Lliurament de Càlcul de Diverses Variables i Optimització

Arnau Mas

26 d'Octubre de 2017

Problema 3

Per veure que q és una norma observem el següent:

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \sqrt{(x+2y)^2 + (y-2x)^2} \\ &= \sqrt{5x^2 + 5y^2} \\ &= \|5(x,y)\| \end{aligned}$$

on $\|\cdot\|$ és la norma euclidiana. Veiem, doncs, que q prové d'un producte escalar. Explícitament

$$q(x) = \sqrt{\langle 5(x,y)\,, 5(x,y)\rangle}.$$

Per tant ara és clar que q és una norma.

Pel que fa a les boles que determina q, és clar que són les boles usuals que determina la norma euclidiana, escalades per un factor $\sqrt{5}$. És a dir, la bola centrada en l'origen de radi r que determina q és la bola centrada en l'origen de radi $\sqrt{5}r$ que determina la norma euclidiana usual.

Considerem $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$, es té $q(T(x)-T(y)) = q(x,y)$ i tal que $T(0) = 0$. Pel que hem vist abans, això equival a dir que $\sqrt{5}\,\|T(x) - T(y)\| = \sqrt{5}\,\|x-y\|$, que és a la vegada equivalent a dir que T és una isometria, és a dir, que conserva la distància euclidiana. Per tant, hem de veure que qualsevol isometria que fixa l'origen és lineal. Com a observació prèvia veiem que una isometria conserva la norma:

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

No només això, sino que també conserva el producte escalar. En efecte, tenim que $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x\,, y\rangle$. Per tant

$$\langle x\,, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Ara és immediat veure que T conserva el producte escalar:

$$\begin{aligned}\langle T(x)\,, T(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 - \|T(x)-T(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \langle x\,, y\rangle\end{aligned}$$

Per provar que T és lineal n'hi ha prou amb que vegem que per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és té $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$. Però això és equivalent a dir que $\|T(\lambda x + \mu y) - \lambda T(x) - \mu T(y)\| = 0$. Calculem, doncs, el quadrat de la norma d'aquest vector, que serà zero si i només si la pròpia norma és zero. Ho fem així per utilitzar la bilinealitat del producte escalar:

$$\begin{aligned}&\|T(\lambda x + \mu y) - \lambda T(x) - \mu T(y)\|^2\\ &= \|T(\lambda x + \mu y)\|^2 + \|\lambda T(x) + \mu T(y)\|^2 - 2\left\langle T(\lambda x + \mu y)\,, \lambda T(x) + \mu T(y)\right\rangle\\ &= \|T(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2\|T(x)\|^2 + \mu^2\|T(y)\|^2 + 2\lambda\mu\left\langle T(x)\,, T(y)\right\rangle\\ &\quad - 2\lambda\left\langle T(\lambda x + \mu y)\,, T(x)\right\rangle - 2\mu\left\langle T(\lambda x + \mu y)\,, T(y)\right\rangle\\ &= \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2 + 2\lambda\mu\langle x\,, y\rangle\\ &\quad - 2\lambda\langle \lambda x + \mu y\,, x\rangle - 2\mu\langle \lambda x + \mu y\,, y\rangle\\ &= 2\|\lambda x + \mu y\|^2 - 2\left(\lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2 + 2\lambda\mu\langle x\,, y\rangle\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Considerem ara una funció $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que compleix que existeix $C > 0$ tal que, per tot $x, y \in \mathbb{R}^d$ es compleix

$$\|f(x) - f(y)\| \le C\|x-y\|^2.$$

Hem de veure que, en aquestes condicions, f és constant. Com que ens serà útil per al següent apartat, veurem un resultat més general. I és que només ens cal que es compleixi que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|^{1+\beta}$$

per algun $\beta > 0$ per poder afirmar que f és constant. Que sigui certa aquesta desigualtat implica que la diferencial de f és nul·la en qualsevol punt, i per tant que f és constant —ja que $\mathbb{R}^d$ és òbviament un obert arc-connex—. Verifiquem explícitament que en tot punt $a \in \mathbb{R}^d$ és té $df(a) = 0$. Segons la definició de diferencial, si és veritat que f té diferencial nul·la a tot arreu, hem de tenir, per tot $a \in \mathbb{R}^d$:

$$f(a + h) = f(a) + o(\|h\|),$$

o el que és el mateix

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a)\|}{\|h\|} = 0.$$

Per hipòtesi, tenim que $0 \leq \|f(a + h) - f(a)\| \leq C \|h\|^{1+\beta}$. A més, $C \|h\|^{1+\beta} \to 0$ quan $\|h\| \to 0$. Per tant,

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|f(a + h) - f(a)\| = \lim_{\|h\| \to 0} C \|h\|^{1+\beta} = 0.$$

I aleshores el límit que volíem avaluar es redueix a

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{C \|h\|^{1+\beta}}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} C \|h\|^{\beta} = 0.$$

Per tant, efectivament, f té diferencial nul·la a tot arreu i per tant és constant.

Pel que fa a l'últim apartat, podem considerar tres casos: $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ i $\alpha = 0$ Si $\alpha = 0$, aleshores no pot existir $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bijectiva que compleixi la condició. En efecte, si f és bijectiva en particular és exhaustiva. Per tant el 0 té una preimatge, x_0. Però aleshores tenim que la norma de qualsevol imatge és 1. Això és perque per tot $x \in \mathbb{R}^d$ tenim $\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x)\| = \|x - x_0\|^0 = 1$. I per tant qualsevol punt amb norma diferent de 1 no té preimatge: una contradicció.

