Problemes d'Electromagnetisme. Full 1 (eines)

1.1. Donat el camp escalar $\psi(x,y,z) = xy\sin(yz) + z^2 e^{2x}$, trobeu les seves derivades parcials respecte de x, y i z. Calculeu el seu gradient.

1.2. Si $\vec{r}$ és el vector de posició d'un punt respecte de l'origen de coordenades i $\vec{A}$ un vector constant, demostreu que $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \vec{A}$.

1.3. El vector $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$ es dirigeix del punt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al $P(x,y,z)$. Si el punt P_1 és fix i P variable demostreu que el gradient de $1/R$ val

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} = -\frac{\vec{R}}{R^3}\ .$$

Si el punt P és fix i P_1 variable demostreu que el gradient de $1/R$ val

$$\vec{\nabla}_1\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} = \frac{\vec{R}}{R^3}\ .$$

1.4. Demostreu que $\vec{\nabla}f$ és un vector perpendicular a la superfície $f(x,y,z) = K$, a on K és una constant.

Trobeu el vector perpendicular a la superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (esfera) en el punt $(2,-1,2)$, i a la superfície $z = x^2 + y^2 - 3$ (paraboloide de revolució) en el mateix punt. Calculeu l'angle que formen les dues superfícies anteriors en el punt $(2,-1,2)$.

1.5. Avalueu

$$\int 2y\ \vec{e}_x \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}\mathcal{S}$$

sobre la superfície d'un cub de costat a centrat en la posició $(a/2,\ a/2,\ a/2)$.

1.6. Demostreu que $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ i calculeu quant val el flux de $\vec{r}$ a través d'una superfície esfèrica de radi R.

1.7. Amb la definició de divergència

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} := \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\mathcal{S}}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}$$

i fent la integral en un paral·lelepípede diferencial fixat pels plans: $x = x_0 \pm \mathrm{d}x$, $y = y_0 \pm \mathrm{d}y$, $z = z_0 \pm \mathrm{d}z$, demostreu l'expressió de la divergència d'un camp en el punt (x_0, y_0, z_0), en coordenades rectangulars.

1.8. La força sobre una partícula que segueix una trajectòria el·líptica $4x^2 + y^2 = 16$, és

$$\vec{f} = xy\ \vec{e}_x + x^2\ \vec{e}_y + y^2\ \vec{e}_z.$$

Calculeu l'energia adquirida per la partícula al recórrer la trajectòria entre les punts $(2,0,0)$ i $(0,4,0)$, amb $x \geq 0$.

1.9. Demostreu que $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}) = 0$ i que $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}f = 0$.

1.10. Demostreu que el camp

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy + z^3)\,\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + 3xz^2\vec{e}_z$$

és conservatiu. Quin és el potencial associat?

1.11. Sigui una circumferència de radi R centrada en l'origen i en el pla $z = 0$. Calculeu la integral de línia del gradient de la funció (expressada en coordenades cilíndriques)

$$f = \rho\sin\varphi + 2\rho\cos\varphi$$

en la línia recta que va del punt $(0,-R,0)$ a $(0,R,0)$. Repetiu el càlcul si el camí és la semicircumferència amb $x > 0$ que uneix el mateixos punts.

1.12. Siguin els camps vectorials

$$\begin{aligned}\vec{A}_1(x,y,z) &= a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z\\ \vec{A}_2(\rho,\varphi,z) &= a\vec{e}_\rho + b\vec{e}_\varphi + c\vec{e}_z\\ \vec{A}_3(r,\theta,\varphi) &= a\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta + c\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

on a, b i c són constants. Són aquests camps vectorials constants en l'espai? Trobeu la divergència i el rotacional de tots ells.

1.13. Demostreu que el diferencial de longitud en coordenades cilíndriques es pot escriure

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z.$$

Amb l'ajuda d'aquesta expressió i tenint en compte que $\mathrm{d}f = \vec{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\vec{l}$, trobeu el gradient en coordenades cilíndriques.

1.14. Considereu el camp vectorial $\vec{A} = -yz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ per comprovar el teorema de la divergència utilitzant el cilindre definit per les superfícies

$$x^2+y^2=4, \qquad z=3, \qquad z=0.$$

Feu-ho en coordenades cartesianes i cilíndriques. Si la base inferior estigués situada a $z=-3$, quin seria el flux d'$\vec{A}$ a través de la superfície del cilindre? Per què?

1.15. Un fluid gira al voltant de l'eix z. Si la velocitat angular ω és constant, trobeu el valor del rotacional de $\vec{v}$. Quin serà el valor de $\vec{\nabla}\wedge\vec{v}$ si $\omega = K/\rho^2$ (K és una constant)?

*1.16. Amb la definició de divergència

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} := \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\mathcal{S}}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}$$

i fent la integral en una superfície diferencial fixada per les superfícies: $\rho=\rho_0\pm\mathrm{d}\rho/2$, $\varphi=\varphi_0\pm\mathrm{d}\varphi/2$, $z=z_0\pm\mathrm{d}z/2$, demostreu l'expressió de la divergència d'un camp en el punt (ρ_0,φ_0,z_0), en coordenades cilíndriques.

*1.17. Ídem que el problema anterior però en coordenades esfèriques.

*1.18. Amb la definició de rotacional

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot\vec{e}_\varphi := \lim_{\Delta\mathcal{S}\to 0}\frac{1}{\Delta\mathcal{S}}\oint_C\vec{A}\cdot\,\mathrm{d}\vec{l}$$

i fent la integral en el circuit tancat fixat per les 4 línies: $(r,\theta_0\pm\mathrm{d}\theta/2,\varphi_0)$ i $(r_0\pm\mathrm{d}r/2,\theta,\varphi_0)$, demostreu l'expressió de la component $\vec{e}_\varphi$ d'un camp en el punt (r_0,θ_0,φ_0), en coordenades esfèriques.

1.19. Trobeu el gradient de $f(r,\theta,\varphi) = Ar\cos\theta\sin^2\varphi$, i comproveu si compleix l'equació de Laplace ($\nabla^2 f = 0$).

**1.20. Sigui la superfície donada pel tros de pla $2x+3y+6z=12$ situat en el primer octant (x, y i z positius).

(a) Trobeu els punts de tall del pla amb els eixos x, y i z.

(b) Trobeu l'equació de la recta que dóna la intersecció amb el pla $z=0$.

(c) Calculeu el vector unitari ($\vec{n}$) perpendicular al pla.

(d) Demostreu que un diferencial de superfície ($\mathrm{d}\mathcal{S}$) del pla es pot escriure

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\vec{n}\cdot\vec{e}_z}$$

(e) Avalueu la integral del vector $\vec{A}(x,y,z) = 6z\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ sobre aquesta superfície

$$\int\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}$$

1.21. Demostreu que el diferencial de longitud en coordenades esfèriques es pot escriure

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Amb l'ajuda d'aquesta expressió i tenint en compte que $\mathrm{d}f = \vec{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\vec{l}$, trobeu el gradient en coordenades esfèriques.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 2 $(\vec{E})$

2.1. Calculeu la càrrega total de cadascuna de les següents distribucions de càrrega

(a) Densitat de càrrega lineal λ uniformement distribuïda en un anell de radi a.

(b) Densitat de càrrega superficial σ uniformement distribuïda en un disc circular de radi a.

(c) Densitat de càrrega volúmica ρ uniformement distribuïda en una esfera de radi a.

(d) Densitat de càrrega lineal $\lambda(z)$ distribuïda sobre l'eix z des de $-\infty$ a ∞

$$\lambda(z) = \frac{\lambda_0}{1 + z^2/K^2} \; .$$

(e) Densitat volúmica de càrrega $\rho(r)$ corresponent al núvol electrònic de l'àtom d'hidrogen

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0},$$

a on a_0 és el radi de Bohr i q la càrrega de l'electró.

2.2. Calculeu el camp elèctric que serà suficient per equilibrar el pes (força gravitatòria) d'un electró. Si aquest camp elèctric fos produït per un segon electró situat sota el primer, quina hauria de ser la distància entre els dos?
Dades: $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$kg; $q_e = 1,6 \times 10^{-19}$C.

