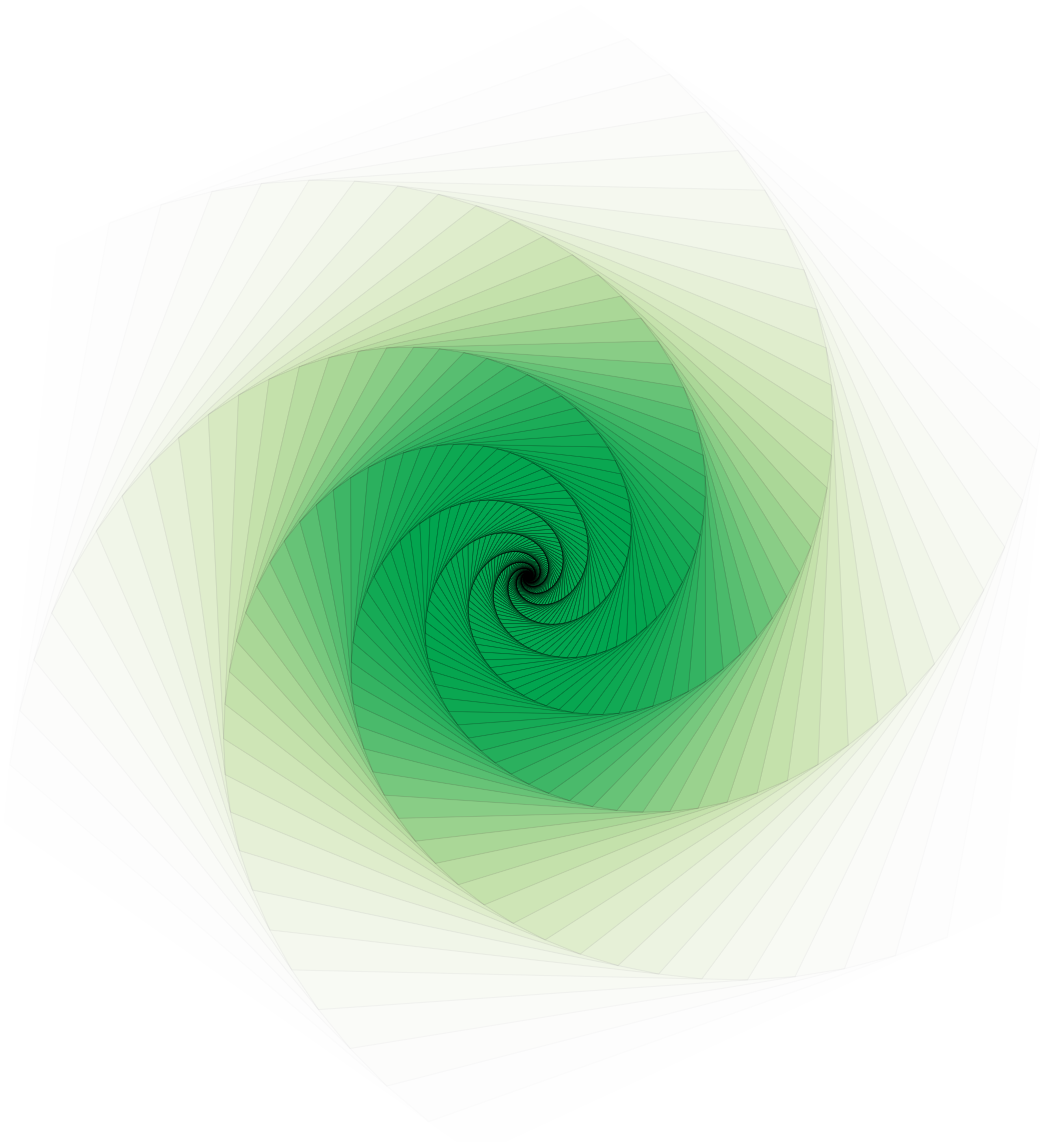
ANÀLISI MATEMÀTICA



Alejandro Molero Casanova

Anàlisi Matemàtica

Alejandro Molero Casanova
alejandro.molero@e-campus.uab.cat

Agraïments

Física i Matemàtiques UAB. Promoció 2012-2013

Índex

Capítol 1

Sèries numèriques

Comencem amb un experiment. Demano al lector que obri bé les seves mans i les col·loqui una davant de l'altre, amb els pams enfrontats (com si es disposés a aplaudir), separades aproximadament per un pam de distància. Finalment, li demano que piqui de mans.

Ara, demanaria de nou que tornés a la posició inicial, amb les mans una davant de l'altre i repeteixi el següent procés: apropar la mà dreta fins a la meitat de la distància amb la mà esquerra i aturar-se, tornar a apropar-la fins a la meitat de la nova distància i aturar-se de nou,... fins que la seva paciència s'esgoti.

Ambdues descripcions són maneres d'apropar la mà dreta cap a la mà esquerra, però semblen tenir naturaleses diferents: una representa un procés que es produeix en un sol pas i ocupa un temps finit, mentre que la segona pren infinits passos, cadascú de menor contribució que l'anterior (la distància que es recorre en cada pas sempre és la meitat que la distància recorreguda en el pas anterior), però que semblen no acabar mai. I per paradoxal que sembli, ambdós processos tenen el mateix resultat: la mà dreta i l'esquerra es toquen.

Aquest joc no és pas diferent a la ben coneguda paradoxa de Zenó, i tots dos exemples són qüestions que porten de manera natural al tema d'aquest capítol: les sèries numèriques. Veurem què vol dir exactament que una suma infinita sigui convergent, i estudiarem condicions per les quals aquest fet es produeix. En particular, dedicarem un apartat a un subconjunt de sèries molt concretes, les sèries de termes positius, doncs existeixen una gran quantitat de criteris que permeten estudiar-ne la convergència gràcies a que els termes a sumar tenen tots el mateix signe. Veurem també, però, sèries més generals, com les sèries alternades (on cada terme a sumar té signe contrari a l'anterior), i els criteris d'Abel i Dirichlet, que fan referència a la convergència de sèries amb termes de signe arbitrari. El capítol l'acabarem amb una revelació sorprenent, i és que resultarà que la commutativitat de la suma esdevé un assumpte delicat a l'hora de sumar infinits termes.

1.1 | Introducció. Convergència de sèries

No podríem començar sense definir què és exactament una sèrie.

Definició 1.1.1. *Sigui* (a_n) *una successió de nombres reals. Una* sèrie numèrica *és una expressió de la forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Anomenem successió de sumes parcials de la sèrie *a la successió* (S_N), *on*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

per a cada $N \in \mathbb{N}$.

En tot el capítol, pot ser que escriguem tant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $\sum_{n\geq 1} a_n$, i si no hi ha opció a confusió, fins i tot escriurem $\sum a_n$ directament, sense índexs al sumatori.

Parlar de la successió de sumes parcials és una idea còmode, perquè ens passa d'un concepte estrany (de moment) com és una suma infinita, a un conjunt de nombres reals indexats.

La intuïció ens diu que, si hem d'assignar a la sèrie algun valor concret, els termes de la successió de sumes parcials s'haurien d'assemblar cada cop més a aquest valor, a mesura que N es fa gran, perquè, al prendre l'infinit, la "suma parcial" que ens queda és la mateixa sèrie.

Definició 1.1.2. *Diem que la sèrie* $\sum a_n$ *és* convergent *quan*

$$s = \lim_{N\to\infty} S_N$$

existeix i és finit. En aquest cas, direm que la sèrie té valor s. *Si el límit en qüestió no existeix o és infinit, diem que la sèrie és* divergent.

Sigui $\sum a_n$ convergent. Això vol dir, d'acord a la definició, que la successió de sumes parcials (S_N) té límit finit $s \in \mathbb{R}$. És a dir, per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n - s \right| < \varepsilon$$

si $N \geq n_0$. Però l'existència d'aquest límit s implica que $\sum a_n$ està ben definit com a valor real, de manera que $s = \sum a_n$. Per tant, la condició de convergència es pot reescriure com

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon$$

si $N \geq n_0$. Acabem arribar a una desigualtat increïblement il·lustrativa, perquè se'n destil·la la veritable essència de la convergència d'una sèrie numèrica: una sèrie és convergent quan la suma sobre la seva cua es fa arbitràriament petita.

Exemple 1.1.3. Veiem els exemples més típics de sèries numèriques, i estudiem-ne la convergència:

1. Donat $r \in \mathbb{R}$, la seva *sèrie geomètrica* és

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Veiem en quins casos és convergent segons la definició 1.1.2. Prenem $S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n$, que no és més que una suma geomètrica, i que resulta en

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

per $r \neq 1$ (per $r = 1$, $S_N = N + 1$, clarament divergent). Ara prenem limit:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} = \begin{cases} \frac{1}{1-r} \text{ si } r \in (-1, 1) \\ +\infty \text{ si } r > 1 \\ \nexists \text{ si } r < 1 \end{cases}$$

Per tant, la sèrie geomètrica és convergent quan $r \in (-1, 1)$.

2. Donada una successió (b_n), la *sèrie telescòpica* de la successió és

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$$

Estudiem la seva convergència. Si prenem S_N, tenim que

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n) = b_{N+1} - b_1$$

Veient això, és clar que S_N té límit (i per tant, la sèrie és convergent) si i només si (b_n) té límit. Un exemple de sèrie telescòpica convergent és $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Resolent el problema per fraccions simples,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

Tenim que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \Rightarrow S_N = -\left(\frac{1}{N+1} - 1\right) \xrightarrow{N \to \infty} 1$$

Cal tenir en compte que, en els exemples anteriors, hem sabut trobar una expressió senzilla pels termes de la successió de sumes parcials, però el cas general no serà aquest. Remarquem, doncs, que comprovar la convergència d'una sèrie numèrica és un problema típicament complicat (essent el càlcul d'aquesta sèrie una tasca pràcticament impossible), que requerirà d'eines que veurem més endavant, i que ens estalviaran el haver de tractar directament amb la successió de sumes parcials de la sèrie.

Tenim, però, un altre problema de caire teòric. Si recordem un moment com hem definit la convergència d'una sèrie, veiem que el que hauríem de fer, generalment, és buscar una quantitat $s \in \mathbb{R}$ tal que, donat ε prou petit, es complís que

$$|S_N - s| < \varepsilon$$

si N és prou gran. Però s és una quantitat desconeguda. Per tant, ens agradaria caracteritzar la convergència d'alguna manera que no involucrés una quantitat no determinada a priori.

El problema s'assembla al que ens trobem el primer cop que estudiem successions de números reals: donada una successió (a_n), volem veure si és convergent, sense preocupar-nos, de fet, de quin valor pren el límit. La solució que tenim en aquest cas és la *condició de Cauchy*, la qual ens assegura que una successió serà convergent si i només si, per tot $\varepsilon > 0$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ prenent n, m prou grans.

Aquest mateix resultat per successions ens dóna una condició de Cauchy per sèries.

Proposició 1.1.4. (Condició de Cauchy) *Una sèrie $\sum a_n$ és convergent si i només si compleix la condició de Cauchy: per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n \right| < \varepsilon$$

si $N, M \geq n_0$.

Demostració. Suposem que la sèrie $\sum a_n$ és convergent. Això és equivalent a dir que (S_N) és una successió amb límit, que és el mateix que dir que és de de Cauchy, i es compleix que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S_{N-1} - S_M| < \varepsilon$ si $N, M \geq n_0$. Però això passa si i només si $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| < \varepsilon$ si $N, M \geq n_0$. □

Corol·lari 1.1.5. (Condició necessària de convergència) *Si $\sum a_n$ és convergent, llavors $(a_n) \to 0$.*

Demostració. Apliquem la condició de Cauchy per $N = M - 1$. □

Exemple 1.1.6. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$. Anomenem *sèrie harmònica* a la sèrie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

Demostrarem que només és convergent quan $\alpha > 1$. Primer, mirem el cas $0 < \alpha \leq 1$ (per $\alpha \leq 0$, és evident que la sèrie és divergent). Considerem la successió (S_{2^N}) definida per

$$S_{2^N} = \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n^\alpha}$$

Observem que no estem prenent les sumes parcials de manera convencional (de fet, estem prenent una parcial de la successió (S_N)). El que intentarem serà dir coses de la successió de sumes parcials a partir d'aquesta successió més exòtica. Tenim que

$$S_{2^N} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^{N\alpha}} \geq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{N\alpha}} = 1 + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2^j}{2^{(j+1)\alpha}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} 2^{j(1-\alpha)}$$

Com que $1 - \alpha \geq 0$, tots els exponents són positius, i per tant tots els termes de la sèrie són més grans que 1

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} 2^{j(1-\alpha)} \geq 1 + \frac{N}{2^\alpha} \xrightarrow{N\to\infty} \infty$$

Per tant, $(S_{2^N}) \to \infty$. Però com que és una successió parcial de la successió (S_N), o bé (S_N) tendeix també a infinit, o bé no té limit. En qualsevol cas, la sèrie és divergent.

Ara, mirem que és convergent per $\alpha > 1$. Apliquem la mateixa tècnica de prendre S_{2^N}.

$$S_{2^N} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^{N\alpha}} \leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{(N-1)\alpha}} + \frac{1}{2^{N\alpha}} = \frac{1}{2^{N\alpha}} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2^j}{2^{j\alpha}} = \frac{1}{2^{N\alpha}} + \sum_{j=0}^{N-1} 2^{(1-\alpha)j}$$

$$= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \frac{1 - 2^{(1-\alpha)N}}{1 - 2^{1-\alpha}} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}$$

Per tant, (S_{2^N}) està acotada. Ara, (S_N) és una successió monòtona creixent, i una de les seves parcials està acotada. Es té, doncs, que (S_N) està acotada, i al ser monòtona, té límit, de manera que la sèrie és convergent.

1.2 | Sèries de termes positius

En l'exemple anterior, hem utilitzat en el nostre argument una eina important: *successió monòtona i acotada té límit.* Això ens dóna peu a pensar en unes sèries particulars, en les quals podem utilitzar aquest mateix argument.

Definició 1.2.1. *Sigui* $\sum a_n$ *una sèrie. Diem que és de* termes positius *si* $a_n \geq 0$ *per a tot* n.

Com hem dit, aquestes sèries admeten un criteri molt simple de convergència: *una sèrie de termes positius és convergent si i només si* (S_N) *és acotada superiorment* (evidentment, si la sèrie és convergent, la successió (S_N) està acotada; recíprocament, si (S_N) està acotada superiorment, el fet que la sèrie sigui de termes positius implica que $S_N \leq S_{N+1}$ per a tot N natural, de manera que (S_N) és monòtona, i queda que ha de tenir límit).

A partir d'ara, i pel que fa a les sèries de termes positius, si $\sum a_n$ és convergent escrivim $\sum a_n < \infty$. Si és divergent, escrivim $\sum a_n = \infty$.

En sèries de termes positius, es poden donar molts criteris per determinar la convergència, ja que la hipòtesi que compleixen és molt forta. Veurem, a continuació, uns quants d'aquests criteris. Fem notar que tots els resultats que enunciarem són vàlids també si la sèrie $\sum a_n$ té un número finit de termes negatius, perquè en aquest cas, si a_{N_0} és l'últim terme negatiu que hi apareix, escriuríem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N_0} a_n + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n$$

i ara tenim que la primera suma és finita, i la segona és una sèrie de termes positius, en la qual podem aplicar els resultats que trobarem.

Teorema 1.2.2. (Criteri de comparació.) *Siguin* $(a_n), (b_n) \geq 0$ *successions de nombres reals. Aleshores:*

1. *Si donat* $C \in \mathbb{R}$, *existeix* n_0 *tal que* $a_n \leq Cb_n$ *per a tot* $n \geq n_0$, *i* $\sum b_n < \infty$, *llavors* $\sum a_n < \infty$.
2. *Sigui* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. *Llavors,*
   (a) *Si* $l \neq 0, \infty$, *es té que* $\sum a_n < \infty$ *si i només si* $\sum b_n < \infty$
   (b) *Si* $l = 0$ *i* $\sum b_n < \infty$, *es té que* $\sum a_n < \infty$
   (c) *Si* $l = \infty$ *i* $\sum a_n < \infty$, *es té que* $\sum b_n < \infty$

Demostració. Veiem cada apartat per separat.

1. Sigui (S_N) la successió de sumes parcials de $\sum a_n$. Com que la sèrie és de termes positius, cal veure que (S_N) està acotada superiorment. Tenim que

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + C \sum_{n=n_0}^{N} b_n$$

   Ara, tenim que $\left(\sum_{n=n_0}^{N} b_n\right)$ és una successió acotada superiorment, perquè $\sum b_n < \infty$. Per tant, (S_N) està acotada superiorment, i $\sum a_n < \infty$.

2. Suposem que existeix $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$:
   (a) Prenem $\varepsilon > 0$ prou petit de manera que $l - \varepsilon > 0$ (podem perquè $l > 0$). Sabem que existeix un n_0 tal que $|a_n/b_n - l| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Això vol dir que $l - \varepsilon < a_n/b_n < l + \varepsilon$. Ara, $b_n(l - \varepsilon) < a_n < b_n(l + \varepsilon)$. Si suposem que $\sum b_n < \infty$, apliquem l'apartat 1 considerant $C = l + \varepsilon$, i ens queda $\sum a_n < \infty$. Es procedeix de manera semblant suposant $\sum a_n < \infty$.

(b) Suposem que $l = 0$. Donat $\varepsilon > 0$, existeix n_0 tal que $|a_n/b_n| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. En particular, $a_n < \varepsilon b_n$. Apliquem de nou l'apartat 1 amb $C = \varepsilon$.

(c) Si $l = \infty$, vol dir que $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 0$. Apliquem l'apartat anterior intercanviant les successions.

$\square$

Exemple 1.2.3. Volem veure si la sèrie

$$S = \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + 3n^2 - 1}}$$

és convergent. Sigui $(a_n) = 1/\sqrt[3]{n^4 + 3n^2 - 1}$. Voldríem prendre uns (b_n) amb els quals comparar (a_n) (per tant, semblants) i suficientment fàcils per veure si donen una sèrie convergent. Prenem $(b_n) = 1/\sqrt[3]{n^4}$. Calculem el límit del quocient entre les dues successions,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4 + 3n^2 - 1}} = 1$$

A més, $\sum 1/\sqrt[3]{n^4}$ és convergent perquè és una sèrie harmònica amb $\alpha = 4/3$. Pel criteri de comparació, S és convergent.

Exemple 1.2.4. El criteri de comparació pot arribar a ser més versàtil del que sembla. Sigui (a_n) una successió de termes positius, creixent amb $(a_n) \to \infty$. Demostrarem que

$$\sum \left(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

sempre és divergent.

Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\lim_{n\to\infty} a_{n-1}/a_n = 1$. Si no fos el cas, el terme general de la sèrie no tendiria a zero, i seria divergent trivialment. Recordem que si $x \to 1$, llavors

$$\log x \sim x - 1$$

Com que a_n és creixent, es té que $1 - a_{n-1}/a_n$, i també $-\log(a_{n-1}/a_n)$ són positives per a tot n. Llavors, podem fer la següent comparació

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}}{-\log\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)} = 1$$

Per tant, $\sum (1 - a_{n-1}/a_n) < \infty$ si i només si $\sum \log(a_n/a_{n-1}) < \infty$. Ara bé, si considerem una suma parcial de la sèrie de logaritmes, tenim

$$\sum_{n=2}^{N} \log\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \log\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \log\left(\frac{a_N}{a_1}\right)$$

Com que $(a_n) \longrightarrow \infty$ quan n es fa gran, es té que

$$\sum \log\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{N\to\infty} \log\left(\frac{a_N}{a_1}\right) = \infty$$

Per tant, queda que la sèrie original és divergent.

Teorema 1.2.5. (Criteri de l'arrel). *Sigui* $(a_n) \geq 0$. *Sigui* $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Llavors, si* $l < 1$, $\sum a_n < \infty$. *Si* $l > 1$, $\sum a_n = \infty$.

Demostració. Com que $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, donat $\varepsilon > 0$, tenim que $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ per n suficientment gran.

Ara, si $l < 1$, podem prendre ε suficientment petit de manera que $l + \varepsilon < 1$. Per tant, $a_n < (l+\varepsilon)^n$, sempre que n sigui prou gran. A més, observem que $\sum (l+\varepsilon)^n < \infty$, perquè és una suma geomètrica de raó $l + \varepsilon \in (-1, 1)$. Per l'apartat (1) del criteri de comparació, prenent $C = 1$, $\sum a_n < \infty$.

D'altra banda, si $l > 1$, podem prendre ε suficientment petit de manera que $l - \varepsilon > 1$. Per tant, $a_n > (l-\varepsilon)^n$, sempre que n sigui prou gran. A més, observem que $(l-\varepsilon)^n$ tendeix a infinit quan $n \to \infty$, i per tant a_n també. Llavors, la sèrie $\sum a_n$ és divergent. □

Exemple 1.2.6. És útil aplicar el criteri de l'arrel quan la sèrie involucra potències $n-$èssimes. Per exemple, veiem que li passa a la sèrie $\sum n^b a^n$ en funció dels valors de $a, b \geq 0$. Calculem $\sqrt[n]{n^b a^n}$...

$$\sqrt[n]{n^b a^n} = \sqrt[n]{n^b}\,\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^b a \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Pel criteri de l'arrel, si $a > 1$, la sèrie és divergent i si $a < 1$, la sèrie és convergent. Observem que el criteri no ens diu res pel cas $a = 1$, però amb aquesta sèrie en particular, és trivial que $\sum n^b$ és divergent.

Teorema 1.2.7. (Criteri del quocient). *Sigui* $(a_n) \geq 0$. *Sigui* $l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. *Llavors, si* $l < 1$, $\sum a_n < \infty$. *Si* $l > 1$, $\sum a_n = \infty$.

Demostració. Com que $l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$, donat $\varepsilon > 0$, tenim que $l - \varepsilon < a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon$ per n suficientment gran.

Ara, si $l < 1$, podem prendre ε suficientment petit de manera que $l + \varepsilon < 1$. Per tant,

$$a_{n+1} < (l+\varepsilon)\, a_n \leq (l+\varepsilon)^2 a_{n-1} \leq \cdots \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0+1} a_{n_0}$$

sempre que $n \geq n_0$. A més, observem que $\sum (l+\varepsilon)^{n-n_0+1} < \infty$, perquè és una suma geomètrica de raó $l + \varepsilon \in (-1, 1)$. Per l'apartat (1) criteri de comparació, prenent $C = a_{n_0}$, $\sum a_n < \infty$.

La demostració és similar en el cas $l > 1$. □

Exemple 1.2.8. El criteri del quocient és útil quan la sèrie involucra factorials. Per exemple, estudiem la convergència de

$$\sum \frac{a^n n!}{n^n}$$

segons els valors de $a > 0$. Considerem

$$\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a^{n+1}(n+1)!n^n}{a^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$$

Per tant, si $a > e$, la sèrie és divergent, mentre que si $a < e$, la sèrie és convergent. Què passa quan $a = e$? En aquest cas, veure-ho directament amb la sèrie és complicat. La següent eina pot donar la solució en algunes ocasions.

Teorema 1.2.9. (Criteri de Raabe). *Sigui* $(a_n) \geq 0$. *Sigui*

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Llavors, si $l > 1$, $\sum a_n < \infty$. *Si* $l < 1$, $\sum a_n = \infty$.

Demostració. Com que l és el límit, donat $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que

$$l - \varepsilon < n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < l + \varepsilon$$

si $n \geq n_0$. Si $l > 1$, prenem ε prou petit de manera que $l - \varepsilon > 1$. Ara,

$$\frac{l-\varepsilon}{n} < 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\frac{l-\varepsilon}{n} - 1 < -\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$a_{n+1} < a_n\left(1 - \frac{l-\varepsilon}{n}\right)$$

Tenint en compte que

$$1 - \frac{c}{x} \leq \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^c, \; c, x \geq 0$$

Ens queda

$$a_{n+1} < a_n\left(1 - \frac{l-\varepsilon}{n}\right) \leq a_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{l-\varepsilon} = a_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{l-\varepsilon}$$

Podem aplicar aquesta desigualtat de manera recursiva fins n_0, quedant

$$a_{n+1} < a_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{l-\varepsilon} < a_{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1}\right)^{l-\varepsilon} < \cdots < a_{n_0}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1}\right)^{l-\varepsilon}$$

$$a_{n+1} < a_{n_0}\left(\frac{n_0}{n+1}\right)^{l-\varepsilon} = C\frac{1}{(n+1)^{l-\varepsilon}}$$

amb $l - \varepsilon > 1$. Pel criteri de comparació, $\sum a_n < \infty$.

D'altra banda, si $l < 1$, prenem ε prou petit de manera que $l + \varepsilon < 1$. Llavors,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < l + \varepsilon \Longrightarrow a_{n+1} > a_n\left(1 - \frac{l+\varepsilon}{n}\right)$$

Com que $l + \varepsilon < 1$, tenim que

$$a_{n+1} > a_n\left(1 - \frac{l+\varepsilon}{n}\right) > a_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) > a_n\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Aplicant la desigualtat reiteradament fins n_0, ens queda

$$a_{n+1} > a_{n_0}\frac{n_0 - 1}{n} = C\frac{1}{n}$$

Pel criteri de comparació, $\sum a_n = \infty$. $\square$

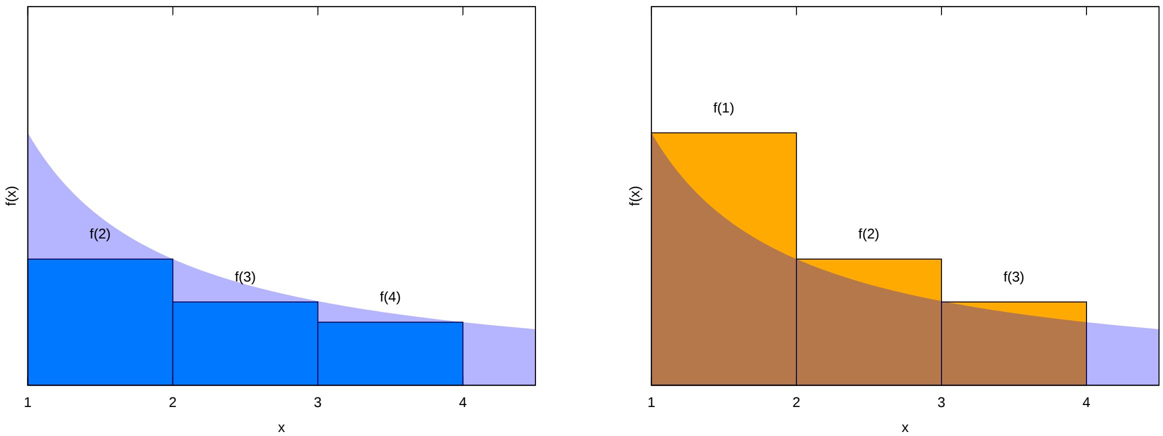
Exemple 1.2.10. Apliquem el criteri de Raabe per resoldre el cas $a = e$ del exemple anterior. Tenim que

$$n\left(1 - e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = n\left(\frac{(n+1)^n - en^n}{(n+1)^n}\right) \sim \frac{n^{n+1}}{n^n} \xrightarrow{x\to\infty} \infty > 1$$

Pel criteri de Raabe, quan $a = e$ es té que $\sum(e^n\ n!)/(n^n) = \infty$.

Teorema 1.2.11. (Criteri integral). *Sigui $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ una funció decreixent. Llavors, $\sum f(n) < \infty$ si i només si $\exists\, C > 0$ tal que $\int_1^n f(x)dx \leq C$ per a tot n.*

Demostració. La demostració surt amb uns dibuixets:



Per una banda, si $\sum f(n) < \infty$, fixem-nos que dels rectangles taronges deduïm

$$\int_1^N f(x)dx \leq f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \cdots f(N-1)\cdot 1 = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Això es cert perquè la funció és decreixent. Ara, la suma parcial de $f(n)$ està acotada perquè la sèrie és convergent. Per tant, existeix $C > 0$ tal que $\int_1^N f(x)dx \leq C$.

