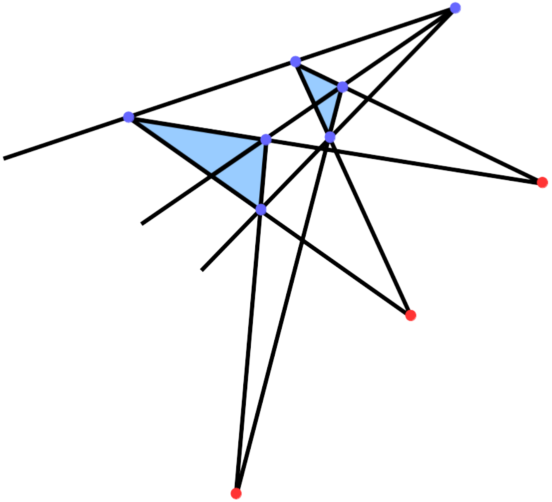
Hem definit l'espai afí com un conjunt de punts sobre el que actua un espai vectorial i hem definit els espais vectorials a partir dels cossos en els quals, per definició, la multiplicació és commutativa. També hi ha *cossos no commutatius* que s'acostumen a denominar *anells de divisió*. El més conegut d'aquests cossos no commutatius és el cos dels **quaternions**. També es pot fer una teoria d'espais vectorials sobre aquests cossos no commutatius i també es pot construir una geometria afí sobre aquests espais vectorials. Diguem-n'hi *geometria afí generalitzada*. En aquesta geometria afí generalitzada no es verifica la configuració de Pappus.

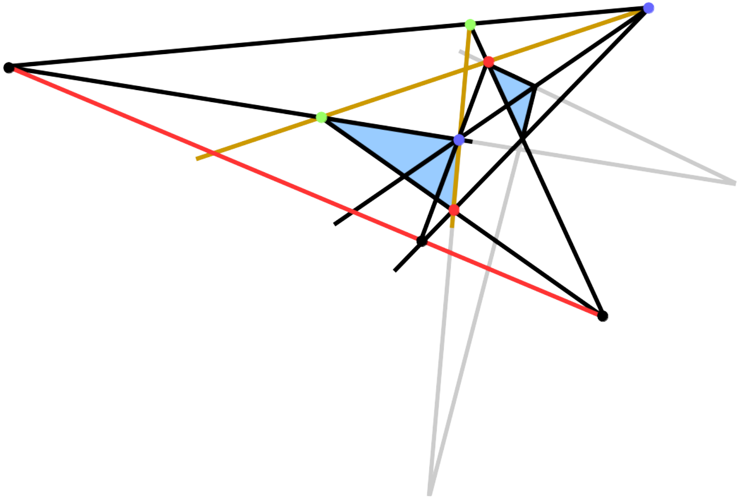
Teorema. La condició necessària i suficient perquè un espai afí generalitzat (de dimensió > 1) verifiqui la configuració de Pappos és que el cos base sigui commutatiu.

