Llista 3

1 Integrals dobles i triples sobre rectangles

1. Sigui $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \ ; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbf{Q} \text{ i } y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \\ \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ irreductible i } y \in \mathbf{Q} \ . \end{cases}$$

   Proveu que f és integrable a $[0,1] \times [0,1]$ però per cada $x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$ la funció $g_x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per $g_x(y) = f(x,y)$ no és integrable a $[0,1]$.

2. Calculeu el volum dels cossos

$$C = \{(x,y,z) : -1 \le x, y \le 1, 0 \le z \le f(x,y)\}$$

   quan

   - $f(x,y) = ax^2 + by^2$.
   - $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   - $f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

3. Demostreu que el volum del cos de $\mathbf{R}^3$

$$C = \{(x,y,z), 0 \le z \le \frac{1}{1 + x^2 + x^2y^4 + 2x^2y^2}\}$$

   és finit.

4. - Suposant que el quadrat $[-1,1]^2$ del pla té densitat de massa en $P = (x,y)$ proporcional a la distància a la recta $2x + 2y = 1$, calculeu la massa i el centre de masses.
   - Suposant que el cub $[-1,1]^3$ de $\mathbf{R}^3$ té densitat de massa en $P = (x,y,z)$ proporcional a la distància de P al pla $2x + 2y + 2z = 1$, calculeu la massa i el centre de gravetat

5. Calculeu les integrals sobre $Q = [0,1]^2$ de

   - $f(x,y) = x^2y^2e^{xy}$.
   - $f(x,y) = xy \sin \pi xy$.

6. Calculeu les integrals sobre $Q = [0,1]^3$ de

   - $f(x,y,z) = \log(x + y + z)$.
   - $f(x,y,z) = xyz \log(1 + xyz)$.

2 Integrals sobre conjunts generals

7. Canvieu l'ordre d'integració, dibuixeu la regió d'integració i calculeu les integrals iterades següents

(a) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\, dxdy$ (b) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y^2\, dydx$

(c) $\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\, dxdy$ (d) $\int_{-1}^0 \int_0^{x+1} e^{x+y}\, dydx + \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{x+y}\, dydx$

(e) $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\, dxdy$ (f) $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\, dydx$

8. Expresseu , en cada cas , $\displaystyle\int_D f\, dxdy$ com integral iterada i calculeu-la

(a) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ i D és el triangle limitat per les rectes $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$.

(b) $f(x, y) = x$ i D és el sector circular del primer quadrant limitat per la circumferència $y = \sqrt{25 - x^2}$ i les rectes $y = 0$, $3x - 4y = 0$

(c) $f(x, y) = xe^y$ i D és el triangle limitat per les rectes $y = 4 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

(d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ i D és la regió limitada per les rectes $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$.

9. Calculeu el volum del sòlid R en cada cas

(a) la base de R és la regió del pla XY limitada per la paràbola $y = 4 - x^2$ i la recta $y = 3x$ i la seva cara superior està limitada pel pla $z = x + 4$.

(b) R és la part del sòlid dintre de la superfície $z = x^2 + y^2$ entre els plans $z = 0$ i $z = 10$.

(c) R és el sòlid del primer octant limitat per la superfície $z = 4 - x^2 - y$

(d) la base de R és la regió del pla XY limitada per les rectes $y = x$, $y = 1$ i R està limitat superiorment per la superfície $z = 1 - xy$.

(e) R és la regió del primer octant limitada superiorment per la superfície $z = 1 - y^2$ i compresa entre els plans verticals $x + y = 1$ i $x + y = 3$.

(f) R és la regió limitada inferiorment per $z = x^2 + y^2$ i superiorment per l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

10. Calculeu la integral triple $\displaystyle\int_R f(x, y, z)\, dxdydz$ en cada cas

(a) $f(x,y,z) = x^2 \cos z$, R és el sòlid limitat pels plans $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x + y = 1$.