El cas $\alpha > 1$ ja l'hem resolt a l'apartat anterior. Si $\alpha > 1$, podem posar $\alpha = 1 + \beta$ amb $\beta > 0$. Però aleshores tenim, per tot $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|^{1+\beta} \leq \|x - y\|^{1+(1+\beta)}$$

i per tant f ha de ser constant, per l'apartat anterior, per la qual cosa no pot ser bijectiva.

Suposem ara que f és bijectiva i compleix la condició de l'enunciat amb $0 < \alpha < 1$. Aleshores f té una inversa, també bijectiva, i tenim, per tot $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\|x - y\| = \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right\|^{\alpha}$$

i per tant

$$\|x - y\|^{1/\alpha} = \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right\|.$$

Però $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, i per tant, tal i com hem raonat abans, f^{-1} ha de ser constant: una contradicció.

Problema 6

Se'ns demana de demostrar que la funció $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ amb $f(x, y) = x^2 y + 2xy + 12y^2$ té un màxim i mínim absoluts en el conjunt

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2x + 16y^2 \leq 8\right\}$$

i calcular-los.

Observem que f és continua, ja que és la combinació lineal de tres funcions continues —el producte és continu, així com ho és elevar al quadrat—. El conjunt A és un compacte. Que és tancat és clar, perque està donat per una desigualtat no estricta sobre una funció continua. Per veure que és fitat observem que si $(x, y) \in A$ aleshores

$$(x + 1)^2 + 16y^2 \leq 9$$

i per tant $(x+1)^2 + y^2 \leq 9$. És a dir, que A està contingut en la bola centrada en $(-1, 0)$ de radi 3, i per tant és fitat.

Com que A és compacte i f continua, pel teorema de Weierstrass, concloem que f té almenys un màxim i un mínim absoluts en A. Com que f no només és continua sino que també es diferenciable sabem que si f té un màxim o mínim absolut en un punt d'A, aleshores aquest punt és un mínim o màxim relatiu o bé de la frontera d' A. Per tant, en el primer cas, la diferencial de f —que com que és escalar ve donada pel seu gradient— és nul·la en aquest punt. Calculem el gradient de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)e_2\\ &= (2xy+2y)e_1 + (x^2+2x+24y)e_2\end{aligned}$$

on e_1 i e_2 són els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

Si imposem que el gradient sigui nul, obtenim dues equacions, $y(x+1)=0$ i $x^2+2x+24y=0$. De la primera concloem que $y=0$ o $x=-1$. En el primer cas, si substituim a la segona equació trobem que $x^2+2x=0$ i per tant que $x=0$ o $x=-2$. En el segon, quan substituïm trobem que l'única solució és $y=1/24$. Així doncs, els únics punts crítics a l'interior d'A són $(0,0)$, $(-2,0)$ i $(-1,1/24)$.

Cal considerar també la frontera d'A. Aquesta és el conjunt de punts que compleixen $x^2+2x+16y^2$. Equivalentment, són els punts que compleixen

$$\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4y}{3}\right)^2 = 1.$$

Aquesta és l'equació d'una el·lipse amb centre a $(-1,0)$ i semieixos 3 i $3/4$. La podem parametritzar per un arc regular γ definit com segueix:

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \left(-1+3\cos t, \frac{3}{4}\sin t\right)\end{aligned}$$

Així, la restricció de f a la frontera d'A la podem pensar com la funció d'una variable $f\circ\gamma$. És una funció derivable ja que és la composició de funcions derivables. Podem calcular-ne explícitament l'expressió i obtenim

$$(f\circ\gamma)(t) = \frac{27}{4}\left((\sin t)^2 - (\sin t)^3 + \frac{8}{9}\sin t\right).$$

I si derivem trobem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) &= \frac{27}{4}\cos t\left(2\sin t - 3(\sin t)^2 + \frac{8}{9}\right)\\ &= -\frac{27}{4}\cos t\left(\sin t - \frac{3-\sqrt{33}}{9}\right)\left(\sin t - \frac{3+\sqrt{33}}{9}\right)\end{aligned}$$

Si busquem les arrels d'aquesta expressió trobem que són $\pi/2$ i $3\pi/2$, que anul·len el primer factor. Pel que fa al tercer factor, observem que $0 < (3+\sqrt{33})/9 < 1$, per tant té sentit parlar del seu arcsinus, que és un angle menor que $\pi/2$. El seu suplementari també anul·la el tercer factor. Pel tercer factor, hem de tenir en compte que $-1 < (3-\sqrt{33})/9 < 0$ i per tant el seu arcsinus és un angle comprès entre π i 2π, així com el seu suplementari. Així doncs, els punts crítics de f a la frontera d'A són les imatges per γ d'aquests sis valors.

Si calculem les imatges per f d'aquests punts i dels tres punts crítics a l'interior d'A veiem que el punt amb la major imatge és $\gamma(3-\pi/2) = (-1,-4/3)$. Per tant, f té un màxim absolut, de valor $14/2$ en aquest punt. Els dos punts amb la imatge per f més petita són $\gamma(\arcsin{(3-\sqrt{33})/9}) \approx (1{,}86\ , -0{,}41)$ i $\gamma(\arcsin{(3-\sqrt{33})/9}) \approx (-3{,}86\ , -0{,}41)$. La funció arcsinus la considerem amb imatge a $(0,2\pi)$ i no a $(-\pi,\pi)$ com és habitual. Així, f té un mínim absolut en aquests dos punts de valor aproximadament $-1{,}01$.