Recíprocament, si $\int_1^n f(x)dx \leq C$ per algun $C > 0$, llavors dels rectangles blaus deduïm

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots f(N) \leq f(1) + \int_1^N f(x)dx \leq 1 + C$$

Això també és cert gràcies a que la funció és decreixent. Per tant, la successió de sumes parcials és acotada, i com que la sèrie és de termes positius, té límit. □

Exemple 1.2.12. Podem estudiar la convergència de la sèrie harmònica $\sum 1/n^\alpha$, segons els valors de $\alpha > 0$, amb el criteri integral. Considerem $f(x) = 1/x^\alpha$, integrable en l'interval de definició $[1,\infty)$. Calculant la seva integral, tenim que

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \ln|N| \text{ si } \alpha = 1 \\ \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, clarament la integral no està acotada per tot N, i la sèrie és divergent. Això també és cert si $\alpha < 1$, fixant-nos en el segon cas. Ara bé, si $\alpha > 1$, la integral està acotada per $1/(\alpha - 1)$, i per tant la sèrie és convergent.

Teorema 1.2.13. (Criteri de condensació). *Sigui $(a_n) \geq 0$ decreixent. Llavors, $\sum a_n < \infty$ si i només si $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$.*

Demostració. Aquest criteri es basa en la idea emprada en l'exemple 1.1.6. Per una banda, suposem que $\sum a_n < \infty$. Demostrarem que la successió de sumes parcials de $\sum 2^n a_{2^n}$ és acotada. Tenim que

$$\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^N a_{2^N}$$

Com que (a_n) és decreixent,

$$\begin{aligned} &2a_2+4a_4+8a_8+\cdots+2^N a_{2^N} \leq (a_1+a_2)+2(a_3+a_4) \\ &+2(a_5+a_6+a_7+a_8)+2(a_9+a_{10}+\cdots a_{16})+\cdots+2(a_{2^{N-1}+1}+\cdots a_{2^N}) \\ &=2\sum_{n=1}^{N} a_{2^n}-a_1-a_2 \leq C \end{aligned}$$

Per algun $C>0$, perquè $\sum a_n$ té límit.

D'altra banda, si $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$, llavors

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_N \leq a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^M a_{2^M} = a_1+\sum_{n=1}^{M} 2^n a_{2^n}$$

Prenent un M suficientment gran, i gràcies a que (a_n) és decreixent. Llavors, $\sum_{n=1}^{N} a_n$ també està acotada. □

Exemple 1.2.14. El criteri de condensació és útil quan hem de tractar amb logaritmes, ja que aquestos desapareixen al prendre n que són potències de 2. Considerem, per exemple,

$$S_0=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$$

És clar que $(a_n)\geq 0$ i decreixent. Per tant, podem prendre la sèrie

$$S'=\sum_{n\geq 2} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha\left(\log\left(2^n\right)\right)^\beta} = \frac{1}{(\log 2)^\beta}\sum_{n\geq 2}\frac{2^{(1-\alpha)n}}{n^\beta}$$

Ara, podem aplicar el criteri de l'arrel, de manera que

$$\sqrt[n]{\frac{2^{(1-\alpha)n}}{n^\beta}} = \frac{2^{1-\alpha}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\beta} \xrightarrow{n\to\infty} 2^{1-\alpha}$$

Si $\alpha>1$, $2^{1-\alpha}<1$, i pel criteri de l'arrel, la sèrie S' és convergent, que és el mateix que dir, degut al criteri de condensació, que S_0 és convergent. Si $\alpha<1$, per raons similars acaba quedant que S_0 és divergent. Si $\alpha=1$, llavors S' és una sèrie harmònica en β. Per tant, si $\beta>1$, S' és convergent, i S_0 també, mentre que si $\beta\leq 1$, S' és divergent, donant S_0 divergent.

Teorema 1.2.15. (Criteri logarítmic). *Sigui* $(a_n)\geq 0$. *Sigui*

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n}$$

Llavors, si $l>1$, $\sum a_n<\infty$. *Si* $l<1$, $\sum a_n=\infty$.

Demostració. Com que l és el límit, vol dir que donat $\varepsilon>0$ existeix n_0 tal que

$$l-\varepsilon<\frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n}<l+\varepsilon$$

si $n\geq n_0$. Suposem que $l>1$. Llavors, podem prendre ε prou petit de manera que $l-\varepsilon>1$. Tenim que

$$(\log n)(l-\varepsilon)<\log\frac{1}{a_n}\Longrightarrow \log\frac{1}{n^{l-\varepsilon}}>\log a_n \Longrightarrow \frac{1}{n^{l-\varepsilon}}>a_n$$

si $n\geq n_0$. Pel criteri de comparació, $\sum a_n<\infty$. El cas $l<1$ es fa de manera similar. □

1.3 | Sèries alternades

Entrem en un tipus de sèries noves, més semblants a una sèrie arbitraria, però que encara guarden una certa regularitat de la que ens podem aprofitar.

Definició 1.3.1. *Una* sèrie alternada *és una sèrie de la forma* $\sum(-1)^n a_n$, *amb* $(a_n) \geq 0$.

No es poden aplicar els criteris de la secció anterior per estudiar la convergència d'aquest tipus de sèries, perquè tots es basen en la hipòtesi de que els termes de la sèrie han de ser positius. En canvi, hi ha una condició suficient per determinar quan les sèries alternades són convergents.

Teorema 1.3.2. (Criteri de Leibnitz). *Sigui* $(a_n) \geq 0$, *decreixent, amb* $(a_n) \longrightarrow 0$. *Llavors,* $\sum(-1)^n a_n$ *és convergent.*

Demostració. Veurem la condició de Cauchy en la successió de sumes parcials. Si em dones $\varepsilon > 0$, llavors busquem n_0 tal que

$$\left|\sum_{n=N}^{M}(-1)^n a_n\right| < \varepsilon$$

si $n \geq n_0$. Tenim que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N}^{M}(-1)^n a_n\right| &= \left|(-1)^N a_N + (-1)^{N+1}a_{N+1} + \cdots + (-1)^M a_M\right| \\ &= \left|a_N - a_{N+1} + a_{N+2} - a_{N+3} + \cdots + (-1)^{M-N}a_M\right|\end{aligned}$$

Fixem-nos en que cada parella $a_i - a_{i+1} \geq 0$ perquè la successió és decreixent. A més, si l'últim terme és negatiu, està aparellat, i si no te parella és positiu. Per tant, sempre podem treure el valor absolut

$$\left|a_N - a_{N+1} + a_{N+2} - a_{N+3} + \cdots + (-1)^{M-N}a_M\right| = a_N - a_{N+1} + a_{N+2} - a_{N+3} + \cdots + (-1)^{M-N}a_M$$

Ara, fixem-nos que les parelles $-a_i + a_{i+1}$ són totes negatives. Novament, si l'últim té parella, llavors sumen en negatiu, i si no en té, és negatiu. Per tant, sempre podem dir que

$$a_N - a_{N+1} + a_{N+2} - a_{N+3} + \cdots + (-1)^{M-N}a_M \leq a_N$$

Ara, sabem que $(a_n) \to 0$. Per tant, existeix n_0 tal que $a_N < \varepsilon$ si $N \geq n_0$. Prenent el mateix n_0, tenim que $\left|\sum_{n=N}^{M}(-1)^n a_n\right| < \varepsilon$ si $N, M \geq n_0$. □

Exemple 1.3.3. Considerem $\sum(-1)^n 1/n^\alpha$, per $\alpha \in \mathbb{R}$, que podem pensar com la *sèrie harmònica alternada*. Si $\alpha > 0$, pel criteri de Leibnitz es té que la sèrie és convergent. Si $\alpha \leq 0$, no es compleix la condició necessària tal que el terme general tendeixi a 0.

Fem notar la diferència entre aquestes sèries harmòniques alternades i la sèrie harmònica de l'exemple 1.1.6: mentre que en aquell cas, la convergència només la teníem per $\alpha > 1$, aquí podem prendre qualsevol $\alpha > 0$, i la sèrie continua sent convergent. Aquest fet posa de manifest que les cancel·lacions entre els termes de la sèrie juguen un paper molt important per donar convergència a determinades sèries.

1.4 | Convergència absoluta de sèries. Criteris de Dirichlet i Abel

Per sèries donades per una successió arbitrària, l'estudi de la convergència pot no ser gens trivial. Tot i així, també hi ha eines que ens ajuden en aquesta feina. Per exemple, és natural pensar que si una sèrie de termes positius convergeix, la mateixa sèrie amb signes canviants també convergirà, perquè la suma encara serà més petita que en el cas en que tots els termes són positius. També és clar que si els termes de la sèrie són de la forma $a_n b_n$, on $(a_n), (b_n)$ són successions reals qualssevol, depenent del caràcter d'aquestes successions es pot intuir com es comportarà la suma.

Definició 1.4.1. *Una sèrie* $\sum a_n$ *és* absolutament convergent *si* $\sum |a_n|$ *és convergent.*

Proposició 1.4.2. *Sigui* $\sum a_n$ *absolutament convergent. Llavors,* $\sum a_n$ *és convergent.*

Demostració. Veurem que $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ és de Cauchy. Tenim que, donat $\varepsilon > 0$,

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n| < \varepsilon$$

per $N, M \geq n_0$, gràcies a la hipòtesi que $\sum |a_n|$ és convergent. $\square$

Teorema 1.4.3. (Fórmula de sumació parcial d'Abel). *Siguin* $(x_n), (y_n)$ *successions de nombres reals. Llavors,*

$$\sum_{n=N}^{M} x_n(y_{n+1} - y_n) = x_{M+1}y_{M+1} - x_N y_N - \sum_{n=N}^{M} y_{n+1}(x_{n+1} - x_n)$$

Demostració. Tenim que

$$\sum_{n=N}^{M} (x_n(y_{n+1} - y_n) + y_{n+1}(x_{n+1} - x_n)) = \sum_{n=N}^{M} (x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n) = x_{M+1}y_{M+1} - x_N y_N$$

$\square$

Fem observar que aquesta expressió es pot entendre com la versió discreta de la fórmula d'integració per parts, si pensem la "derivada" d'una successió com la distància entre dos termes d'aquesta, i la "integral" d'una successió entre dos punts com la suma de tots els termes que hi ha enmig. En el nostre cas, la successió a "derivar" és x_n, i la successió a "integrar" és $y_{n+1} - y_n$. A continuació, la aplicarem aquesta fórmula per demostrar els següents criteris.

Teorema 1.4.4 (**Criteri de Dirichlet**). *Siguin* $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$. *Suposem que:*

- *Existeix* $C > 0$ *tal que* $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq C$ *per a tot* N.
- (b_n) *és monòtona i* $(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Llavors, $\sum a_n b_n$ *és convergent.*

Demostració. Volem veure que la successió de sumes parcials $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right)$ és de Cauchy. No ens interessa prendre la desigualtat triangular en $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right|$, perquè gràcies a que (a_n) i (b_n) són successions amb termes de signe arbitrari, poden haver cancel·lacions entre termes que ens beneficien, i que es poden perdre al prendre valors absoluts. Al cap i a la fi, no sabem si la sèrie és absolutament convergent. Per tant, prendrem (S_N) la successió de sumes parcials de (a_n), i tenim que

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=N}^{M} (S_n - S_{n-1}) b_n\right|$$

Donada la fórmula de sumació parcial d'Abel,

$$\sum_{n=N}^{M} x_n(y_{n+1}-y_n) = x_{M+1}y_{M+1} - x_N y_N - \sum_{n=N}^{M} y_{n+1}(x_{n+1}-x_n)$$

es té que

$$\sum_{n=N}^{M} y_{n+1}(x_{n+1}-x_n) = x_{M+1}y_{M+1} - x_N y_N - \sum_{n=N}^{M} x_n(y_{n+1}-y_n)$$

i prenent $x_{n+1} = S_n$ i $y_{n+1} = b_n$, ens queda

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N}^{M}(S_n - S_{n-1})b_n\right| &= \left|S_M b_M - S_{N-1}b_{N-1} - \sum_{n=N}^{M} S_{n-1}(b_n - b_{n-1})\right| \\ &\le |S_M||b_M| + |S_{N-1}||b_{N-1}| + \sum_{n=N}^{M}|S_{n-1}||b_n - b_{n-1}|\end{aligned}$$

Recordem que S_n està acotada per C. Per tant

$$|S_M||b_M| + |S_{N-1}||b_{N-1}| + \sum_{n=N}^{M}|S_{n-1}||b_n - b_{n-1}| \le C|b_M| + C|b_{N-1}| + C\sum_{n=N}^{M}|b_n - b_{n-1}|$$

Observem que, com que (b_n) és monòtona, es compleix $\sum_{n=N}^{M}|b_n - b_{n-1}| = |b_M - b_{N-1}|$ (si és creixent, és indiferent posar el valor absolut, i ens queda una suma telescòpica; si és decreixent, ens queda la mateixa suma telescòpica amb signe negatiu quan traiem el valor absolut, i torna a quedar el mateix al recuperar-lo). Per tant,

$$C|b_M| + C|b_{N-1}| + C\sum_{n=N}^{M}|b_n - b_{n-1}| = C|b_M| + C|b_{N-1}| + C|b_M - b_{N-1}|$$

Com que (b_n) té límit 0 i en particular és de Cauchy, podem prendre $\varepsilon' = \varepsilon/3C$ de manera que tenim n_0 prou gran tal que $|b_n| < \varepsilon'$ i $|b_M - b_N| < \varepsilon'$ si $n, M, N \ge n_0$. Llavors,

$$C|b_M| + C|b_{N-1}| + C|b_M - b_{N-1}| < 3C\varepsilon' = \varepsilon$$

Per tant, $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right)$ és de Cauchy, i la sèrie és convergent. □

Teorema 1.4.5 (Criteri d'Abel). *Siguin $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$. Suposem que:*

- *$\sum a_n$ és convergent.*
- *(b_n) és monòtona i $(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} L$ amb $L \in \mathbb{R}$.*

Llavors, $\sum a_n b_n$ és convergent.

Demostració. La demostració és molt semblant a la del criteri de Dirichlet. Voldrem veure que $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right)$ és de Cauchy, i automàticament $\sum a_n b_n$ serà convergent. De fet, repetim l'argument fins arribar a

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| \le |S_M b_M - S_{N-1}b_{N-1}| + \left|\sum_{n=N}^{M} S_{n-1}(b_n - b_{n-1})\right|$$

Ara tenim

$$\begin{aligned}
&|S_M b_M - S_{N-1} b_{N-1}| + \left| \sum_{n=N}^{M} S_{n-1}(b_n - b_{n-1}) \right| \\
&= |S_M b_M - S_{N-1} b_M + S_{N-1} b_M - S_{N-1} b_{N-1}| + \left| \sum_{n=N}^{M} S_{n-1}(b_n - b_{n-1}) \right| \\
&\le |S_M b_M - S_{N-1} b_M| + |S_{N-1} b_M - S_{N-1} b_{N-1}| + \sum_{n=N}^{M} |S_{n-1}(b_n - b_{n-1})| \\
&= |S_M - S_{N-1}|\, |b_M| + |S_{N-1}|\, |b_M - b_{N-1}| + \sum_{n=N}^{M} |S_{n-1}|\, |b_n - b_{n-1}|
\end{aligned}$$

Com que $\sum a_n$ és convergent, (S_n) té límit, per tant és acotada per algun valor $C_1 > 0$. Com que (b_n) té límit finit, també és està acotada per algun valor $C_2 > 0$. A més, com que és monòtona es té que $\sum_{n=N}^{M} |b_n - b_{n-1}| = |b_M - b_{N-1}|$. Tot plegat,

$$\begin{aligned}
&|S_M - S_{N-1}|\, |b_M| + |S_{N-1}|\, |b_M - b_{N-1}| + \sum_{n=N}^{M} |S_{n-1}|\, |b_n - b_{n-1}| \\
&\le |S_M - S_{N-1}|\, C_2 + C_1\, |b_M - b_{N-1}| + C_1\, |b_M - b_{N-1}| = |S_M - S_{N-1}|\, C_2 + 2C_1\, |b_M - b_{N-1}|
\end{aligned}$$

Novament, com que (S_n) i (b_n) són convergents, en particular són de Cauchy. Per tant, podem prendre $\varepsilon' = \varepsilon/(2C_1 + C_2)$, i trobar un n_0 prou gran de manera que $|S_M - S_{N-1}| < \varepsilon'$ i $|b_M - b_{N-1}| < \varepsilon'$ si $M, N \ge n_0$. Per tant,

$$|S_M - S_{N-1}|\, C_2 + 2C_1\, |b_M - b_{N-1}| \le \varepsilon'(2C_1 + C_2) = \varepsilon$$

i ens queda que $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right)$ és de Cauchy, com volíem. □

Exemple 1.4.6. Veiem que $\sum \sin(nx)/n$ és convergent per a tot $x \in \mathbb{R}$. Pensem en $(a_n) = \sin(nx)$ i $(b_n) = 1/n$. És clar que $(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Per tant, si veiem que existeix $C > 0$ de manera que $\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| \le C$, llavors pel criteri de Dirichlet la sèrie és convergent. Per una banda, si x és un múltiple de π, tenim que $\sin(nx) = 0$ per a tot n, i no hi ha res més a dir. En cas que x no sigui múltiple de π, notem que $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$ és la part imaginària del nombre complex $\sum_{n=1}^{N} e^{inx}$ en virtut de la fórmula d'Euler, i és més petita en valor absolut que el mòdul d'aquest. Llavors,

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin(nx) \right| \le \left| \sum_{n=1}^{N} e^{inx} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| \le \frac{1 + \left|e^{i(N+1)x}\right|}{|1 - e^{ix}|}$$

Ara, $\left|e^{i(N+1)x}\right| = 1$, perquè són nombres imaginaris de la circumferència unitat. Per tant

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin(nx) \right| \le \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = C(x)$$

Aquesta constant és finita perquè e^{ix} no val mai 1, ja que estem considerant que x no és múltiple de π. Finalment, tot i que aquesta constant depèn de x, no depèn de n, i amb això tenim prou, perquè és n el que varia al fer la suma.

1.5 | Reordenació de sèries

Tots sabem que per sumes finites de nombres reals, la propietat commutativa ens permet canviar l'ordre dels sumands sense alterar el resultat. Hom esperaria que això és pogués fer també pels termes d'una sèrie, perquè tot i haver-hi infinits termes, tard o d'hora han d'aparèixer tots.

Definició 1.5.1. *Una* reordenació de $\sum a_n$ *és una sèrie* $\sum a_{\sigma(n)}$ *per alguna aplicació bijectiva* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Com hem dit, la intuïció ens diu que $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$ per a qualsevol σ. El següent exemple, però, ens desmuntarà aquesta creença.

Exemple 1.5.2 (de Dirichlet). Sabem que la sèrie harmònica alternada

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

és convergent pel criteri de Leibnitz. Sigui S el valor d'aquesta suma. Observem que $S > 1/2$, perquè els dos primers termes sumen $1/2$, i la resta de parelles són positives. Si multipliquem tota la sèrie per 2, ens queda que

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots$$

Ara, suposem que podem reordenar-la. Llavors,

$$2S = 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = S$$

La única manera que $2S = S$ és que $S = 0$, però això no es possible perquè sabem que $S > 1/2$. Això vol dir que hem fet algun error pel camí. Potser multiplicar per 2 era il·legal? No, perquè sabem que podem treure factor comú de la sèrie, doncs $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, i $2S = 2\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 2S_N$, on S_N són sumes finites de les quals es pot treure factor comú. Per tant, l'error ha estat reordenar la sèrie.

Vol dir això que sempre que reordenem una sèrie obtindrem coses diferents? No necessàriament. Fixem-nos que el Hat Trick de Dirichlet ha estat prendre una sèrie on hi ha signes positius i negatius, de manera que al reordenar es fan cancel·lacions que recuperen la sèrie original. Potser si hagués considerat una sèrie de termes positius, no hagués aconseguit arribar a contradiccions. De fet, veiem que no ho hagués aconseguit mai.

Definició 1.5.3. *Si* $x \in \mathbb{R}$*, definim la* part positiva de x *com*

$$x^+ = \begin{cases} x \ \textit{si} \ x \geq 0 \\ 0 \ \textit{si} \ x < 0 \end{cases}$$

Respectivament, definim la part negativa de x *com*

$$x^- = \begin{cases} 0 \ \textit{si} \ x \geq 0 \\ -x \ \textit{si} \ x < 0 \end{cases}$$

Notem que donat $x \in \mathbb{R}$, podem escriure $x = x^+ - x^-$ i $|x| = x^+ + x^-$.

Proposició 1.5.4. *Sigui* $\sum a_n$ *absolutament convergent. Llavors, per a tot* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *bijectiva, la sèrie reordenada* $\sum a_{\sigma(n)}$ *és absolutament convergent i* $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$.

Demostració. Veiem que $\sum a_{\sigma(n)}$ és absolutament convergent. Això vol dir que hem de veure que la successió de sumes parcials $\left(\sum_{n=1}^{N} \left|a_{\sigma(n)}\right|\right)$ és acotada, perquè és de termes positius. Com que $\sum a_n$ és absolutament convergent, existeix $S = \sum |a_n|$. A més, $\sum_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}|$ pren uns quants termes de la successió $(|a_n|)$, per tant ha de ser més petita que sumar-los tots fins al que tingui l'index més gran, perquè tots són positius. És a dir, sigui $m(N) = \max\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(N)\}$. Llavors,

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^{m(N)} |a_n| \leq S$$

Per tant, la successió de sumes parcials de la sèrie reordenada és acotada, de manera que $\sum a_{\sigma(n)}$ és absolutament convergent.

Veiem que la suma és, de fet, la mateixa. Escrivim, d'acord a la definició anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$$

Per començar, notem que $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum a_{\sigma(n)}^+$ i $\sum a_{\sigma(n)}^-$ són sèries convergents. Efectivament, com que $\sum a_n$ i $\sum a_{\sigma(n)}$ són absolutament convergents, es té que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- \in \mathbb{R}$$

i com que $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum a_{\sigma(n)}^+$ i $\sum a_{\sigma(n)}^-$ són sèries de termes positius per definició, han de prendre un valor finit.

Ara, el que provarem serà que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$$

Veiem el primer cas (l'altre es fa igual). Si $\sum a_n^+ = S_1$ i$\sum a_{\sigma(n)}^+ = S_2$, prenem una parcial $\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}^+$, i tornem a considerar $m(N)$, de manera que

$$\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}^+ \leq \sum_{n=1}^{m(N)} a_n^+ \leq S_1$$

i això voldria dir que $S_2 \leq S_1$. Però ara podríem pensar $\sum a_n^+$ com una reordenada de $\sum a_{\sigma(n)}^+$, i repetint l'argument trobaríem que $S_1 \leq S_2$. Només pot ser, llavors, que $S_1 = S_2$. $\square$

Veiem a continuació que la convergència absoluta és, de fet, molt important per fer que qualsevol reordenada sigui convergent. De fet, acabarem veient que totes dues condicions són equivalents.

Teorema 1.5.5 (Teorema de Riemann). *Sigui $\sum a_n$ una sèrie convergent, però no absolutament convergent. Llavors, per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$ existeix $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum a_{\sigma(n)}$ és convergent i $\sum a_{\sigma(n)} = \alpha$.*

Demostració. Tenim que $\sum a_n$ és convergent, però no absolutament convergent. Això vol dir que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^+ - \sum_{n=1}^{N} a_n^- = s \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^+ + \sum_{n=1}^{N} a_n^- = \infty$$

Per tant, $\sum_{n=1}^{N} a_n^+, \sum_{n=1}^{N} a_n^- \xrightarrow{N\to\infty} \infty$. Fem notar també, però, que $a_n^+, a_n^- \longrightarrow 0$ quan n es fa gran, perquè $a_n \longrightarrow 0$ al ser $\sum a_n$ convergent.

Ara, prenem $\alpha \in \mathbb{R}$. Volem apropar-nos a α, i ho farem per excés i per defecte. Sigui $n_1 \in \mathbb{N}$ el natural més petit tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ > \alpha$$

Observem que amb això és compleix

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ > \alpha \geq \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n^+$$

de manera que

$$0 < \sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \alpha \leq a_{n_1}^+$$

Ara, sigui $m_1 \in \mathbb{N}$ el natural més petit tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- < \alpha$$

Novament, tenim que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- < \alpha \leq \sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1-1} a_n^-$$

i podem escriure

$$0 < \alpha - \left(\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- \right) \leq a_{m_1}^-$$

Sabem que podem prendre aquest m_1, perquè $\sum a_n^- = \infty$.

Repetim el procés, prenent n_2 el mínim natural més gran que n_1 tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n^+ > \alpha$$

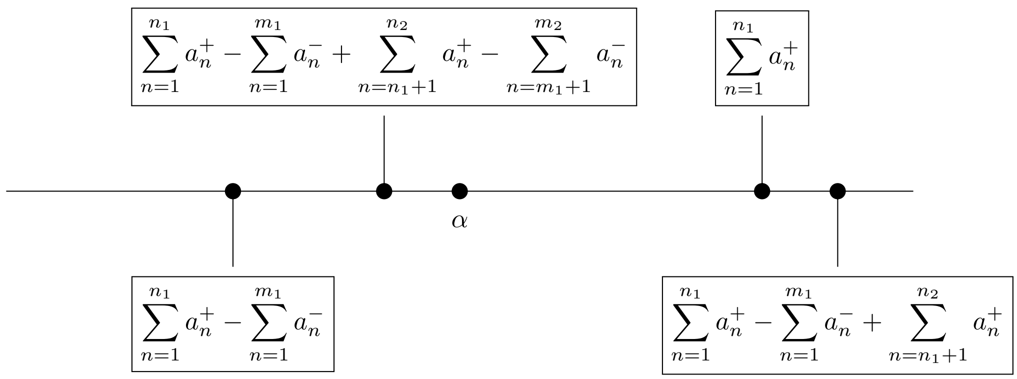
i m_2 el mínim natural més gran que m_1 tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n^+ - \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n^- < \alpha$$

Per ambdós casos, es compleix que

$$0 < \left(\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n^+ \right) - \alpha \leq a_{n_2}^+$$

$$0 < \alpha - \left(\sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n^+ - \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n^- \right) \leq a_{m_2}^-$$



En general, estem construint unes successions

$$P_t = \sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- + \cdots + \sum_{n=n_{t-1}+1}^{n_t} a_n^+$$

$$Q_t = \sum_{n=1}^{n_1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{m_1} a_n^- + \cdots + \sum_{n=n_{t-1}+1}^{n_t} a_n^+ - \sum_{n=m_{t-1}+1}^{m_t} a_n^-$$

Tals que

$$Q_t < \alpha < P_t$$

i que

$$0 < P_t - \alpha < a_{n_t}^+$$

$$0 < \alpha - Q_t < a_{m_t}^-$$

Per a tot $t \in \mathbb{N}$. Aquestes successions són les que configuren la sèrie reordenada que buscàvem, i és clar que convergeixen a α per les dues condicions anteriors al notar que $a_{n_t}^+, a_{m_t}^- \longrightarrow 0$. □

Teorema 1.5.6. *Una sèrie $\sum a_n$ és absolutament convergent si i només si qualsevol reordenada és convergent i pren el mateix valor que $\sum a_n$.*

Demostració. La implicació directa surt de la proposició 1.5.4 (la reordenada és absolutament convergent, en particular convergent, i sabem que pren el mateix valor). El recíproc és conseqüència del teorema de Riemann (si no fos convergent, o només fos convergent però no absolutament convergent, hi hauria reordenades divergents o convergents cap a qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$). □

Capítol 2

Successions i sèries de funcions

Quan parlem d'una successió de números reals, el que fem és prendre, de forma ordenada, un conjunt numerable de valors reals. De manera semblant, però, podem agafar, també de forma ordenada, un conjunt numerable de funcions definides en la recta real. Una manera de fer-ho seria, per exemple, prenent una funció $f(x, y)$ de dues variables, i restringint la segona a valors naturals. El que s'obté, doncs, és una successió de funcions.