(b) $f(x,y,z) = xyz$, $R = \{(x,y,z) : \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq 3\}$

(c) $f(x,y,z) = x^2y^2$, R és el sòlid limitat superiorment per la superfície $y^2 + z = 4$, inferiorment pel pla $y + z = 2$ i lateralment pels plans $x = 0$, $x = 2$.

11. Les expressions següents representen el volum de tres sòlids. Dibuixeu-los, canvieu l'ordre d'integració i calculeu els seus volums.

    (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} dydzdx$

    (b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{2x}^{4}\int_{0}^{\sqrt{y^2-4x^2}} dzdydx$

    (c) $\displaystyle\int_{0}^{6}\int_{z/2}^{3}\int_{z/2}^{y} dxdydz + \int_{0}^{6}\int_{3}^{(12-z)/2}\int_{z/2}^{6-y} dxdydz$

12. Es considera el polinomi $P = ax^2 + bx + c$, on a, b, $c \in [0,1]$. És més probable que P tingui les dues arrels reals o complexes? Quina és la probabilitat que tingui una arrel real doble?

13. Calculeu la integral triple $\displaystyle\int_R f(x,y,z)\, dxdydz$ en cada cas

    (a) $f(x,y,z) = x^2$, $R = \{(x,y,z) : \ x \geq 0,\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\ 4z^2 \geq 3(x^2 + y^2)\}$

    (b) $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x,y,z) : \ 0 \leq z \leq x^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$

    (c) $f(x,y,z) = z,,$ $R = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq z\}$

14. Calculeu la integral triple $\displaystyle\int_R f(x,y,z)\, dxdydz$ en cada cas

    (a) $f(x,y,z) = z^2$, $R = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$

    (b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $R = \{(x,y,z) : \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$

    (c) $f(x,y,z) = z$, $R = \{(x,y,z) : \ 2z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 + 1,\ z \geq 0\}$

15. Sigui $V_n(r)$ el volum de la bola n-dimensional de radi r. Demostreu que:

    (a) $V_n(r) = r^n V_n(1)$

    (b) $V_n(1) = 2V_{n-1}(1)\alpha_n$ on $\alpha_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$

(c) $V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1)$.

Deduïu un valor per $V_n(r)$

16. Calculeu el volum dels següents cossos de $\mathbf{R}^3$.

    (a) $\{(x, y, z) : \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \ x + y \leq 1, \ 0 \leq x, \ 0 \leq y\}$
    (b) $\{(x, y, z) : \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 \leq 2y\}$
    (c) $\{(x, y, z) : \ 0 \leq z \leq 4 - y^2, \ 0 \leq x \leq 6\}$
    (d) $\{(x, y, z) : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$
    (e) $\{(x, y, z) : \ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, \ 0 \leq z \leq 9 - x\}$

3 Integrals amb coordenades no cartesianes

17. Calculeu l'àrea d'un pètal de la corba $r = \cos(3\theta)$, fent un canvi de variable a coordenades polars.

18. Calculeu l'àrea limitada per la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ en el pla.

19. Calculeu el volum del cos que genera la cardioide quan gira entorn de l'eix x.

20. Feu servir coordenades convenients per a calcular el volum dels sòlids següents:

    (a) l'interior de l'hemisferi $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ i el cilindre $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
    (b) el sòlid limitat per les equacions $z = x^2 + y^2 + 3$, $z = 0$ i $x^2 + y^2 = 1$.
    (c) l'interior de l'hemisferi $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ i exterior al cilindre $x^2 + y^2 = 1$.

21. (a) Calculeu $\displaystyle\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ on D_R és el cercle centrat a l'origen de radi R.

    (b) Si C_R és el quadrat $[-R, R] \times [-R, R]$, deduïu de (a) el valor de $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$.

    (c) Apliqueu Fubini a l'apartat anterior per calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$

22. Sigui R la regió del primer quadrant limitada per les corbes $xy = 1$, $xy = 9$, $y = x$, $y = 4x$. Calculeu l'àrea de R fent servir el canvi de variables $u = \sqrt{xy}$, $v = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

23. Calculeu , en cada cas, el volum de R fent servir coordenades cilíndriques o esfèriques si resulta convenient

(a) R és el sòlid interior a l'esfera $x^2+y^2+z^2=16$ i al cilindre $(x-2)^2+y^2=4$.

