Llista 1

1 Normes no euclidianes

1. - Si a, b són números positius, i $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ demostreu la desigualtat de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

   (Ind: la funció log és còncava a $(0, \infty)$).

   - Siguin $x = (x_1, ..., x_d), y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbf{R}^d$. Demostreu la desigualtat de Holder: si p, q són com a l'apartat anterior,

$$\sum_1^d |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

   on $\|x\|_p^p = \sum_i |x_i|^p$.

   - Demostreu la desigualtat de Minkowski: si x, $y \in \mathbf{R}^d$,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

   i comproveu que si $1 < p < \infty$, $\|\dot{}\|_p$ defineix una norma a $\mathbf{R}^d$.
   (Ind: apliqueu la desigualtat de Holder a $|x_i + y_i|^{p-1}, |x_i|, |y_i|$).

   - Dibuixeu les boles $\{x : \|x\|_p \leq 1\}$ en dimensió $d = 2, 3$.
   - Proveu que $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max |x_i|$.

2. Proveu que si q és una norma en $\mathbf{R}^d$, les boles $B = B_q(x, r) = \{y : \|x - y\|_q \leq r\}$ són conjunts convexos, és a dir, $\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1$ (el segment que uneix x, y) és dins B si $x, y \in B$. Com a conseqüència, proveu que $\|x\|_p$ no són normes si $0 < p < 1$.

3. Proveu que si q és una norma a $\mathbf{R}^d$ i T és una transformació lineal bijectiva de $\mathbf{R}^d$ en si mateix, $q(Tx)$ és també una norma.

2 Ús de coordenades

4. - Descriu el conjunt intersecció de $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ i $x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}$ utilitzant coordenades cilíndriques.
   - Descriu el conjunt intersecció de $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ i $z^2 \leq x^2+y^2$ utilitzant coordenades esfèriques.
   - Descriu el conjunt intersecció de les boles $x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$ utilitzant coordenades cilindriques i coordenades esfèriques.

5. - Determineu els conjunts A del pla més grans possibles on les funcions $u = x^2 - y^2, v = xy$ formen un sistema de coordenades. Descriu on varien les coordenades u, v, és a dir, descriu el conjunt $\Phi(A)$, on $\Phi = (u, v)$, i calcula $x = x(u, v), y = y(u, v)$. Indicació: utilitzeu la variable compexa $z = x + iy$.
   - Determineu els conjunts A del pla més grans possibles on les funcions $u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3$ formen un sistema de coordenades.

3 Longituds, àrees i volums

6. Calculeu el volum del paralelepiped a $\mathbf{R}^3$ determinat pels tres vectors

$$\vec{u_1} = (1, 2, -3), \vec{u_2} = (2, 1, 1), \vec{u_3} = (-1, 2, 1).$$

Quina alçada té sobre el pla determinat pels dos primers?

7. Tractant-lo com a cos de revolució, calcula el volum d'un elipsoide que tingui dos semieixos iguals,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} \leq 1.$$

8. Calcula el volum del cos delimitat pel pla $z = 0$ i el paraboloide $z = 4(x^2 + y^2)$.

4 Transformacions lineals i matrius

9. Proveu que si $T : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ preserva distàncies, és a dir, $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ per a tot $x, y \in \mathbf{R}^d$, llavors T és de la forma $TX = P + AX$ amb A una matriu ortogonal. (Indicació: considereu una definició mètrica del punt mig entre x, y).

10. Demostreu que la norma d'una matriu també pot expresar-se

$$\|M\| = \sup\{|\langle MX, Y\rangle|, \|X\|, \|Y\| \leq 1.$$

Demostreu que M i M^t tenen la mateixa norma. Demostreu que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

11. - Demostreu que si M és una matriu $d \times m$, hom té $\|M^tM\| = \|M\|^2$
    - M^tM és una matriu simètrica definida, i per tant diagonalitza en una base ortonormal, és a dir, hi ha A ortogonal tal que A^tM^tMA és una matriu diagonal, formada pels valors propis de M^tM. Demostra que aquests valors propis són positius o nuls.
    - Utilitzant que $\|Mx\|^2 = \langle M^tMx, x\rangle$, demostra que en

    $$\|M\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Mx\|,$$

    el suprem és un màxim i val $\sqrt{\lambda}$, on λ és el valor propi més gran de M^tM.
    - Demostra que si el rang és m, és a dir $Mx \neq 0$ si $x \neq 0$, aleshores $\inf_{\|x\|\leq 1} \|Mx\|$ és un mínim i val $\sqrt{\mu}$ on μ és el mínim valor propi de M^tM.