S'ha introduït també, en el primer capítol, el concepte de sèrie numèrica, que es defineix a partir d'una successió de números reals, prenent els seus termes i sumant-los. Ningú ens restringeix, ara que sabem que podem parlar de successions de funcions, de fer el mateix amb aquestes, obtenint el que es coneix com a sèrie de funcions.

A més, així com amb una successió de números reals, podem donar el concepte de límit, seria interessant també poder donar una idea de "semblança" o de "funció límit" al parlar de successions de funcions.

En aquest capítol, intentem formalitzar tots aquests conceptes dels que estem parlant. Començarem estudiant les successions de funcions, i descobrirem, en la recerca de formalitzar la "semblança" entre funcions, les nocions de convergència puntual i convergència uniforme. Tota la teoria que desenvolupem al parlar de successions ens servirà després per parlar de sèries de funcions, amb els afegits del criteri M de Weierstrass i el criteri de Dirichlet per a la convergència uniforme d'aquestes, i acabarem posant en pràctica aquests conceptes amb una interessant aplicació de les sèries de funcions: definir funcions contínues no derivables enlloc.

Seguidament, profunditzarem en un tipus de sèries més específic però de gran interès, anomenades sèries de potències: una mena de polinomis de grau infinit, que tenen la particularitat de convergir, com a molt, sobre intervals (de fet, discs, pensats com a polinomis en variable complexa).

Finalment, demostrarem el teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass: donada una funció contínua definida en un interval tancat, es poden trobar polinomis arbitràriament semblants a la funció, per estranya que aquesta sigui.

2.1 | Successions de funcions

Definició 2.1.1. *Sigui I un interval de $\mathbb{R}$. Un conjunt*

$$(f_n(x)) = \{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$$

és una successió de funcions reals *si $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció de variable real. En aquesta situació, diem que la successió $(f_n(x))$ està definida en I.*

En tot el capítol, les successions sempre seran de funcions reals, i les anomenarem simplement successions de funcions. També les denotarem simplement com (f_n): quan sigui necessari denotar la dependència respecte la variable x, es farà explícitament.

Com hem dit, donada una funció, hom pot imaginar un conjunt de funcions que s'apropin a aquesta. La qüestió aquí està en definir que volem dir amb "apropar-se", i potser la manera més natural de fer-ho és en mirar si la successió s'assembla punt a punt amb la funció donada.

Definició 2.1.2. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Sigui $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diem que (f_n)* convergeix puntualment a f en I *si per a tot $x \in I$, es té que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

És a dir, fixat un x de l'interval, mirem si la successió de nombres reals $(f_n(x))$ s'apropa al valor $f(x)$. Tot i que aquesta és la definició més intuïtiva que un podria donar, també és la més catastròfica.

Exemple 2.1.3. Considerem la successió (f_n) formada per les funcions $f_n(x) = x^n$, prenent $x \in [0, 1]$.

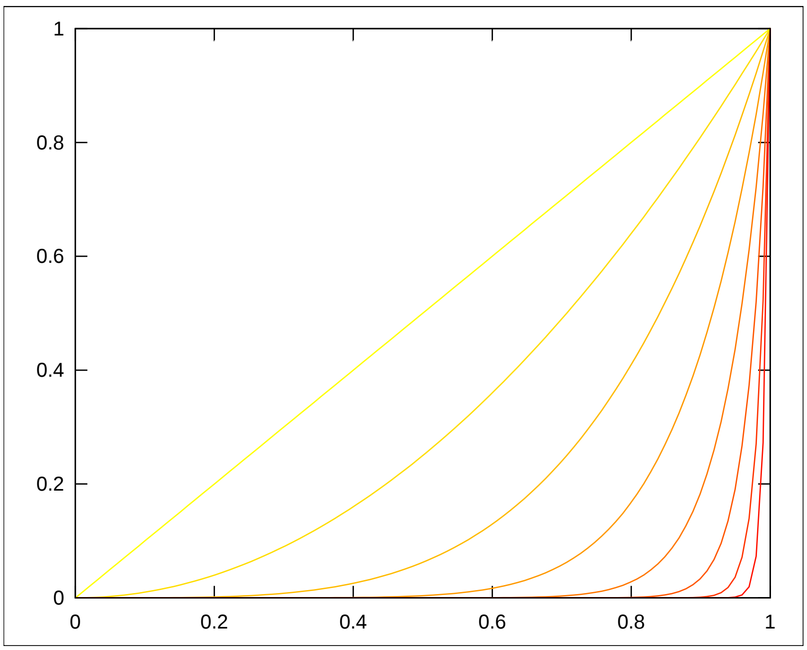


Figura 1: Funcions $f_n(x) = x^n$, representades de groc a vermell a mesura que n augmenta.

Fixem x, i calculem el límit de la successió per veure la convergència puntual.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1) \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Observem que, tot i que (f_n) sigui una successió de funcions continues, infinitament derivables, la funció a la que convergeix puntualment no ho és pas.

Com a segon cas problemàtic, considerem la successió (g_n) formada per les funcions

$$g_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \setminus \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \end{cases}$$

per $n \geq 2$.

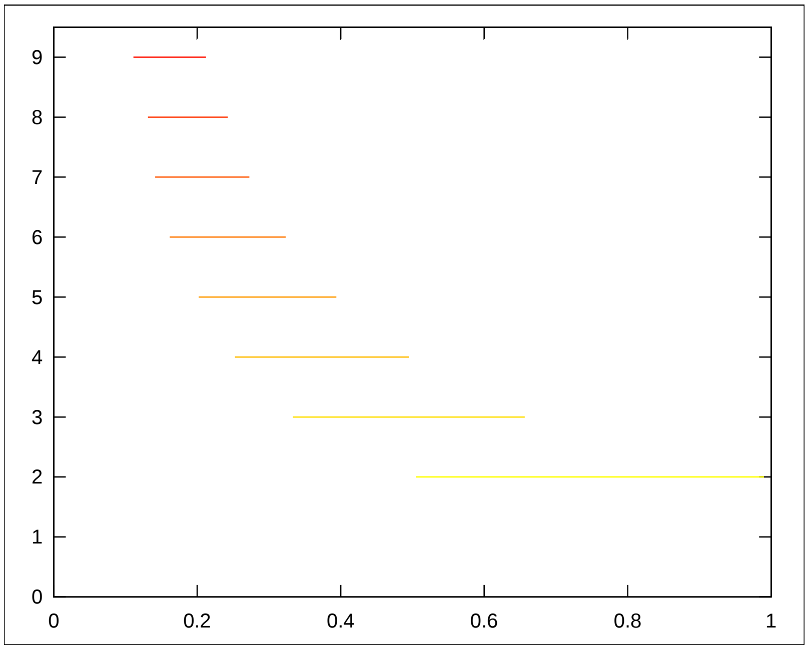


Figura 2: Funcions $g_n(x)$, representades de groc a vermell a mesura que n augmenta.

Fixem x, i calculem el límit de la successió per veure la convergència puntual. Clarament, per a qualsevol x, existeix n tal que $x \notin [1/n, 2/n]$. Per tant, (g_n) convergeix puntualment a la funció 0. Ara bé, si integrem les funcions de la successió, tenim que

$$\int_0^1 g_n(x)dx = \frac{1}{n}n = 1$$

per a qualsevol n. En canvi, $\int_0^1 0 \; dx = 0$.

Amb aquests dos exemples hem vist que, en general, la convergència puntual no preserva propietats importants de la successió de funcions. Volem doncs una definició millor, que no doni resultats tan caòtics.

Definició 2.1.4. *Sigui* (f_n) *una successió de funcions definides en un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$*. Sigui* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*. Diem que* (f_n) convergeix uniformement a f en I *si per a tot* $\varepsilon > 0$ *existeix* n_0 *tal que*

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

si $n \geq n_0$*.*

Observem que
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$
per a tot x. Per tant, podem reescriure la condició de convergència puntual com fer que $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ per a tot $x \in I$ si $n \geq n_0$. Però quina diferència hi ha entre això i la convergència puntual? Al cap i a la fi, donat x, que $f_n(x)$ tendeixi a $f(x)$ vol dir que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si n es prou gran. Si hom ho pensa una mica, veurà que en la definició de convergència puntual, n_0 depèn de x, perquè prenem el límit punt a punt. En canvi, quan parlem de convergència uniforme, podem escollir un n_0 vàlid per a tota x.

Gràficament, podem entendre aquest concepte de la següent manera: donat $\varepsilon > 0$, si $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ per a tot $x \in I$, prenen n prou gran, llavors $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. Això vol dir que, si n és prou gran, les funcions (f_n) es mouen en una franja d'amplada ε respecte la funció f.

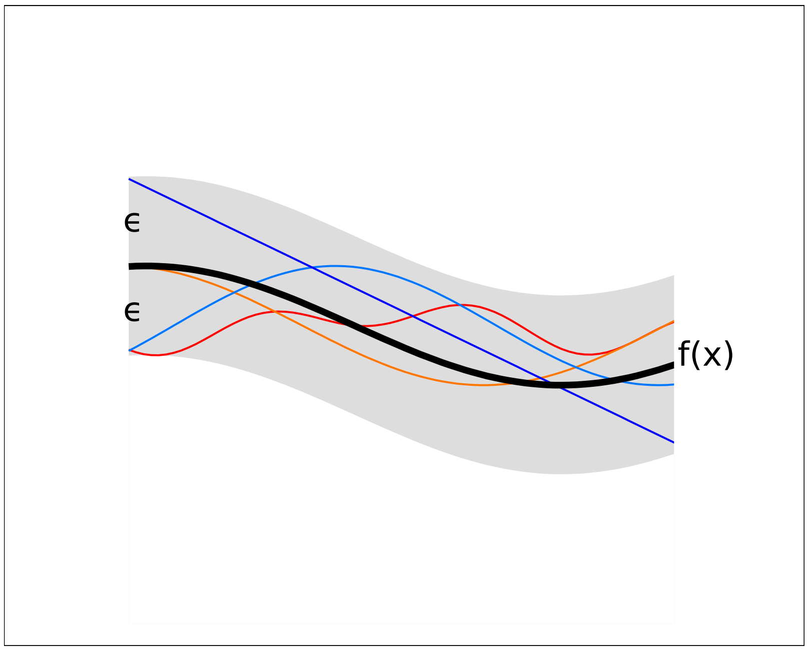


Figura 3: Convergència uniforme de funcions a una funció f.

Aquestes funcions no tenen perquè semblar-se gaire a f en aquest interval, de fet, poden ser arbitràriament diferents: el que és important és que estan tan a prop com es vulgui.

La convergència uniforme és un concepte més potent que la convergència puntual. De fet, si (f_n) convergeix uniformement, en particular convergeix puntualment. A més, parlar de convergència uniforme ens permet enunciar una condició de Cauchy per convergència de funcions.

Proposició 2.1.5 (Condició de Cauchy). *Una successió (f_n) convergeix uniformement a f en un interval I si i només si compleix la condició de Cauchy: per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que*

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$.

Demostració. Si $(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} f$ uniformement, podem prendre $\varepsilon' = \varepsilon/2$ de manera que existeix n_0 tal que $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$. Ara,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)-f_m(x)| = \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)+f(x)-f_m(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)|+\sup_{x\in I} |f(x)-f_m(x)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$.

Recíprocament, si (f_n) compleix la condició, llavors fixat x, sabem que $(f_n(x))$ és una successió de nombres reals de Cauchy. Sigui $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ara, fixant n, i fent m gran, tenim que donat $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

si $n \geq n_0$. Per tant, (f_n) convergeix uniformement a f. □

Exemple 2.1.6. És fàcil veure que el fet que una successió de funcions convergeixi uniformement cap a una altra depèn fortament de l'interval de definició (doncs estem prenent el suprem de la diferència entre la successió i la funció en aquest interval). Estudien aquest fet en un cas particular.

Sigui

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

per $x \in [0, +\infty)$. Comencem mirant la convergència puntual. Tenim que, fixada x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x/n}{1/n^2+x^2} = 0$$

Per tant, (f_n) convergeix puntualment cap a la funció idènticament 0 en $[0, \infty)$. Ara, veiem si la convergència és, de fet, uniforme. Tenim que

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|$$

Aquest suprem, de fet, es pot calcular, buscant el màxim de $f_n(x)$ en l'interval donat. Derivant i igualant a zero, tenim que

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{n}$$

Sabem que f_n pren màxim en $x = 1/n$, perquè $f_n'(x) > 0$ si $x < 1/n$ i $f_n'(x) < 0$ si $x > 1/n$. El valor que pren f_n en aquest punt és $f_n(1/n) = 1/2$, per tant,

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2}$$

que clarament no tendeix cap a zero. Per tant, (f_n) no convergeix uniformement cap a f en $[0, \infty)$.

Ara bé, si prenem $a > 0$, i ens fem la mateixa pregunta en $[a, \infty)$, que trobarem? Ara es té que, si n és prou gran, $a > 1/n$. Per tant, agafant un n_0 suficientment gros, i com que f_n és decreixent en $[a, \infty)$, tenim que

$$\sup_{x\in[a,\infty)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = f_n(a) \leq \varepsilon$$

Queda doncs que (f_n) convergeix uniformement cap a 0 en $[a, \infty)$.

Ja hem vist casos on la convergència puntual d'una successió de funcions no preserva propietats importants d'aquesta. Com a solució d'aquest problema, s'ha proposat la idea de convergència uniforme. Veiem que ara sí que es preserven les propietats més importants (continuïtat, derivada i integral) de les funcions de la successió al passar a la funció límit.

Teorema 2.1.7. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Si (f_n) són continues en I i (f_n) convergeix uniformement cap a f en I, llavors f és contínua en I.*

Demostració. Sigui $x_0 \in I$. Per veure que f és contínua, només cal aplicar la definició de continuïtat. Això és, que per a tot $\varepsilon > 0$ hem de trobar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ sempre que $|x - x_0| < \delta$. Tenim que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \\ &= 2\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \end{aligned}$$

per a tot n. Com que (f_n) convergeix uniformement cap a f, donat $\varepsilon/3$ existeix n_0 tal que $\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ si $n \geq n_0$. Ara, **fixem un d'aquests** $n_1 \geq n_0$, i tenim que

$$2\sup_{x\in I} |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)|$$

Com que f_{n_1} és contínua, en particular donat $\varepsilon/3$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \varepsilon/3$ si $|x - x_0| < \delta$ (si no haguéssim fixat n_1, δ podria dependre-hi). Ja hem trobat el δ que volíem, perquè ara

$$|f(x) - f(x_0)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \varepsilon$$

si $|x - x_0| < \delta$. □

Teorema 2.1.8. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Si (f_n) són integrables Riemann en I, i (f_n) convergeix uniformement cap a f en I, llavors f és integrable Riemann en I i*

$$\int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$$

Demostració. Per definició, f és integrable Riemann si la diferència entre les sumes superiors i inferiors es fa petita. Recordem que donada una partició $P = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ de l'interval I, la suma superior és

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{t-1} \left(\sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i)$$

i la suma inferior és

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{t-1} \left(\inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i)$$

Per tant, hem de veure que si la partició es prou fina, donat $\varepsilon > 0$ es té que

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Tenim que

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= |U(P, f) - L(P, f)| \\ &= |U(P, f) - U(P, f_n) + U(P, f_n) - L(P, f_n) + L(P, f_n) - L(P, f)| \\ &\leq |U(P, f) - U(P, f_n)| + |U(P, f_n) - L(P, f_n)| + |L(P, f_n) - L(P, f)| \\ &= |U(P, f) - U(P, f_n)| + U(P, f_n) - L(P, f_n) + |L(P, f_n) - L(P, f)| \end{aligned}$$

Observem que, anomenant $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, podem escriure

$$\begin{aligned} |U(P,f) - U(P,f_n)| &= \left| \sum_{i=1}^{t-1} \left(\sup_{x\in I_i} f(x) - \sup_{x\in I_i} f_n(x) \right) (x_{i+1} - x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{t-1} \left| \sup_{x\in I_i} f(x) - \sup_{x\in I_i} f_n(x) \right| (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Però com que tenim que (f_n) convergeix uniformement a f, per a tot interval $I_i \subset I$ es té que, donat $\varepsilon > 0$,

$$\left| \sup_{x\in I_i} f(x) - \sup_{x\in I_i} f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

almenys si n es prou gran. Per tant, tornant a la diferència de sumes superiors, tenim que

$$|U(P,f) - U(P,f_n)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{t-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{3}$$

De manera similar, per les sumes inferiors, es té que

$$|L(P,f_n) - L(P,f)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Finalment, fixat n, el terme $U(P,f_n) - L(P,f_n)$ també el podem fer tant petit com vulguem, prenent una partició prou fina, perquè f_n és integrable. Per tant, podem tenir

$$U(P,f_n) - L(P,f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tot plegat,

$$U(P,f) - L(P,f) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

i queda que f és integrable en I.

Veiem ara que, efectivament,

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$$

Això és ben fàcil, perquè només hem de veure que donat $\varepsilon > 0$, es té que

$$\left| \int_I f - \int_I f_n \right| < \varepsilon$$

si n es prou gran. Però com que (f_n) convergeix uniformement a f, podem fer que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

fent n prou gran. Llavors,

$$\left| \int_I f - \int_I f_n \right| \leq \int_I |f - f_n| \leq \int_I \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

com volíem. □

Exemple 2.1.9. El lector deu esperar trobar un enunciat semblant per derivabilitat als fets anteriorment enunciats per continuïtat i integrabilitat. Tot i així, el següent exemple demostra que les condicions per a que una funció f hereti la derivabilitat d'una successió (f_n) són més complicades.

Considerem
$$f_n(x) = \frac{2x}{\pi}\arctan(nx)$$
És clar que (f_n) són derivables. Veiem que (f_n) la convergència puntual en $I = (-100, 100)$. Fixat $x \in I$, tenim que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x}{\pi}\arctan(nx) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi}\frac{\pi}{2} = x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{2x}{\pi}\frac{-\pi}{2} = -x \text{ si } x < 0 \end{cases} = |x|$$
Per tant, (f_n) convergeix puntualment a $f(x) = |x|$ en I. Pel que fa a la convergència uniforme, donat $\varepsilon > 0$, mirem
$$\sup_{x\in I}\left|\frac{2x}{\pi}\arctan(nx) - |x|\right|$$
Si el suprem es pren en x tal que $|x| < \varepsilon$, llavors
$$\left|\frac{2x}{\pi}\arctan(nx) - |x|\right| \leq \frac{2|x|}{\pi}|\arctan(nx)| + |x| < \frac{2\varepsilon}{\pi}\frac{\pi}{2} + \varepsilon = 2\varepsilon$$
Si el suprem es pren en x tal que $x > \varepsilon$, llavors $x > 0$, $x < 100$, i podem prendre n prou gran de manera que
$$\left|\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$$
i ens queda
$$\left|\frac{2x}{\pi}\arctan(nx) - |x|\right| = \left|\frac{2x}{\pi}\arctan(nx) - x\right| = x\frac{2}{\pi}\left|\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{200\varepsilon}{\pi}$$
Si $-x > \varepsilon$, es veu el mateix de manera semblant. Per tant, sempre es té que (f_n) convergeix uniformement a $|x|$ en $(-100, 100)$. Ara bé, és clar que $|x|$ no és derivable en el zero. Per tant, tot i que (f_n) fos una successió de funcions derivables, la funció a la que tendeixen uniformement no ho és.

Lema 2.1.10. *Sigui (f_n) uniformement convergent en un interval I, i sigui f tal que (f_n) és puntualment convergent a f. Llavors, (f_n) és uniformement convergent a f.*

Demostració. Sigui h tal que (f_n) convergeix uniformement a h. En particular, convergeix puntualment a h. Això vol dir que donat $x \in I$,
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = h(x)$$
però com que (f_n) convergeix puntualment a f, es té que
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
per tant, $f(x) = h(x)$ per a tot $x \in I$. Llavors, $f = h$ en I. □

Teorema 2.1.11. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$. Si (f_n) són derivables en I, (f_n') convergeix uniformement en I i existeix $c \in I$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(c) \in \mathbb{R}$, llavors existeix una funció f tal que (f_n) convergeix uniformement cap a f en I, f és derivable en I i (f_n') convergeixen uniformement cap a f' en I.*

Demostració. Veurem primer que (f_n) convergeix uniformement en I perquè es compleix la condició de Cauchy. Donat $\varepsilon > 0$, volem veure que
$$\sup_{x\in I}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

almenys si n, m són prou grans. Tenim que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)| &= \sup_{x\in I}|f_n(x)-f_n(c)+f_n(c)-f_m(c)+f_m(c)-f_m(x)| \\
&\leq \sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)-f_n(c)+f_m(c)|+|f_n(c)-f_m(c)| \\
&= \sup_{x\in I}|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(c)|+|f_n(c)-f_m(c)|
\end{aligned}$$

Com que existeix $\lim f_n(c)$, tenim que $(f_n(c))$ compleix la condició de Cauchy, i per tant, per n prou gran es té que $|f_n(c)-f_m(c)|<\varepsilon$. Per tant

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)| < \sup_{x\in I}|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(c)|+\varepsilon$$

Per a cada $x\in I$, podem considerar l'interval $[x,c]$, i aplicar el teorema del valor mig en aquest interval a la funció, f_n-f_m, que és contínua perquè és diferència de funcions contínues (de fet, derivables), de manera que

$$\sup_{x\in I}|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(c)| = \sup_{x\in I}|(x-c)(f_n'-f_m')(\alpha)|$$

amb $\alpha\in[x,c]$. A més, és clar per definició de suprem, i com que (f_n') és uniformement convergent,

$$|(f_n'-f_m')(\alpha)| \leq \sup_{x\in I}|(f_n'-f_m')(x)| = \sup_{x\in I}|f_n'(x)-f_m'(x)|<\varepsilon$$

Com que I és acotat, $\sup|x-c|\equiv L_0$ sempre és una quantitat finita, i tot plegat queda que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)| &< \sup_{x\in I}|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(c)|+\varepsilon = \sup_{x\in I}|(x-c)(f_n'-f_m')(\alpha)|+\varepsilon \\
&= \sup_{x\in I}|x-c|\sup_{x\in I}|(f_n'-f_m')(\alpha)|+\varepsilon = L_0|(f_n'-f_m')(\alpha)|+\varepsilon \\
&\leq L_0\sup_{x\in I}|f_n'(x)-f_m'(x)|+\varepsilon < L_0\varepsilon+\varepsilon = (L_0+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

Per tant, (f_n) convergeix uniformement en I. Sigui f la funció a la que (f_n) convergeix uniformement. Veurem que f és derivable i que $f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$ per a tot $x\in I$. És a dir, fixat $x_0\in I$, veiem que f és derivable en x_0 i que $f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x_0)$. Definim una successió de funcions (G_n) de manera que

$$G_n(x)=\begin{cases}\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \text{ si } x\neq x_0\\ f_n'(x_0) \text{ si } x=x_0\end{cases}$$

És clar que (G_n) són continues. Veiem que convergeix uniformement en I mirant la condició de Cauchy. Donat $\varepsilon>0$, volem veure que

$$\sup_{x\in I}|G_n(x)-G_m(x)|<\varepsilon$$

per n,m prou grans. Si el suprem es pren en x_0, és clar que això és cert, perquè

$$\sup_{x\in I}|G_n(x)-G_m(x)| = |f_n'(x_0)-f_m'(x_0)|<\varepsilon$$

perquè (f_n') és uniformement convergent. Si el suprem es pren en $I'=I-\{x_0\}$, llavors

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I'}|G_n(x)-G_m(x)| &= \sup_{x\in I'}\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-\frac{f_m(x)-f_m(x_0)}{x-x_0}\right| = \sup_{x\in I'}\left|\frac{(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(x_0)}{x-x_0}\right| \\
&= \sup_{x\in I'}\left|\frac{(x-x_0)(f_n'-f_m')(\alpha)}{x-x_0}\right| = |(f_n'-f_m')(\alpha)| \leq \sup_{x\in I}|f_n'(x)-f_m'(x)|<\varepsilon
\end{aligned}$$

novament perquè (f_n') és uniformement convergent. Per tant, (G_n) convergeix uniformement en I. Veiem que convergeix uniformement a

$$G(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ si } x\neq x_0\\ \lim_{n\to\infty}f_n'(x_0) \text{ si } x=x_0\end{cases}$$

Observem que (G_n) convergeix puntualment a G. Com que (G_n) és uniformement convergent, pel lema 2.1.10, és uniformement convergent a G.

Tenim que G és contínua pel teorema 2.1.7 (el cas $x = x_0$ està ben definit perquè, per convergència uniforme de (f_n') hi ha convergència puntual, i el límit és real). Això vol dir que

$$\lim_{x \to x_0} G(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0)$$

però $\lim_{x \to x_0} G(x) = f'(x_0)$, per tant

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0)$$

i queda que f és derivable en x_0, i val el que volíem. □

2.2 | Sèries de funcions

Definició 2.2.1. *Sigui I un interval de $\mathbb{R}$, i (f_n) una successió de funcions definida en I. Definim l'expressió*

$$\sum_{n \geq 1} f_n$$

com la sèrie de funcions de la successió (f_n).

De manera semblant al que vam fer amb les sèries numèriques, donarem els conceptes de convergència de la sèrie de funcions en termes de la successió de sumes parcials.

Definició 2.2.2. *Donada una sèrie de funcions $\sum f_n$, la* successió de sumes parcials *és la successió de funcions (F_N) definides per*

$$F_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$$

Com que les sumes parcials d'una sèrie de funcions dóna una successió de funcions, s'ha de parlar de convergència puntual i de convergència uniforme.

Definició 2.2.3. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Diem que $\sum f_n$* convergeix puntualment *en I si la successió de sumes parcials convergeix puntualment.*

Definició 2.2.4. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Diem que $\sum f_n$* convergeix uniformement *en I si la successió de sumes parcials convergeix uniformement.*

Novament, podem enunciar una condició de Cauchy, ara pel que fa a la convergència uniforme de sèries de funcions.

Proposició 2.2.5 (Condició de Cauchy). *Una sèrie de funcions $\sum f_n$ convergeix uniformement si i només si compleix la condició de Cauchy: per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que*

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{n=N}^{M} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

si $M, M \geq n_0$.

Demostració. Que $\sum f_n$ sigui uniformement convergent vol dir que (F_N) és una successió uniformement convergent. En particular, això és equivalent a dir que (F_N) compleix la condició de Cauchy, de manera que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in I} |F_M(x) - F_N(x)| < \varepsilon$$

si $N, M \geq n_0$. Però això és

$$\sup_{x\in I} |F_M(x) - F_N(x)| = \sup_{x\in I} \left| \sum_{n=1}^{M} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \sup_{x\in I} \left| \sum_{N+1}^{M} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Si $N, M \geq n_0$. □

Seguidament, donem enunciats similars a 2.1.7, 2.1.8, 2.1.11, en relació a la convergència uniforme de sèries de funcions. Deixem les demostracions per al lector, però donem la següent indicació vàlida per les tres proves: considerar la successió de sumes parcials (F_N), i ara que es té una successió de funcions, aplicar el teorema anàleg.