*2.3. Una càrrega Q està situada en $(-a, 0, 0)$ i una altra $-2Q$ en $(a, 0, 0)$.

(a) Calculeu el camp en qualsevol punt del pla xy.

(b) Existeix algun punt en que el camp elèctric s'anul·li?

(c) Què passa quan $r \to \infty$?

(d) Calculeu el potencial en qualsevol punt del pla xy.

(e) Dibuixeu les línies d'$\vec{E}$ i les superfícies equipotencials.

2.4. Una càrrega Q està distribuïda uniformement en una superfície semiesfèrica de radi a. Trobeu el camp elèctric en el centre de la esfera (a la que pertany la semiesfera).

2.5. Calculeu el camp elèctric i el potencial que crea sobre l'eix z un anell de radi a situat en el pla (x, y) i centrat en l'origen, si la seva densitat de càrrega λ és constant. Què passa quan $z \gg a$?

2.6. Un disc de plàstic de radi R té una càrrega repartida uniformement en la seva superfície amb densitat superficial de càrrega σ. Calculeu el camp elèctric en un punt de l'eix del disc que dista x del seu centre.

2.7. Calculeu el camp elèctric que crea un pla infinit amb densitat superficial σ (constant) per integració directa.

*2.8. Una línia de longitud l està uniformement carregada amb λ C/m. Considereu una perpendicular a la línia i un punt P sobre la perpendicular, a una distància d de la línia. L'angle que forma la perpendicular amb la recta que uneix P amb un extrem de la línia és θ_1, amb l'altre extrem és θ_2.

(a) Trobeu $\vec{E}$ a P en funció de d i dels angles θ_1 i θ_2.

(b) Obteniu el resultat anterior per a $l \to \infty$.

(c) Si d=0, és a dir, P està sobre la mateixa línia carregada, a una distància X_p de l'extrem superior d'aquesta, quin serà $\vec{E}$?

(d) Suposeu ara que P està en la prolongació de la línia, a una distància d de l'extrem més proper. Trobeu $\vec{E}$.

2.9. Calculeu el camp elèctric que crea un pla infinit amb densitat superficial σ (constant) utilitzant el teorema de Gauss.

2.10. Calculeu el camp elèctric a tot l'espai creat per dues plaques infinites paral·leles

(a) Si totes dues tenen la mateixa densitat de càrrega σ constant.

(b) Si les densitats de càrrega de cada placa són σ i $-\sigma$ respectivament.

2.11. Una línia de càrrega de longitud l i amb densitat $\lambda = \textit{constant}$, està sobre l'eix z amb els extrems en $z = z_0$ i $z = z_0 + l$. Calculeu la força total exercida sobre tota la línia per una distribució de càrrega esfèrica i uniforme centrada a l'origen i radi $a < z_0$.

2.12. Calculeu $\vec{E}$ i ϕ creat per les següents distribucions de càrrega en tots els punts de l'espai:

(a) Esfera buida de radi a i densitat de càrrega σ constant.

(b) Esfera de radi a i densitat volúmica $\rho = Kr^2$.

2.13. Un cub és un cos amb un alt grau de simetria. Es pot fer servir el teorema de Gauss per trobar fàcilment el camp elèctric creat per una distribució de càrrega cúbica uniforme? Escriviu la integral per a la cara perpendicular a $\vec{e}_x$ per mostrar-ho explícitament.

2.14. Considereu dos conductors cilíndrics, coaxials i infinitament llargs, un de radi a i l'altre de radi b ($b > a$). El cilindre intern pot ser massís o buit, tant se val. Suposeu que el cilindre intern esta carregat amb una densitat superficial de càrrega $-\sigma$ i l'extern amb σ. Trobeu $\vec{E}$ a tot l'espai, mitjançant el teorema de Gauss en coordenades cilíndriques.

2.15. Una esfera de radi R_2, amb densitat de càrrega ρ constant, té una esfera buida de radi R_1 al seu interior. La distància entre els centres és d. Calculeu el camp $\vec{E}$ dins l'esfera buida.

2.16. Calculeu el camp elèctric i la diferencia de potencial respecte del seu centre, $[\Delta\phi = \phi(r) - \phi(0)]$ d'un cilindre infinitament llarg de radi a i densitat de càrrega ρ constant.

*2.17. Dos fils infinits rectilinis i uniformes separats una distància $d = 2a$ estan carregats amb una densitat de càrrega constant, λ i $-\lambda$ respectivament. Demostreu que el potencial en tots els punts de l'espai és

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \; ,$$

a on r_2 és la distància del punt a la línia amb $-\lambda$ i r_1 la corresponent a λ. Quines són les superfícies equipotencials?

*2.18. Un pla infinit paral·lel al pla yz està carregat uniformement amb una densitat de càrrega σ. Recobrint la part dreta del pla hi ha una capa de gruix d carregada uniformement amb una densitat volúmica ρ també uniforme. Trobeu el camp elèctric i el potencial a tot l'espai, prenent com a origen de potencial el centre de la capa de gruix d.

2.19. Una bombolla de sabó de 10 cm de radi i un gruix de paret de 3.3×10^{-6} cm es carrega mitjançant un potencial de 100 V. Demostreu que si es desfà i cau com una gota esfèrica, el potencial de la gota és de 10000 V.

(Nota: Considereu l'aigua amb sabó com una substància conductora).

2.20. Dues gotes idèntiques de mercuri es carreguen amb el mateix potencial ϕ_1. Trobeu el nou potencial si les dues gotes s'uneixen formant-ne una sola.

2.21. Un esfera conductora buida de radi $R = 1$ metre conté una càrrega en el centre de 10^{-6} coulombs. Es connecta l'esfera a terra, quin és el potencial dins i fora de l'esfera?

Si l'esfera es posa a un potencial de 20000 V, quina serà la càrrega en la seva superfície? Trobeu l'energia elèctrica del sistema.

2.22. Connectem en paral·lel dos condensadors plans C_1 i C_2 que tenen la mateixa superfície S i, inicialment, la mateixa separació entre plaques d. Carreguem tots dos a una diferència de potencial V mitjançant una bateria i després desconnectem aquesta. Si mecànicament separem les plaques de C_1 fins una distància $2d$, com varia la diferència de potencial entre les plaques?

2.23. Calculeu el potencial, el camp elèctric, $\vec{E}$, i la capacitat per unitat de longitud d'un condensador format per dos cilindres concèntrics de longitud infinita i de radis a i b ($a > b$).

2.24. Calculeu el potencial, el camp elèctric, $\vec{E}$, i la capacitat d'un condensador format per dues esferes concèntriques de radis a i b ($a > b$).

*2.25. Una esfera conductora de radi a està connectada a terra. A una distància d ($d > a$) del centre hi ha una càrrega puntual q. Trobeu el valor i la posició de la càrrega imatge. Calculeu la densitat superficial de càrrega induïda sobre l'esfera.

2.26. Dos plans conductors connectats a terra, formen un angle de 90 graus, un està en posició horitzontal i l'altre vertical. Considereu una càrrega puntual a una distancia a del pla horitzontal i a b del pla vertical. Trobeu el camp elèctric.

**2.27. Dos conductors cilíndrics infinits de radi R estan separats una distància $2D$. Trobeu la capacitat per unitat de longitud quan la càrrega per unitat de longitud és la mateixa en els dos conductors però de signe contrari.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 3 $(\vec{D})$

3.1. Calculeu el moment dipolar elèctric d'una superfície esfèrica de radi R amb densitat superficial de càrrega $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

3.2. Calculeu el moment dipolar d'una molècula hexagonal amb càrregues de signe altern situades sobre els vèrtex. Com variarà $\vec{p}$ si comprimim la molècula en la direcció de l'eix X, mantenint la distància entre àtoms veïns constant?

3.3. Una mostra de diamant té una densitat de 3.5 g cm^{-3} i una polarització de 10^{-7} C m^{-2}.

(a) Calculeu el moment dipolar mig per àtom.