12. Considerem la matriu dos per dos

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Calculeu la norma de M suposant que o bé $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ o bé $ab + cd = 0$. Intenteu trobar una expressió de $\|M\|$ en el cas general, utilitzant el problema anterior. Intenteu generalitzar al cas de matrius tres per tres.

13. Sigui M la matriu de l'exercici anterior, que mirem com a transformació lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$. Designem per p o q la norma $\|\|_1$ o la norma $\|\|_\infty$ en $\mathbf{R}^2$, i definim

$$\|M\|_{p,q} = \sup\{\frac{\|MX\|_p}{\|X\|_q}, X \neq 0\}.$$

Calculeu explicitament $\|M\|_{p,q}$ en termes de a, b, c, d en els quatres casos.

5 Topologia de $\mathbf{R}^d$

14. Determineu quines de les successions següents a $\mathbb{R}^2$ tenen límit:

(a)	$\{(\cos(\pi k/3), \sin(\pi k/3))\}$	(b)	$\{((1/k)\cos(\pi k/3)), (1/k)\sin(\pi k/3)\}$
(c)	$\{((-1)^k(1-1/k), 1-1/k)\}$	(d)	$\{((-1)^k 1/k, 1/k^2)\}$
(e)	$\{(1/k, k)\}$	(f)	$\{(1/k, \sin(1/k))\}$

15. Determineu quins dels següents conjunts són oberts, tancats o compactes.

(a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \quad y > x^2 \quad |x| < 2\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad (x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2) > 0\}$.

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad z \geq x^2+y^2\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad x > 0, \quad y = \sqrt{x}\}$

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2+y^2 = 1, \quad |z| \leq 1\}$

16. Proveu les següents afirmacions

    (a) Qualsevol bola és un conjunt acotat.

    (b) La unió finita de conjunts acotats és acotat.

    (c) A és acotat si i només si $\pi_i(A)$ és un subconjunt acotat de $\mathbf{R}$ per $i = 1, \ldots, n$, on $\pi_i(A)$ és la projecció de A sobre l'eix i.

    (d) A és acotat si i només si $\overline{A}$ és compacte.

    (e) Si A és acotat $\mathrm{Fr}(A)$ és compacte. (El recíproc és fals)

17. Dóna un exemple d'un conjunt tancat A que no sigui l'adherència del seu interior.

18. Sigui $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Demostra que el conjunt $A = \{x : f(\|x\|) < 1\}$ és obert i que el conjunt $B = \{x : f(\|x\|) \leq 1\}$ és tancat. Demostra que en general A no és tot l'interior de B. Demostra que si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \infty$ aleshores B és compacte.

19. Si A, $B \subset \mathbf{R}^n$, definim la *distància* entre A i B per

$$d(A,B) = \inf\{||x-y|| : \ x \in A, \ y \in B\}$$

    (a) Determineu $d(A,B)$ si:

        i. $A = \mathbf{N}$, $B = \{n + \dfrac{1}{n} : n \geq 2\} \subset \mathbf{R}$

        ii. $A = \{(-1/k, 1/k) : k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{(2,y) : y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$

    (b) Demostreu que si A, $B \subset \mathbf{R}^n$, A és compacte, B és tancat i $A \cap B = \emptyset$, aleshores $d(A,B) > 0$ i existeixen $a \in A$, $b \in B$ tals que $d(A,B) = ||a-b||$. (Sug: la intersecció d'un tancat amb qualsevol bola tancada és compacte).

    (c) De l'apartat anterior, deduïu que si $B \subset \mathbf{R}^n$ és tancat i $a \in \mathbf{R}^n \setminus B$, aleshores existeix $b \in B$ que és el més proper a a: $||a-b|| \leq ||a-x||$ per a tot $x \in B$.

    (d) Proveu que $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ per a tres subconjunts A, B, C.