Teorema 2.2.6. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Si (f_n) són continues i $\sum f_n$ convergeix uniformement en I, llavors $\sum f_n$ és contínua.*

Teorema 2.2.7. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Si (f_n) són integrables Riemann en I, i $\sum f_n$ convergeix uniformement en I, llavors $\sum f_n$ és integrable Riemann en I i*

$$\int_I \sum f_n = \sum \int_I f_n$$

Teorema 2.2.8. *Sigui (f_n) una successió de funcions definides en un interval $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$. Si (f_n) són derivables en I, $\sum f_n'$ convergeix uniformement en I i existeix $c \in I$ tal que $\sum f_n(c) < \infty$, llavors $\sum f_n$ convergeix uniformement en I, $\sum f_n$ és derivable en I i $(\sum f_n)' = \sum (f_n)'$.*

Novament, ens preocuparem per l'estudi de la convergència (en aquest cas, de convergència de sèries).

Exemple 2.2.9. Estudiem la convergència de la sèrie $\sum x^n$. En quant a convergència puntual, fixat x, tenim que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \text{ si } x \in (-1, 1) \\ \nexists \text{ si } x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

Per tant, $\sum x^n$ convergeix puntualment a $1/(1-x)$ si $x \in (-1, 1)$. Mirem si també hi convergeix uniformement en aquest interval (no val la pena mirar un interval més gran, perquè si convergís uniformement en ell, també ho faria puntualment, i sabem que això no pot passar). Tenim que,

$$\sup_{x\in(-1,1)} \left| \sum_{n=1}^{N} x^n - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right|$$

Però com que x pot ser arbitràriament proper a 1, el suprem és infinit. Per tant, $\sum x^n$ no convergeix uniformement en $(-1, 1)$. Ara bé, si prenem $0 < a < 1$, i considerem l'interval $[-a, a]$, es té que

$$\sup_{x\in[-a,a]} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| = \left| \frac{a^{N+1}}{1-a} \right|$$

i aquest valor si que es fa tant petit com vulguem, perquè a no s'apropa a 1, i per N prou gran, a^{N+1} és minúscul. Per tant, $\sum x^n$ convergeix uniformement en $[-a, a]$.

Veiem dos coses en l'exemple anterior: la primera és que la convergència uniforme torna a dependre fortament de l'interval que prenem; la segona, que hem pogut determinar la convergència uniforme perquè sabíem calcular la suma de $\sum x^n$, podent així estudiar el suprem. Però és evident que aquest no acostuma a ser el cas. Afortunadament, tenim criteris per veure convergència uniforme de sèries de funcions, sense haver de preocupar-nos d'avaluar explícitament el suprem.

Teorema 2.2.10 (Criteri M de Weierstrass). *Sigui (f_n) una successió definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. suposem que $|f_n(x)| \leq M_n$ per a tot $x \in I$, i suposem que $\sum M_n$ és convergent. Llavors, $\sum f_n$ és uniformement convergent en I.*

Demostració. Veurem la condició de Cauchy. Donat $\varepsilon > 0$, tenim que

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_N^M f_n(x)\right| \leq \sup_{x\in I}\sum_N^M |f_n(x)| \leq \sup_{x\in I}\sum_N^M M_n = \sum_N^M M_n < \varepsilon$$

si $N, M \geq n_0$. $\square$

Exemple 2.2.11. Considerem

$$S = \sum \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$$

per $x \in [a,b]$, $a > 1$. Estudiem-ne la convergència. Per començar, fixem x, i mirem si la sèrie numèrica resultant és absolutament convergent (llavors, la sèrie serà convergent puntualment). Tenim que

$$\sum\left|\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\right| = \sum\frac{1}{2n-1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{2n-1}$$

Com que $x > a > 1$, $(x-1)/(x+1)$ sempre és positiu i més petit que 1, i queda que la suma és convergent. Per tant, S convergeix puntualment.

Per la convergència uniforme, és difícil anar a través de la definició, perquè trobar una forma explícita de calcular els termes de la successió de sumes parcials és morir-se en vida. En canvi, observem que

$$h(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

és creixent ($h'(x) = 2/(x+1)^2 > 0$), i com que sempre és positiva, $|h(x)|^{2n-1} = (h(x))^{2n-1}$, i el valor màxim que es pren en l'interval $[a,b]$ és $(h(b))^{2n-1}$. Per tant, sigui

$$M_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{2n-1}$$

com hem dit, es compleix

$$\left|\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\right| \leq M_n$$

per a tot $x \in [a,b]$, i és clar (pel mateix argument que en la convergència puntual) que $\sum M_n < \infty$. Pel criteri M de Weierstrass, ens queda que S convergeix uniformement en $[a,b]$.

Teorema 2.2.12 (Criteri de Dirichlet). *Siguin (f_n) i (g_n) successions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Suposem que:*

- *Existeix $C > 0$ tal que $\sup_{x\in I}\left|\sum_{n=1}^n f_n(x)\right| \leq C$ per a tot N.*
- *$(g_n(x))$ és decreixent per a tot $x \in I$ i $\sup_{x\in I}|g_n(x)| \longrightarrow 0$.*

Llavors, $\sum f(x)g(x)$ és uniformement convergent en I.

Demostració. La demostració és idèntica a la del criteri de Dirichlet per sèries numèriques, així que es deixa pel lector. Només cal demostrar la fórmula de sumació parcial d'Abel per successions de funcions, i seguir la demostració de 1.4.4. $\square$

2.2.1 | Aplicació de les sèries de funcions: funcions continues no derivables

Sabem de l'existència de funcions que són continues però que no són derivables en alguns punts (per exemple, $f(x) = |x|$, que no té derivada en $x = 0$). Històricament, sempre es va pensar que tota funció contínua seria derivable excepte, potser, en un nombre finit de punts (o a molt estirar, en un nombre numerable). Weierstrass, però, demostra al 1873 que existeixen funcions (de fet, un nombre infinit d'elles) que no són derivables enlloc.

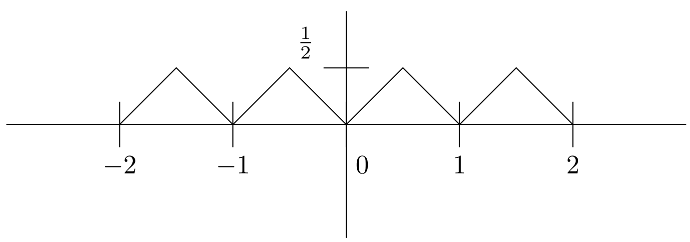
Exemple 2.2.13 (de Weierstrass). Considerem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} \cos\left(a^n x\right)$$

amb $b > 1$ i $a \geq b$. Observem que $|b^{-n}\cos(a^n x)| \leq b^{-n}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, i com que $\sum b^{-n} < \infty$, pel criteri M de Weierstrass es té que la sèrie convergeix uniformement en $\mathbb{R}$. A més, límit uniforme de funcions continues és una funció contínua. Per tant, $f(x)$ és contínua. Weierstrass demostrà que, malgrat això, $f(x)$ no era derivable enlloc. Hardy, al 1916, demostra que la condició òptima que fa que f no sigui derivable es té per $a \geq 1/b$.

Les demostracions donades pels dos matemàtics, però, no són fàcils. Tanmateix, podem estudiar el següent exemple, on també ens trobem amb una funció contínua no derivable enlloc, donat per Takagi al 1903.

Exemple 2.2.14 (de Takagi). Sigui $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $\phi(x) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x - k|$.



Ara, considerem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\phi\left(2^k x\right)$$

És fàcil veure que la sèrie convergeix uniformement a $\mathbb{R}$ pel criteri M de Weierstrass, i com que és convergència uniforme de funcions continues, $f(x)$ és contínua. Veurem que, malgrat tot, $f(x)$ no és derivable enlloc.

Per fer-ho, definim un *interval diàdic de generació n* com un interval de la forma

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

Per exemple, els intervals diàdics de generació 0 són $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, $[-1, 0)$,...; els de generació 1 són $[0, 1/2)$, $[1/2, 1)$, $[1, 3/2)$, $[-1/2, 0)$,... És clar que el conjunt d'intervals diàdics de generació n és una partició de la recta real en segments de longitud $1/2^n$. Observem també que si $m \geq n$, tot interval diàdic de generació m està dins d'algun interval diàdic de generació n.

Ara, sigui $x \in \mathbb{R}$, i considerem $[a_n, b_n)$ l'interval diàdic de generació n que conté x. La idea serà veure que **no existeix** mai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$$

i un cop fet això, entrarem en contradicció al suposar que f és derivable en x, perquè en tal cas veuríem que el límit anterior sí existeix.

Per començar, observem que si b_n és un extrem d'un interval diàdic de generació n, llavors $f(b_n) = \sum 2^{-k}\phi(2^k b_n)$ és una suma finita, perquè $2^k b_n$ és enter quan $k \geq n$, i ϕ d'un nombre enter val zero. Per tant, només ens preocupem de sumar

$$f(b_n) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}\phi(2^k b_n)$$

Ara, tenim que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}\phi(2^k b_n) - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}\phi(2^k a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\phi(2^k b_n) - \phi(2^k a_n)}{2^k(b_n - a_n)}$$

Com que $k \leq n-1$, per cada k es té que $[2^k a_n, 2^k b_n)$ és un interval diàdic de generació $n-k$. En particular, està dins d'algun interval diàdic de generació 1. Però observem que avaluar el quocient incremental de valors continguts en un interval diàdic de generació 1 pot valer 1 o -1: només cal que ens fixem en la gràfica de ϕ, doncs té pendent 1 en l'interval $(c/2, (c+1)/2)$ si c és parell, i pendent -1 si c és senar.

Així doncs,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\phi(2^k b_n) - \phi(2^k a_n)}{2^k(b_n - a_n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} s_k$$

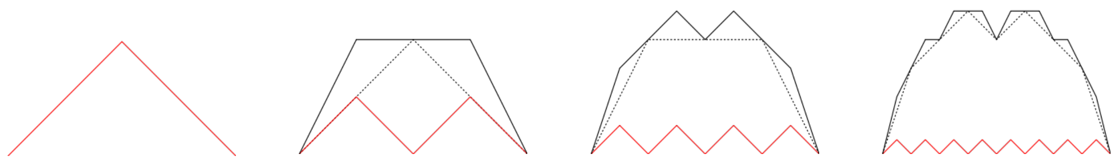
on s_k és 1 o -1 arbitràriament. Com que (s_k) no tendeix a zero, la sèrie és divergent, i el límit que buscàvem no existeix.

Ara, si acceptéssim que existeix la derivada de f en x, llavors

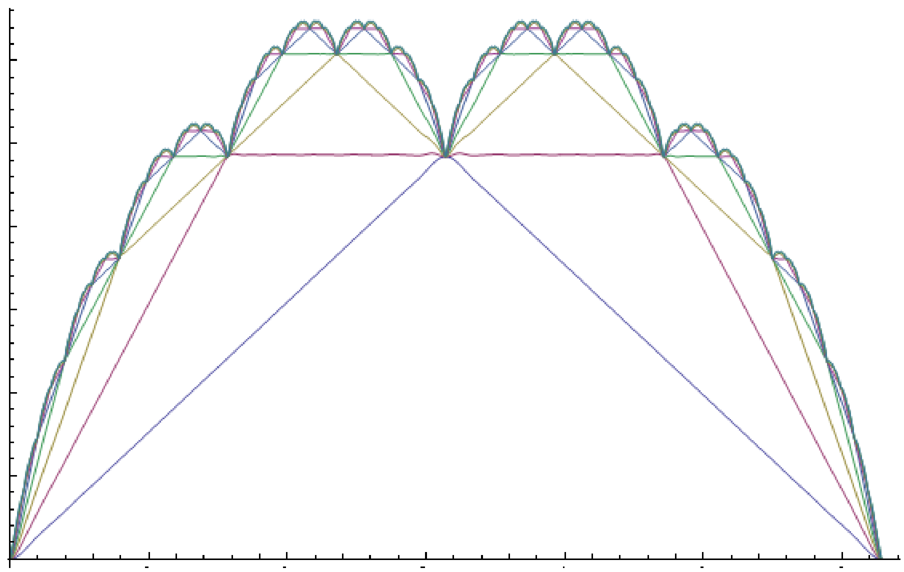
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x}\frac{b_n - x}{b_n - a_n} + \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n}\frac{x - a_n}{b_n - a_n} = f'(x)$$

I arribem a l'esperada contradicció. Queda demostrat doncs que f és contínua en $\mathbb{R}$ i no és derivable enlloc.

El lector, si encara li batega el cor després d'entendre aquest resultat, s'estarà preguntant quina pinta té aquesta funció per ser contínua però no derivable enlloc.



$n = 0$ $\quad$ $n \leq 1$ $\quad$ $n \leq 2$ $\quad$ $n \leq 3$



Es tracta, doncs, d'una figura fractal, formada per la suma de funcions triangulars, cada cop d'alçada menor i freqüència major.

Qui en vulgui saber més sobre aquesta peculiar funció, pot trobar-ne un munt d'informació en [1], on els autors fan un exhaustiu estudi de les propietats analítiques i fractals d'aquesta.

2.3 | Sèries de potències

Passem a estudiar un tipus concret de sèries de funcions, on suposem que la nostra successió (f_n) és de la forma $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, on a_n són constants i x_0 és fixat.

Definició 2.3.1. *Donat $x_0 \in \mathbb{R}$, una* sèrie de potències centrada en x_0 *és una sèrie de funcions de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

on (a_n) és una successió de nombres reals.

Podem entendre les sèries de potències com a "polinomis de grau infinit". De fet, qualsevol polinomi de grau menor o igual a m és una sèrie de potències amb (a_n) tal que $a_n = 0$ per a tot $n > m$.

Exemple 2.3.2. Vegem alguns casos de sèries de potències.

1. La sèrie
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
és la *sèrie de potències geomètrica*, i és evident que
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \text{ si } x \in (-1,1) \\ \text{divergent si } x \notin (-1,1) \end{cases}$$

2. La sèrie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
és la *sèrie de potències exponencial*. Podem comprovar que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Per fer-ho, considerem el desenvolupament de Taylor de e^x al voltant de $x_0 = 0$ i comprovem que el residu tendeix a zero a mesura que prenem un desenvolupament d'ordre superior. Recordem que, en general,
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{N)}(x)}{N!}(x - x_0)^N + R_N(x)$$
on
$$R_N(x) = \frac{f^{N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}, \quad c \in [x_0, x]$$
En el nostre cas,
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} + \frac{e^c}{(N+1)!}x^{N+1}, \quad c \in [0, x]$$
i hem de veure que, fixat x, l'últim terme tendeix a zero quan N es fa gran. Però això és clar, perquè e^c és un nombre fix, i
$$\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{x}{N+1}\frac{x}{N}\cdots\frac{x}{2}\frac{x}{1} \leq \frac{C(x)}{N+1}$$
on $C(x)$ és una constant que depèn de x, quedant que $c(x)/(N+1) \longrightarrow 0$ a mesura que $N \longrightarrow \infty$. Per tant, queda demostrat el que volíem.

3. Les sèries

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

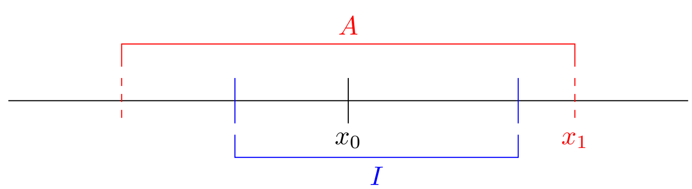
són les *sèries de potències trigonomètriques*, i es pot demostrar igual que en cas anterior que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Les sèries de potències són un tipus de sèries amb un potencial enorme, gràcies a la evident regularitat que presenten. Estudiem la convergència d'aquestes.

Proposició 2.3.3. *Sigui* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *una sèrie de potències. Suposem que existeix* $x_1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $\sum a_n(x_1-x_0)^n$ *és convergent. Llavors,* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *és uniformement convergent a tot interval tancat* I *contingut en* $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x-x_0| < |x_1-x_0|\}$.



Demostració. Com que $\sum a_n(x_1-x_0)^n$ és convergent, la successió $|a_n||x_1-x_0|^n$ té límit zero i està acotada per alguna constant K. Ara, per $x \in I$,

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n||x-x_0|^n = |a_n||x_1-x_0|^n \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} \leq K\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n$$

La funció $\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|$ és contínua en I, i com que I és un interval tancat, pren un màxim per algun punt $\tilde{x} \in I$, que en particular compleix que $|\tilde{x}-x_0| < |x_1-x_0|$, al tenir $I \subseteq A$. Per tant,

$$K\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n \leq K\left|\frac{\tilde{x}-x_0}{x_1-x_0}\right|^n = Kr^n$$

amb $r < 1$. La sèrie $\sum Kr^n = K\sum r^n$ serà, doncs, convergent, al ser una sèrie geomètrica de constant $r < 1$. Pel criteri M de Weierstrass, la sèrie $\sum a_n(x-x_0)^n$ és uniformement convergent en I. $\square$

Aquesta proposició dóna una pista important sobre la convergència de les sèries de potències: donat un punt x_0, hi ha un interval centrat en x_0 tal que per a tot x d'aquest interval es té que la sèrie de potències $\sum a_n(x-x_0)^n$ és convergent. Ens agradaria saber, doncs, com de gran pot arribar a ser aquest interval. Notem que, probablement, dependrà dels coeficients a_n, perquè donat un x_0, l'única manera de construir una sèrie de potències diferent és canviant aquests coeficients.

La qüestió, però, és més profunda que això, i és que en realitat, té més sentit definir les sèries de potències en el món dels nombres complexos.

La raó? Com hem dit, donada una sèrie $\sum a_n(x-x_0)^n$, sembla existir un interval centrat en x_0 pel qual la sèrie és convergent. Però si pensem aquesta sèrie sobre els nombres complexos, de manera que tenim $\sum a_n(z-z_0)^n$, on $z_0 \in \mathbb{C}$, (a_n) és una successió de nombres complexos, i admetem que z prengui valors complexos, el que de fet es té és que la sèrie convergeix en tot un disc centrat en z_0.

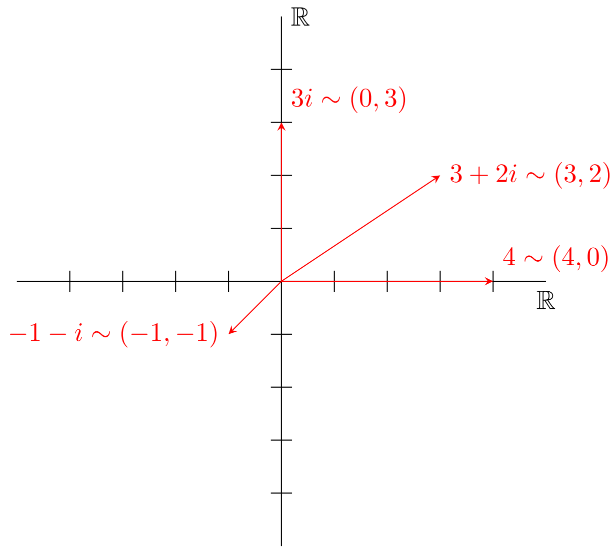
Per entendre això que estem dient, així com per poder demostrar aquest sorprenent fet sobre la convergència de les sèries de potències, fem un incís sobre conceptes relacionats amb nombres complexos que ens faran falta.

Definició 2.3.4. *Definim el conjunt dels* nombres complexos *com* $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R},\ i^2=-1\}$.

Podem representar els nombres complexos en el que anomenem *pla complex*, a través de la bijecció

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a+ib &\longmapsto (a,b) \end{aligned}$$

Per exemple, els nombres $3+2i, -1-i, 4, 3i$ es poden representar de la següent manera



El conjunt dels nombres complexos té estructura de cos amb les operacions suma

$$\begin{aligned} +: \quad \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a+ib, c+id) &\longmapsto (a+c)+i(b+d) \end{aligned}$$

i producte

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a+ib, c+id) &\longmapsto (ac-bd)+i(ad+bc) \end{aligned}$$

Definició 2.3.5. *Sigui* $z=a+bi$ *un nombre complex. Denotem per* $\mathrm{Re}(z)=a$ *la* part real *de* z. *Denotem per* $\mathrm{Im}(z)=b$ *la* part imaginaria *de* z.

Observem que tant $\mathrm{Re}(z)$ com $\mathrm{Im}(z)$ són nombres reals.

Definició 2.3.6. *Sigui* $z=a+bi$ *un nombre complex. El* conjugat *de* z *és el nombre complex* $\bar{z}=a-bi$.

Podem relacionar $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{Im}(z)$ amb z i el seu conjugat $\bar{z}$. Certament,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Definició 2.3.7. *Sigui $z = a + bi$ un nombre complex. El* mòdul *de z és $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$*

La definició del mòdul d'un nombre complex ve induïda per la definició de mòdul d'un vector, pensant el nombre complex z sobre el pla complex com un vector entre l'origen i z. Naturalment, s'indueix també una noció de distància.

Definició 2.3.8. *Si z_1, z_2 són nombres complexos, la* distància *entre z_1 i z_2 és el mòdul de $z_1 - z_2$.*

Sobre els nombres complexos també podem parlar de successions, sèries, funcions, successions de funcions i sèries de funcions. A més, tenim també nocions de convergència gràcies a que podem parlar de la distància entre dos nombres complexos.

Definició 2.3.9. *Sigui (z_n) una successió de nombres complexos. Diem que la successió té* límit *z, i ho denotem per $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.*

En successions de nombres reals, si (x_n) tenia límit l, llavors x_n estava dins de l'interval $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ si n era prou gran. En la definició de límit d'una successió de nombres complexos, tenim que z_n està dins del disc de centre z i radi ε si n és prou gran. Observem també que $\lim z_n = z$ si i només si $\lim \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z)$ i $\lim \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z)$.

Donem a continuació la definició d'una sèrie numèrica complexa. Evidentment, és pràcticament igual a la que ja coneixem del primer capítol per a sèries numèriques reals.

Definició 2.3.10. *Sigui (z_n) una successió de nombres complexos. L'expressió $\sum z_n$ és una* sèrie *de nombres complexos, i diem que la sèrie és convergent si la successió de sumes parcials (S_N) definida per $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$ té límit.*

Novament, notem que $\sum z_n$ és convergent si i només si $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ i $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ són convergents.

Parlem ara de *funcions complexes*. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció complexa, que envia nombres complexos a nombres complexos. Podem considerar les funcions

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \mathrm{Re}\left(f(z)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \mathrm{Im}\left(f(z)\right) \end{aligned}$$

Observem que $f(z) = \mathrm{Re}f(z) + i\mathrm{Im}f(z)$. A més, gràcies a la definició de distància donada, podem parlar de funcions complexes contínues i de la derivada complexa.

Definició 2.3.11. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diem que f és* contínua a *Ω si per a tot $z_0 \in \Omega$ és compleix que donat $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|z - z_0| < \delta$.*

Una funció f serà contínua si i només si $\mathrm{Re}f$ i $\mathrm{Im}f$ són funcions contínues.

Definició 2.3.12. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diem que f és* holomorfa *a Ω si per a tot $z \in \Omega$ existeix*

$$f'(z) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

En aquest cas, $f'(z)$ rep el nom de derivada complexa de f en z.

Notem que l'increment h de la definició de funció holomorfa és, en general, un número complex. Avaluar, doncs, aquest límit, acostuma ser una tasca molt més complicada del que ho podria ser en el cas de funcions derivables definides a la recta real.

Fem constar que el concepte de funció holomorfa és molt més fort que el de funció derivable en el cas real, doncs presenta moltes més implicacions que la definició anàloga per funcions reals. De fet, una d'aquestes implicacions és que una funció és holomorfa en Ω si i només si per a cada z_0 de Ω hi ha un entorn tal que la funció es pot expressar com a sèrie de potències $\sum a_n(z-z_0)^n$ en aquest entorn de z_0. Aquesta és, també, una altra raó important per la qual les sèries de potències tenen més sentit en el món complex que en el món real.

De totes maneres, no cal preocupar-se ara per aquests fets: en aquest tema, parlar de funcions holomorfes només serà una qüestió de nomenclatura.

Acabem les definicions relacionades amb nombres complexos amb les idees de successió de funcions i sèrie de funcions complexes.

Definició 2.3.13. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Una* successió de funcions complexes a Ω *és una successió (f_n) on $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ és una funció complexa per a tot n.*

Definició 2.3.14. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diem que una successió de funcions complexes (f_n)* convergeix puntualment *a f en Ω si per a tot $z \in \Omega$ la successió de nombres complexos $(f_n(z))$ té límit $f(z)$. Diem que (f_n)* convergeix uniformement *a f en Ω si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $\sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.*

Observem que (f_n) convergeix (puntual o uniformement) si i només si $(\mathrm{Re} f_n)$ i $(\mathrm{Im} f_n)$ convergeixen (puntual o uniformement).

Definició 2.3.15. *Sigui (f_n) una successió de funcions complexes. L'expressió $\sum f_n$ és una* sèrie de funcions complexes*. Diem que $\sum f_n$* convergeix puntualment *si la successió de sumes parcials convergeix puntualment. Diem que $\sum f_n$* convergeix uniformement *si la successió de sumes parcials convergeix uniformement.*

Observem que $\sum f_n$ convergeix (puntual o uniformement) si i només si $\sum \mathrm{Re} f_n$ i $\sum \mathrm{Im} f_n$ convergeixen (puntual o uniformement).

Acabem aquest parèntesis comentant que es pot demostrar amb certa facilitat que tots els resultats donats fins ara per sèries numèriques, successions de funcions i sèries de funcions són igualment vàlids pel món complex.

Tornem, doncs, al objecte d'estudi d'aquest apartat. Recordem que volem estudiar la convergència de les sèries de potències, i a partir d'ara les pensarem sobre valors complexos, de la forma $\sum a_n(z-z_0)^n$. Com hem dit anteriorment, i seguint les definicions que acabem de donar, es pot seguir la demostració de la proposició 2.3.3 per veure que si $\sum a_n(z_1-z_0)^n$ és convergent per algun $z_1 \in \mathbb{C}$, llavors la sèrie és uniformement convergent en tot disc tancat D tal que, per a $z \in D$, es compleixi que $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ (és a dir, D està contingut al disc de centre z_0 i radi $|z_1-z_0|$), i això vol dir que la convergència d'una sèrie de potències complexes sembla establir-se en un disc de centre z_0. El que ens agradaria saber, doncs, és com de gran podem fer aquest disc de convergència.

Considerem una sèrie de potències $\sum a_n(z-z_0)^n$, i escrivim-la formalment com $\sum \left(\sqrt[n]{a_n}(z-z_0)\right)^n$. Ara, la sèrie recorda a una sèrie geomètrica: una expressió de la forma $\sum r^n$, amb $r \in \mathbb{C}$ i $|r| < 1$, la qual és convergent. La única diferència és que en la sèrie geomètrica, r és una constant fixada, mentre que en la sèrie de potències, els termes $\sqrt[n]{a_n}(z-z_0)$ aniran canviant malgrat que z estigui també fixat, perquè la successió (a_n) no té perquè ser constant. Potser, però, podríem trobar alguna constant r per la qual $|\sqrt[n]{a_n}(z-z_0)| = \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0| < |r|$, i si $|r| < 1$, llavors $\sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0| < 1$ i, en aquest cas, sembla natural pensar que la sèrie de potències serà convergent. Ara, com de gran podem prendre z per garantir l'existència d'aquesta constant r?

Observem que el que realment ens interessa és que $|z-z_0| < 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, però en tenim prou amb que això passi "a la llarga"; és a dir, que aquest fet es compleixi almenys prou endavant en la cua de la sèrie, perquè acaba sent aquesta la que, en el fons, determina la convergència.

Per tal de ser més precisos amb això, tornem a fer una pausa en el discurs per parlar de límits superiors i inferiors.

