1. Estudieu la convergència de les següents integrals impròpies:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \qquad \int_1^\infty e^{-x}x^\alpha dx\,,\,(\alpha \geq 0) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{2x+(x^3+1)^{1/2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^4)^{1/2}}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\log x}\,dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{3/4}}dx \qquad \int_0^1 \frac{\log(\cosh(x))}{x-\sin(x)}\,dx$$

2. Calculeu per a quin valor d'α la següent integral és convergent

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{\alpha}{x+1}\right)\,dx$$

3. Discutiu la convergència i la convergència absoluta de les integrals següents:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(e^x-1)^2e^{-3x}}{x^2\sqrt{x}}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x\cos(x^3)dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-\cos x)\log x}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

4. Demostreu que les següents integrals impròpies són absolutament convergents.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

5. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents en funció del paràmetre $\alpha > 0$:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x+x^\alpha)}{x^{3/2}}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x^\alpha}{1+x^2}\right)dx$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{(x^2-1)^\alpha}dx$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log^\alpha x}{x^{2/3}\arctan(1/x)}dx$

6. Calculeu les integrals següents derivant respecte del paràmetre:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+t\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx, \quad t > 0.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x}dx, \quad t>0.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-tx}}{xe^x}dx, \quad t>-1.$

(d) $\int_0^1 \log(x^2+t^2)dx, \quad t\in\mathbb{R}.$

7. Calculeu $F(a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(ax)dx$, $(a\in\mathbb{R})$.

8. Sigui $F(t)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$, $(t\geq 0)$.

(a) Calculeu $F'(t)$ per $t>0$.

(b) Calculeu $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)$, comproveu que $\lim\limits_{t\to 0}F(t)$ existeix i determineu $F(t)$.

(c) Deduïu dels apartats anteriors que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

9. Siguin

$$f(x)=\Big(\int_0^x e^{-t^2}dt\Big)^2, \quad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt$$

(a) Demostreu que $f'(x)+g'(x)=0$ i que $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$ per a tot $x\in\mathbb{R}$.

(b) Demostreu a partir de l'apartat a) que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

10. (*Exercici del seminari*) Considereu la següent integral per tot $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t+itx}dt.$$

(a) Demostreu que és una integral convergent i que f és una funció derivable.

(b) Trobeu une equació diferencial de primer ordre que sigui satisfeta per f i demostreu que la funció $x\to(x-i)f^2(x)$ és constant. Deduïu una expressió explícita per $f(x)$.

Indicació: Podeu fer servir que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.