6 Corbes i superficies i llurs parametritzacions

20. Determineu els conjunts de nivell i descriviu els gràfics de les funcions següents:

(a)	$f(x,y) = \cos(x^2+4y^2)$	(b)	$f(x,y) = (9-x^2-y^2)^{1/2}$
(c)	$f(x,y) = \|y\|$	(d)	$f(x,y) = x^2+xy$
(e)	$f(x,y) = \sin(x-y)$	(f)	$f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-1}$
(g)	$f(x,y) = e^{1-x^2+y^2}$	(h)	$f(x,y) = ln\|y-x^2\|$

21. Feu una representació gràfica de les corbes següents, expressades en coordenades polars:

(a)	$r = e^{-\theta}$	(b)	$r^2 = \cos 2\theta$	(c)	$r = \sin 3\theta$
(d)	$r = 1+\cos\theta$	(e)	$r = \|\sin 2\theta\|$	(f)	$r = 1+\cos\frac{\theta}{2}$

22. Transformeu les equacions cartesianes següents en equacions en coordenades polars i dibuixeu les gràfiques corresponents:

(a)	$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$	(b)	$(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2) = x^2$
(c)	$(x^2+y^2)^2 = 2xy$	(d)	$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$

23. Elimineu el paràmetre t en les corbes representades per les equacions paramètriques següents i obtingueu les equacions cartesianes corresponents:

(a)	$x = t^3,\ y = \frac{t^2}{2}$	(b)	$x = 2-3t,\ y = 4+6t$
(c)	$x = 3+2\cos t,\ y = 2+\sin t$	(d)	$x = t^2+t,\ y = t^2-t$

24. Dona una parametrització de les corbes

- Les elipses $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$, $\frac{x^2}{4}+y^2 = 2y$
- Les hiperboles $x^2-y^2 = 1, x^2-y^2 = 2x$, utilitzant les funcions sinus i cosinus hiperbòlics.

25. Per a cada apartat, doneu una parametrització que descrigui la corba indicada:

(a) el segment de recta orientat des de $(1,4,2)$ fins $(3,\ 9,\ 6)$

(b) $4x^2+9y^2 = 36$ en sentit de les agulles del rellotge

(c) l'arc de la corba intersecció de l'el.lipsoide $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{24}+\dfrac{z^2}{4} = 1$ i el cilindre parabòlic $y = x^2$ des de $(2,4,0)$ fins $(0,0,2)$

(d) la intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ i el pla $x+z = 2$

(e) La corba intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ i el pla $x+y+z = 0$.

26. En cada apartat, compareu les corbes corresponents a les parametritzacions donades i transformeu-les a coordenades rectangulars. Són iguals les gràfiques?

(a) $i)\, x = t,\ y = 2t+1,\ ii)\, x = \cos t,\ y = 2\cos t+1,\ iii)\, x = e^{-t},\ y = 2e^{-t}+1$

(b) $i)$, $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ ii)\, x = \sqrt{t},\ y = \sqrt{4-t},\ iii)\, x = -\sqrt{4-e^t},\ y = e^t$

27. Transformeu les equacions paramètriques de les superfícies següents en equacions cartesianes i identifiqueu la superfície.

    (a) $x = s\cos t,\ y = s\sin t,\ z = s$

    (b) $x = 4\cos\phi\cos\theta,\ y = 2\cos\phi\sin\theta,\ z = \sin\phi$

    (c) $x = 3\cos t,\ y = s,\ z = 3\sin t$

    (d) $x = s\cos t,\ y = s\sin t,\ z = s^2$

    (e) $x = s\cosh t,\ y = s\cosh t,\ z = s^2$

28. Siguin $E, k > 0$. Es considera l'equació en coordenades polars

$$r(1 + E\cos\theta) = k$$

    (a) Transformeu-la a coordenades cartesianes.

    (b) Demostreu que la corba anterior és una cònica d'excentricitat E i amb l'origen de coordenades com a focus. Si $0 < E < 1$ es tracta d'una el.lipse, si $E = 1$ és una paràbola i si $E > 1$ és una hipèrbola. (Indicació: completeu quadrats a l'equació cartesiana).

29. Un **dipol** elèctric és una distribució de càrrega que consisteix en dues càrregues iguals però de signe contrari situades en dos punts del pla. Suposem per comoditat que la càrrega positiva es troba al $(0, 0)$ i la negativa al $(-1, 0)$. Tret de constants, el **potencial electrostàtic** generat pel dipol en un punt (x, y) del pla ve donat per

$$V(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$$

Les corbes de nivell de V es diuen **línies equipotencials**. Per $k \in \mathbf{R}$, denoteu per L_k la línia equipotencial de nivell k.

