

Objectius.

- Entendre la noció de convergència uniforme d'una successió o una sèrie de funcions.
- Utilitzar els resultats teòrics que relacionen la regularitat de la funció límit amb la regularitat de les funcions de la successió.

Requisits.

- Els resultats teòrics sobre convergència uniforme de funcions contínues.
- El criteri de Weierstrass per sèries uniformement convergents.

ACTIVITATS

1. Estudieu la convergència puntual i uniforme de les successions següents

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_n(x) &= \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} & \text{(b)} \quad f_n(x) &= \begin{cases} n - 2n^2|x - \frac{1}{2n}| & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f_n(x) &= \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2} & \text{(d)} \quad f_n(x) &= \inf\{n, \frac{1}{x}\} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

2. Demostreu que les sèries següents són uniformement convergents als intervals indicats

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x\sqrt{n}}{1 + n^4x^2} \quad \text{a } \mathbb{R}. \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{\log(n+1)} \quad \text{a } [0, 1]. \end{aligned}$$

3. Demostreu que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+nx^2)}$ convergeix uniformement a $[-1, 1]$ però és divergent a $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

4. Estudieu la convergència puntual, uniforme i absoluta a $[2, \infty)$ de la sèrie de funcions $\sum_n \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$

5. Sigui $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua, no idènticament nul·la i tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ i $f(0) = 0$. Definim les successions de funcions f_n i g_n com $f_n(x) = f(nx)$ i $g_n(x) = f(x/n)$, per $x \in [0, \infty)$ i $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que:
- (a) f_n i g_n convergeixen puntualment a zero a $[0, \infty)$ però la convergència no és uniforme en aquest mateix interval.
 - (b) La successió $\{f_n g_n\}$ convergeix uniformement a zero a $[0, \infty)$.
 - (c) Doneu un exemple de dues successions de funcions uniformement convergents però que el seu producte no sigui uniformement convergent.