Definició 2.3.16. *Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt acotat superiorment. El* suprem *de A, denotat per* $\sup A$*, és la cota superior de A més petita.*

Definició 2.3.17. *Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt acotat inferiorment. El* ínfim *de A, denotat per* $\inf A$*, és la cota inferior de A més gran.*

Els suprems i els ínfims de A existeixen per l'axiomàtica dels nombres reals. A nivell de notació, si un conjunt no està acotat superiorment (resp. inferiorment) diem que $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$). En particular, estem dient que tot conjunt té suprem i ínfim (encara que algun dels dos sigui infinit).

Lema 2.3.18. *Sigui (x_n) una successió de nombres reals. Llavors,*

- *Si (x_n) és creixent, existeix el límit de (x_n) i val $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
- *Si (x_n) és decreixent, existeix el límit de (x_n) i val $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Considerem (x_n) una successió de nombres reals, i per a cada n, sigui $y_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$. És clar que (y_n) és una successió de nombres reals decreixent. Igualment, sigui $z_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}$. Llavors, (z_n) és creixent. Pel lema anterior, totes dues successions tenen límit.

Definició 2.3.19. *Donada una successió de nombres reals (x_n) el seu* límit superior *és*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Igualment, el seu límit inferior *és*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

Donada (x_n) una successió de nombres reals, és compleixen les següents propietats (fàcilment demostrables) pel que fa als seus límits superior i inferior:

1. (x_n) té sempre límits superior i inferior.
2. $(x_n) \longrightarrow l$ si i només si $\limsup x_n = \liminf x_n = l$.
3. $\limsup x_n = \sup\{l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid (x_{n_k}) \longrightarrow l\}$. És a dir, si prenem tots els límits de totes les parcials convergents de (x_n), el suprem d'ells és el límit superior.
4. $\liminf x_n = \inf\{l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid (x_{n_k}) \longrightarrow l\}$. És a dir, si prenem tots els límits de totes les parcials convergents de (x_n), l'ínfim d'ells és el límit inferior.
5. Si $l = \limsup x_n \in \mathbb{R}$, llavors per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $x_n < l + \varepsilon$ si $n \geq n_0$, i a més, hi ha infinits n tals que $x_n > l - \varepsilon$.
6. Si $l = \liminf x_n \in \mathbb{R}$, llavors per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $x_n > l - \varepsilon$ si $n \geq n_0$, i a més, hi ha infinits n tals que $x_n < l + \varepsilon$.
7. $\limsup(-x_n) = -\liminf(x_n)$ (Indicació: si $A \subseteq \mathbb{R}$ acotat, llavors $\sup(-A) = -\inf(A)$, on $-A$ és el conjunt format pels oposats dels elements de A).
8. Si $(x_n) > 0$, llavors $\limsup 1/x_n = 1/\liminf x_n$ (Indicació: $\sup(1/A) = 1/\inf(A)$, on $1/A$ és el conjunt format pels inversos dels elements de A).
9. Si (y_n) és una altra successió de nombres reals, llavors $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$.
10. $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$. (Indicació: demostrar amb 7 i 9).

Arribats aquest punt, estem preparats per anunciar el teorema de convergència de les sèries de potències.

Teorema 2.3.20 (de Cauchy-Hadamard). *Sigui* (a_n) *una successió de nombres complexos,* $z_0 \in \mathbb{C}$, *i* z *la variable complexa, i considerem la sèrie* $\sum a_n(z-z_0)^n$. *Sigui*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty)$$

Llavors, es compleix que

1. $\sum a_n(z-z_0)^n$ *convergeix puntualment per* $|z-z_0| < R$, *i divergeix per* $|z-z_0| > R$. R *rep el nom de* radi de convergència.
2. *Per a tot* $r < R$, $\sum a_n(z-z_0)^n$ *convergeix uniformement per* $|z-z_0| < r$.
3. *Si* $|z-z_0| < R$, *llavors* $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ *és contínua, holomorfa, i* $f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n-1}$. *A més,* $f'(z)$ *convergeix puntualment si* $|z-z_0| < R$.

Demostració. Veiem primer la propietat 2. Prenem $r < R$. Tal i com hem definit R, és té que donat $\varepsilon > 0$,

$$|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n$$

si n es prou gran. Aleshores, per a tot z tal que $|z-z_0| < r$, es té

$$|a_n(z-z_0)^n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n |z-z_0|^n < (1+R\varepsilon)^n \frac{r^n}{R^n}$$

Com que $r < R$, si ε es prou petit es té que $(1+R\varepsilon)\frac{r}{R} < 1$, de manera que $\sum(1+R\varepsilon)^n \frac{r^n}{R^n} < \infty$, i pel criteri M de Weierstrass, $\sum a_n(z-z_0)^n$ és uniformement convergent per $|z-z_0| < r$. En particular, convergeix puntualment per cada $|z-z_0| < R$, demostrant la primera part de 1. Per la segona part d'aquest apartat, observem que per definició de R, donat $\varepsilon > 0$ hi ha infinits a_n tals que $|a_n| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^n$, i com que $|z-z_0| = D > R$, llavors

$$|a_n(z-z_0)^n| > (1-R\varepsilon)^n \frac{D^n}{R^n}$$

Si ε es prou petit, $(1-R\varepsilon)^n \frac{D^n}{R^n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. En particular, el terme general de $\sum a_n(z-z_0)^n$ no tendeix a zero, i per tant és divergent.

Demostrem l'última part del teorema. Clarament $\sum a_n(z-z_0)^n$ és contínua al disc obert de centre z_0 i radi R pel teorema 2.2.6. A més, és fàcil veure que $a_n(z-z_0)^n$ és holomorfa per a tot n i que la seva derivada és $na_n(z-z_0)^n$. Ara, considerem $\sum na_n(z-z_0)^{n-1}$. El seu radi de convergència és

$$R' = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

perquè $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$. Per tant $\sum na_n(z-z_0)^{n-1}$ convergeix uniformement per $|z-z_0| < r < R$. Com que $\sum a_n(z-z_0)^n$ també és uniformement convergent en $|z-z_0| < r$, pel teorema 2.2.8 es té que $\sum a_n(z-z_0)^n$ és holomorfa, i $(\sum a_n(z-z_0)^n)' = \sum na_n(z-z_0)^{n-1}$, com volíem. □

Corol·lari 2.3.21. *Si* $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ *és una sèrie de potencies complexa amb radi de convergència* R, *llavors* $f(z)$ *és infinitament derivable per* $|z-z_0| < R$ *i la derivada és la sèrie de derivades.*

Corol·lari 2.3.22. *La funció* $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ *amb radi de convergència* R *té per polinomi de Taylor de grau* N *al voltant de* z_0 *el polinomi* $p_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z-z_0)^n$. *En particular,* $a_n = f^{n)}(z_0)/n!$.

El fet de tenir les sèries de potències com un recurs natural en el món dels números complexos, i el haver demostrat el teorema de Cauchy-Hadamard sobre aquest conjunt, ens dóna una eina interessant per construir funcions: donada l'expansió de Taylor al voltant d'algun punt x_0 d'una funció f de variable real, entendrem aquesta com una sèrie de potències centrada en x_0, que convergeix a f per un determinat interval donat pel radi de convergència. Ara, prenen el mateix radi, podem generalitzar aquesta funció a una funció de variable complexa. Veiem alguns exemples.

Exemple 2.3.23. Ja coneixem la sèrie de potències exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Podem pensar aquesta sèrie de potències sobre la variable complexa. El radi de convergència serà

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!}}$$

Per començar, recordem que donada una successió de nombres reals (a_n), si existeix $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$ llavors existeix $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i valen el mateix. Llavors,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!}$$

Per tant, el radi de convergència és $R = \infty$ (era d'esperar, perquè sobre $\mathbb{R}$, la sèrie és convergent per a tot x). Podem definir, doncs, *l'exponencial complexa* per a tot $z \in \mathbb{C}$ com

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

De forma semblant, podem trobar que els radis de convergència de les sèries

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

són també $R = \infty$, permetent-nos, doncs, definir f_1 com el *sinus complex* i f_2 com el *cosinus complex* per a tot $z \in \mathbb{C}$. Amb les definicions donades, és fàcil veure la famosa *fórmula d'Euler.* Es té que

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Ara, reordenem la sèrie, que sabem que podem fer-ho perquè és absolutament convergent (els termes de la sèrie de e^{ix}, en valor absolut, donen la sèrie de la funció e^x, convergent per a tot $x \in \mathbb{R}$), i ens queda

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Exemple 2.3.24. Volem trobar la sèrie de Taylor de $f(x) = \arctan(x)$ sense haver de calcular la derivada $n-$èssima. Observem que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

que té radi de convergència $R = 1$. Per aquest radi, podem integrar aquesta sèrie com la sèrie de les integrals, obtenint la sèrie de l'arctangent

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad x \in (-1,1)$$

Exemple 2.3.25. Intentem determinar per a quines x es pot sumar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{3n-1}$$

i calcular-ne la suma en qüestió. Per fer-ho, calculem el radi de convergència de la sèrie,

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$$

com que $(a_n) = \{0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, ...\}$, i el límit superior ve donat per la parcial amb límit més gran, aquesta ha de ser $(a_{n_k}) = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, i llavors

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = R = \frac{1}{\lim \sqrt[3n-1]{n}} = 1$$

Per la convergència uniforme dins de l'interval $(-1, 1)$ donat pel radi de convergència, podem integrar la sèrie fent la sèrie d'integrals

$$\int_0^x f(x)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n x^{3n-1} dx = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 - x^3} - 1 \right] = \frac{1}{3} \frac{x^3}{1 - x^3}$$

Ara que tenim

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{3} \frac{x^3}{1 - x^3}$$

sabem, gràcies al teorema, que podem derivar de manera que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{3n-1} = \frac{x^2}{(1 - x^3)^2}$$

de manera que ja tenim la suma calculada, per $x \in (-1, 1)$.

Tot i que el teorema de convergència de sèries de potències no ens diu res sobre el que passa per $x = \pm R$ (simplement, això dependrà de quina és la sèrie que considerem), podem dir coses del comportament de la sèrie al apropar-se al extrem, si sabem que la sèrie convergeix allà.

Teorema 2.3.26 (d'Abel). *Sigui $f(x) = \sum a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència R, i suposem que $\sum a_n R^n$ és convergent. Llavors, $f(x)$ convergeix uniformement en $[0, R]$. En particular,*

$$\lim_{x \to R^-} f(x) = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Demostració. Veurem la condició de Cauchy. Donat $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{x \in [0,R]} \left| \sum_{n=N}^{M} a_n x^n \right| = \sup_{x \in [0,R]} \left| \sum_{n=N}^{M} a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n \right|$$

Si anomenem $S_k = \sum_{j \geq k} a_j R^j$, llavors

$$\sup_{x \in [0,R]} \left| \sum_{n=N}^{M} a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n \right| = \sup_{x \in [0,R]} \left| \sum_{n=N}^{M} (S_n - S_{n+1}) \left(\frac{x}{R} \right)^n \right|$$

Per la fórmula de sumació parcial d'Abel,

$$\sup_{x \in [0,R]} \left| \sum_{n=N}^{M} (S_n - S_{n+1}) \left(\frac{x}{R} \right)^n \right| = \sup_{x \in [0,R]} \left| \sum_{n=N+1}^{M} S_n \left[\left(\frac{x}{R} \right)^n - \left(\frac{x}{R} \right)^{n-1} \right] + S_N \left(\frac{x}{R} \right)^N - S_{M+1} \left(\frac{x}{R} \right)^M \right|$$

$$\leq \sup_{x \in [0,R]} \left(\sum_{n=N+1}^{M} |S_n| \left| \left(\frac{x}{R} \right)^n - \left(\frac{x}{R} \right)^{n-1} \right| + \left| S_N \left(\frac{x}{R} \right)^N \right| + \left| S_{M+1} \left(\frac{x}{R} \right)^M \right| \right)$$

Com que $\sum a_n R^n$ és convergent, per N, M prou grans, $|S_N|, |S_M| < \varepsilon$, i com que $x/R \leq 1$, llavors

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,R]} \left(\sum_{n=N+1}^{M} |S_n| \left| \left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1} \right| + \left| S_N \left(\frac{x}{R}\right)^N \right| + \left| S_{M+1} \left(\frac{x}{R}\right)^M \right| \right) \\
&< \sup_{x\in[0,R]} \left(\sum_{n=N+1}^{M} \varepsilon \left| \left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1} \right| + 2\varepsilon \right)
\end{aligned}$$

Com que $\left(\frac{x}{R}\right)^n < \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1}$ per a tot n, tenim que

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,R]} \left(\sum_{n=N+1}^{M} \varepsilon \left| \left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1} \right| + 2\varepsilon \right) = \sup_{x\in[0,R]} \left(\varepsilon \sum_{n=N+1}^{M} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{R}\right)^n \right] + 2\varepsilon \right) \\
&= \sup_{x\in[0,R]} \left(\varepsilon \left[\left(\frac{x}{R}\right)^N - \left(\frac{x}{R}\right)^M \right] + 2\varepsilon \right) < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Per tant, la sèrie és uniformement convergent en $[0, R]$. Com que es tracta d'una sèrie de funcions continues i el límit és uniforme, $f(x)$ és contínua en $[0, R]$. En particular, $\lim_{x\to R^-} f(x) = \sum a_n R^n$. $\square$

Exemple 2.3.27. Intentarem sumar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Considerem $f(x) = \ln(1-x)$. Calculem primer el seu desenvolupament en sèrie. Per fer-ho, considerem la seva derivada, $f'(x) = -1/(1-x)$, que sabem que desenvolupa com

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

per $x \in (-1, 1)$. Ara, pel teorema 2.2.7, tenim que

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-1,1)$$

Si prenem $x = -1$, $f(-1)$ és convergent, perquè

$$f(-1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

és una sèrie numèrica alternada on $1/(n+1)$ és decreixent amb límit zero. Pel teorema d'Abel, tenim que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

però $f(x)$ és una funció contínua aprop de -1, i per tant el límit és $f(-1)$. Ara, $f(-1) = \ln(2)$. Queda que

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

2.4 | Teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass

Per funcions derivables en un interval, sabem que podem aproximar-les pel seu polinomi de Taylor. Ara bé, que podem dir de funcions no necessàriament derivables, però continues?

Definició 2.4.1. *Sigui f una funció de variable real. Diem que f té* suport compacte[1] *si existeix $M > 0$ tal que $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$.*

Definició 2.4.2. *Siguin f, g funcions de variable real a suport compacte. Definim la* convolució de f amb g *com*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

Definició 2.4.3. *Diem que una successió de funcions (ϕ_ε) a suport compacte és una* aproximació de la unitat *si*

1. $\phi_\varepsilon \geq 0$
2. $\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon = 1$
3. *Per a tot $\delta > 0$ es compleix que $\phi_\varepsilon(t)$ convergeix uniformement a 0 quan $\varepsilon \longrightarrow 0$, si $|t| > \delta$.*

Lema 2.4.4. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua a suport compacte. Sigui (ϕ_ε) una aproximació de la unitat. Aleshores, $(f * \phi_\varepsilon)$ convergeix uniformement a f en $\mathbb{R}$ quan $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Demostració. Volem veure que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

a mesura que $\varepsilon \longrightarrow 0$. Tenim que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_\varepsilon(x-t)dt - f(x) \right|$$

Com que $f(x)$ és un nombre fix respecte t i $\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon = 1$, tenim que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_\varepsilon(x-t)dt - f(x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(x))\, \phi_\varepsilon(x-t)dt \right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(x-t)dt \right)$$

Ara, demostrarem que podem fer aquest suprem tant petit com vulguem. Per començar, donat $\eta > 0$, podem trobar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(t)| < \eta/2$ si $|x - t| < \delta$, perquè f és una funció contínua. Prenem, doncs, aquest δ, i escrivim

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(x-t)dt \right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(x-t)dt + \int_{\mathbb{R}-[x-\delta,x+\delta]} |f(t) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(x-t)dt \right) \\
&< \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{\eta}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \phi_\varepsilon(x-t)dt + \int_{\mathbb{R}-[x-\delta,x+\delta]} |f(t) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(x-t)dt \right)
\end{aligned}$$

Com que ϕ_ε és una funció positiva per ser una aproximació de la unitat, es compleix que

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \phi_\varepsilon(x-t)dt \leq \int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(t)dt = 1$$

[1] En general, el suport d'una funció són els punts on la funció no val zero.

Per tant,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\phi_\varepsilon(x-t)dt+\int_{\mathbb{R}-[x-\delta,x+\delta]}|f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)dt\right)\\&\leq\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\int_{\mathbb{R}-[x-\delta,x+\delta]}|f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)dt\right)\end{aligned}$$

Ara, estudiem la integral que queda. Per començar, fem un canvi de variable $y=x-t$, $dy=-dt$, de manera que queda

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\int_{\mathbb{R}-[x-\delta,x+\delta]}|f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)dt\right)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\int_{|y|>\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(y)dy\right)$$

Ara, es té que $\phi_\varepsilon(y)\leq\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)$ dins de la integral. Per tant,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\int_{|y|>\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(y)dy\right)\leq\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\left(\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)\right)\int_{|y|>\delta}|f(x-y)-f(x)|\,dy\right)$$

Però com que f és contínua i té suport compacte, la integral que queda està acotada per alguna constant K positiva,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\left(\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)\right)\int_{|y|>\delta}|f(x-y)-f(x)|\,dy\right)\leq\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{\eta}{2}+\left(\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)\right)K\right)\\&=\frac{\eta}{2}+\left(\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)\right)K\end{aligned}$$

Finalment, donat aquest δ podem trobar un ε prou petit de manera que

$$\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)<\frac{\eta}{2K}$$

perquè ϕ_ε convergeix uniformement a zero en $|y|>\delta$ al ser una aproximació de la unitat. Resumint,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|(f*\phi_\varepsilon)(x)-f(x)|<\frac{\eta}{2}+\left(\sup_{|y|>\delta}\phi_\varepsilon(y)\right)K<\frac{\eta}{2}+\frac{K\eta}{2K}=\eta$$

i això acaba la prova. □

Teorema 2.4.5 (d'aproximació polinòmica de Weierstrass). *Sigui $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores, existeixen polinomis p_n tals que p_n convergeixen uniformement a f en $[a,b]$.*

Demostració. Exposem la demostració donada per Landau al 1908. Primer, definim

$$\phi_{1/N}(t)=\begin{cases}\frac{(1-t^2)^N}{\int_{-1}^1(1-u^2)^N du}\text{ si } t\in[-1,1]\\0\text{ si } t\notin[-1,1]\end{cases}$$

Veiem que $(\phi_{1/N})$ és una aproximació de la unitat. Les dues primeres propietats són clares. Veiem doncs la tercera: donat $\delta>0$, tenim que

$$\int_{-1}^{1}(1-u^2)^N\,du=2\int_0^1(1-u^2)^N\,du$$

Aprofitant la *desigualtat de Bernoulli*,

$$(1+x)^n\geq 1+nx\ \ \forall x\geq-1,\ n\geq 1$$

tenim que

$$2\int_0^1 (1-u^2)^N\ du \geq 2\int_0^{1/\sqrt{N}} 1-Nu^2\ du = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{N}}$$

Llavors

$$\sup_{|t|>\delta} \left|\phi_{1/N}(t)\right| = \sup_{1>|t|>\delta} \left|\frac{(1-t^2)^N}{\int_{-1}^1 (1-u^2)^N\ du}\right| \leq \sup_{1>|t|>\delta} \left|\frac{3\sqrt{N}}{4}(1-t^2)^N\right| \leq \frac{3}{4}(1-\delta^2)^N\sqrt{N} \longrightarrow 0$$

Per tant, $(\phi_{1/N})$ és aproximació de la unitat.

Ara, sense pèrdua de generalitat, podem assumir que f està definida en $[0,1]$ (sinó, consideraríem $f_{[0,1]}(x) = f(a+x(b-a))$, i si aquesta és límit uniforme de polinomis, l'original també). També podem assumir que $f(0) = f(1) = 0$ (sinó, consideraríem $f_{0,0}(x) = f(x) - [f(0) + (f(1) - f(0))x]$, i novament si aquesta és límit uniforme de polinomis, f ho és).

També podem ampliar la definició de f, fent que $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$. D'aquesta manera, f esdevé una funció contínua a suport compacte.

Pel lema 2.4.4 sabem que $(f * \phi_{1/N})$ convergeix uniformement a f en tot $\mathbb{R}$. Si veiem que $f * \phi_{1/N}$ és un polinomi per $x \in [0,1]$, ja estarem.

$$\left(f * \phi_{1/N}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_{1/N}(x-t)dt = \int_0^1 f(t)\phi_{1/N}(x-t)dt$$

Com que prenem $x \in [0,1]$, es té que $x - t \in [-1,1]$. En aquest interval, $\phi_{1/N}(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^N}{\int_{-1}^1 (1-u^2)^N\ du}$, i aquesta és l'expressió d'un polinomi que desenvolupa com

$$\phi_{1/N}(x-t) = \sum_{j,k} b_{jk} x^j t^k$$

per algun número finit d'índexs j,k alguns coeficients b_{jk}. Com que hi ha un número finit de sumands, la integral de la suma és la suma d'integrals, i queda

$$\int_0^1 f(t)\phi_{1/N}(x-t)dt = \int_0^1 f(t)\sum_{j,k} b_{jk}x^j t^k dt = \int_0^1 \sum_{j,k} f(t)b_{jk}x^j t^k dt = \sum_{j,k}\int_0^1 f(t)b_{jk}x^j t^k dt$$

i com que b_{jk} i x^j són nombres fixats respecte la variable d'integració,

$$\sum_{j,k}\int_0^1 f(t)b_{jk}x^j t^k dt = \sum_{j,k} b_{jk}x^j \int_0^1 f(t)t^k dt$$

que és un polinomi, com volíem. $\square$

Exemple 2.4.6. Considerem $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostrarem que $f \equiv 0$.

És clar que si f compleix la propietat donada, llavors $\int_a^b f(x)p(x)dx = 0$ per a qualsevol polinomi $p(x)$. Pel teorema de Weierstrass, sabem que existeixen $p_n(x)$ polinomis tals que convergeixen uniformement a f. Llavors,

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)p_n(x)dx = 0$$

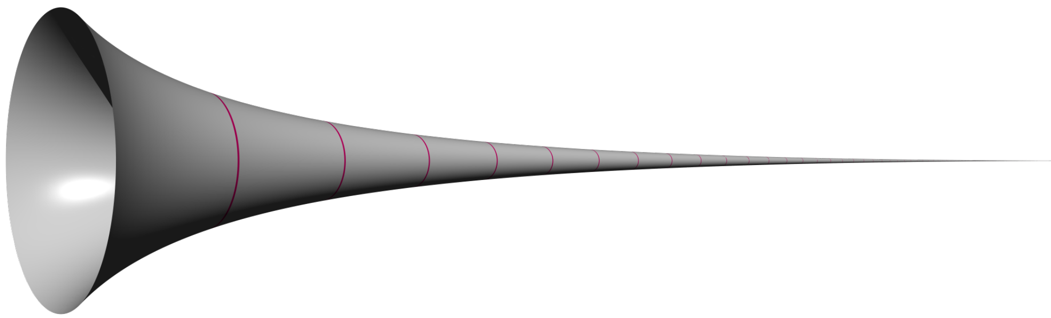
Si la integral de f^2, que és una funció no negativa, és nul·la, vol dir que $f^2 \equiv 0$, i per tant $f \equiv 0$.

Des del moment en que Weierstrass va publicar aquest resultat d'aproximació per polinomis, molts matemàtics de l'època (Picard, Fejér, Lebesgue,...) es van interessar en aquest i en donar demostracions alternatives, però la més senzilla que se'n va aconseguir trobar va ser la que hem exposat aquí. El lector pot trobar tota la resta de proves degudes a aquests matemàtics en [5], on també es ressenya la història relacionada a aquest descobriment.

Capítol 3

Integrals impròpies

És dit que l'Arcàngel Gabriel porta una banya que farà sonar el dia del Judici Final. No és d'estranyar, doncs, que amb aquesta imatge de gran anunciador, algú decidís identificar una banya tan poderosa com aquesta amb la formidable *trompeta de Torricelli*.



Certament, la característica més destacable d'aquesta figura, obtinguda al revolucionar la funció $f(x) = 1/x$ definida en $[1, \infty)$ al voltant de l'eix x, és que tanca un volum finit emprant una àrea superficial infinita.

Essencialment, la màgia de les integrals impròpies és la mateixa. En aquest capítol, generalitzarem el concepte d'integral de Riemann per donar sentit a integrals de funcions de les quals abans no en podíem parlar trivialment, ja fos perquè la funció no estava acotada en l'interval d'integració, perquè es definia en un interval d'integració de longitud infinita,...

Començarem el capítol definint la convergència d'una integral impròpia, i de manera semblant al que vam fer quan parlàvem de sèries numèriques, entrarem a veure criteris de convergència per integrals impròpies de funcions positives, veurem la convergència absoluta i donarem un criteri de Dirichlet per funcions més generals. Seguidament, es farà un petit estudi de la funció Gamma d'Euler, que ens acabarà ajudant a entendre el creixement del factorial. Per últim, veurem com ens ajuda el poder derivar funcions de varies variables sota el signe integral, per tal de calcular el valor d'integrals impròpies.

3.1 | Introducció. Funcions localment integrables

Definició 3.1.1. *Sigui* $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *amb* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Diem que* f *és* localment integrable en $[a,b)$ *si* f *és integrable Riemann en* $[a,x]$ *per a tot* $x < b$.

Exemple 3.1.2. Considerem $f(x) = \sin(1/x)$, i l'interval $I = (0,1]$. Llavors, és clar que f és localment integrable en I, perquè donat $x > 0$, f és contínua en l'interval tancat $[x,1]$, i tota funció contínua en un interval tancat és integrable Riemann.

Tant de la definició com del exemple anterior se'n segueix que tota funció contínua en un interval $[a,b)$ és localment integrable en $[a,b)$.

Que una funció sigui localment integrable en un interval $[a,b)$ dóna molta informació sobre el comportament de la funció. Per exemple, si f no fos integrable en $[a,b]$, però sí localment integrable en $[a,b)$, estaríem dient que l'única raó per la qual no podem parlar de la integral en $[a,b)$ és el punt b. Hem de trobar, doncs, una manera d'estendre la integral a aquest punt. Com que per a qualsevol $x < b$ sí tenim la integral ben definida, podem pensar que la integral en $[a,b)$ és la integral en $[a,x]$ quan x és arbitràriament proper a b. El límit, doncs, és l'arma adequada per atacar el problema.

Definició 3.1.3. *Sigui* $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció localment integrable. Suposem que existeix*

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f$$

i és finit. Anomenem integral impròpia de f en $[a,b)$, *i el denotem simplement per* $\int_a^b f$, *al valor d'aquest límit. En aquest cas, diem també que la integral impròpia és* convergent.

Hi ha moltes raons per les quals podria fer falta estendre la integral d'una funció de manera impròpia en un interval $[a,b)$. Les situacions més típiques en les que cal fer això són aquelles en que, o bé l'interval $[a,b)$ no és finit (és a dir, $b = \infty$), o bé la funció no està acotada al apropar-se a b, però n'hi poden haver d'altres (repasseu l'exemple anterior). És important, doncs, analitzar en cada cas la causa per la qual no podem integrar la funció directament en l'interval $[a,b]$.