- Quina hauria de ser L_0 ? (Sug: la simetria del problema dóna la resposta sense cap càlcul. Confirmeu-ho també amb càlculs.)
- Passant a coordenades polars, demostreu que si $(r, \theta) \in L_k$, aleshores $rk < 1$.
- Comproveu que si $k > 0$ (resp. $k < 0$) aleshores L_k queda a la dreta (resp. a l'esquerra)de la recta $x = -1/2$.
- Per $k > 0$, comproveu que L_k talla l'eix X en dos punts a_k, b_k amb $-1/2 < a_k < 0 < b_k$. Quin és el comportament de a_k, b_k quan $k \to 0$, i $k \to \infty$?
- Comproveu que si $k > 0$, L_k talla l'eix Y en dos punts.

7 Exercicis complementaris

30. Si $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d$ definim

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

- Comproveu que són normes en $\mathbf{R}^d$ i dibuixeu les boles centrades en zero.
- Proveu que
$$|\sum_i x_i y_i| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty,$$
- Proveu que
$$\|x\|_1 = \sup\{|\sum_i x_i y_i| : \|y\|_\infty \leq 1\}, \|x\|_\infty = \sup\{|\sum_i x_i y_i| : \|y\|_1 \leq 1\},$$

31.
- Proveu que $u = x^2 + y^2, v = \frac{y}{x}$ formen un sistema de coordenades en $\{x > 0\}$. Dibuixa els nous eixos de coordenades. Cóm es descriu en aquest sistema el segon quadrant?
- Proveu que $u = x^2 + y^2, v = xy$ formen un sistema de coordenades en $\{0 < x < |y|\}$ i dibuixa els nous eixos.
- Proveu que $u = \frac{y}{x^2}, v = \frac{y}{x}$ formen un sistema de coordenades en el primer quadrant.
- Proveu que $u = x^2+y^2+z^2, v = \frac{x^2+y^2}{z}, w = \frac{y}{x}$ és un sistema de coordenades en $x, z > 0$

Intenta desriure en cada cas on varien les noves coordenades, és a dir, el conjunt imatge de l'aplicació (u, v) o (u, v, w).

32. Calcula l'area del tor que s'obté fent girar el cercle de centre $(R, 0)$ i radi $r, r < R$ al voltant de l'eix de les y. Calcula també el seu volum.

33. Sigui (x^n) una successió convergent a $\mathbf{R}^d$. Demostreu que el conjunt de punts de la successió és compacte.

34. Definim la suma $A+B$ de dos conjunts de $\mathbf{R}^d$ com el conjunt $A+B = \{z : z = x + y, x \in A, y \in B\}$. És a dir, consta de tots els punts que s'obtenen sumant un punt d'A i un punt de B.
- Demostra que $A + B$ és tancat si A és tancat i B compacte.
- Demostra que $A + B$ és acotat si A, B són acotats
- Demostra que $A + B$ és compacte si A, B són ambdós compactes.

- Dóna un exemple de dos conjunts tancats amb suma no tancada.

35. La distància de Haussdorf $\delta(A, B)$ entre dos conjunts acotats es defineix

$$\delta(A, B) = \max(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A))$$

Demostra que $\delta(A, B) = 0$ si i nomes si A, B tenen la mateixa adherència i que δ és una distància en el conjunt de tots els subconjunts compactes.

36. Sigui f una funció contínua d'una variable i definim una funció de dues variables x, t mitjançant
$$u(x, t) = f(x + vt).$$
Interpretant t com a temps, expliqueu perquè u representa una ona que es mou cap a l'esquerra amb velocitat v. D'una forma anàloga, $f(x - vt)$ és una ona que es mou cap a la dreta amb velocitat v. Si g està definida en $(0, +\infty)$ i té suport en $[1, 2]$, que representa $u(x, t) = g(\|x\| - vt), x \in \mathbf{R}^2$?.

37. Descriviu les gràfiques de les següents superfícies en $\mathbf{R}^3$.

(a) $4x^2 + z^2 = 16$	(b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} - y^2 = 0$	(c) $z^2 = y^2 + 4$
(d) $x^2 + y^2 - 2x = 0$	(e) $z = x^2$	(f) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1 + \dfrac{x^2}{16}$

38. Dóna una parametrització de les superficies

- Els elipsoides $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{2}{3}y + z^2 = 2z - 1$,
- De l'hiperboloide d'una fulla
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
- De l'hiperboloide de dos fulls
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{z^2}{c^2}.$$
- Del con
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$
- Del cilindre eliptic
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Del cilindre hiperbòlic
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
- Del paraboloide elíptic
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$
- Del paraboloide hiperbòlic
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$
- Del cilindre paràbolic
$$y = cx^2.$$