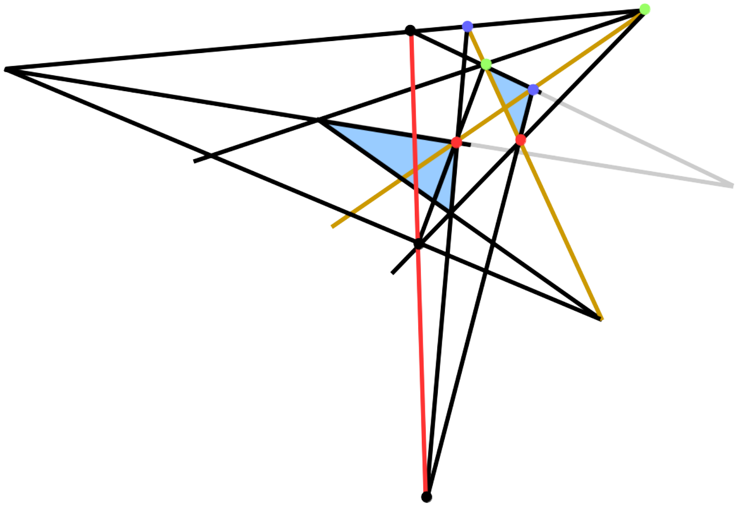
Pappus implica Desargues

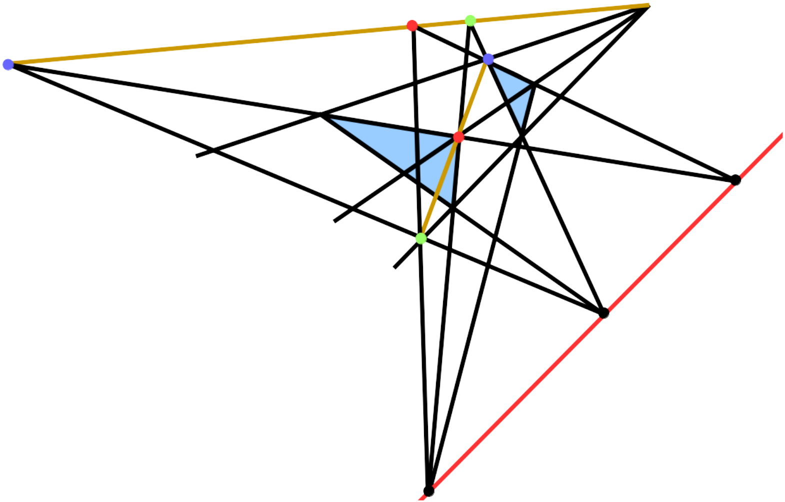
Si una geometria verifica la configuració de Pappus també verifica la configuració de Desargues. Hi ha una manera força enginyosa de trobar l'eix de perspectiva d'una configuració de Desargues aplicant tres vegades la configuració de Pappos. El mètode queda clar amb les imatges que segueixen. En cada cas, apliquem Pappos a les dues rectes de color groc fosc i obtenim la recta de color vermell.

Com sempre passa a la geometria afí, cada vegada que construïm un punt com a intersecció de dues rectes, hauríem de discutir què passa si les rectes són paral·leles. Inevitablement, la demostració es converteix en immensament farragosa. Aquest és un dels motius pel qual **l'àmbit natural de la geometria és la geometria projectiva** que incorpora els "punts de l'infinit" i evita les complicacions que resulten del fet que dues rectes puguin no tallar-se.









Desargues i els fonaments de la geometria

Hi ha dues maneres de fonamentar la geometria:

- **Geometria axiomàtica clàssica.** Es tracta de fixar uns axiomes bàsics senzills (per dos punts diferents hi passa una única recta, etc.) i desenvolupar la geometria a partir d'aquests axiomes. Així ho va fer Euclides fa uns 23 segles.
- **Geometria basada en coordenades.** Prenem un cos, un espai vectorial sobre aquest cos, definim rectes, plans, etc. i utilitzem coordenades, matrius i tota la resta d'eines algebraiques per desenvolupar la geometria. Així es fa en els cursos de geometria del grau de matemàtiques.

Desargues i els fonaments de la geometria —2—

El teorema de Desargues és la clau de volta que unifica els dos mètodes de fonamentar la geometria: l'axiomàtic i el basat en coordenades. En efecte,

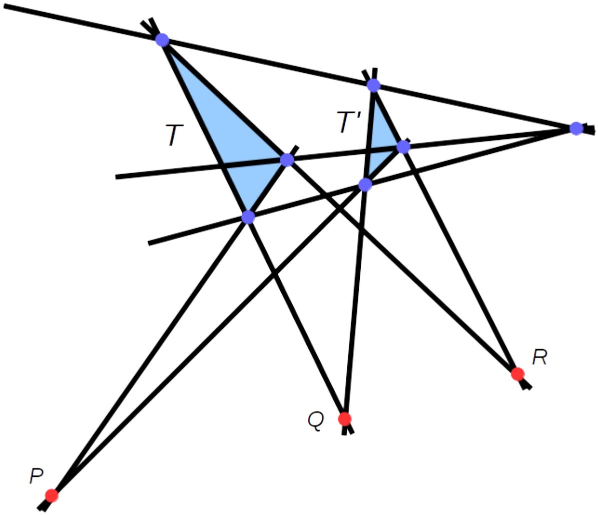
Teorema de coordinació. Si una geometria (axiomàtica, de dimensió finita) verifica la configuració de Desargues, existeix un cos (que pot ser no commutatiu) tal que la geometria és equivalent a la geometria basada en coordenades sobre aquest cos. Aquest cos és commutatiu si i només si es verifica la configuració de Pappos.

