1. Per a cadascuna de les següents successions determineu el límit puntual i decidiu si convergeixen uniformement.

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}\,,\ x \in \mathbb{R}$ (b) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n} + x^n + 1}{x^{2n+1} + 1}\,,\ x \in [0, \infty)$

(c) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}\,,\ x \in [1, \infty)$ (d) $f_n(x) = nxe^{-nx}\,,\ x \in [0, \infty)$.

2. Sigui (f_n) definida per $f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$ en $[0, 1]$. Per a quins valors d'α la successió convergeix uniformement?

3. Considerem la successió de funcions $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$.

(a) Calculeu el límit puntual de (f_n).

(b) Proveu que la successió (f_n) no és uniformement convergent a $[0, \infty)$.

(c) Proveu que per a qualsevol $a > 0$, (f_n) és uniformement convergent en $[a, \infty)$.

4. Demostreu que $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ convergeix uniformement en $\mathbb{R}$ a una funció f i que l'equació $f'(x) = \lim_n f'_n(x)$ és certa si $x \neq 0$ però falsa si $x = 0$.

5. Calculeu la suma de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}$, i demostreu que no convergeix uniformement a $\mathbb{R}$. A quins intervals la convergència és uniforme?

6. Demostreu que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^2 + n}{n^2}$$

convergeix uniformement en tot interval acotat però la sèrie no convergeix absolutament per cap valor de x.

7. Considerem la successió de funcions $f_n(x) = \dfrac{1}{2n - 1} \left(\dfrac{x - 1}{x + 1} \right)^{2n-1}$ i siguin $0 < a < b < \infty$.

(a) Estudieu la convergència uniforme de $\sum f_n(x)$ a l'interval $[a, b]$.

(b) Estudieu la convergència uniforme de $\sum f'_n(x)$ a l'interval $[a, b]$.

(c) En el cas que $\sum f_n(x)$ i $\sum f'_n(x)$ siguin convergents, quina relació hi ha entre elles?

8. (a) Demostreu que la successió $f_n(x) = x^2 e^{-nx^2}$ convergeix uniformement a $[0,1]$.

(b) Demostreu que la successió $g_n(x) = e^{-nx^2}$ convergeix uniformement a $[\varepsilon, 1]$ si $0 < \varepsilon < 1$ però no pas a $[0,1]$.

(c) Demostreu que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f_n(x) + g_n(x))\, dx = 0$.

9. Considerem la successió de funcions definides recurrentment a $[0, +\infty)$ per $f_1(x) = x$ i

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(x)}{1 + f_n(x)}\,, n \geq 1.$$

(a) Comproveu que si existeix $f(x) = \lim_n f_n(x)$, aleshores ha de ser $f(x) = 1$.

(b) Demostreu que $|f_{n+1}(x) - 1| \leq \frac{1}{2}|f_n(x) - 1|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

(c) Demostreu que $f_n \to 1$ uniformement en $\mathbb{R}$.

10. Donada la successió de funcions $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$,

(a) Estudieu la convergència puntual i la funció límit de f_n.

(b) Estudieu la convergència uniforme de f_n a $[1,2]$ i $[2,3]$.

(c) Calculeu $\lim_n \int_1^2 f_n(x) dx$ i $\lim_n \int_2^3 f_n(x) dx$