(b) Trobeu la separació mitja entre els centres de les càrregues positiva i negativa. La càrrega del carboni en el nucli és de 6 protons i està envoltat per un núvol de 6 electrons.

*3.4. Considereu tres càrregues q_1, q_2, q_3 amb valors $q_2 = q_3 = -q_1/2$, situades en el pla $x - z$ sobre una circumferència de radi R: q_1 a 90 graus, q_2 a -30 i q_3 a 210 graus respecte a l'eix x.

Trobeu el potencial creat per aquestes càrregues als punts $P_1 = (0, y_0, 0)$ i $P_2 = (0, 0, z_0)$. Feu-ho directament com a suma de potencials, i pel desenvolupament multipolar del potencial (fins el terme quadrupolar); compareu els resultats.

3.5. Una vareta prima de secció A s'estén sobre l'eix x des de $x = 0$ fins a $x = l$. La polarització de la vareta és paral·lela al seu eix i ve donada per $P_x = ax^2 + b$. Trobeu les densitats de càrrega de polarització, tant volúmica com superficial, i demostreu que la càrrega total de polarització s'anul·la.

*3.6. Dos blocs semi-infinits de dielèctric homogeni, lineal i isòtrop de permitivitat ϵ, es posen quasi en contacte, de forma que hi ha una separació d, constant però petita entre ells. La polarització $\vec{P}$ és constant a tot el material dielèctric, i forma un angle θ amb la normal als plans que limiten la separació. Determineu el camp elèctric total a la zona de separació, i la diferència de potencial entre els plans.

3.7. Un cilindre dielèctric de radi a i longitud l està polaritzat en la direcció de la seva longitud. Si la polarització és uniforme i de mòdul P, calculeu el camp elèctric en un punt de l'eix del cilindre degut a la polarització $\vec{P}$.

3.8. Un cilindre dielèctric molt llarg de radi R i permitivitat constant, ϵ, està polaritzat radialment (en direcció perpendicular a l'eix) de manera que

$$\vec{P} = C\vec{e}_r.$$

Calculeu:

(a) Les densitats volúmiques i superficial de càrrega lligada.

(b) La densitat volúmica de càrrega lliure.

(c) El camp elèctric dins i fora del cilindre.

3.9. Una esfera dielèctrica (feta amb un material homogeni, lineal i isòtrop de permitivitat ϵ_r) de radi R està polaritzada radialment de manera que

$$\vec{P} = \frac{K}{r}\vec{e}_r.$$

Calculeu:

(a) Les densitats volúmiques i superficial de càrrega lligada.

(b) La densitat volúmica de càrrega lliure.

(c) El camp elèctric dintre i fora de l'esfera.

3.10. Sigui una esfera dielèctrica (material homogeni, lineal i isòtrop) de radi a i constant dielèctrica 5. Al seu centre es posa una càrrega lliure (és a dir, no provenint del dielèctric). Calculeu la polarització dins el dielèctric i el camp elèctric fora.

3.11. Una esfera dielèctrica (dielèctric lineal, isòtrop i homogeni, de permitivitat ϵ_r) de radi a té una densitat uniforme de càrrega lliure constant, ρ. Comproveu que el potencial al centre de l'esfera és

$$\phi(0) = \frac{2\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r}\,\frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}.$$

3.12. Una cavitat esfèrica de radi a està dins un dielèctric molt gran uniformement polaritzat. Comproveu que el camp elèctric, degut a $\vec{P}$, al seu centre, és

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

3.13. Considereu una càrrega lliure Q en el centre d'una esfera de radi R, on la constant dielèctrica varia com

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right) .$$

(a) Trobeu les expressions de $\vec{E}$, $\vec{D}$ i $\vec{P}$ per tot l'espai i representeu-les gràficament en funció del radi.

(b) Comproveu que el dielèctric com a conjunt continua neutre.

(c) Calculeu i representeu la funció potencial.

3.14. Una esfera conductora de radi R_1 i càrrega Q es recobreix amb un dielèctric fins a un radi $R_2 > R_1$. Trobeu el camp elèctric i el potencial a tot l'espai si la permeabilitat relativa del material depèn del radi r com $\epsilon_r = a + b/r$, on a i b són constants. Calculeu també la densitat volúmica i superficial de càrrega de pol·larització.

3.15. En un condensador de plaques plano-paral·leles, amb un dielèctric de permitivitat ϵ, suposem que una d'elles es separa del dielèctric, quedant una capa de buit de $10^{-4}d_0$, on d_0 és la separació inicial. Calculeu quina és la permitivitat aparent del sistema amb la placa separada i trobeu el límit quan:

(a) el dielèctric té una permitivitat molt elevada,

(b) el dielèctric té una permitivitat petita.

3.16. Disposem de dos condensadors plano-paral·lels idèntics de superfície S i separació entre plaques d connectats en paral·lel. Una vegada carregats a una diferència de potencial V_0 i desconnectats de la bateria es produeix una fractura en el dielèctric d'un dels condensadors formant-se una fissura plana i paral·lela a les plaques amb un gruix $d/100$. Si la permitivitat relativa del dielèctric situat entre les plaques és $\epsilon_r = 100$:

(a) Calculeu $\vec{E}$ abans i després de la fractura en cada condensador.

(b) Es pot detectat la fractura mesurant la diferència de potencial del sistema?

3.17. L'espai entre dos conductors cilíndrics coaxials i posats horitzontalment, de longitud $l = 25$ cm s'omple fins a la meitat amb un líquid dielèctric de constant dielèctrica relativa $\epsilon_r = 8$. Els cilindres tenen radis de 0.5 cm i 2 cm i estan connectats a una bateria de 100 V:

(a) Trobeu els camps $\vec{E}$ i $\vec{D}$ a la regió amb aire i a la que té dielèctric.

(b) Trobeu la densitat de càrrega superficial induïda al conductor interior tant a punts adjacents a aire com a dielèctric.

(c) Trobeu la càrrega total al conductor intern, i la capacitat del sistema.

3.18. L'espai entre dues esferes conductores i concèntriques de radis a, b ($a > b$) s'omple fins a la meitat amb un líquid dielèctric de permitivitat relativa $\epsilon_r = 8$. Les esferes estan connectades a una bateria de 100 V:

(a) Trobeu els camps $\vec{E}$ i $\vec{D}$ a la regió amb buit i a la que té dielèctric.

(b) Trobeu la densitat de càrrega superficial induïda al conductor interior tant a punts adjacents a aire com a dielèctric.

(c) Trobeu la càrrega total al conductor intern, i la capacitat del sistema.

3.19. Un condensador està format per dues esferes concèntriques de radis R_1 i R_2. En l'espai entre les esferes hi ha un dielèctric. A la zona $R_1 < r < a$ la permitivitat relativa és $\epsilon_r = 2$. A la zona $a < r < R_2$ la permitivitat relativa és $\epsilon_r = 3$. Si la diferència de potencial entre les plaques és de 100 V, trobeu

(a) les càrregues de polarització (lligades) en tot l'espai,

(b) la capacitat del condensador.

3.20. L'espai entre les dues plaques (separades una distància d) d'un condensador pla s'omple amb un dielèctric de permitivitat variable donada per $\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha x)$, a on x és la distància a la placa inferior. Calculeu:

(a) La capacitat del condensador per unitat de superfície.

(b) L'expressió de la polarització, i les densitats volúmica i superficial de càrrega lligada.

3.21. Dues plaques conductores infinites en les direccions y, z estan localitzades a $x = -d$ i $x = d$. L'espai entre les plaques s'omple amb un dielèctric que té una permitivitat depenent de l'espai com:

$$\epsilon = \frac{4\epsilon_0}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 + 1} .$$

La placa que està a $x = d$ es manté a una diferència de potencial V_0 respecte de l'altra placa.

(a) Trobeu el camp elèctric i el potencial $\phi(x)$ entre les plaques.