(b) R és el sòlid interior a $x^2+y^2+z^2=16$ i exterior a $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(c) R és la regió del primer octant interior als cilindres $x^2+y^2=a^2$ i $x^2+z^2=a^2$.

(d) R és la regió limitada pel pla $z=2$ i l'esfera $x^2+y^2+z^2=8$.

(e) R és la regió interior al cilindre $x^2+y^2=1$, i limitada per les superfícies $z=x^2+y^2$ i $z=x^2+y^2+1$.

24. Si un recipient semiesfèric de 5 cm. de radi conté aigua fins a 3cm. de la part superior, calculeu el volum d'aigua dintre del recipient.

25. Calculeu la massa el centre de massa dels següents sòlids amb densitat constant:

(a) el primer octant de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

(b) $\{(x,y,z):\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2y\}$

(c) $\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz,\}$

26. Calculeu la massa del sòlid indicat:

(a) la part interior de l'el.lipsoide $4x^2+4y^2+z^2=16$ amb $z \geq 0$ si la densitat és proporcional a la distància al pla XY.

(b) un con circular recte de base R i alçada h si la densitat és proporcional a la distància al vèrtex.

27. D'acord amb la llei de Newton, el potencial gravitatori que una partícula de massa m_1 situada al punt (x_1,y_1,z_1) exerceix sobre una altra de massa m_0 situada al punt (x_0,y_0,z_0) és

$$V=\frac{Gm_0m_1}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}}$$

on G és la constant de gravitació universal. Si l'objecte atractor és un sòlid S amb densitat de massa uniforme podem pensar-lo com format per masses puntuals infinitesimals.

(a) Escriure el potencial gravitatori que exerceix un sòlid S sobre un punt fora del sòlid com una integral triple.

(b) En els "Principia " , Newton va demostrar que el camp gravitatori d'un planeta esfèric a l'exterior del planeta és el mateix que si tota la massa del planeta estigués concentrada al centre del planeta. Demostreu-ho fent servir coordenades esfèriques. (Sug: suposeu que el centre del planeta és l'origen i el punt exterior es troba a l'eix Z.)

28. (Una demostració de la fórmula d'Euler $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$)

(a) Desenvolupeu $\dfrac{1}{1-x^2y^2}$ en sèrie de potències de xy i justifiqueu la identitat

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(b) Comproveu que el canvi de variables $x = \dfrac{\sin u}{\cos v}$, $y = \dfrac{\sin v}{\cos u}$ transforma el triangle limitat per les rectes $u = 0$, $v = 0$, $u + v = \pi/2$ en el quadrat $[0,1] \times [0,1]$.

(c) Demostreu que $I = \dfrac{\pi^2}{8}$

(d) Deduïu la fórmula d'Euler.

4 Integrals sobre superficies

29. Calculeu l'àrea de les superfícies S següents:

(a) S és la part del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interior al cilindre $x^2 + y^2 = 1$

(b) S és la part central de l'esfera de radi 2 compresa entre els plans $z = -1$ i $z = 1$.

(c) S és la part del paraboloide hiperbòlic $z = xy$ interior al cilindre $x^2 + y^2 = a^2$.

30. Calculeu la massa d'una superfície material amb forma de semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, amb $z \geq 0$, si la densitat superficial és directament proporcional a la distància al pla XY.

31. Sigui S la superfície de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al con $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$. Calculeu l'àrea de S.

32. Sigui S la superfície de l'el·lipsoide $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ amb $a, b, c > 0$. Calculeu

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}} \, dS$$

33. Considerem la superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$. Calculeu l'área de S.

34. Calculeu l'àrea de les superficies indicades dins la bola de centre 0 i radi R.

- De l'hiperboloide d'una fulla

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- De l'hiperboloide de dos fulls

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{z^2}{c^2}.$$

- Del con

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

- Del cilindre eliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Del cilindre hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Del paraboloide elíptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

- Del paraboloide hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

5 Anàlisi Vectorial

35. Calculeu $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s}$ pels següents F i C:

    (a) $\overrightarrow{F}(x, y) = (y^2, -2x)$ i C és el triangle determinat pels punts $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$, recorregut en sentit horari.