39.
- Proveu que si A és una matriu $d \times k$ de rang k aleshores A^tA és inversible i si és de rang d aleshores (AA^t) és inversible.
- Proveu que si V és un subespai vectorial de dimensió $k, 0 < k < d$ de $\mathbf{R}^d$, $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ una base de V, A és la matriu $d \times k$ que té els vectors $\vec{v_i}$ com a vectors columna i $y \notin V$, la projecció ortogonal w de y en V és $W = AX$ on el vector columna X és la solució del sistema
$$A^tAX = A^tY$$
és a dir, $X = (A^tA)^{-1}A^tY, W = A(A^tA)^{-1}A^tY$.
- Una forma equivalent de plantejar això és la següent. Considerem el sistema $AX = Y$ amb A una matriu $d \times k$ de rang $k < d$, i posem $V = A(\mathbf{R}^k)$. El sistema no té solució si $Y \notin V$ i si $Y \in V$ té solució única. Si $Y \notin V$ definim una solució aproximada de $AX = Y$ com la solució X_0 del problema de mínims quadrats
$$\min_X \|AX - Y\|^2.$$
És a dir, AX_0 és la projecció ortogonal de Y sobre V. A l'apartat anterior hem vist que $X_0 = (A^tA)^{-1}A^tY$, per tant l'assignació $Y \to X_0$ és lineal. Això dóna una interpretació de la matriu $(A^tA)^{-1}A^t$ que és una inversa per l'esquerra d'A.
- Suposem que el subespai V de dimensió k està donat per un sistema de $d - k$ equacions linealment independents $AX = 0$ (és a dir, A és una matriu $(d-k) \times d$ de rang $d - k$, V és el nucli d'A). Donat un punt $X \notin V$, demostra que la projecció de X en $V^\perp$ és $A^t(AA^t)^{-1}AX$.

- Una altra forma de plantejar el punt anterior és com segueix. El sistema $AX = Y$ té solució no única per a tot Y; llavors, entre totes les solucions, considerem l'única solució $X_0 \in V^{\perp}$. Equivalentment, X_0 és la projecció sobre $V^{\perp}$ de qualsevol solució X. Pel punt anterior, $X_0 = A^t(AA^t)^{-1}Y$. Això dona una interpretació de $A^t(AA^t)^{-1}$ que és un invers per la dreta d'A.

40. Sigui A una matriu arbitrària d'ordre $n \times m$ (ens mirem A com a transformació de $\mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}^n$. Designem N el nucli d'A i R la imatge d'A. La restricció de A a l'ortogonal $N^{\perp}$ és un isomorfisme B entre $N^{\perp}$ i R. Considerem la transformació $A^{+}(Y) = B^{-1}(P_R Y)$; és a dir, com en els punts anteriors, primer projectem Y sobre R i de totes les solucions de $AX = PY$ considerem l'única en $N^{\perp}$. Proveu que A^{+} és l'única matriu $m \times n$ tal que

    - $AA^{+}A = A$
    - $A^{+}AA^{+} = A^{+}$
    - AA^{+} i $A^{+}A$ són matrius simètriques.

    La matriu A^{+} s'anomena la pseudoinversa de Moore-Penrose d'A. Observem que A és la pseudoinversa d'A^{+}. Hem vist que quan el rang $r = m$ $A^{+} = (A^tA)^{-1}A$ i quan $r = n$ $A^{+} = A^t(AA^t)^{-1}$.

41. El nombre de condició d'una matriu. Sigui A una matriu $d \times m$ amb rang m, és a dir, $y = Ax$ és injectiva. Hem vist que $\|Ax\|$ té un màxim i un mínim en $\|x\| = 1$. Suposem que $Ax = y_0$ té l'única solució x_0, fem un petit increment Δy_0 i suposem que $Ax = y_0 + \Delta y_0$ té una solució (única) x (podem suposar que y_0 és quelcom que es mesura i que hem fet un petit error). Demostra que

    $$\frac{\|x - x_0\|}{\|x_0\|} \leq C(A)\frac{\|\Delta y_0\|}{\|y_0\|},$$

    amb

    $$C(A) = \frac{\max \|Ax\|, \|x\| \leq 1}{\min \|Ax\|, \|x\| \leq 1},$$

    és a dir, l'error relatiu en les x està controlat per l'error relatiu en les y i per $C(A)$. En el cas $d = m$ (A inversible) demostra que $C(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.