(b) Trobeu la polarització $\vec{P}$ i la densitat de càrrega de polarització ρ_P.

3.22. Calculeu la capacitat per unitat de longitud d'un condensador format per dos cilindres concèntrics de radis a i b ($a < b$), si es suposa que entre els dos cilindres hi ha un dielèctric de permitivitat $\epsilon = \epsilon_0(\alpha r + \beta)$.

Si es connecta el condensador a una font de potencial V, trobeu la densitat volúmica de càrrega lligada (càrrega de polarització).

3.23. Un condensador format per dues esferes concèntriques de radis $R_a < R_b$ s'omple amb un dielèctric de permitivitat $\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha r)$. Calculeu la polarització i les densitats de càrrega lligada, en funció de la diferencia de potencial, ϕ.

....

3.24. Un electró ràpid (energia cinètica = 3.0×10^{-17}J) entra en una regió de l'espai que conté un camp elèctric constant $E = 1000$ V/m. El camp és paral·lel al moviment de la partícula i el seu sentit és tal que el desaccelera. Quina distància recorrerà l'electró abans d'aturar-se? ($q = 1.60 \times 10^{-19}$C)

3.25. Hi ha dues capes esfèriques conductores concèntriques, carregades i aïllades. Si s'uneixen mitjançant un fil conductor, comproveu que el sistema evoluciona a un estat de menor energia, i raoneu què ha passat amb l'energia dissipada.

3.26. Considereu una esfera, de radi R, amb una càrrega Q distribuïda uniformement en tot el seu volum.

(a) Calculeu la seva energia a partir de l'expressió: $W = \frac{1}{2} \int \rho\phi \, \mathrm{d}r^3$.

(b) Torneu a calcular l'energia, ara fent servir el camp elèctric mitjançant: $W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 \, \mathrm{d}r^3$.

**3.27. Hi ha dues superfícies conductores planes, paral·leles, de grans dimensions i carregades amb unes densitats de càrrega $\sigma_1 = 2$ nC/m^2 i $\sigma_2 = -1$ nC/m^2, respectivament, que estan separades 2 cm. En la zona entre les dues superfícies introduïm una placa de dielèctric, de 2 cm de gruix, fins a la meitat. La constant dielèctric de la placa val 3. Calculeu:

a) El camp elèctric en l'espai entre les dues superfícies.

b) La diferencia de potencial entre les dues superfícies.

c) L'energia electrostàtica emmagatzemada per unitat de volum entre les superfícies, dins i fora del dielèctric.

*3.28. Un condensador ideal pla d'àrea $S = ab$ i separació entre plaques l es carrega amb una diferència de potencial V_0, i a continuació s'aïlla.

(a) Calculeu l'energia emmagatzemada i la força exercida per una placa sobre l'altra.

(b) Si entre les plaques s'introdueix una làmina metàl·lica conductora no carregada, de gruix d, d'igual àrea que les plaques i paral·lela a elles:

i. calculeu la força exercida en aquest cas sobre les plaques

ii. determineu si la força sobre la làmina introduïda a la regió entre plaques és cap a dintre o cap a fora d'aquesta

iii. esbrineu si hi ha força sobre la làmina en direcció perpendicular a la mateixa.

3.29. Sigui un condensador de plaques quadrades (de costat a), paral·leles i separades una distància $d \ll a$. Es carrega el condensador a una diferència de potencial ϕ, es desconnecta de la bateria, i es posa damunt un líquid dielèctric (lineal, homogeni i isòtrop) de permitivitat ϵ. El líquid puja fins una altura h. Tot plegat està en un lloc a on l'acceleració de la gravetat és g.

Trobeu el camp elèctric dins el condensador, l'energia electrostàtica i la densitat del líquid (Ajuda: el guany d'energia potencial gravitatòria serà igual a la pèrdua d'energia electrostàtica).

3.30. Un condensador pla-paral·lel amb plaques separades una distància b es col·loca verticalment, amb un dels seus extrems sobre la superfície d'un líquid no conductor de densitat ρ_m i permitivitat ϵ. Si les plaques del condensador es mantenen a una diferència de potencial ϕ calculeu l'alçada h que el líquid puja entre les plaques del condensador.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 4 $(\vec{B})$

4.1. Una càrrega total Q es distribueix uniformement en una esfera de radi a. L'esfera comença a girar al voltant d'un dels seus diàmetres amb una velocitat angular constant ω. Si suposem que la distribució de càrregues no és afectada per la rotació, trobeu:

(a) La densitat de corrent $\vec{J}$ en tots els punts de l'esfera.

(b) El corrent total que passa per un semicercle de radi a, fix en l'espai amb la seva base sobre l'eix de rotació de l'esfera.

4.2. Una esfera conductora de radi b es posa dins d'un recipient conductor esfèric de radi a, que conté un electròlit de conductivitat g. En el cas de posar les dues esferes concèntriques i a una diferència de potencial $\Delta\phi$, trobeu:

(a) El camp elèctric en la zona entre les dues esferes si la permitivitat de l'electròlit és ϵ.

(b) La intensitat que circula entre les dues esferes.

4.3. Dos tubs cilíndrics llargs de material conductor es posen coaxialment. Els dos cilindres es mantenen a una diferència de potencial $\Delta\phi$, i en l'espai entre ells ($a < r < b$) s'omple d'un medi de conductivitat g i permitivitat ϵ. Trobeu la intensitat que passa d'un cilindre a l'altre, i la resistència elèctrica del dispositiu.

4.4. Un canó d'electrons envia un feix d'aquestes partícules al llarg del pla de simetria de dues plaques paral·leles que tenen una diferència de potencial V_0 entre elles i una separació d. Amb un dispositiu extern es crea un camp magnètic de mòdul B paral·lel a la superfície de les plaques. Calculeu la velocitat inicial que han de tenir els electrons i la direcció de $\vec{B}$ per a que no experimentin cap desviació en passar entre les plaques. Si eliminem B, quina serà la trajectòria dels electrons? (Nota: menyspreu els efectes de vora; anomenem l la longitud de les plaques.)

4.5. Fem servir un electró per mesurar els camps, existents en una regió de l'espai buida, mitjançant tres tipus de mesures:

(a) Es situa l'electró en repòs i s'observa una acceleració $\vec{a} = a_2\vec{e}_y$.

(b) S'introdueix un electró amb una velocitat $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, i aquest s'accelera com $\vec{a} = a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$.

(c) Si la velocitat inicial és $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$ no hi ha acceleració en direcció $\vec{e}_z$.

Trobeu quins seran els camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ en la regió de l'espai considerada.

4.6. Considereu dos circuits on tots els corrents es troben sobre el mateix pla. C' és un fil infinitament llarg pel que hi circula una intensitat I'. C és un rectangle (pel que hi circula una intensitat I) els costats del qual son de longitud b, els paral·lels a C', i de longitud a, els perpendiculars, i està separat una distància d del fil. Trobeu la força total sobre C. És aquesta d'atracció o de repulsió?

4.7. Considereu un circuit elèctric que té forma d'hexàgon regular de radi a. Si el circuit condueix un corrent d'intensitat I, trobeu la inducció magnètica B al centre de l'hexàgon.

4.8. Un disc circular de radi R té una densitat superficial de càrrega σ C/m^2 i gira al voltant d'un dels seus diàmetres amb una velocitat ω. Calculeu el camp d'inducció magnètica $\vec{B}$ al centre del disc per velocitats petites ($\omega R \ll c$).

4.9. Considereu una esfera de radi R, amb una densitat superficial de càrrega σ rígidament unida a l'esfera, que gira respecte d'un eix que passa pel centre amb velocitat constant ω. Calculeu el camp magnètic al centre de l'esfera.

4.10. Considereu una esfera de radi R, amb una densitat de càrrega ρ rígidament unida a l'esfera, que gira respecte d'un eix que passa pel centre amb velocitat constant ω. Calculeu el camp magnètic al centre de l'esfera.