(Nota: per tal que aquest teorema fos prou formal, hauríem de definir amb molta més precisió els termes que hi apareixen.)

Desargues és automàticament vàlid en dimensió ≥ 3

Si una geometria té dimensió ≥ 3, verifica la configuració de Desargues. És a dir, en dimensió ≥ 3, la configuració de Desargues és una conseqüència dels axiomes bàsics de la geometria. No cal utilitzar coordenades. La demostració és senzilla i elegant.

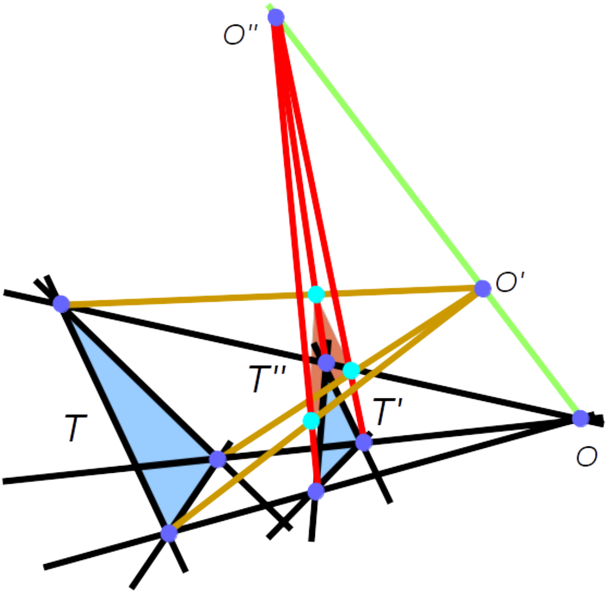
Suposem que tenim dos triangles T i T' que estan en perspectiva respecte d'un punt. Volem demostrar que estan en perspectiva respecte d'una recta. Recordem la configuració:


T
T'
R
Q
P

Observem en primer lloc que tota la configuració es troba a un espai de dimensió 2 o 3. Aleshores, distingim dos casos:

Primer cas. Suposem que els triangles T i T' estan en plans diferents Π i Π', respectivament. Aleshores, els punts P, Q i R es troben, simultàniament, als plans Π i Π'. Com que, en un espai de dimensió 3, dos plans que es tallen ho fan en una recta, els punts P, Q i R es troben en una recta. Ja hem acabat.

Segon cas. Suposem que els dos triangles estan en un mateix pla i, per tant, tota la configuració es troba en un pla. Com que sabem que la geometria té dimensió ≥ 3, podem trobar un punt O' que estigui fora d'aquest pla. Unim aquest punt O' amb els vèrtex del triangle T. A la recta que passa per O i O' escollim un altre punt O'' i l'unim amb els vèrtex del triangle T'.


O''
O'
T''
T'
T
O

D'aquesta manera, trobem un triangle T'' que té aquestes propietats:

- T'' està en perspectiva amb T respecte del punt O'.
- T'' està en perspectiva amb T' respecte del punt O''.
- T'' està en un pla diferent del pla on són T i T'.

Per tant, podem aplicar el primer cas als triangles T i T'' i als triangles T' i T''. La conclusió és que T i T' estan en perspectiva respecte d'una recta. Això demostra el teorema de Desargues.

Com a conseqüència, en un espai afí sempre es compleix Desargues. En efecte, en dimensió ≥ 3, ja hem vist que Desargues es dedueix de les propietats elementals de la geometria. En el cas d'un pla afí $\mathbb{A}^2$, com que sempre el podem incloure en un espai afí $\mathbb{A}^3$, Desargues també s'ha de complir.

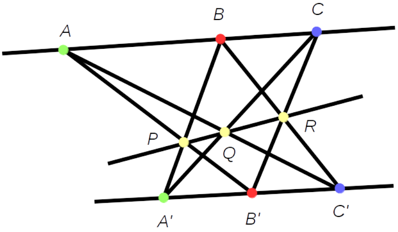
Demostració de Pappus i Desargues per força bruta

Suposem que som en un pla afí $\mathbb{A}^2$ sobre un cos (commutatiu) i que volem demostrar Pappus i Desargues utilitzant coordenades, "per força bruta". Es tracta "simplement", de prendre un sistema de referència, calcular les coordenades dels punts que volem veure que estan alineats i comprovar que realment ho estan. És trivial, però si ho intentem fer veurem que els càlculs són terriblement complicats.