Exemple 3.1.4. Veiem alguns exemples representatius d'integrals impròpies:

1. Considerem
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$
Aquesta és una integral impròpia, perquè l'interval de definició de la funció, $[1,\infty)$, té longitud infinita. Veiem per a quins valors de α pren valor finit aquesta integral. Per definició,
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t\to\infty} \begin{cases} \ln(t) \text{ si } \alpha = 1 \\ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$
Evidentment, si $\alpha = 1$, $\lim \ln(t) = \infty$. Per tant, en aquest cas, no podem parlar de la integral impròpia. Igualment, si $\alpha < 1$, llavors $1 - \alpha > 0$, i per tant
$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \infty$$
En canvi, per $\alpha > 1$, tenim que $1 - \alpha < 0$, de manera que
$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$
Per tant, la integral impròpia és convergent per $\alpha > 1$. [2]

[2] Aquest resultat no ens hauria de sorprendre gaire, doncs és la versió contínua de la sèrie harmònica, que efectivament era convergent per $\alpha > 1$.

2. Considerem
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$
Aquesta integral és impròpia perquè la funció $1/x^\alpha$ pot no ser acotada, segons els valors de α, aprop de l'origen. Apliquem, doncs, la definició d'integral impròpia. Tenim que,
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{t\to 0}\begin{cases} -\ln(t) \text{ si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$
És immediat veure que, pels casos $\alpha = 1$ o $\alpha > 1$, el límit no és finit. En canvi, si $\alpha < 1$, el límit val $1/(1-\alpha)$, i per tant, la integral impròpia és convergent.

3.2 | Integrals impròpies de funcions positives

Al igual que vam fer amb les sèries numèriques, podem donar criteris per integrals impròpies $\int_a^b f$ on f és una funció localment integrable i positiva en l'interval $[a, b)$ ($f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, b)$). De fet, una primera observació que podem fer és que $\int_a^b f$ serà convergent si i només si $\int_a^x f$ és acotada per a tot $x < b$ (la implicació directa és trivial, el recíproc és cert perquè $\int_a^x f$ és creixent amb x, i una funció creixent i acotada té límit). També notem, com vam fer al parlar de sèries de termes positius, que els següents criteris són també vàlids per a funcions que siguin positives almenys en $[c, b)$, amb $c \in [a, b)$, perquè la integral $\int_a^b f$ la podem trencar en $\int_a^c f + \int_c^b f$, on la primera està ben definida perquè f és localment integrable.

Per integrals impròpies de funcions positives, denotarem que $\int_a^b f$ és convergent com $\int_a^b f < \infty$.

Teorema 3.2.1 (**Criteri de comparació**). *Siguin $f, g : [a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ dues funcions localment integrables en $[a, b)$. Aleshores:*

1. *Si donat $C > 0$, existeix $x_0 < b$ tal que $f(x) \leq Cg(x)$ per a tot $x \geq x_0$, i $\int_a^b g < \infty$, llavors $\int_a^b f < \infty$.*
2. *Sigui $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Llavors,*
   (a) *Si $l \neq 0, \infty$, es té que $\int_a^b f < \infty$ si i només si $\int_a^b g < \infty$*
   (b) *Si $l = 0$ i $\int_a^b g < \infty$, es té que $\int_a^b f < \infty$*
   (c) *Si $l = \infty$ i $\int_a^b f < \infty$, es té que $\int_a^b g < \infty$*

Demostració. Veiem cada apartat per separat.

1. Serà suficient veure que $\int_a^x f$ és acotada per a tot x. Per $x \geq x_0$, es té que
$$\int_a^x f \leq \int_a^x Cg = C\int_a^x g$$
Per tant, només hem de veure que $\int_a^x g$ és acotada. Però això és evident perquè $\int_a^b g < \infty$.
2. Sigui $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Llavors:
   (a) Suposem que l no és zero ni infinit. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $x_0 < b$ tal que
$$l - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \varepsilon$$
   si $x \geq x_0$. En particular, $f(x) \leq (l + \varepsilon)g(x)$ per $x \geq x_0$. Per l'apartat 1 del teorema, tenim que $\int_a^b g < \infty$ implica que $\int_a^b f < \infty$. Amb l'altra desigualtat es proba la implicació contrària.

(b) Suposem que $l = 0$. Això vol dir que donat $\varepsilon > 0$ existeix $x_0 < b$ tal que $f(x) \leq \varepsilon g(x)$. Novament per l'apartat 1 es dóna la relació.

(c) Suposem que $l = \infty$. Això vol dir que $\lim_{x\to b} g(x)/f(x) = 0$. Ens reduïm al cas anterior.

$\square$

Exemple 3.2.2. Considerem $a > 0$, i la integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2/3}\sqrt[3]{x^a+1}}dx$$

Aquesta és una integral impròpia per la longitud infinita del domini d'integració i perquè la funció a integrar no està acotada a la vora de zero. Volem veure, doncs, per a quins valors de a és convergent. Per facilitar les coses, separem la integral en dues, per tractar amb els punts conflictius 0 i ∞ per separat,

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2/3}\sqrt[3]{x^a+1}}dx = \int_0^{15} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2/3}\sqrt[3]{x^a+1}}dx + \int_{15}^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2/3}\sqrt[3]{x^a+1}}dx$$

Com que la funció és positiva en $[0,\infty)$, podem aplicar el criteri de comparació. Per la primera part, considerem

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$$

Per la segona part, considerem

$$g(x) = \frac{1}{x^{2/3+a/3-1/2}}$$

És fàcil veure que f i g es comporten com la funció a integrar en 0 i ∞, respectivament (és a dir, que el límit del quocient no és zero ni infinit en cap dels casos). Llavors,

$$\int_0^{15} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2/3}\sqrt[3]{x^a+1}}dx + \int_{15}^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2/3}\sqrt[3]{x^a+1}}dx \sim \int_0^{15} \frac{1}{x^{2/3}}dx + \int_{15}^\infty \frac{1}{x^{2/3+a/3-1/2}}dx$$

La primera integral és convergent perquè $2/3 < 1$. La segona integral ho és quan

$$\frac{2}{3} + \frac{a}{3} - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$$

El criteri integral, vist en el capítol 1, també és una bona eina en el cas de les integrals impròpies de funcions positives. Recordem-lo.

Teorema 3.2.3 (Criteri integral). *Sigui $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ una funció decreixent localment integrable. Llavors, $\sum f(n) < \infty$ si i només si $\exists\, C > 0$ tal que $\int_1^n f(x)dx \leq C$ per a tot n.*

Per la observació feta al principi d'aquesta secció i pel criteri integral, és equivalent veure que $\sum f(n) < \infty$ a veure que $\int_1^\infty f < \infty$.

Exemple 3.2.4. Volem veure per a quins valors de $a > 0$ la integral

$$\int_0^\infty a^x \; dx$$

és convergent. Per començar, notem que el punt conflictiu el tenim al integrar fins a l'infinit (l'interval d'integració no està acotat). Si $a \geq 1$, la funció a^x és creixent, de manera que $\int_0^c a^x\; dx$ no està acotada a mesura que c es fa gran, i la integral és clarament divergent. Veiem que passa, doncs, si $a < 1$. En aquest cas, podem considerar

$$\int_0^\infty a^x\; dx = \int_0^1 a^x\; dx + \int_1^\infty a^x\; dx$$

i preocupar-nos per la segona integral. Si $a < 1$, la funció a^x és decreixent, i podem aplicar el criteri integral, de manera que $\int_1^\infty a^x \, dx$ serà convergent si i només si la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$$

és convergent.

Ara que tenim una sèrie de termes positius a estudiar, podem aplicar, per exemple, el criteri de l'arrel. Tenim que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = a < 1$$

de manera que la sèrie és convergent, i queda doncs que la integral original és convergent.

3.3 | Convergència absoluta d'integrals impròpies. Criteri de Dirichlet

En general, l'estudi de la convergència d'una integral impròpia és una tasca complicada. Afortunadament, hi ha eines que ja coneixem i que ens seran útils. Veiem la condició de Cauchy, la convergència absoluta i el criteri de Dirichlet.

Proposició 3.3.1 (**Condició de Cauchy**). *Sigui $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ localment integrable. Llavors, $\int_a^b f$ és convergent si i només si es verifica la condició de Cauchy: per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $x_0 < b$ tal que*

$$\left| \int_y^x f \right| < \varepsilon$$

si $b > x, y \geq x_0$.

Demostració. La integral impròpia serà convergent si i només si $\int_a^x f$ té límit quan $x \to b$. Això equival a dir que $\int_a^x f$ és de Cauchy: per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $x_0 < b$ tal que $\left|\int_a^x f - \int_a^y f\right| < \varepsilon$ si $x, y \geq x_0$. És a dir, $\left|\int_y^x f\right| < \varepsilon$ si $x, y \geq x_0$. □

Definició 3.3.2. *Sigui $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ localment integrable. Diem que $\int_a^b f$ és* absolutament convergent *si $\int_a^b |f|$ és convergent.*

És clar que si $\int_a^b f$ és absolutament convergent, llavors $\int_a^b f$ és convergent, perquè donat $\varepsilon > 0$, es té que $\left|\int_y^x f\right| \leq \left|\int_y^x |f|\right| < \varepsilon$ si x, y són prou propers al punt b.

Exemple 3.3.3. Donats $\alpha, \beta > 0$, volem veure la convergència de

$$\int_0^\infty p(x) e^{-\alpha x^\beta} dx$$

on $p(x)$ és un polinomi arbitrari. Per fer-ho, intentem veure convergència absoluta; és a dir, mirem la convergència de

$$\int_0^\infty \left| p(x) e^{-\alpha x^\beta} \right| dx = \int_0^\infty |p(x)| \, e^{-\alpha x^\beta} dx$$

L'únic punt conflictiu de la integral és l'infinit. Com que ara tenim la integral impròpia d'una funció positiva, sigui $\eta > 0$ tal que $\alpha - \eta > 0$, i comparem la funció a integrar amb $e^{-(\alpha-\eta)x^\beta}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|p(x)| e^{-\alpha x^\beta}}{x^{-(\alpha-\eta)x^\beta}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|p(x)|}{e^{\eta x^\beta}} = 0$$

Per tant, el problema es tradueix a veure per a quins valors de α i β és convergent la integral

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha-\eta)x^\beta}\ dx$$

Per veure-ho, apliquem el canvi de variable $x^\beta = t$, $dx = dt/\left(\beta t^{(\beta-1)/\beta}\right)$. Llavors,

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha-\eta)x^\beta}\ dx = \int_0^\infty e^{-(\alpha-\eta)t}\frac{1}{\beta t^{(\beta-1)/\beta}}dt$$

Amb el canvi de variable fet, tenim que els dos extrems d'integració són conflictius. Separem la integral en dos parts, de manera que

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{-(\alpha-\eta)t}\frac{1}{t^{(\beta-1)/\beta}}dt = \frac{1}{\beta}\left[\int_0^1 e^{-(\alpha-\eta)t}\frac{1}{t^{(\beta-1)/\beta}}dt + \int_1^\infty e^{-(\alpha-\eta)t}\frac{1}{t^{(\beta-1)/\beta}}dt\right]$$

Totes dues són de termes positius, per tant podem tornar a comparar. La primera es comporta com

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(t^{(\beta-1)/\beta}\right)}dt$$

que és convergent perquè $(\beta-1)/\beta < 1$. La segona és menor que

$$\int_1^\infty e^{-(\alpha-\eta-\delta)t}dt$$

per qualsevol δ tal que $\alpha-\eta-\delta > 0$, i també és convergent. Es conclou, doncs, que per qualsevol parella $\alpha,\beta > 0$, $\int_0^\infty |p(x)|e^{-\alpha x^\beta}$ és convergent. En particular, $\int_0^\infty p(x)e^{-\alpha x^\beta}$ és convergent.

Teorema 3.3.4 (Criteri de Dirichlet). *Siguin $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions localment integrables de classe $\mathcal{C}^1$ (derivables amb derivada contínua). Suposem que*

1. *Existeix $C > 0$ tal que $|\int_a^x f| \leq C$ per a tot $x \in [a,b)$*
2. *g es decreixent i $\lim_{x\to b} g(x) = 0$*

Llavors, $\int_a^b f\cdot g$ és convergent.

Demostració. Demostrarem que existeix $\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)g(t)\ dt$ i que és finit. Per començar, definim $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, i apliquem integració per parts, de manera que

$$\int_a^x f(t)g(t)\ dt = [F(y)g(y)]_a^x - \int_a^x F(t)g'(t)\ dt$$

Notem que $F(a) = 0$. Per tant,

$$\int_a^x f(t)g(t)\ dt = F(x)g(x) - \int_a^x F(t)g'(t)\ dt$$

Com que $|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)\ dt\right| \leq C$ i $\lim_{x\to b} g(x) = 0$, el terme $F(x)g(x)$ tendeix a zero quan $x \to b$. D'altra banda, podem veure que $\int_a^b F\cdot g'$ és absolutament convergent. Efectivament,

$$\int_a^x |F(t)g'(t)|\ dt \leq C\int_a^x |g'(t)|\ dt$$

com que g és decreixent, $g' < 0$, de manera que $|g'| = -g'$, i tenim

$$\int_a^x |F(t)g'(t)|\ dt \leq -C\int_a^x g'(t)\ dt = C\left(g(a) - g(x)\right)$$

Ara, al prendre límits,

$$\int_a^b |F(t)g'(t)|\ dt \leq \lim_{x\to b} C\left(g(a) - g(x)\right) = Cg(a) < \infty$$

Queda doncs que $\int_a^b F\cdot g'$ és absolutament convergent. En particular és convergent, i tot plegat fa que $\int_a^b f\cdot g$ sigui convergent. $\square$

Exemple 3.3.5. Sigui $\alpha > 0$, i considerem

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

volem veure per a quins valors de α la integral impròpia és convergent. Com que tant 0 com ∞ són punts conflictius, comencem per separar la integral en dos parts,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

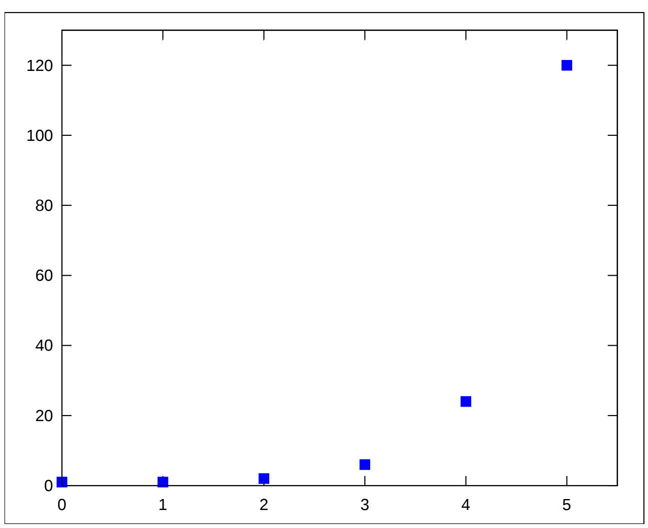
La primera integral és d'una funció positiva, i es comparable a $\int_0^1 1/x^{\alpha-1} dx$, que és convergent quan $\alpha - 1 < 1$, és a dir $\alpha < 2$. Per la segona part, observem que

1. $\left|\int_1^x \sin t\ dt\right| = |-\cos(x) + \cos(1)| \leq 2$
2. $1/x^\alpha$ és decreixent i $\lim_{x\to\infty} 1/x^\alpha = 0$

Podem aplicar el criteri de Dirichlet, de manera que $\int_1^\infty \sin x/x^\alpha dx$ també és convergent. Queda que $\int_0^\infty \sin x/x^\alpha dx$ és convergent per $\alpha < 2$.

3.4 | Aplicació de les integrals impròpies: funció Gamma d'Euler

Donat $n \in \mathbb{N}$, sabem definir el *factorial de n*, com $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$. La figura següent mostra el valor del factorial pels primers naturals.



La pregunta és: hi ha alguna manera de generalitzar aquesta funció, per poder definir $x!$ per a qualsevol $x > 0$?

Definició 3.4.1. *Per a $x > 0$, la* funció Gamma *es defineix com*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Abans de res, veiem que $\Gamma(x)$ és convergent per a tot $x > 0$. Tenim que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Totes dues integrals són de funció positiva i podem aplicar sobre elles el criteri de comparació. La primera és equivalent a $\int_0^1 t^{x-1}dt$ que és convergent perquè $x > 0$, i llavors $1-x < 1$. La segona també ho és perquè, per a qualsevol $0 < \alpha < 1$, existeix x_0 prou gran de manera que $\int_{x_0}^\infty t^{x-1}e^{-t}$ està acotada per $\int_{x_0}^\infty e^{-(1-\alpha)t}$, que és convergent. Llavors, $\Gamma(x)$ és convergent.

Observem que $n!$ està ben definit si el pensem com $n! = n \cdot (n-1)!$ per a tot $n > 0$, i $0! = 1$. Disposa $\Gamma(x)$ d'aquesta propietat?

Teorema 3.4.2. *La funció Gamma és la generalització del factorial: per a tot $x > 0$ es té que $\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x)$. En particular, $\Gamma(n+1) = n!$.*

Demostració. Tenim que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M t^x e^{-t}dt = \lim_{M\to\infty}\left[\left[-t^x e^{-t}\right]_0^M + x\int_0^M t^{x-1}e^{-t}dt\right]$$
$$= \lim_{M\to\infty} -M^x e^{-M} + x\int_0^M t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\ \Gamma(x)$$

□

L'estudi de les propietats de la funció Gamma és inexhaurible, així com les preguntes que es poden fer al voltant d'aquesta. A continuació resolem una d'aquestes, d'especial interès per un curs d'anàlisi com aquest: a que es comparable $\Gamma(x)$, per x prou gran?

Teorema 3.4.3. *La funció Gamma satisfà*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x\sqrt{2\pi x}} = 1$$

Demostració. Tenim que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt$$

Apliquem el canvi de variable $t = x(1+u)$, $dt = x\ du$, de manera que

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \int_{-1}^\infty x^{x+1}(1+u)^x e^{-x(1+u)}du = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^\infty \left[(1+u)e^{-u}\right]^x du$$

Ara, busquem $h(u)$ tal que

$$(1+u)e^{-u} = e^{-\frac{u^2}{2}h(u)}$$

Tenim que

$$\ln\left((1+u)e^{-u}\right) = \ln(1+u) - u = -\frac{u^2}{2}h(u) \Rightarrow h(u) = \frac{2\ln(1+u) - 2u}{-u^2}$$

Llavors

$$x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^\infty \left[(1+u)e^{-u}\right]^x du = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}h(u)x}du$$

Apliquem un nou canvi de variable, $u = \sqrt{2/x}\ s$, $du = \sqrt{2/x}\ ds$, i ens queda

$$x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}h(u)x}du = \sqrt{2}\ x^{x+1/2}e^{-x}\int_{-\sqrt{x/2}}^{\infty} e^{-h\left(s\sqrt{2/x}\right)s^2}ds$$

Ara, intentem calcular el límit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}\ x^{x+1/2}e^{-x}\int_{-\sqrt{x/2}}^{\infty} e^{-h\left(s\sqrt{2/x}\right)s^2}ds}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{x/2}}^{\infty} e^{-h\left(s\sqrt{2/x}\right)s^2}ds$$

Observem que

$$\lim_{x\to\infty} h\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\ s\right) = \lim_{u\to 0} h(u) = \lim_{u\to 0}\frac{2\ln(1+u)-2u}{-u^2} = \lim_{u\to\infty} -2\frac{1/(1+u)-1}{2u} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+u} = 1$$

De manera no trivial (veure [9], p. 195) es comprova que

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\sqrt{x/2}}^{\infty} e^{-h\left(s\sqrt{2/x}\right)s^2}ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds$$

i aquesta última integral val $\sqrt{\pi}$. □

Aquest teorema, pel cas en que x sigui un número natural, ens dóna el que es coneix com *fórmula d'Stirling*, que determina a què és comparable el factorial d'un número natural quan aquest número és prou gran.

Corol·lari 3.4.4 (**Fórmula d'Stirling**).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

Demostració. Conseqüència directa del teorema anterior i del fet que $\Gamma(n+1) = n!$. □

3.5 | Derivació sota el signe integral

Acabem el capítol veient alguns resultats relacionats amb funcions definides a $\mathbb{R}^2$, que acabaran donant eines que ens ajuden al càlcul d'integrals impròpies.

Definició 3.5.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^2$ obert i sigui $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Sigui $(x_0, y_0) \in U$. Diem que f és* contínua en (x_0, y_0) *si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que $||f(x,y) - f(x_0,y_0)|| < \varepsilon$ si $||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta$.*

Definició 3.5.2. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i sigui $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diem que f és* uniformement contínua en U *si per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $||f(x,y) - f(x_0,y_0)|| < \varepsilon$ si $||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta$ per a tot $(x_0,y_0) \in U$. En particular, δ no depèn de (x_0,y_0), un cop donat ε.*

Teorema 3.5.3. *Sigui $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua en $[a,b] \times [c,d]$. Llavors, f és uniformement contínua en $[a,b] \times [c,d]$.*

Demostració. Com que f és contínua, tenim que en cada (x_0,y_0), i amb $\varepsilon > 0$ fixat, podem trobar un $\delta_{(x_0,y_0)} > 0$ tal que $||f(x,y) - f(x_0,y_0)|| < \varepsilon$ sempre que $||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta_{(x_0,y_0)}$. Ara, pensem $\delta_{(x_0,y_0)}$ com una funció

$$\begin{aligned} \delta : [a,b] \times [c,d] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_0,y_0) &\longmapsto \delta_{(x_0,y_0)} \end{aligned}$$

i considerem $\mathrm{Im}(\delta)$, que és el conjunt de totes les deltes que s'escullen aplicant la condició de continuïtat a cada (x_0,y_0) amb ε fixat. Observem que aquest conjunt està acotat inferiorment (almenys per 0). Si trobéssim una cota inferior positiva, podríem prendre aquesta cota δ_0, i seria la nostra delta de continuïtat uniforme, vàlida per a tot (x_0,y_0) sempre que ε romangui fixat.

Demostrem, doncs, que $\mathrm{Im}(\delta)$ té una cota inferior positiva. Per fer-ho, suposem que no n'hi ha cap. Llavors, per a cada $n \in \mathbb{N}$ podem trobar un (x_n,y_n) tal que $\delta_{(x_n,y_n)} < 1/n$. Com que $((x_n,y_n))$ és una successió en un subconjunt tancat i acotat de $\mathbb{R}^2$, té una parcial $((x_{n_k},y_{n_k}))$ convergent dins del subconjunt a un punt $(\tilde{x},\tilde{y})$. Ara, quina delta correspon a aquest punt? Hem de tenir en compte que

$$\delta_{(x_{n_k},y_{n_k})} < \frac{1}{n_k}$$

i a mesura que $k \to \infty$, es té que $n_k \to \infty$ i per tant $\delta_{(x_{n_k},y_{n_k})}$ tendeix a zero, quedant que $\delta_{(\tilde{x},\tilde{y})} = 0$, i això no pot ser perquè totes les deltes viuen a $\mathbb{R}^+$.

Per tant, hi ha una cota inferior positiva δ_0, que compleix que donat $\varepsilon > 0$, $||f(x,y) - f(x_0,y_0)|| < \varepsilon$ si $||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta_0$, i ambdues constants són vàlides per a tot $(x_0,y_0) \in [a,b] \times [c,d]$, de manera que f és uniformement contínua en $[a,b] \times [c,d]$. $\square$

Suposem que tenim una funció $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, prou regular com per poder considerar una funció

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx$$

definida a l'interval $[c,d]$. Ara, ens agradaria poder relacionar la derivada de F amb la derivada parcial de f respecte de y. Veiem que en podem dir sobre això.

Teorema 3.5.4. *Sigui $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a,b] \times [c,d]$. Considerem $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Llavors,*

1. *$F(y)$ és contínua en $[c,d]$*
2. *Si $\partial f/\partial y$ és contínua en $[a,b] \times [c,d]$, llavors $F(y)$ és derivable en (c,d) i*

   $$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

   per a tot $y \in (c,d)$.

Demostració. Demostrem cada apartat per separat:

1. Veiem que donat $y_0 \in [c,d]$, llavors $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$ si y es prou proper a y_0. Tenim que

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_a^b [f(x,y) - f(x,y_0)]\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\, dx$$

   Com que f és contínua en $[a,b] \times [c,d]$, f és uniformement contínua, i per tant, donat $\varepsilon > 0$ podem prendre $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$ si $||(x,y) - (x,y_0)|| < \delta$, i això serveix per a tot $x \in [a,b]$. Llavors,

$$\int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\, dx < \varepsilon(b-a)$$

2. Prenem $\varepsilon > 0$. Si y i y_0 són prou propers, llavors

$$\left| \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) dx \right|$$

   Pel teorema del valor mig, existeix $\xi \in [y, y_0]$ tal que

$$\left| \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) dx \right|$$

   Ara,

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right] dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right| dx \end{aligned}$$

   Finalment, si y i y_0 són prou propers, ξ i y_0 també, i com que $\partial f/\partial y$ és contínua en $[a,b] \times [c,d]$, és uniformement contínua. En particular, $|\partial f/\partial y(x,\xi) - \partial f/\partial y(x,y_0)| < \varepsilon$ per a tot $x \in [a,b]$, i per tant

$$\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \right| dx < \varepsilon(b-a)$$

□

Observem que, per a cada y fixat, l'expressió $\int_a^b f(x,y)\ dx$ és una integral d'una funció de variable real, a les quals estem àmpliament acostumats. Però seguint amb la tònica del capítol, ens podem imaginar que aquesta integral podria ser impròpia. Per exemple, si en el teorema anterior demanem continuïtat només en $[a,b) \times [c,d]$, integrar fins al punt b respecte de x pot ser un problema. Tot i així, ens agradaria poder derivar sota el signe integral en aquestes situacions on la integral de Riemann no està ben definida de manera elemental. Veiem un teorema que resol aquesta qüestió.

Teorema 3.5.5. *Sigui* $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua en* $[a,b) \times [c,d]$. *Considerem* $F(y) = \int_a^b f(x,y) dx$. *Suposem que*

1. $\partial f/\partial y$ *és contínua en* $[a,b) \times [c,d]$

2. *Donat* $y_0 \in [c,d]$, *existeix* $\delta > 0$ *tal que*

$$\int_a^b \sup_{y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right|\ dx$$

   existeix i és finita en $[a,b)$.

Aleshores, $F(y)$ és derivable en y_0 i

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\ dx$$

Demostració. Podem repetir la demostració del punt 2 del teorema anterior fins just després d'aplicar el teorema del valor mig, de manera que tenim

$$\left|\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx$$

Ara, sigui $\delta > 0$ un nombre prou petit que determinarem posteriorment, i escrivim

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx \\ &= \int_a^{b-\delta} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx + \int_{b-\delta}^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx\end{aligned}$$

La primera integral es fa tant petita com vulguem sempre que ξ i y_0 siguin propers, perquè al ser $\partial f/\partial y$ contínua en $[a, b) \times [c, d]$, és contínua a $[a, b - \delta] \times [c, d]$, i els reduïm a l'argument del teorema anterior a través de la convergència uniforme. Pel que fa a la segona integral, tenim que

$$\begin{aligned}&\int_{b-\delta}^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx \leq \int_{b-\delta}^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)\right| dx + \int_{b-\delta}^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx \\ &\leq 2\int_{b-\delta}^b \sup_{y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| dx\end{aligned}$$

i aquesta es fa també arbitràriament petita a mesura que es fa δ petit, per la condició de Cauchy en 3.3.1 i el fet que, per hipòtesi, aquest δ pot ser tal que

$$\int_a^b \sup_{y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| dx$$

és convergent. □

Exemple 3.5.6. Volem calcular

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ dx$$

que sabem que és convergent per l'exemple 3.3.5. Per fer-ho, considerem la funció

$$f(t, x) = e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}$$

i sigui

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}\ dx$$

Per començar, veiem que F és convergent per a tot $t > 0$. Observem que els dos punts conflictius en la integral són zero i l'infinit, de manera que escrivim

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}\ dx = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}\ dx + \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}\ dx$$

La primera integral és convergent al apropar-nos a zero perquè e^{-tx} tendeix a una constant i $\sin(x)$ és equivalent a x quan x és petit. La segona és convergent al anar a l'infinit pel criteri de Dirichlet.