4.11. Considereu dues espires d'1 m de radi enfrontades la una a l'altre, amb l'eix comú, i separades entre si 1 m. Si per totes dues circula un corrent d'1 A en el mateix sentit,

(a) calculeu $\vec{B}$ al centre d'una de les espires

(b) quant val $\vec{B}$ al punt mig de l'eix?

(c) demostreu que en la zona propera al punt mig de l'eix, la inducció magnètica és gairebé constant.

4.12. Per una espira de 2 m de diàmetre situada sobre el pla horitzontal circula un corrent de $5/\pi$ A. Per un fil infinit situat en el mateix pla, a 1 m del centre de l'espira, passa un corrent de 5 A. Trobeu el valor de $\vec{B}$ al centre de l'espira.

4.13. Considereu una bobina finita de radi r i longitud l amb una densitat de voltes n voltes/m. En un dels seus extrems s'afegeixen N voltes molt juntes entre sí. Si considerem iguals el radi mig de la bobina i el de les espires,

(a) determineu quin ha de ser el número de voltes afegit per a que la inducció magnètica sobre l'eix de revolució a l'extrem de la bobina sigui dues vegades la del centre de la bobina en absència de les N voltes suplementàries,

(b) calculeu el número d'espires en el cas en que $l = 2r$. Quin és el resultat en el límit $l \gg r$?

(c) si la bobina té un radi d'1 cm, una longitud de 10 cm i 1000 voltes, quantes voltes hem d'afegir per acomplir les condicions de l'apartat (a)?

4.14. Un solenoide de 15 cm de llargada està bobinat amb dues capes de fil, cadascuna de 100 voltes. La primera capa té un radi de 2 cm i la segona 2,05 cm. Si per aquesta bobina passa un corrent de 3 A, trobeu la inducció magnètica en qualsevol punt de l'eix. Representeu la gràfica de la inducció magnètica axial en funció de la distància al centre, fins a un dels extrems del solenoide.

*4.15. Considerem un pla infinit de corrent, que coincideix amb el pla xy. La densitat de corrent superficial és $\vec{K} = K\,\vec{e}_y$, amb K =const. Un fil molt llarg que condueix un corrent I és paral·lel a l'eix y i interseca l'eix z positiu a una distància d de l'origen. Trobeu la força per unitat de longitud sobre el fil.

4.16. Un camp magnètic $\vec{B}$ està donat en coordenades cilíndriques com

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{per a} \quad 0 < r < a \\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\,\vec{e}_\varphi & \text{per a} \quad a < r < b \\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\varphi & \text{per a} \quad b < r \end{cases}$$

Trobeu la densitat de corrent $\vec{J}$ en tot l'espai. Com es podria produir una $\vec{B}$ d'aquesta forma?

4.17. Un solenoide de secció transversal circular de radi a té n voltes per unitat de longitud i condueix un corrent d'intensitat I. Si el solenoide és molt llarg, trobeu la inducció magnètica axial.

4.18. Si considereu una bobina de forma toroïdal amb N espires, quin serà el valor de la inducció magnètica que produeix en passar-hi un corrent elèctric I?

4.19. Per un conductor llarg rectilini, de secció transversal circular de radi R, circula un corrent I. A l'interior del conductor existeix un espai buit cilíndric, de radi a, amb el seu eix paral·lel al del conductor i amb el seu centre a una distància b del centre del conductor. Trobeu el camp magnètic, $\vec{B}$, dins el forat.

4.20. Considereu un fil cilíndric de radi a situat sobre l'eix z, pel que circula una densitat de corrent $\vec{J} = \alpha r\,\vec{e}_z$. Trobeu, a tots els punts de l'espai, la inducció magnètica $\vec{B}$ que crea aquest corrent.

4.21. Per un conductor molt llarg rectilini, de secció transversal circular de radi b i paral·lel a l'eix z circula una densitat de corrent

$$\vec{J} = \frac{K}{r}\,\vec{e}_z.$$

A l'interior del conductor hi ha un espai buit cilíndric, de radi a, i coaxial amb el conductor de radi b. Trobeu el camp magnètic, $\vec{B}$, a tot l'espai.

4.22. Considereu el sistema format per un corrent I en la direcció positiva de l'eix z i un altre corrent paral·lel $-I$, és a dir, en la direcció negativa de l'eix z. Tots dos corrents estan separats per una distància $2a$. Trobeu el potencial vector $\vec{A}$ a qualsevol punt de l'espai.

4.23. Per un quadrat de costat $2a$ i en el pla xy, circula un corrent I en el sentit antihorari. Trobeu el potencial vector $\vec{A}$ en tots els punts de dintre del quadrat. Quant val $\vec{A}$ al centre?

4.24. Una esfera de radi a conté una càrrega total Q distribuïda uniformement en el seu volum. L'esfera gira al voltant d'un dels seus diàmetres a velocitat angular constant ω. Trobeu el potencial vector $\vec{A}$ en qualsevol punt sobre l'eix de rotació.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 5 $(\vec{H})$

5.1. Un circuit pla que condueix un corrent I es construeix sobre el pla xy de la següent manera: començant a $\varphi = 0$, la distància a l'origen ve donada per $r = r_0\,\varphi^n$ on r_0 és una constant i $n > 1$. Es forma així una espiral. Continuem el procés fins a un valor de l'angle azimutal φ_0. A partir d'aquí es fa que el corrent segueixi una línia recta que torna a l'origen. Trobeu el moment dipolar magnètic d'aquesta distribució de corrent.

5.2. Un cilindre de radi a i longitud l conté una càrrega Q distribuïda uniformement en el seu volum. Fem girar el cilindre al voltant del seu eix a una velocitat angular constant ω. Suposeu que la distribució de càrrega no és afectada per la rotació i trobeu el moment dipolar magnètic d'aquest sistema.

5.3. Una esfera dielèctrica de radi a té una densitat superficial de càrrega σ =const. en tota la seva superfície. La fem girar al voltant d'un dels seus diàmetres a velocitat angular constant ω. Suposeu que la distribució de càrrega no es modifica amb la rotació i trobeu el moment dipolar magnètic de l'esfera.

5.4. Una esfera de radi R té una càrrega Q repartida uniformement en la seva superfície. Si la semiesfera superior gira al voltant del diàmetre vertical amb velocitat angular $\omega_1\vec{e}_z$ i la semiesfera inferior gira amb velocitat angular $-\omega_2\vec{e}_z$ al voltant del mateix diàmetre vertical, calculeu:

(a) El moment magnètic del sistema.

(b) Com s'hauria de distribuir la càrrega entre ambdós hemisferis perquè el moment magnètic del sistema fos 0?

5.5. Considereu una espira rectangular plana de dimensions a, b en el pla yz, i amb vèrtexs a $(0, \pm a/2, \pm b/2)$. Es rota un angle φ al voltant de l'eix z, i s'hi fa circular un corrent I en sentit antihorari. L'espira està sotmesa a un camp extern $\vec{B}_0$ uniforme en la direcció x. Trobeu:

(a) El moment de torsió que s'hauria d'aplicar per tal que l'espira no giri.

(b) Considereu ara que l'espira està en el pla yz i calculeu la inducció magnètica $\vec{B}$ en un punt de l'eix x. Feu-lo a partir del moment dipolar magnètic.

(c) Repetiu l'apartat anterior però calculant $\vec{B}$ a partir de la llei de Biot-Savart. Dóna el mateix resultat? Per què?

**5.6. Un anell de radi a centrat a l'origen i sobre el pla xy condueix un corrent I en sentit horari si es mira des d'un punt de l'eix z positiu. Un dipol puntual (anell de radi molt petit) $\vec{m} = m\,\vec{e}_z$ està situat sobre l'eix z. Trobeu la component z de la força sobre $\vec{m}$.

5.7. Si suposem un model atòmic consistent en un nucli rodejat per un núvol de càrrega esfèrica, tots el elements del qual giren a una velocitat angular ω, demostreu que el moment magnètic orbital de l'àtom ve donat per $M_{\rm orb} = \frac{q}{2m} L_{\rm orb}$. A on $L_{\rm orb}$ és el moment angular orbital i $\frac{q}{m}$ la relació càrrega massa de l'electró.

