1. Estudieu el caràcter de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{n}+\frac{\cos(n\pi)}{2n}\Big)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((4n+1)\pi/6)}{\sqrt{n^2-n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-1}{5n+3}\right)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2-1}{n(n+2)}$

2. Proveu que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ no és absolutament convergent.

3. (a) Demostreu que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ és absolutament convergent, també ho són les sèries:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{1+x_n}$ $(x_n\neq -1,\ \forall n\in\mathbb{N})$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2.$

(b) Proveu la convergència absoluta de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$, sabent que les sèries $\displaystyle\sum_n x_n^2$ i $\displaystyle\sum_n y_n^2$ són convergents.

4. (a) Demostreu que

$$\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)=\frac{\sin(\frac{Nx}{2})\sin(\frac{(N+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})},\quad k,N\in\mathbb{N},\ x\neq 2\pi k,$$

[Indicació: feu servir inducció i la fórmula $\cos a\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$].

(b) Demostreu

$$\sum_{n=1}^{N}\cos(nx)=\frac{\sin((N+1/2)x)}{2\sin(\frac{x}{2})}-\frac{1}{2}=\frac{\cos\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(c) Demostreu que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ és convergent per cada $x\in\mathbb{R}$.

(d) Demostreu que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ és convergent si x no és múltiple enter de 2π.

(e) Demostreu que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n}$ és divergent si x no és múltiple enter de π.

(f) Discutiu la convergència de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{x}{n}) \cos(nx)$ pels diferents valors de $x \in \mathbb{R}$.

5. Estudieu la convergència de les sèries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(e - \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n \Big)$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2^3} + \cdots$

6. (a) Sigui $D_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$. Demostreu que D_n és una successió decreixent de termes positius, per tant té un límit γ anomenat *constant d'Euler-Mascheroni*. Comproveu que $\gamma \geq 1/2$. (De fet $\gamma = 0,5772...$ i no se sap encara si és racional o no).

(b) Utilitzeu l'apartat (a) per calcular la suma de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

[Indicació: escriviu les sumes parcials de la sèrie en funció de les sumes parcials de la sèrie harmònica $\sum \frac{1}{n}$].

7. Estudieu la convergència de les sèries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \log \Big(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\Big)$.