Si apliquem el teorema, veiem que

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} \right) \, dx = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin(x) \, dx$$

Integrant dues vegades per parts, arribem a que

$$F'(t) = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin(x) \, dx = -\frac{1}{1+t^2}$$

Però ara podem tornar a integrar respecte de t i aplicar la regla de Barrow, quedant

$$F(\infty) - F(t) = \int_t^\infty F'(t) \, dt = -\int_t^\infty \frac{1}{1+t^2} \, dt = -\left(\arctan(\infty) - \arctan(t)\right)$$

D'acord a l'expressió

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

es té que $F(\infty) = 0$. D'altra banda, $\arctan(\infty) = \pi/2$. Tot plegat,

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$$

Observem que la integral que volem calcular es correspon amb $F(0)$. Com que $\arctan(0) = 0$, queda que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Capítol 4

Sèries de Fourier

Quan sentim una peça de música, sigui del estil que sigui, acostumem a escoltar molts instruments alhora. Típicament, cada instrument s'encarrega de aportar una sensació diferent a la composició, perquè cada instrument té una manera de sonar que el caracteritza. Però des del punt de vista físic, aquest fet és sorprenent. Com pot ser que dos instruments, tocant la mateixa nota, puguin sonar tan diferent?

La resposta radica en la manera que cada instrument té de vibrar. Tant l'oscil·lació d'una corda, com la vibració d'una caixa de ressonància, o el moviment de l'aire a l'interior d'un clarinet, es poden entendre com la superposició de moviments fonamentals, anomenats harmònics, de freqüències n vegades la freqüència de la nota que es toca, per a cada n natural. Les diferents contribucions de cada harmònic (que depenen de les característiques de l'instrument) són les que configuren la vibració total, i per tant, són les que atorguen a l'instrument el seu timbre.

L'estudi de les sèries de Fourier ve motivat pel procés invers: donada una funció periòdica, el que busquem és poder descompondre-la en funcions periòdiques elementals de diferents freqüències.

Començarem el capítol definint les funcions sobre les quals basarem la teoria, i definirem un producte escalar en aquest conjunt. Aquesta operació ens servirà per definir els coeficients de Fourier d'una determinada funció, que s'entenen com el pes de cada freqüència en la descomposició en funcions periòdiques elementals d'aquesta. Les propietats d'aquests coeficients ens permetran veure cóm podem aproximar uniformement una funció periòdica a través de sumes de funcions periòdiques elementals, i veurem exemples on es posa de manifest la utilitat d'entendre una funció com aquesta superposició de funcions periòdiques més simples. Finalment, estudiarem el que es coneix com a sèrie de Fourier d'una funció donada, i veurem sota quines condicions aquesta sèrie es pot igualar a la funció original. Acabarem el capítol tractant per separat les funcions parells i senars, les quals, gràcies a la seva simplicitat, donaran expressions per la sèrie de Fourier molt més simples que de costum.

4.1 | Funcions periòdiques a valors complexos

Ja en el capítol 2, al parlar de sèries de potències, vam haver d'introduir conceptes de funcions de variable complexa. Recordem que parlàvem de funcions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, i que considerant

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \mathrm{Re}\,(f(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \mathrm{Im}\,(f(z)) \end{aligned}$$

podíem escriure $f(z) = \mathrm{Re}f(z) + i\mathrm{Im}f(z)$. Serà molt convenient tenir aquesta expressió en compte per definicions posteriors.

En tot el capítol, considerarem funcions d'aquesta mena, però essent $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. És a dir, tindrem funcions f que envien valors reals a valors complexos. De tota manera, com que $f(x)$ continua essent complex, seguirem escrivint $f(x) = \mathrm{Re}f(x) + i\mathrm{Im}f(x)$.

Notem que el conjunt de funcions de variable real a valors reals està contingut en les funcions que considerarem en aquest capítol: seran aquelles funcions $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ amb $A \subseteq \mathbb{R}$ tals que $f(A) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Per aquestes funcions, $\mathrm{Re}f \equiv f$ i $\mathrm{Im}f \equiv 0$.

Si estem en aquest cas, i f pren valors reals, imaginarem la funció de la manera en que ja estem acostumats, com una gràfica sobre els eixos cartesians. En el cas en que la funció prengui valors complexos, hi ha dos maneres de visualitzar-la. La primera es basa en el fet que el conjunt de números complexos es pot identificar amb l'anomenat *pla complex*, on a cada $z = a + ib$ se'l fa correspondre amb el punt (a, b) de $\mathbb{R}^2$. D'aquesta manera, podem fer correspondre la funció $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, amb una altra $\tilde{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida per $\tilde{f}(x) = (\mathrm{Re}f(x), \mathrm{Im}f(x))$. Per tant, f és pot pensar com una corba al pla complex.

La segona visualització possible és pensar la funció com un camp vectorial sobre la recta real. Com que a cada valor x de la recta li assignem un número complex $f(x)$, i cada número complex es correspon a un punt del pla complex, podem considerar el vector associat a aquest punt, i representar-lo a continuació del valor x.

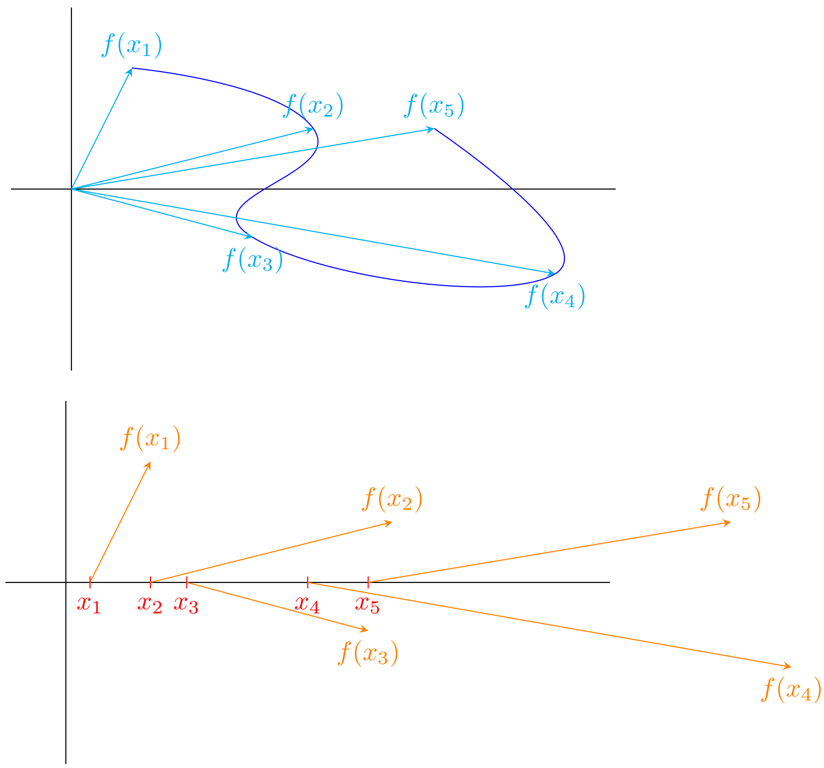


Figura 4: Representacions d'una funció de valors reals a valors complexos: en blau, representació com a corba al pla complex; en taronja, representació com a camp vectorial sobre la recta real.

Repassem breument els conceptes de continuïtat i derivabilitat en el context de funcions de variable real a valors complexos.

Definició 4.1.1. *Sigui $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, on $A \subseteq \mathbb{R}$. Diem que f és* contínua en A *si per a tot x_0 en A es compleix que donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$.*

Notem que, en general, $|f(x) - f(x_0)|$ es refereix a la distància entre els números complexos $f(x)$ i $f(x_0)$, d'acord a la definició 2.3.8, mentre que $|x - x_0|$ és la distància a la recta real donada per la funció valor absolut.

Definició 4.1.2. *Sigui $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, on $A \subseteq \mathbb{R}$. Diem que f és* derivable en A *si per a tot x_0 en A existeix*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En aquest cas, $f'(x_0)$ rep el nom de derivada de f en x_0.

Tot i que la funció f pren valors complexos, parlarem de funcions derivables, i no de funcions holomorfes, perquè el límit s'avalua sobre la recta real.

Definim ara un concepte nou relacionat amb funcions complexes. Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, i pensem f com camp vectorial sobre l'interval $[a, b]$. Podríem preguntar-nos per l'efecte total que té el camp en desplaçar-nos del punt a al punt b. D'alguna manera, hauríem de considerar la contribució de cada vector a l'interval, i sumar-les totes. D'això se'n diu integral de línia complexa.

Definició 4.1.3. *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, i suposem que* Re$f$ *i* Imf *són funcions integrables en el sentit de Riemann en $[a, b]$. Definim la* integral de Riemann de f en $[a, b]$ *com*

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re} f + i \int_a^b \mathrm{Im} f$$

Observem que aquesta definició fa que la integral d'una funció que pren valors complexos sigui lineal. És clar també que si $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ (és a dir, la funció pren valors reals), llavors $\mathrm{Im} f(x) = 0$ per a tot $x \in [a,b]$, i recuperem la definició d'integral que ja coneixem, com a àrea entre la gràfica de la funció i l'eix horitzontal.

Parlem ara d'un conjunt de funcions més concret, que seran les que ens interessarà estudiar en aquest tema.

Definició 4.1.4. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Diem que f té* període T*, o bé que és* $T-$periòdica*, essent $T > 0$, si $f(x+T) = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.*

Tot i que no es fa explícit en la definició, s'acostuma a prendre el període com la mínima constant T que faci que la funció compleixi la condició $f(x+T) = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, anomenada *condició de periodicitat*. D'aquesta manera, la següent proposició esdevé certa.

Proposició 4.1.5. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció $T-$periòdica. Llavors, $f(x+T') = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ si i només si $T' = kT$ per algun $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostració. La implicació inversa és molt fàcil de veure, perquè si $T' = kT$, i $k > 0$, es té que $f(x) = f(x+T) = f((x+T)+T) = f(x+2T) = \cdots = f(x+kT) = f(x+T')$; si $k < 0$, prenem $x' = x + T'$, i ens reduïm al cas anterior.

Per la implicació directa, sigui $k \in \mathbb{Z}$ tal que $kT \leq T' < (k+1)T$. En aquest cas, podem escriure $T' = kT + \alpha$, amb $\alpha \in [0, T)$. El que voldrem veure és que, de fet, $\alpha = 0$.

Tenim que $f(x+T') = f(x)$ per hipòtesi, i podem escriure $f(x+kT+\alpha) = f(x)$. Però per la implicació demostrada anteriorment, i per ser f de període T, tenim que $f(x) = f(x+kT)$, de manera que $f(x+kT+\alpha) = f(x+kT)$, i fent un canvi de variable $x + kT = y$, queda clar que estem dient $f(y+\alpha) = f(y)$ per a tot $y \in \mathbb{R}$, i això vol dir que f té període α. Però això no pot ser, perquè estem suposant que $\alpha < T$, i en canvi T hauria de ser la constant més petita que fa complir la condició de periodicitat, arribant doncs a contradicció. $\square$

Exemple 4.1.6. Sigui $f(x) = \cos(2\pi\omega x)$ definida per a tot $x \in \mathbb{R}$. Aquest és un exemple natural de funció periòdica, per a tot $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$. En particular, té període $T = 1/\omega$. Efectivament, aplicant la definició de funció periòdica, tenim que

$$
\begin{aligned}
f\left(x + \frac{1}{\omega}\right) &= \cos\left(2\pi\omega\left(x + \frac{1}{\omega}\right)\right) = \cos\left(2\pi\omega x + 2\pi\right) \\
&= \cos(2\pi\omega x)\cos(2\pi) - \sin(2\pi\omega x)\sin(2\pi x) = \cos(2\pi\omega x) = f(x)
\end{aligned}
$$

Com volíem.

També es té que $f(x) = \sin(2\pi\omega x)$ definida per a tot $x \in \mathbb{R}$ és $1/\omega-$periòdica. Ho veuríem de la mateixa manera que en el cas anterior.

Exemple 4.1.7. Considerem la funció $f(x) = e^{2\pi i\omega x}$. Es tracta de la funció exponencial complexa que vam veure a l'exemple 2.3.23, i que sabem que podem expressar com

$$f(x) = e^{2\pi i\omega x} = \cos(2\pi\omega x) + i\sin(2\pi\omega x)$$

Aquesta és una funció de variable real que pren valors complexos, i també és una funció $1/\omega-$periòdica.

En relació a les funcions periòdiques i la seva integral, serà important tenir en compte el següent fet.

Proposició 4.1.8. *Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una funció $T-$periòdica, i considerem un interval $[a,a+T]$. Llavors,*

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$

És a dir, la integral sobre qualsevol interval de longitud T sempre dóna el mateix. En particular, fixat $k\in\mathbb{Z}$, la integral sobre qualsevol interval de longitud kT sempre dóna el mateix (k vegades la integral sobre qualsevol interval de longitud T).

Demostració. Tenim que

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{a+T} f$$

Com que f és $T-$periòdica, és el mateix f a l'interval $[T,a+T]$ que a l'interval $[0,a]$, de manera que

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{a+T} f = \int_a^T f + \int_0^a f = \int_0^T f$$

□

Una altra propietat molt interessant d'aquest tipus de funcions és la que se'ns presenta en el següent lema.

Lema 4.1.9. *Sigui f una funció $T-$periòdica i contínua en $\mathbb{R}$. Llavors, $|f|$ està acotada.*

Demostració. Pensem en f a l'interval $[0,T]$. Com que f és contínua en aquest interval, $|f|$ és contínua, i com que l'interval és tancat i acotat, $|f|$ pren un valor màxim M i un valor mínim m, pel teorema de Weierstrass. En particular, $|f|$ està acotada pel màxim entre $|M|$ i $|m|$ en aquest interval. Però llavors $|f|$ està acotada a tota la recta, pensant-la com una repetició al llarg d'aquesta de la seva restricció a l'interval $[0,T]$. □

Tal i com hem dit al principi del capítol, intentar aproximar una funció periòdica a través d'una sèrie de potències és una mala jugada. La proposició següent ens formalitza aquest problema.

Proposició 4.1.10. *Donada f de període T, no existeix cap sèrie de potències $\sum a_n x^n$ uniformement convergent a f en $\mathbb{R}$.*

Demostració. Suposem que existeix alguna sèrie de potències uniformement convergent a f en $\mathbb{R}$. Per començar, si la sèrie $\sum a_n x^n$ convergeix uniformement a f, serà necessari que f sigui contínua, per aplicació directa del teorema 2.2.6.

D'altra banda, pel lema anterior, $|f|$ està acotada. Però llavors,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - f(x)\right|$$

no pot fer-se arbitràriament petit, per gran que sigui N, perquè les sumes parcials de la sèrie de potències són polinomis amb mòdul tendint a infinit si x es fa gran, mentre que $|f|$ no es fa més gran que alguna constant finita. Per tant, $\sum a_n x^n$ no pot convergir uniformement a f, arribant a contradicció. □

Es fa evident, doncs, la necessitat de buscar una forma alternativa d'expressar, si escau, una funció periòdica com a sèrie de funcions.

Per acabar aquesta secció, indiquem que en tot el capítol ens restringirem a les funcions periòdiques de període 1. En tindrem prou, perquè si $f(x)$ és $T-$periòdica, podem definir una nova funció g com $g(x)=f(Tx)$, que compleix que

$$g(x+1) = f\left(T(x+1)\right) = f\left(Tx+T\right) = f\left(Tx\right) = g(x)$$

és a dir, que és $1-$periòdica.

4.2 | Espai de funcions contínues a trossos 1-periòdiques. Producte escalar de funcions

Comencem ara a definir els conceptes propis d'aquest tema.

Definició 4.2.1. *Sigui $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció de variable real a valors complexos. Diem que g és* contínua a trossos *si g és contínua en $[a, b]$ tret d'un conjunt finit de punts $\{x_1, ..., x_k\}$ on x_i és una discontinuïtat de salt finit per a tot $i = 1, ..., k$.*

Definició 4.2.2. *Denotarem per $\mathcal{C}$ el conjunt*

$$\mathcal{C} = \{g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ és contínua a trossos en } [0, 1]\}$$

Notem que totes les funcions de $\mathcal{C}$ són integrables (serà necessari d'aquí una estona). Aquest conjunt, a més, ens serveix per definir una bona quantitat de funcions periòdiques: donada una funció $g \in \mathcal{C}$, definim una extensió periòdica de g copiant a cada interval $[k, k + 1)$, amb $k \in \mathbb{Z}$, la definició de g donada a l'interval $[0, 1]$. És a dir, definim una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la manera següent

$$f(x) = g(x - k) \text{ per } x \in [k, k + 1), \; k \in \mathbb{Z}$$

Definició 4.2.3. *Denotarem per $\mathcal{P}$ el conjunt*

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ és una extensió periòdica d'alguna funció } g \in \mathcal{C}\}$$

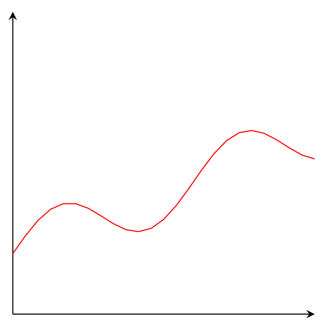


Figura 5: Exemple de funció $g \in \mathcal{C}$

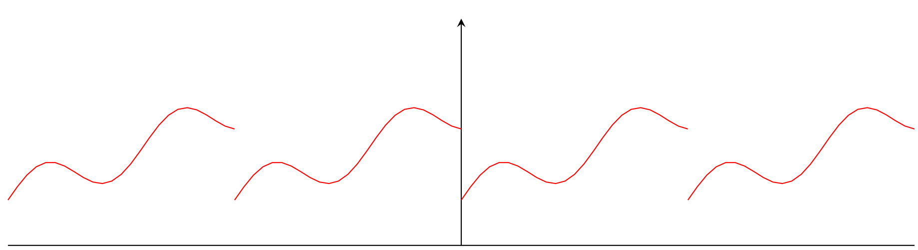


Figura 6: Extensió periòdica de la funció anterior

A $\mathcal{P}$ hi ha una pila de coses. Per començar, totes les funcions $1-$periòdiques i contínues estan en $\mathcal{P}$. Observem també que, a part d'una bona mà de funcions $1-$periòdiques, $\mathcal{P}$ també conté funcions $1/n-$periòdiques per $n \in \mathbb{N}$, perquè es defineix a partir de les funcions de $\mathcal{C}$, i a $\mathcal{C}$ hi ha funcions $1/n-$periòdiques. $\mathcal{P}$ conté, a més, totes les funcions constants.

És fàcil veure que amb la suma de funcions i el producte per números complexos, $\mathcal{C}$ és un $\mathbb{C}-$espai vectorial (de fet, $\mathcal{C}$ és una $\mathbb{C}-$àlgebra; és a dir, el producte de funcions de $\mathcal{C}$ està en $\mathcal{C}$). En general, donat un $\mathbb{C}-$espai vectorial, es pot donar el concepte de producte escalar. Tot i no ser necessari entrar en tant detall, donem la definició pels més puristes.

Definició 4.2.4. *Sigui E un $\mathbb{C}-$espai vectorial. Una aplicació*

$$\langle \cdot\,,\cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

és un producte escalar *sobre E si és*

1. *Lineal per l'esquerra i lineal conjugada per la dreta: per a tot $u, v, w \in E$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, es té*

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle + \bar{\beta} \langle u, w \rangle$$

2. *Hermítica: per a tot $u, v \in E$, es té $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$*

3. *Definida positiva: per a tot $u \in E$, $\langle u, u \rangle \geq 0$ i $\langle u, u \rangle = 0$ si i només si $u = 0$.*

Si l'espai vectorial pren $\mathbb{R}$ com a cos d'escalars, les propietats 1) i 2) de la definició anterior esdevenen

1. Bilineal: per a tot $u, v, w \in E$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es té

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$$

2. Simètrica: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Com a exemple, en l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$, donats $x = (x_1, ..., x_n)$ i $y = (y_1, ..., y_n)$, es defineix el seu producte escalar com

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

També es defineix la norma de x com

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

i aquesta s'entén com la distància de x a l'origen. En particular, la distància entre x i y és $||x - y||$.

Amb aquesta noció de norma es té, per exemple, el teorema de Pitàgores: si $\langle x, y \rangle = 0$, llavors $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. La hipòtesi que $\langle x, y \rangle = 0$ és interessant, i permet definir el que es coneix com base ortonormal: una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ és ortonormal si per a tota parella de vectors de la base x, y, es compleix que $\langle x, y \rangle = 0$ si $x \neq y$ i $\langle x, y \rangle = 1$ si $x = y$. La base canònica, per exemple, és una base ortonormal.

Voldríem dotar a $\mathcal{P}$ d'algun producte escalar, per poder parlar també de funcions ortonormals. Com que tota la informació de les funcions $\mathcal{P}$ està a l'interval $[0, 1]$, al ser extensions periòdiques de funcions de $\mathcal{C}$, podem donar un producte escalar a $\mathcal{C}$, que és un espai vectorial, i entendre'l com una operació sobre les funcions de $\mathcal{P}$.

Definició 4.2.5. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$. Definim el* producte escalar entre f i g *com*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

on $\overline{g}$ és el conjugat de g.

Notem que aquest producte està ben definit. Al fer-se la integral a l'interval $[0, 1]$, pensem en la restricció en aquest interval de les funcions f i $\overline{g}$, que són funcions de $\mathcal{C}$ per definició. Com que $\mathcal{C}$ és una $\mathbb{C}-$àlgebra, el producte $f\overline{g}$ és de $\mathcal{C}$, i com que totes les funcions de $\mathcal{C}$ són integrables, en particular podem calcular aquesta integral per la funció $f\overline{g}$.

Definició 4.2.6. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. La* norma de f*, és*

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

Definició 4.2.7. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$. Definim la* distància entre f i g *com*

$$Dist(f, g) = ||f - g||$$

El producte escalar i la norma compleixen una desigualtat, que destaquem tant per la desigualtat en si com per la originalitat en la demostració que porta a ella. A continuació, enunciem aquesta propietat en termes de funcions de l'espai $\mathcal{P}$, doncs ens farà falta en resultats futurs.

Teorema 4.2.8 (**Desigualtat d'Schwartz**)**.** *Donades $f, g \in \mathcal{P}$, tenim que*

$$|\langle f, g \rangle| \leq ||f||\cdot ||g||$$

és a dir,

$$\left|\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\ dx\right| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2\ dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(x)|^2\ dx\right)^{1/2}$$

Demostració. Podem suposar que $\langle f, g \rangle \neq 0$ (en cas que ho fos, la desigualtat continuaria essent vàlida). Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$. Tenim que

$$0 \leq \langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle = \langle f, f \rangle + (-\lambda)(-\bar{\lambda}) \langle g, g \rangle - \langle f, \lambda g \rangle - \langle \lambda g, f \rangle = ||f||^2 + |\lambda|^2||g||^2 - 2\mathrm{Re}\left(\bar{\lambda} \langle f, g \rangle\right)$$

on Re denota la part real d'un número complex.

Podem prendre un λ tal que $\bar{\lambda} \langle f, g \rangle$ sigui un número real. Efectivament, si

$$\lambda = \tilde{\lambda}\frac{\langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|}$$

amb $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, llavors

$$\bar{\lambda} \langle f, g \rangle = \overline{\tilde{\lambda}\frac{\langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|}} \langle f, g \rangle = \tilde{\lambda}\frac{\overline{\langle f, g \rangle} \langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|} = \tilde{\lambda}\frac{|\langle f, g \rangle|^2}{|\langle f, g \rangle|} = \tilde{\lambda}|\langle f, g \rangle|$$

A més,

$$|\lambda| = \left|\tilde{\lambda}\frac{\langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|}\right| = |\tilde{\lambda}|$$

De manera que, per aquest λ, la primera desigualtat queda com

$$0 \leq ||f||^2 + \tilde{\lambda}^2||g||^2 - 2\tilde{\lambda}|\langle f, g \rangle|$$

Observem que la part dreta de la desigualtat és un polinomi en $\tilde{\lambda}$ de segon grau a coeficients reals. Si es compleix per a tot $\tilde{\lambda}$ que el polinomi és més gran o igual que zero, vol dir que el discriminant de l'equació de segon grau, $b^2 - 4ac$, és menor o igual que zero. Per tant, identificant $a = ||g||^2$, $b = -2|\langle f, g\rangle|$ i $c = ||f||^2$, tenim que

$$4|\langle f, g\rangle|^2 \leq 4||g||^2||f||^2$$

quedant

$$|\langle f, g\rangle| \leq ||f||\cdot ||g||$$

com volíem. $\square$

Com dèiem, el tenir aquest producte escalar i aquesta norma definits ens permet parlar, novament, de ser ortonormal.

Definició 4.2.9. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$ amb $f \neq g$. Diem que f i g són* ortonormals *si $\langle f, g\rangle = 0$ i $||f|| = ||g|| = 1$. En general, un conjunt de funcions és ortonormal si cada parella de funcions d'aquest conjunt ho són.*

A continuació, donem un parell d'exemples de conjunts ortonormals, que es recomana tenir presents, perquè són els dos conjunts (en especial el primer) sobre els quals es farà tota la teoria posterior.

Exemple 4.2.10. Considerem el conjunt

$$\{e_n(x) = e^{2\pi i n x}, n \in \mathbb{Z}\}$$

És clar que $e_n \in \mathcal{P}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Veiem que formen un conjunt ortonormal. Tenim que

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n x}\overline{e^{2\pi i m x}}dx = \int_0^1 e^{2\pi i n x}e^{-2\pi i m x}dx$$

Si $n = m$, llavors,

$$\langle e_n, e_m\rangle = ||e_n||^2 = \int_0^1 e^{2\pi i n x}e^{-2\pi i n x}dx = \int_0^1 dx = 1$$

De manera que $||e_n|| = 1$. En canvi, si $n \neq m$, queda que

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi i(n-m)}\left[e^{2\pi i(n-m)x}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi i(n-m)}\left[e^{2\pi i(n-m)} - 1\right]$$

Però $e^{2\pi i(n-m)} = e^{2\pi i k}$ per algun $k \in \mathbb{Z}$, i es té que

$$e^{2\pi i k} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$$

Per tant,

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi i(n-m)}\left[e^{2\pi i(n-m)} - 1\right] = \frac{1}{2\pi i(n-m)}[1-1] = 0$$

Exemple 4.2.11. Considerem el conjunt

$$\left\{1, \frac{\cos(2\pi n x)}{\sqrt{1/2}}, \frac{\sin(2\pi m x)}{\sqrt{1/2}};\ n, m = 1, 2, ...\right\}$$

Aquestes són una funció constant, i funcions contínues $1/n-$periòdiques, de manera que pertanyen a $\mathcal{P}$. Veiem que formen un conjunt ortonormal. Per començar, veiem que $||\ \ ||^2$ de cadascuna és 1, de manera que totes tindran norma 1. Fàcilment,

$$||1||^2 = \int_0^1 dx = 1$$

Pels cosinus (i de manera semblant pels sinus),

$$\left\|\frac{\cos(2\pi nx)}{\sqrt{1/2}}\right\|^2 = \frac{1}{1/2}\int_0^1 \cos^2(2\pi nx)dx = 2\int_0^1 \frac{1+\cos(4\pi nx)}{2}dx = \left[x + \frac{1}{4\pi n}\sin(4\pi nx)\right]_0^1 = 1$$

Veiem ara que són ortonormals dos a dos:

$$\left\langle 1, \frac{\cos(2\pi nx)}{\sqrt{1/2}}\right\rangle = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\int_0^1 \cos(2\pi nx)dx = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nx)\right]_0^1 = 0$$

$$\left\langle 1, \frac{\sin(2\pi nx)}{\sqrt{1/2}}\right\rangle = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\int_0^1 \sin(2\pi nx)dx = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi nx)\right]_0^1 = 0$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\cos(2\pi nx)}{\sqrt{1/2}}, \frac{\sin(2\pi mx)}{\sqrt{1/2}}\right\rangle &= 2\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi mx)dx \\ &= 2\left[\left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nx)\sin(2\pi mx)\right]_0^1 - \frac{m}{n}\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi mx)dx\right] \\ &= -\frac{2m}{n}\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi mx)dx\end{aligned}$$

Si $m = n$, ens aturem aquí, perquè tenim que

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi nx)dx = -2\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi nx)dx \\ &4\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi nx)dx = 0 \\ &\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi nx)dx = 0\end{aligned}$$

Si $m \neq n$, tornem a integrar per parts, de manera que

$$\begin{aligned}&-\frac{2m}{n}\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi mx)dx \\ &= -2\frac{m}{n}\left[\left[-\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi nx)\cos(2\pi mx)\right]_0^1 - \frac{m}{n}\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi mx)dx\right] \\ &= \frac{2m^2}{n^2}\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi mx)dx\end{aligned}$$

i ara

$$2\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi mx)dx = \frac{2m^2}{n^2}\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi mx)dx$$

de manera que novament

$$\int_0^1 \cos(2\pi nx)\sin(2\pi mx)dx = 0$$

4.3 | Coeficients de Fourier

A $\mathbb{R}^n$, un vector $v = (x_1, ..., x_n)$ es pot escriure com

$$v = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

on $\{u_j\}_{j=1}^n$ és la base canònica d'aquest espai. A més, observem que

$$x_j = \langle v, u_j \rangle$$

De manera que

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_n \rangle u_n$$

Ara, recordem el conjunt de l'exemple 4.2.10, i fem la següent definició.