    (b) $\overrightarrow{F}(x, y) = (x^2y, x^3y^2)$ i C és la corba tancada formada per trossos de la recta $y = 4$ i la paràbola $y = x^2$, recorreguda en sentit anti-horari.

    (c) $\overrightarrow{F}(x, y) = (y^n, x^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ i C és la circunferència centrada a l'origen i amb radi $r > 0$, recorreguda en sentit anti-horari.

36. Sigui C una corba simple tancada de classe C^1 que envolta l'origen sense passar-hi. Quan val

$$\int_C \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot d\overrightarrow{s}\ ?$$

37. Considerem el camp

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{(x,y)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(a) Calculeu $\int_C \overrightarrow{F}(x,y) \cdot \overrightarrow{n}\, ds$, on C és la circunferència unitat centrada a l'origen.

(b) Calculeu $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(x,y)$ per $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Expliqueu per què (a) i (b) no contradiuen el Teorema de la Divergència.

38. Calculeu les següents integrals de línia:

(a) $\displaystyle\int_C [x^2e^x + y - \log(1+x^2)]dx + [8x - \sin y]dy$, on C és la circunferència unitat recorreguda en sentit anti-horari.

(b) $\displaystyle\int_C (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, on C és l'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ recorreguda en sentit anti-horari.

39. Sigui C una corba tancada i simple, de C^1 a trossos, que envolta un domini D, i sigui $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ un camp vectorial de C^1 a un obert que conté D. Si $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ a D, aleshores,

$$\text{Àrea}(D) = \int_C P dx + Q dy.$$

Utilitza aquesta fórmula per calcular les àrees dels dominis tancats per les següents corbes:

(a) El llaç del folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

(b) La lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = 2a(x^2-y^2)$, $a > 0$.

40. (a) Dibuixa la corba sobre l'esfera unitat donada per la parametrització

$$x(t) = \sin(\frac{\pi}{2}(1-t))\cos 2\pi t, y(t) = \sin(\frac{\pi}{2}(1-t))\sin 2\pi t, z(t) = \cos(\frac{\pi}{2}(1-t)), 0 \leq t \leq 1.$$

(b) Calcula la circulació del camp $X = (x,y,z)$ al llarg de la corba anterior, orientada de $(1,0,0)$ a $(0,0,1)$.

(c) Comprova el teorema de la divergència per al mateix camp vectorial $X = (x,y,z)$ i el cos C intersecció de les boles $x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$.

41. Calculeu $\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$, on

(a) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^2, xy, yz)$ i S és la part del paraboloide $z = x^2 + y^2$ amb $y \geq 0$ i $0 \leq z \leq 1$.

(b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ i S és la part de l'esfera unitat interior al con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

42. Si la temperatura d'un punt a $\mathbb{R}^3$ ve donada per $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calculeu el flux de la calor a través de la superfície $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$.

43. Considerem el camp de velocitat (mesurada en metres per segon) d'un fluid descrit per $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calculeu quants metres cúbics de fluid per segon travessen la superfície descrita per $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

44. Verifiqueu el teorema de la divergència per a $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2x^2y, -y^2, 4xz^2)$ a la regió del primer octant limitada per $x = 2$ i $y^2 + z^2 = 9$.

45. Si S és la part amb z positiva del paraboloide d'equació $z = 9 - x^2 - y^2$ i γ la intersecció de S amb el pla $z = 0$, verifiqueu el teorema de Stokes per al camp $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3z, 4x, 2y)$.

46. Sigui S la superfície de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al con $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

(a) Calculeu l'àrea de S.

(b) Sigui $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z - y, 0, y)$. Calculeu $\int_C F \cdot d\overrightarrow{s}$ on C és la corba intersecció de l'esfera i el con. (i) Directament. (ii) Utilitzant el teorema de Stokes.