5.8. Una esfera de radi a té una imantació no uniforme donada per $\vec{M} = (\alpha\,z^2 + \beta)\,\vec{e}_z$, amb α i β constants. Trobeu les densitats de corrent d'imantació $\vec{J}_M$ i $\vec{K}_M$. Quines són les unitats de α i β?

5.9. Demostreu que els corrents d'imantació no transfereixen càrrega neta.
(Ajuda: considereu la transferència de càrrega a través d'un pla que talla un material imantat.)

5.10. Demostreu, a partir de $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$, que la densitat superficial de corrent d'imantació en un material magnètic és $\vec{K}_M = \vec{M} \wedge \vec{n}$.

5.11. Un cilindre de longitud l i radi a té el seu eix al llarg de la direcció $\vec{e}_z$ i l'origen de coordenades al seu centre. Està imantat uniformement amb $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$. Trobeu:

(a) Els camps $\vec{B}$ i $\vec{H}$ en tots els punts de l'eix del cilindre.

(b) A partir dels resultats anteriors, calculeu $\vec{B}$ i $\vec{H}$ a l'interior d'un disc molt prim, és a dir, si $l \ll a$.

5.12. Considereu un bloc imantat de grans dimensions. En el seu centre fem un forat cilíndric que travessa tot el bloc paral·lel a la direcció d'imantació. Si el radi R del cilindre és molt petit comparat amb les dimensions del bloc, calculeu les densitats de corrent d'imantació sobre les parets del forat i calculeu $\vec{B}$ a l'eix.

5.13. En un disc de radi R i gruix $d \ll R$, la imantació es pot expressar com

$$\vec{M} = M_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\vec{e}_z$$

quina és la inducció magnètica en un punt de l'eix tal que $z \gg R$, si es suposa $\vec{J} = 0$ (no hi ha corrents lliures)?

5.14. Considereu un cable coaxial de radis a i b on $a < b$. Per l'interior del cilindre de radi a circula un corrent I uniformement distribuït i en la direcció de l'eix $\vec{e}_z$. En aquesta regió el material és diamagnètic amb susceptibilitat $\chi_m < 0$ i homogeni, lineal i isòtrop (h.l.i.). Per la capa exterior del cable circula un corrent igual i oposat a l'anterior. En la regió entre les capes externa i interna del cable el material és paramagnètic (també h.l.i.), de susceptibilitat χ'_m.

(a) Calculeu $\vec{H}$, $\vec{B}$ i $\vec{M}$ en tot l'espai.

(b) Verifiqueu les condicions de frontera per a cadascun dels camps anteriors i justifiqueu les discontinuïtats trobades.

(c) Calculeu la densitat volúmica de corrent d'imantació $\vec{J}_M$.

5.15. Sobre un anell toroïdal de ferro (considereu-lo un material lineal, homogeni i isòtrop amb permeabilitat magnètica relativa μ_r) de radi central b i un radi de la secció circular a s'hi enrotllen N voltes de fil conductor per on hi circula un corrent I.

Deduïu el camp magnètic $\vec{H}$, la inducció magnètica $\vec{B}$ i la imantació $\vec{M}$ a tot l'espai.

5.16. Un cilindre de longitud infinita i de radi R_1 transporta una densitat volúmica de corrent en la direcció de l'eix del cilindre de valor $J = Cr$, on r és la distància a l'eix del cilindre i C és una constant. Al seu voltant hi ha una capa cilíndrica de radi exterior R_2 d'un material magnètic amb permeabilitat magnètica relativa μ_r.

(a) Calculeu $\vec{H}$, $\vec{B}$ i $\vec{M}$ a tots els punts de l'espai.

(b) Calculeu els corrents d'imantació que es generen en el material magnètic.

5.17. Un material conductor en forma de barra cilíndrica infinita de radi a, transporta una densitat de corrent $\vec{J} = \alpha\, r\, \vec{e}_z$ per a $r < a$.

(a) Calculeu la permeabilitat magnètica del material (suposant que és lineal) si sabem que la inducció magnètica dins d'ell ve donada per l'expressió:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \alpha}{3} \left(1 + \frac{r}{a}\right) r^2\, \vec{e}_\varphi$$

(b) Obteniu la imantació $\vec{M}$, les densitats de corrent d'imantació i analitzeu el comportament de $\vec{B}$ en la superfície del cilindre.

5.18. Per un tub cilíndric de coure de radi a hi circula una densitat de corrent lliure $\vec{J} = \alpha r \vec{e}_z$, a on α és una constant. El coure és diamagnètic i es suposa lineal, isòtrop i homogeni, amb permeabilitat μ.

Trobeu el camp $\vec{B}$ en tot l'espai, i calculeu els corrents d'imantació.

5.19. Per un conductor llarg rectilini, situat sobre l'eix z, de secció transversal circular de radi b, circula una densitat de corrent constant $\vec{J} = J\vec{e}_z$. A l'interior del conductor existeix un espai buit cilíndric, de radi a, coaxial amb el conductor.

Al voltant del cilindre hi ha una capa també cilíndrica de radi interior b i exterior c ($c > b$) d'un material aïllant i magnètic (isòtrop i lineal) de permeabilitat $\mu = \mu_0(1 + \frac{\alpha}{r})$, a on α és una constant.

(a) Trobeu $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$ i els corrents d'imantació ($\vec{J}_M/\vec{K}_M$) dins el medi magnètic.

(b) Calculeu $\vec{B}$ a l'exterior del material ($r > c$) a partir del corrent total (tant el corrent lliure com els corrents d'imantació).

5.20. Una esfera de radi a està imantada amb $\vec{M} = M(r)\, \vec{e}_r$. Trobeu $\vec{J}_M$ i $\vec{K}_M$. Hi ha corrents lliures dins l'esfera si és un material isòtrop homogeni i lineal? Calculeu els camps $\vec{B}$ i $\vec{H}$ a l'interior i a l'exterior de l'esfera. Com és el camp $\vec{H}$ justament a la superfície?

5.21. Un camp magnètic $\vec{H}$ està donat en coordenades cilíndriques com

$$\vec{H} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{I}{2\pi r} \dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\, \vec{e}_\varphi \\ \dfrac{I}{2\pi r}\, \vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{per a} \quad 0 < r < a \\ \dfrac{1}{a} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\, \vec{e}_\varphi & \text{per a} \quad a < r < b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \vec{e}_\varphi & \text{per a} \quad b < r \end{cases}$$

Trobeu la densitat de corrent lliure ($\vec{J}$), la permeabilitat magnètica (μ) i els corrents d'imantació ($\vec{J}_M$ i $\vec{K}_M$) en tot l'espai.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 6 (f.e.m.)

6.1. Un fil infinitament llarg que transporta un corrent I coincideix amb l'eix z. Una espira circular, en el pla xz i de radi a, té el seu centre sobre l'eix x a una distància b de l'origen. Trobeu:

(a) El flux magnètic que travessa l'espira.

(b) Si ara l'espira es mou a velocitat constant $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$, calculeu la f.e.m induïda. Quina és el sentit del corrent induït?

6.2. Per un conductor rectilini, infinitament llarg, circula un corrent $I = I_0\,e^{-\lambda t}$, amb I_0 i λ constants. En un pla que conté al conductor i a una distància d hi ha un altre conductor quadrat de costat a, i amb dos costats paral·lels al conductor infinit. Trobeu la f.e.m induïda al circuit quadrat i el sentit del corrent induït.

6.3. Un disc conductor molt prim de radi a i conductivitat g està situat al pla xy amb el seu centre a l'origen de coordenades. El disc està sotmès a una inducció uniforme en l'espai i donada per: $\vec{B} = B_0\,\cos(wt + \alpha)\,\vec{e}_z$. Trobeu la densitat de corrent induït al disc, $\vec{J}$.

6.4. Una barra metàl·lica de longitud l gira a velocitat angular constant ω al voltant d'un eix que passa per un dels seus extrems. Si considereu una inducció magnètica uniforme i constant $\vec{B}$ perpendicular al cercle que descriu la barra, trobeu el voltatge induït entre els seus extrems.

