Entrega 2: Cadenes de desintegració radioactiva

Arnau Mas

23 de Març de 2018

Considerem la següent cadena de desintegracions

$$X \to Y \to Z$$

on Z és un nucli estable i X i Y tenen constants de desintegració λ_X i λ_Y respectivament. Suposem que tenim un nombre inicial N de nuclis.

Tenim que el nombre de nuclis X, N_X, decau com $-A_X$, on A_X és l'activitat de X és a dir, el nombre de desintegracions de X en Y. Per tant $\dot{N}_X = -A_X$. El nombre de nuclis de Y també decau com $-A_Y$ on ara A_Y és l'activitat de Y, és a dir, el nombre de desintegracions de X en Z. Però, com que A_X era el nombre de nuclis de X que es desintegraven en Y, N_Y també incrementa com A_Y. Per tant $\dot{N}_Y = A_X - A_Y$. Així doncs, tenint en compte que $A_X = \lambda_X N_X$ i que $A_Y = \lambda_Y N_Y$ tenim el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\left.\begin{aligned} \dot{N}_X &= -\lambda_X N_X \\ \dot{N}_Y &= \lambda_X N_X - \lambda_Y N_Y \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

En forma matricial podem escriure

$$\begin{pmatrix} \dot{N}_X \\ \dot{N}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_X & 0 \\ \lambda_X & -\lambda_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_X \\ N_Y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La matriu d'aquest sistema té valors propis $-\lambda_X$ i $-\lambda_Y$, per tant diagonalitza. Per valor propi $-\lambda_X$ el sistema es redueix a $\dot{N}_X = -\lambda_X N_X$ i $N_Y = \frac{\lambda_X}{\lambda_Y - \lambda_X} N_X$. I pel valor propi $-\lambda_Y$ tenim $\dot{N}_Y = -\lambda_Y N_Y$ i $N_X = 0$. Així doncs, la solució general del sistema és

$$\left.\begin{aligned} N_X(t) &= Ae^{-\lambda_X t} \\ N_Y(t) &= A\frac{\lambda_X}{\lambda_Y - \lambda_X} e^{-\lambda_X t} + Be^{-\lambda_Y t} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Si a 3 imposem condicions inicials $N_X(0) = N$ i $N_Y(0) = 0$ trobem que $A = N$ i $B = -N\frac{\lambda_X}{\lambda_Y - \lambda_X}$ i per tant

$$\left.\begin{aligned} N_X(t) &= Ne^{-\lambda_X t} \\ N_Y(t) &= \frac{\lambda_X}{\lambda_Y - \lambda_X} N \left(e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_Y t}\right) \end{aligned}\right\} .$$

I com que $A_X = \lambda_X N_X$ i $A_Y = \lambda_Y N_Y$, les activitats en funció del temps són

$$\left.\begin{aligned} A_X(t) &= \lambda_X N e^{-\lambda_X t} \\ A_Y(t) &= \frac{\lambda_X \lambda_Y}{\lambda_Y - \lambda_X} N \left(e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_Y t}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

Si considerem el quocient A_Y/A_X trobem

$$\frac{A_Y}{A_X} = \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y - \lambda_X} \frac{e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_Y t}}{e^{-\lambda_X t}} = \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y - \lambda_X} \left(1 - e^{(\lambda_X - \lambda_Y)t}\right) .$$

Per tant el quocient tindrà límit finit només quan $\lambda_X < \lambda_Y$. Això ens indica que només tindrem equilibri quan $\lambda_X < \lambda_Y$. En aquestes condicions $e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_Y t}$ serà semblant a $e^{-\lambda_X t}$ molt depressa. Així doncs, les dues activitats decauran amb la mateixa constant. Ara bé, si el temps de mitja vida de X —que està directament relacionat amb λ_X com $T_X = \log 2/\lambda_X$— és comparable amb l'escala de temps que estem considerant aleshores les dues activitats decauran prou depressa.

Considerem el cas d'equilibri secular, és a dir quan $\lambda_X \ll \lambda_Y$. Aleshores tenim

$$\frac{\lambda_X \lambda_Y}{\lambda_Y - \lambda_X} \approx \lambda_X .$$

Per tant, substituint a (4) tenim que

$$A_Y(t) \approx \lambda_X N \left(e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_Y t}\right) = \lambda_X N e^{-\lambda_X t} \left(1 - e^{(\lambda_X - \lambda_Y)t}\right) \approx \lambda_X N e^{-\lambda_X t} .$$

Per a l'última aproximació, observem que $\lambda_X - \lambda_Y \approx -\lambda_Y$ en el règim en el que estem, i per tant el terme $e^{(\lambda_X - \lambda_Y)t}$ decaurà ràpidament. Per tant, en l'equilibri tindrem que $A_X = A_Y$. I a més, si el temps de mitja vida de X és molt gran comparat amb l'escala de temps que considerem, les dues activitats seran bàsicament constants un cop s'assoleixi l'equilibri.

Finalment, si $\lambda_X > \lambda_Y$ aleshores l'activitat de X decaurà molt més depressa que la de Y. Ja hem observat que en aquest cas A_Y/A_X no té límit finit, sino que tendeix a $-\infty$, per tant no s'assolirà cap equilibri.

Com a exemple d'equilibri transitori podem considerar la següent cadena de desintegracions:

$$^{99}_{42}\mathrm{Mo} \xrightarrow{\beta^-} {}^{99}_{43}\mathrm{Tc}^* \xrightarrow{\gamma} {}^{99}_{43}\mathrm{Tc}.$$

La desintegració β^- del molibdè–99 en tecneci–99 excitat té un temps de mitja vida de $67\,\mathrm{h}$, per tant una constant de desintegració de $0.01\,\mathrm{h}^{-1}$. En canvi, l'estabilització del tecneci–99 a través d'una emissió γ té un temps de mitja vida de $6\,\mathrm{h}$ i per tant una constant de desintegració de $0.12\,\mathrm{h}^{-1}$.