Fem-ho amb Pappos (que sabem que implica Desargues).

$$A = (0,0),\ C = (0,1),\ B' = (1,0).$$

$$B = (0,a),\ A' = (b,c),\ C' = (d(b-1)+1, dc).$$



$$P = \left(\frac{ab}{a-c}, 0\right)$$

$$Q = \left(\frac{b^2d - bd + b}{bd + cd - c - d + 1}, \frac{-bcd}{-bd - cd + c + d - 1}\right)$$

$$R = \left(\frac{-abd + ad + bd - a - d + 1}{bd + cd - a - d + 1}, \frac{-abd + ad - cd}{-bd - cd + a + d - 1}\right)$$

Aleshores, resulta que $\overrightarrow{PR} = r\overrightarrow{PQ}$ amb

$$r = \frac{ab^2d + abcd - abc - 2abd - acd + bcd + c^2d + ab + ac - c^2 + ad - cd - a + c}{b^2cd + bc^2d - abc - bcd + bc}$$

És clar que aquest càlcul està fet amb un ordinador. Els càlculs per al teorema de Desargues són similars.

Si, en lloc d'obstinar-nos a treballar amb la incòmoda geometria afí, treballem amb geometria projectiva (*la mare de totes les geometries*) els càlculs són immensament més senzills i es poden fer a mà sense gaire dificultat.

Una geometria on no es compleix Desargues

Si volem trobar una geometria que no compleixi Desargues, segons els que hem vist abans, no podem pensar en els espais afins ni tampoc en cap geometria de dimensió superior a dos. Ha de ser una geometria plana (un *pla no desarguesià*). A més, ha de ser una geometria plana que no es pugui estendre a una geometria de dimensió tres.

Es coneixen molts exemples. Potser el més important és la geometria del **pla de Cayley**. Per parlar d'aquest pla cal parlar dels **nombres de Cayley**.

Recordem que els complexos s'obtenen com a parelles de reals (a, b) i es poden pensar com el resultat d'adjuntar als reals una *unitat imaginària* i tal que $i^2 = -1$.

Repetim aquest procés. Considerem parelles de nombres complexos (u, v), posem $j := (0, 1)$ i decretem que $j^2 = -1$. Obtenim una nova estructura algebraica: els **quaternions** $\mathbb{H}$. Es tracta, com en el cas dels complexos, d'un cos, però ara ja hem perdut la propietat commutativa: $ij \neq ji$.

Tornem a repetir aquest procés. Considerem parelles de quaternions (u, v), posem $v := (0, 1)$ i decretem que $v^2 = -1$. Obtenim una nova estructura algebraica: els **octonions** $\mathbb{O}$, que es diuen així perquè, de fet, un octonió és vuit nombres reals. També s'anomenen **nombres de Cayley** perquè els va inventar John T. Graves el 1843 (hi ha un teorema que afirma que si un objecte matemàtic o un teorema du el nom d'una persona, és segur que aquesta persona no va ser la primera de descobrir aquest objecte o de demostrar aquest teorema).

Resulta que els nombres de Cayley tenen una estructura que encara s'assembla força a la d'un cos... però la multiplicació no és associativa. Per tant, no és possible definir correctament espais vectorials sobre els octonions i tampoc no és possible fer geometria sobre els octonions. Excepte que... sí que és possible parlar de rectes i, en definitiva, fer geometria sobre el pseudo-pla-afí $\mathbb{K} = \mathbb{O} \times \mathbb{O}$. En aquest pla —que és el **pla de Cayley**— es compleixen els axiomes de la geometria plana i és, per tant, un model perfectament acceptable de geometria plana. Però no es compleix el teorema de Desargues.

Aquest objecte geomètric $\mathbb{K}$ no és pas una simple curiositat: en ell rau l'explicació última de l'existència dels famosos i enigmàtics **grups de Lie excepcionals**. Però tot això és ja una altra història...