6.5. Un alternador consisteix en una bobina de N voltes d'àrea A, que gira amb una freqüència f al voltant del diàmetre, en un camp uniforme B, essent el diàmetre sempre perpendicular a $\vec{B}$. Calculeu quina és la f.e.m. induïda si $N = 100$ voltes, $A = 100$ cm^2, $B = 0.1$ T i $f = 2000$ r.p.m.?

6.6. Una bobina de 100 voltes, de secció transversal circular, es construeix compactament, de forma que podem considerar que totes les voltes estan en un mateix pla. El radi mig de la bobina és de 3 cm. Fem rodar aquesta bobina a 900 r.p.m. al voltant d'un diàmetre col·locat verticalment. En aquestes condicions la f.e.m. induïda eficaç és de 0,50 mV. Que podem dir respecte el camp magnètic terrestre en el lloc on s'està fent l'experiment?

6.7. Hi ha una espira circular de radi a situada en el pla (x, y) i el seu centre coincideix amb l'origen de coordenades. L'espira comença a girar al voltant de l'eix x a una velocitat angular ω. L'espira està dins un solenoide paral·lel a l'eix z, de radi $R > a$, molt llarg (infinit), amb n voltes per unitat de longitud, pel que hi circula una intensitat $I = I_0 \sin(\Omega t)$. Dins del solenoide hi ha un gas diamagnètic (heli, per exemple) de permeabilitat μ.

Suposant que la resistència de l'espira és molt gran (la intensitat que circula per ella és molt petita), y que la freqüència Ω és baixa, calculeu: el camp $\vec{B}$ a tot l'espai i la força electromotriu induïda en l'espira.

6.8. Hi ha un circuit indeformable en forma de quadrat en el pla yz, que té una resistència elèctrica R. En el semiespai $z \leq 0$ hi ha un camp magnètic $\vec{B} = (B, 0, 0)$. A l'instant $t = 0$, el quadrat té un costat a $z = 0$ i un altre a $z = l$, i una velocitat $v = 0$. Si el circuit té una massa m, una superfície l^2 i està sotmès a la força de la gravetat $[\vec{F} = (0, 0, -mg)]$. Calculeu:

(a) La velocitat en funció del temps del quadrat, sense considerar els efectes deguts a la autoinducció.

(b) La intensitat en funció del temps en el circuit.

*6.9. Una barra conductora, de massa M i longitud l, es pot moure sense fregament sobre la superfície horitzontal d'una taula. En els seus extrem s'han unit dues molles exactament iguals, de constant elàstica k, massa menyspreable i també conductores. Els extrems lliures de les molles també s'uneixen a una barra conductora de longitud l fixada a la taula, formant en conjunt un circuit de resistència R. Hi ha un camp magnètic constant i uniforme $\vec{B}$, perpendicular a la taula i sentit ascendent. Amb la barra paral·lela a si mateixa es desplaça una longitud d respecta a la posició d'equilibri i es deixa lliure. Trobeu l'equació diferencial del moviment i els valors de $\vec{B}$ pels quals el sistema és oscil·latori.

6.10. En un accelerador betatró, un ió de càrrega $+q$ i massa m recorre una òrbita circular a una distància R de l'eix de simetria de la màquina. El camp magnètic té simetria cilíndrica; és a dir, la seva component z és $B_z = B(r)$ en el pla de l'òrbita, on r és la distància a l'eix de simetria.

(a) Demostreu que la velocitat del ió és $v = qB(R)R/m$.

(b) Si la magnitud del camp magnètic s'incrementa lentament, demostreu que la fem induïda a l'òrbita del ió és tal que accelera el ió.

(c) Demostreu que perquè el ió romangui en la mateixa òrbita, la variació radial del camp B a dins de l'òrbita ha de satisfer la següent condició: la mitjana espacial de l'increment de $B(r)$ (es fa la mitjana sobre l'àrea tancada per l'òrbita) ha de ser igual al doble de l'increment de $B(R)$ durant el mateix interval de temps.

*6.11. Considereu un electró en una òrbita circular de radi R. Si apliquem un camp magnètic perpendicular a l'òrbita i suposant que el radi no varia, trobeu el canvi en la seva velocitat. Aquest canvi de velocitat suposa un canvi del moment magnètic. Trobeu la susceptibilitat si hi ha N electrons per unitat de volum. (És una explicació clàssica del diamagnetisme)

6.12. Amb fil conductor s'ha construït un triangle equilàter de costat l. En un mateix pla i paral·lel a un dels seus costats, a la distància $a = \sqrt{3}\,l/6$ hi ha un conductor infinit recorregut per un corrent d'intensitat I constant. Determineu: el flux magnètic a través de la superfície del triangle, i el coeficient d'inducció mútua entre el fil i el triangle.

*6.13. Es posa una bobina circular, de longitud l_a i amb N_a voltes de radi r_a, a l'interior d'una segona bobina, de longitud l_b i amb N_b voltes de radi r_b. Fent el càlcul de $\vec{B}$ com si les dues bobines fossin infinites:

(a) Trobeu L_a, L_b i M.

(b) Quant val el coeficient d'acoblament si $l_b = 2l_a$?

6.14. En un conductor cilíndric molt llarg de radi b és forada un cilindre de radi a coaxial amb l'anterior. El corrent I que circula per aquest conductor està uniformement distribuït en la seva secció. Trobeu l'energia magnètica associada a la inducció en un tros de longitud l dins el conductor. Calculeu també el coeficient d'autoinducció d'aquesta porció de conductor.

6.15. Una bobina toroïdal, amb N voltes enrotllades i un corrent I circulant per elles, té un radi central b i un radi a de la secció circular. Es demana:

(a) La seva autoinductància.

(b) L'energia magnètica d'aquesta bobina.

(c) Si $a \ll b$, demostreu que L coincideix amb la d'un solenoide molt llarg de longitud $2\pi b$. És raonable aquest resultat?

6.16. Una autoinductància L, una resistència R i una bateria de f.e.m. $\mathcal{E}$ estan connectades en sèrie.

(a) A partir de consideracions energètiques deduïu l'equació diferencial que ha de complir el corrent I que circula per aquest circuit.

(b) Suposeu ara que es desconnecta la bateria del circuit quan el corrent que circula és I_0. Trobeu el temps de relaxació d'aquest sistema.

6.17. Considereu una bobina toroïdal de N voltes. Si el radi mig de l'anell és b i el d'una espira a:

(a) Quin és el valor (en henrys) de l'autoinductància si $N = 150$ voltes, $b = 4$ cm. i $a = 1,5$ cm?

(b) Calculeu el coeficient d'inducció mútua entre la bobina del problema i un segon debanat, sobre el mateix toroide, de $N_2 = 50$ voltes.

**6.18. Feu les següents demostracions:

(a) Si els corrents (les fonts del camp magnètic) no varien, el canvi d'energia magnètica al introduir un objecte es pot escriure com:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{Tot\ Espai} (\vec{B}\cdot\vec{H}_0 - \vec{B}_0\cdot\vec{H})\,\mathrm{d}^3r\,,$$

a on els camps amb subíndex zero es refereixen a abans d'introduir l'objecte i sense subíndex a després de col·locar l'objecte. Pot ser d'ajuda considerar que $\vec{\nabla}\wedge(\vec{H}-\vec{H}_0) = 0$.

(b) Si posem un medi magnètic lineal en un camp, la fórmula anterior es converteix en:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{Objecte} \vec{M}\cdot\vec{B}_0\,\mathrm{d}^3r.$$

*6.19. Demostreu que l'energia magnètica d'un dipol magnètic permanent en presència d'un camp magnètic extern ve donada per:

$$W_m = \vec{m}\cdot\vec{B}_0\ .$$

6.20. Un feix d'àtoms d'hidrogen a temperatura de 400 K (la seva energia cinètica serà $3/2\ kT$) és enviat a través dels pols d'un imant d'1 m de longitud i amb un gradient del camp magnètic de 10 T/m. A la sortida de l'imant hi ha dos feixos separats 5,6 mm. Trobeu la diferència entre els dos possibles valors del moment magnètic dels àtoms d'hidrogen.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 7 (Maxwell)

7.1. Dues plaques circulars de radi R separades una distància d formen un condensador ideal. A l'interior hi ha un dielèctric perfecte de permitivitat ϵ i un camp uniforme $\vec{D}$ (a l'exterior el camp $\vec{D}$ es suposa nul). El condensador es comença a carregar amb una intensitat constant I. Trobeu el camp $\vec{H}$ en un punt sobre la superfície cilíndrica del dielèctric.

7.2. Un condensador de plaques paral·leles en forma de disc circular té en el seu interior un dielèctric de permitivitat ϵ i de conductivitat g. El condensador, de capacitat C, es carrega a una diferència de potencial ϕ i s'aïlla. Trobeu:

(a) la càrrega del condensador en funció del temps;

(b) el corrent de desplaçament en el dielèctric;

(c) el camp $\vec{H}$ en el dielèctric.

7.3. Un condensador de plaques paral·leles, en forma de disc circular de radi R i separació entre plaques $a \ll R$ entre les que hi ha un dielèctric de permitivitat ϵ, es connecta a una font de corrent amb una intensitat $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Trobeu el camp elèctric, $\vec{E}$, i el camp magnètic, $\vec{B}$, entre les plaques a una distància r de l'eix, suposant una freqüència petita per tal que la distribució de la càrrega sobre les plaques del condensador sigui una constant independent de r, i depenent del temps.

Si augmenta molt la freqüència, per a quina equació de Maxwell no seria vàlida la solució anterior? Com es podria millorar la solució trobada?

**7.4. Trobeu les correccions per a qualsevol valor de la freqüència en el condensador del problema anterior.

7.5. Considereu un condensador de plaques circulars i plano-paral·leles d'àrea S. Es connecten les plaques a una bateria de f.e.m. constant, $\mathcal{E}$. Fem oscil·lar les plaques lentament de forma que segueixin essent paral·leles però la seva separació varia com $d = d_0 + d_1 \sin \omega t$.

(a) Trobeu el camp magnètic $\vec{H}$ produït pel corrent de desplaçament en la regió entre les plaques.

(b) Si abans de començar a moure les plaques desconnectem la bateria, quin serà aleshores el camp magnètic?

7.6. Un condensador de plaques paral·leles, en forma de disc circular de radi R i separació entre plaques $a \ll R$, entre les que hi ha un dielèctric de permitivitat ϵ, es carrega amb una càrrega Q_0. Després es descarrega per mitjà d'una resistència, de manera que $I(t) = I_0 e^{-\lambda t}$. Trobeu el camp elèctric, $\vec{E}$, i el camp magnètic, $\vec{B}$, entre les plaques a una distància r de l'eix, suposant que la distribució de la càrrega sobre les plaques del condensador sigui una constant independent de r, i depenent del temps.

**7.7. Demostreu que

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{J}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A},$$

a on s'ha definit

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &:= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\mathrm{d}^3 r_1 - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{F}(\vec{r}_1)\cdot\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_1, \\ \vec{A}(\vec{r}) &:= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\mathrm{d}^3 r_1 + \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{F}(\vec{r}_1)\wedge\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_1.\end{aligned}$$

Ajuda: Feu servir el resultat

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{F}(\vec{r}_1)\,\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\mathrm{d}^3 r_1$$

i que l'operador laplaciana es pot substituir per $\nabla^2 = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot - \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge$.

**7.8. Demostreu que

$$\chi := \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_1, t)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\mathrm{d}^3 r_1$$

porta a la condició de Coulomb.

**7.9. Comproveu per càlcul directe que els potencials retardats compleixen la condició de Lorentz.

Problemes d'Electromagnetisme. Full 8 (ones)

8.1. Considereu l'ona $\vec{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z)\, \vec{e}_x$ en el buit.

(a) Trobeu els camps $\vec{D}$, $\vec{B}$ i $\vec{H}$.

(b) Dibuixeu $\vec{E}$ i $\vec{H}$ a $t = 0$.

(c) Si $\vec{E}$ i $\vec{H}$ compleixen l'equació d'ona, quin és el valor de β?

(d) Calculeu la potència mitjana que creua una àrea circular de radi 2.5 m en el pla $z = c$.

8.2. En un medi no conductor el camp elèctric ve donat per l'expressió:

$$\vec{E} = E_0 \cos\omega(\sqrt{\epsilon\mu}\, z - t)\, \vec{e}_x - E_0 \sin\omega(\sqrt{\epsilon\mu}\, z - t)\, \vec{e}_y,$$

on E_0 és una constant. Comproveu que compleix l'equació d'ones, i trobeu $\vec{B}$ i el vector de Poynting.

8.3. Una ona electromagnètica de 3.0 MHz es propaga en l'espai lliure. L'amplitud del seu camp elèctric és de 100 mV/m. Trobeu el voltatge màxim induït en una bobina de 10 espires de 1 m^2, orientada de manera que el pla format per una espira conté el vector de propagació $\vec{k}$, i el vector perpendicular al pla, $\vec{n}$, forma un angle de 30 graus amb el vector $\vec{E}$.

8.4. Si la potencia radiada pel Sol és de 3.8×10^{26} watts, calculeu:

(a) La intensitat del camp elèctric, degut a la radiació, a la superfície del Sol, si en un instant donat totes les ones estiguessin en fase.

(b) El camp elèctric a la superfície de la Terra degut a la radiació solar.

(c) El vector de Poynting a la Terra.

Algunes dades astronòmiques útils per a aquest problema i els següents són:
radi del Sol = 7.0×10^8 m; distància mitjana de la Terra al Sol = 1.5×10^{11} m; radi de la Terra = 6.4×10^6 m; massa del Sol = 2.0×10^{30} kg.

8.5. Una ona electromagnètica és reflectida totalment per un metall. A partir de la densitat d'impuls del camp electromagnètic, trobeu la pressió que fa l'ona sobre el material (pressió de radiació).

8.6. Per a la llum solar el vector de Poynting a la superfície de la Terra és de ≈ 1400 watts/metre^2. Calculeu la pressió de radiació a la superfície de la Terra i a la superfície del Sol.

Trobeu la força de radiació del Sol sobre la Terra si absorbeix totalment la radiació.

8.7. Compareu les forces degudes a l'atracció gravitatòria i la pressió de radiació del Sol sobre una partícula de radi R i densitat relativa 5. Trobeu el valor de R pel que s'igualen les dues forces. Suposeu que la partícula absorbeix tota la radiació.

(La constant gravitatòria té un valor de $6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.)

*8.8. Una ona electromagnètica monocromàtica en un medi no conductor d'índex de refracció n incideix perpendicularment al pla de separació amb un altre medi no conductor d'índex de refracció n'. Hi haurà una ona reflectida i una altra de transmesa. A partir de les condicions de contorn del camp electromagnètic, demostreu que la freqüència de les tres ones és la mateixa, i trobeu la relació entre el mòduls del camp $\vec{E}$ reflectit i transmès respecte a l'incident (són els anomenats coeficients de Fresnel).

**8.9. Igual que el problema anterior però amb incidència obliqua. A partir de que les condicions de contorn s'han de complir per qualsevol punt del pla demostreu les lleis de la reflexió i de la refracció.

*8.10. Trobeu la relació entre la densitat d'impuls i la densitat d'energia en una ona plana en el buit. Tenint en compte la relació per una partícula relativista $\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Quina densitat de massa en repòs seria la del camp electromagnètic?

8.11. Trobeu la freqüència en que la profunditat de penetració en l'aigua del mar, $\mu = \mu_0$ i $g \approx 4.3$ siemens/metre, és de 1 m.

*8.12. Demostreu que en un conductor

$$\frac{H_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/4}.$$

Predomina l'energia elèctrica o la magnètica?