Definició 4.3.1. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Definim el* coeficient $n-$èssim de Fourier *com*

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx$$

Veiem algunes propietats dels coeficients de Fourier.

Proposició 4.3.2. *En relació als coeficients de Fourier, es compleixen les següents propietats:*

1. *Per a tota $f, g \in \mathcal{P}$, i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,*

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(n) = \lambda \widehat{f}(n) + \mu \widehat{g}(n)$$

2. *Sigui $f \in \mathcal{P}$, i sigui $\tau \in (0,1)$. Sigui $f_\tau \in \mathcal{P}$ definida com $f_\tau(x) = f(x-\tau)$. Llavors,*

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-2\pi i n \tau} \widehat{f}(n)$$

3. *Si $f \in \mathcal{P}$ és derivable, llavors*

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \ \widehat{f}(n)$$

Demostració. Demostrem cada apartat:

1. Aquest és clar, per linealitat de la integral,

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda f + \mu g}(n) &= \int_0^1 \left[\lambda f(x) + \mu g(x) \right] e^{-2\pi i n x} \, dx \\
&= \lambda \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx + \mu \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i n x} \, dx \\
&= \lambda \widehat{f}(n) + \mu \widehat{g}(n)
\end{aligned}$$

2. Fem també el càlcul dels seus coeficients de Fourier a través de la definició,

$$\widehat{f_\tau}(n) = \int_0^1 f_\tau(x) e^{-2\pi i n x} \, dx = \int_0^1 f(x-\tau) e^{-2\pi i n x} \, dx$$

Si canviem de variable, $y = x - \tau$, llavors

$$\widehat{f_\tau}(n) = \int_{-\tau}^{1-\tau} f(y) e^{-2\pi i n (y+\tau)} \, dy = e^{-2\pi i n \tau} \int_{-\tau}^{1-\tau} f(y) e^{-2\pi i n y} \, dy$$

Ara, per 4.1.8, es té que

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-2\pi i n \tau} \int_{-\tau}^{1-\tau} f(y) e^{-2\pi i n y} \, dy = e^{-2\pi i n \tau} \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} \, dy = e^{-2\pi i n \tau} \widehat{f}(n)$$

3. Intentem calcular $\widehat{f'}(n)$,

$$\widehat{f'}(n) = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx}\ dx = \left[f(x)e^{-2\pi inx}\right]_0^1 + 2\pi in \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\ dx$$

Com que f és $1-$periòdica,

$$\left[f(x)e^{-2\pi inx}\right]_0^1 = f(1) - f(0) = 0$$

Llavors,

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi in \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\ dx = 2\pi in\ \widehat{f}(n)$$

$\square$

Exemple 4.3.3 (Un ús interessant dels coeficients de Fourier). Acabem de veure en la proposició anterior algunes propietats dels coeficients de Fourier. La que destacarem en aquest exemple és la tercera, que fa relació als coeficients de Fourier de la funció derivada d'alguna funció $f \in \mathcal{P}$. D'alguna manera, aquest resultat redueix l'operació "derivar" a l'operació "multiplicar per la variable", i aquesta és una eina bastant útil en quant a reduir la complexitat de certs problemes.

Per il·lustrar el que estem dient, considerem l'equació diferencial

$$f''(x) + 4f'(x) - 3f(x) = x^2$$

on el que es busca és una funció f que satisfaci aquesta equació. En general, la resolució d'equacions diferencials és una qüestió delicada, perquè no és fàcil treballar alhora amb una funció i les seves derivades. Ara bé, si expressem aquesta equació en termes de coeficients de Fourier, i d'acord a les propietats prèviament demostrades, obtenim

$$\widehat{x^2}(n) = -4\pi^2 n^2 \widehat{f}(n) + 4\pi in\ \widehat{f}(n) - 3\widehat{f}(n)$$

de manera que

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{x^2}(n)}{4\pi in - 4\pi^2 n^2 - 3}$$

És a dir, potser no podem trobar directament una solució de l'equació diferencial, però sí que podem trobar amb certa facilitat una expressió pels coeficients de Fourier d'aquesta solució.

4.4 | Transformació de Fourier

Acabem de definir els coeficients de Fourier d'una funció $f \in \mathcal{P}$. Pensant més en abstracte, podem considerar una aplicació que envia f al seu conjunt de coeficients de Fourier $\widehat{f}(n)$. Aquesta aplicació rep el nom de *transformació de Fourier de* f, i la denotarem per $\mathcal{F}$. En relació a aquesta aplicació, ens agradaria respondre a les preguntes següents:

1. És $\mathcal{F}$ una aplicació injectiva? És a dir, si $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ per $f, g \in \mathcal{P}$, llavors $f = g$?

2. En cas que $\mathcal{F}$ sigui injectiva, tindríem que els coeficients de Fourier $\widehat{f}(n)$ venen unívocament determinats per la funció f. Com podem determinar, en aquest cas, f a partir dels seus coeficients?

L'interès d'aquestes preguntes no és només teòric. Resoldre-les ens podria donar, per exemple, una bona eina per acabar de tractar qüestions semblants a la que es mostra en l'exemple 4.3.3.

4.4.1 | Polinomis trigonomètrics

Definició 4.4.1. *Un* polinomi trigonomètric *és una combinació lineal finita de les funcions*

$$\{e^{2\pi inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Qualsevol d'aquestes combinacions lineals finites les escriurem de la manera següent

$$p(x) = \overline{\sum} a_n e^{2\pi inx}$$

on s'entén que l'índex sobre el qual es realitza la suma és n, prenent n enters, i la barra superior al sumatori denota la finitud de la suma.

Observem que si p és un polinomi trigonomètric, llavors $a_n = \widehat{p}(n)$. Certament, com que $e^{2\pi inx}$ és ortonormal amb $e^{2\pi imx}$, llavors

$$\widehat{p}(j) = \left\langle p(x), e^{2\pi ijx} \right\rangle = \left\langle \overline{\sum} a_n e^{2\pi inx}, e^{2\pi ijx} \right\rangle = \overline{\sum} \left\langle a_n e^{2\pi inx}, e^{2\pi ijx} \right\rangle = \left\langle a_j e^{2\pi ijx}, e^{2\pi ijx} \right\rangle = a_j$$

És clar, doncs, que si p, q són polinomis trigonomètrics amb $\widehat{p}(n) = \widehat{q}(n)$, llavors $p = q$.

4.4.2 | Convolució de funcions 1-periòdiques

Ja vam definir el producte de convolució en el capítol 2, durant les discussions del teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass. De cara a respondre les preguntes que ens hem fet al principi sobre la transformació de Fourier, convé també definir un producte de convolució en $\mathcal{P}$. La definició, en el fons, és la mateixa que la donada en 2.4.2, però s'ha de formalitzar amb més cura degut a que n'hi ha prou en considerar la integral de la definició a l'interval $[0, 1]$, al ser la convolució de funcions periòdiques.

Definició 4.4.2. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$. Definim la* convolució de f amb g *com la funció*

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t) g(x - t) dt$$

definida per $x \in \mathbb{R}$.

Veiem ara com es comporten els coeficients de Fourier en relació a la convolució.

Proposició 4.4.3. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$. Llavors,*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\ \widehat{g}(n)$$

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \int_0^1 (f*g)(x)\ e^{-2\pi inx} dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(t)g(x-t)dt\right] e^{-2\pi inx} dx = \int_0^1 \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\ g(x-t)e^{-2\pi in(x-t)}\ \ dt\ dx\end{aligned}$$

Pel teorema de Fubini,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\ g(x-t)e^{-2\pi in(x-t)}\ \ dt\ dx = \int_0^1 \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\ g(x-t)e^{-2\pi in(x-t)}\ \ dx\ dt$$

i finalment,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\ g(x-t)e^{-2\pi in(x-t)}\ \ dx\ dt \\ &= \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} \left(\int_0^1\ g(x-t)e^{-2\pi in(x-t)}\ \ dx\right) dt = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} \left(e^{2\pi int} \int_0^1\ g(x-t)e^{-2\pi inx}\ \ dx\right) dt \\ &= \widehat{g}(n) \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} dt = \widehat{f}(n)\ \widehat{g}(n)\end{aligned}$$

□

Definició 4.4.4. *Diem que una família de funcions* $(\phi_\varepsilon) \in \mathcal{P}$*, amb* $0 < \varepsilon < 1$*, és una* aproximació de la unitat en $\mathcal{P}$ *si*

1. $\phi_\varepsilon(x) \geq 0$ *per a tot* $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_0^1 \phi_\varepsilon = 1$
3. *Per a tot* $\delta > 0$*, es compleix que* $\sup_{x\in[\delta,1-\delta]} |\phi_\varepsilon(x)| \longrightarrow 0$ *si* $\varepsilon \longrightarrow 0$*.*

Veiem, primer, que passa amb les funcions de $\mathcal{P}$ contínues. Observem que aquestes són les funcions que surten d'estendre de forma periòdica funcions $g \in \mathcal{C}$ tals que g és contínua en $[0,1]$ i $g(0) = g(1)$.

Teorema 4.4.5. *Sigui* $f \in \mathcal{P}$ *contínua, i* (ϕ_ε) *una aproximació de la unitat en* $\mathcal{P}$*. Aleshores,* $(f * \phi_\varepsilon)$ *convergeix uniformement a* f *en* $\mathbb{R}$ *quan* $\varepsilon \longrightarrow 0$*.*

Demostració. N'hi ha prou amb veure que donat $\eta > 0$ hi ha $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| < \eta$$

quan $\varepsilon < \varepsilon_0$. Tenim que

$$\sup_{x\in[0,1]} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 f(t)\phi_\varepsilon(x-t)\ dt - f(x)\right|$$

Ara, com que (ϕ_ε) és una aproximació de la unitat, es té que $\int_0^1 \phi_\varepsilon(x)\ dx = 1$, i com que és $1-$periòdica, també es té que $\int_0^1 \phi_\varepsilon(x-t)\ dx = 1$. Llavors,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 f(t)\phi_\varepsilon(x-t)\ dt - f(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 f(t)\phi_\varepsilon(x-t)dt - \int_0^1 f(x)\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} \left(\int_0^1 |f(t) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)\end{aligned}$$

L'integrand és, també, una funció 1−periòdica. Novament, la seva integral és la mateixa sobre qualsevol interval de longitud 1, de manera que

$$\sup_{x\in[0,1]}\left(\int_0^1 |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)=\sup_{x\in[0,1]}\left(\int_{x-1/2}^{x+1/2} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)$$

Ara, considerem l'interval $[x-1/2, x+1/2]$, sobre el qual es realitza la integral. Com que f és contínua, donat $\eta/2$ podem trobar $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(t)|<\eta/2$ si $|x-t|<\delta$. Per aquest δ, separem l'interval d'integració en els punts tals que $|x-t|<\delta$ i els punts tals que $|x-t|>\delta$, de manera que

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,1]}\left(\int_{x-1/2}^{x+1/2} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)\\
&=\sup_{x\in[0,1]}\left(\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|<\delta}} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt+\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|>\delta}} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)\\
&\leq\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{\eta}{2}\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|<\delta}} \phi_\varepsilon(x-t)\ dt+\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|>\delta}} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)\\
&<\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{\eta}{2}+\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|>\delta}} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)
\end{aligned}$$

Arreglem la integral que queda. Fent un canvi $y=x-t$, $dy=-dt$, queda

$$\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|>\delta}} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt=\int_{\substack{t\in[-1/2,1/2]\\|y|>\delta}} |f(x-y)-f(x)|\phi_\varepsilon(y)\ dy$$

Però això és

$$\int_{\substack{t\in[-1/2,1/2]\\|y|>\delta}} |f(x-y)-f(x)|\phi_\varepsilon(y)\ dy\leq\sup_{\delta<s<1-\delta}(\phi_\varepsilon(s))\int_{\substack{t\in[-1/2,1/2]\\|y|>\delta}} |f(x-y)-f(x)|\ dy$$

Ara, la integral està acotada per la integral en $[-1/2, 1/2]$, que és alguna constant K fixada. Queda que

$$\sup_{\delta<s<1-\delta}(\phi_\varepsilon(s))\int_{\substack{t\in[-1/2,1/2]\\|y|>\delta}} |f(x-y)-f(x)|\ dy<K\sup_{\delta<s<1-\delta}(\phi_\varepsilon(s))$$

Però com que δ és donat, podem trobar ε prou petit tal que aquest suprem es faci més petit que $\eta/2K$. D'aquesta manera, el que finalment tenim és que

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,1]}|(f*\phi_\varepsilon)(x)-f(x)|<\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{\eta}{2}+\int_{\substack{t\in[x-1/2,x+1/2]\\|x-t|>\delta}} |f(t)-f(x)|\,\phi_\varepsilon(x-t)\ dt\right)\\
&<\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{\eta}{2}+K\frac{\eta}{2K}\right)=\eta
\end{aligned}$$

□

Què podem dir de les funcions $f \in \mathcal{P}$ que no són contínues? Donada (ϕ_ε) una aproximació de la unitat en $\mathcal{P}$, com es comporta $f * \phi_\varepsilon$ respecte de f, a mesura que ε es fa petit?

Lema 4.4.6. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Llavors, donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, llavors*

$$\int_0^1 |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx < \varepsilon$$

Demostració. Sigui $\varepsilon > 0$ fixat. Com que $f \in \mathcal{P}$, té un número finit de discontinuïtats de salt finit en $[0,1]$. Siguin $\{a_1, ..., a_N\}$ aquestes discontinuïtats, i sigui I_j un interval obert centrat en a_j de longitud L_j igual a

$$L_j = \frac{\varepsilon}{8N\left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\right)^2}$$

Ara, per a tot t es té que

$$\int_0^1 |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx = \int_{[0,1]\setminus \cup I_j} |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx$$

Veiem cada sumand per separat. Primer, observem que f és contínua en $[0,1] \setminus \cup I_j$, que és un conjunt tancat i acotat, de manera que f és uniformement contínua en $[0,1] \setminus \cup I_j$. Per tant, podem prendre $\delta > 0$ prou petit de manera que si $|t| < \delta$, llavors $|f(x) - f(x-t)| < (\varepsilon/2)^{1/2}$. Per a la primera integral, doncs, queda que

$$\int_{[0,1]\setminus \cup I_j} |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx < \int_{[0,1]\setminus \cup I_j} \frac{\varepsilon}{2} \, dx < \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \, dx = \frac{\varepsilon}{2}$$

D'altra banda, notem que $|f(x) - f(x-t)| \leq 2 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, de manera que en el segon sumand tenim

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \int_{I_j} |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx &\leq 4 \left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \right)^2 \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \, dx \\
&= 4 \left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \right)^2 \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{8N\left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\right)^2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Tot plegat, queda que tenim $\delta > 0$ tal que per $|t| < \delta$ es compleix

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx = \int_{[0,1]\setminus \cup I_j} |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} |f(x) - f(x-t)|^2 \, dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

com volíem. $\square$

Teorema 4.4.7. *Sigui $f \in \mathcal{P}$, i (ϕ_ε) una aproximació de la unitat en $\mathcal{P}$. Aleshores, $||(f*\phi_\varepsilon)-f||^2 \longrightarrow 0$ a mesura que $\varepsilon \longrightarrow 0$. És a dir, $f*\phi_\varepsilon$ convergeix en norma a f quan ε es fa petit.*

Demostració. Per començar,

$$\begin{aligned}
|f(x)-(f*\phi_\varepsilon)(x)|^2 &= \left| f(x) - \int_0^1 f(x-t)\phi_\varepsilon(t)\ dt = \int_0^1 (f(x)-f(x-t))\,\phi_\varepsilon(t)\ dt \right|^2 \\
&= \left| \int_0^1 (f(x)-f(x-t))\,(\phi_\varepsilon(t))^{1/2}\,(\phi_\varepsilon(t))^{1/2}\ \ dt \right|^2
\end{aligned}$$

Donada la desigualtat d'Schwartz,

$$\left|\int_0^1 g(t)\overline{h(t)}\ dt\right|^2 \leq \left(\int_0^1 |g(t)|^2\ dt\right)\cdot\left(\int_0^1 |h(t)|^2\ dt\right)$$

podem entendre $g(t)=(f(x)-f(x-t))\,(\phi_\varepsilon(t))^{1/2}$ i $\overline{h(t)}=(\phi_\varepsilon(t))^{1/2}$, de manera que

$$\begin{aligned}
&|f(x)-(f*\phi_\varepsilon)(x)|^2 \leq \left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\,\phi_\varepsilon(t)\ dt\right)\cdot\left(\int_0^1 \phi_\varepsilon(t)\ dt\right) \\
&= \int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\,\phi_\varepsilon(t)\ dt
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
&||f-(f*\phi_\varepsilon)||^2 = \int_0^1 |f(x)-(f*\phi_\varepsilon)(x)|^2\ \ dx \leq \int_0^1\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\,\phi_\varepsilon(t)\ dt\ dx \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt
\end{aligned}$$

Ara, prenem un $\delta>0$, que acabarem de determinar més tard, i separem la integral anterior d'acord a $|t|<\delta$ i $\delta<|t|<1-\delta$, i $1-\delta<|t|<1$, quedant

$$\begin{aligned}
||f-(f*\phi_\varepsilon)||^2 \leq& \int_0^\delta\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt + \int_\delta^{1-\delta}\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt \\
&+ \int_{1-\delta}^1\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt
\end{aligned}$$

Per a la primera i tercera integrals, el lema anterior ens garanteix que donat $\eta>0$, podem fer δ prou petit de manera que

$$\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx < \eta/3$$

de manera que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt + \int_{1-\delta}^1\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt \\
&< \frac{\eta}{3}\int_0^\delta \phi_\varepsilon(t)\ dt + \frac{\eta}{3}\int_{1-\delta}^1 \phi_\varepsilon(t)\ dt < \frac{2\eta}{3}\int_0^1 \phi_\varepsilon(t)\ dt = \frac{2\eta}{3}
\end{aligned}$$

Pel que fa a la segona, acotem

$$\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ \ dx \leq 4\left(\sup_{x\in[0,1]} |f|\right)^2$$

i llavors

$$\int_\delta^{1-\delta}\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt \le 4\left(\sup_{x\in[0,1]}|f|\right)^2\int_\delta^{1-\delta}\phi_\varepsilon(t)\ dt$$

Finalment, al ser ϕ_ε una aproximació de la unitat, convergeix uniformement a zero a l'interval $[\delta, 1-\delta]$, de manera que podem trobar $\varepsilon > 0$ prou petit i aconseguir que

$$\int_\delta^{1-\delta}\phi_\varepsilon(t)\ dt < \frac{\eta}{12\left(\sup_{x\in[0,1]}|f|\right)^2}$$

quedant

$$\int_\delta^{1-\delta}\left(\int_0^1 |f(x)-f(x-t)|^2\ dx\right)\phi_\varepsilon(t)\ dt < 4\left(\sup_{x\in[0,1]}|f|\right)^2\frac{\eta}{12\left(\sup_{x\in[0,1]}|f|\right)^2} = \frac{\eta}{3}$$

i tot plegat

$$||f-(f*\phi_\varepsilon)||^2 < \frac{2\eta}{3}+\frac{\eta}{3} = \eta$$

□

4.4.3 | Sèrie de Fourier. Nuclis de Dirichlet i Fejér. Lema de Riemann-Lebesgue

Entrem a definir el concepte que dóna nom a aquest capítol.

Definició 4.4.8. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Definim la* sèrie de Fourier de f *com l'expressió*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

Aquesta és l'eina a partir de la qual començarem a resoldre les preguntes que encapçalen la secció. Per començar, observem que si prenem una suma parcial d'aquesta sèrie tal que $n = -N, ..., N$ per algun $N \in \mathbb{N}$, tenim que

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx} &= \sum_{n=-N}^{N}\left(\int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt\right)e^{2\pi inx} = \sum_{n=-N}^{N}\left(\int_0^1 f(t)e^{2\pi in(x-t)}dt\right)\\ &= \int_0^1 f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N}e^{2\pi in(x-t)}\right)dt\end{aligned}$$

Definició 4.4.9. *L'expressió*

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}e^{2\pi int}$$

rep el nom de nucli de Dirichlet *d'ordre N.*

D'aquesta manera, queda que

$$\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx} = \int_0^1 f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N}e^{2\pi in(x-t)}\right)dt = (f*D_N)(x)$$

Les sumes parcials d'una sèrie de Fourier, doncs, no són més que la convolució de f contra els nuclis de Dirichlet.

Ens agradaria que la família (D_N) per $N \in \mathbb{N}$ fos una aproximació de la unitat a $\mathcal{P}$, perquè d'aquesta manera, tindríem que la sèrie de Fourier d'una funció contínua convergeix uniformement a la funció gràcies al teorema 4.4.5.

Abans de res, busquem una expressió més simple pels nuclis de Dirichlet. Tenim que

$$\begin{aligned}
D_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi int} = e^{-2\pi iNt} + \cdots + 1 + \cdots + e^{2\pi iNt} = e^{-2\pi iNt}\left(1 + e^{2\pi it} + \cdots + e^{2\pi i(2N)t}\right) \\
&= e^{-2\pi iNt} \sum_{n=0}^{2N} \left(e^{2\pi it}\right)^n = e^{-2\pi iNt}\ \frac{1 - e^{2\pi i(2N+1)t}}{1 - e^{2\pi it}} = \frac{e^{-\pi i(2N+1)t}}{e^{-\pi it}}\ \frac{1 - e^{2\pi i(2N+1)t}}{1 - e^{2\pi it}} \\
&= \frac{e^{-\pi i(2N+1)t} - e^{\pi i(2N+1)t}}{e^{-\pi it} - e^{\pi it}}
\end{aligned}$$

Ara, com que

$$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) - \cos(\theta) - i\sin(\theta) = -2i\sin(\theta)$$

queda

$$D_N(t) = \frac{e^{-\pi i(2N+1)t} - e^{\pi i(2N+1)t}}{e^{-\pi it} - e^{\pi it}} = \frac{\sin\left((2N+1)\pi t\right)}{\sin(\pi t)}$$

Ara es veu clar, però, que (D_N) no pot ser una aproximació de la unitat a $\mathcal{P}$, perquè les funcions D_N no són sempre positives.

Podem crear, però, una aproximació de la unitat a $\mathcal{P}$ a partir dels nuclis de Dirichlet.

Definició 4.4.10. *L'expressió*

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(t)$$

rep el nom de nucli de Fejér *d'ordre N.*

Abans de veure que, efectivament, els nuclis de Fejér formen una aproximació de la unitat, busquem una expressió més senzilla per aquestes funcions.

$$\begin{aligned}
K_N(t) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left((2n+1)\pi t\right)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \sum_{n=0}^{N} \sin\left((2n+1)\pi t\right) \\
&= \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{i(2n+1)\pi t}\right) = \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \operatorname{Im}\left(e^{\pi it}\frac{1 - e^{2\pi i(N+1)t}}{1 - e^{2\pi it}}\right) \\
&= \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \operatorname{Im}\left(\frac{1 - e^{2\pi i(N+1)t}}{e^{-\pi it} - e^{\pi it}}\right) \\
&= \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \operatorname{Im}\left(\frac{1 - \cos(2\pi(N+1)t) - i\sin(2\pi(N+1)t)}{-2i\sin(\pi t)}\right) \\
&= \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \operatorname{Im}\left(\frac{\sin(2\pi(N+1)t)}{2\sin(\pi t)} + i\frac{1 - \cos(2\pi(N+1)t)}{2\sin(\pi t)}\right) = \frac{1 - \cos(2\pi(N+1)t)}{2(N+1)\sin^2(\pi t)} \\
&= \frac{\sin^2(\pi(N+1)t)}{(N+1)\sin^2(\pi t)}
\end{aligned}$$

Lema 4.4.11. *La família (K_N) és una aproximació de la unitat a $\mathcal{P}$.*

Demostració. Veiem les tres condicions de la definició d'aproximació de la unitat:

1. És K_N una funció positiva per a tot N natural? Sí, perquè és quocient de funcions sinus al quadrat, que són funcions positives.
2. Es té que $\int_0^1 K_N = 1$? Sí, perquè

$$\int_0^1 K_N(t)\ dt = \int_0^1 \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\ dt = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 D_n(t)\ dt$$

i $\int_0^1 D_n = 1$ perquè

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}$$

i totes les funcions $e^{2\pi ikt}$ tenen integral zero per periodicitat, excepte per $k=0$ que tenim $\int_0^1 e^{2\pi i0t}\ dt = \int_0^1\ dt = 1$, de manera que

$$\int_0^1 K_N(t)\ dt = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 1 = \frac{N+1}{N+1} = 1$$

3. Es fa petit $\sup_{\delta<t<1-\delta} K_N(t)$ a mesura que N es fa gran? Efectivament,

$$\begin{aligned}\sup_{\delta<t<1-\delta} K_N(t) &= \sup_{\delta<t<1-\delta}\frac{\sin^2(\pi(N+1)t)}{(N+1)\sin^2(\pi t)} \le \sup_{\delta<t<1-\delta}\frac{1}{(N+1)\sin^2(\pi t)}\\ &= \frac{1}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)} \xrightarrow{N\to\infty} 0\end{aligned}$$

□

Corol·lari 4.4.12. *Sigui $f \in \mathcal{P}$ contínua. Aleshores, $f * K_N$ convergeix a f uniformement a $\mathbb{R}$.*

Volem conèixer l'expressió de $f * K_N$, per $f \in \mathcal{P}$. Per començar, notem que

$$\begin{aligned}K_N(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikt}(N+1-|k|)\\ &= \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)e^{2\pi ikt}\end{aligned}$$

Llavors,

$$\begin{aligned}(f * K_N)(x) &= \int_0^1 f(t)K_N(x-t)\ dt = \int_0^1 f(t)\sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)e^{2\pi ik(x-t)}\ dt\\ &= \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\int_0^1 f(t)e^{2\pi ik(x-t)}\ dt\\ &= \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)e^{2\pi ikx}\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\ dt = \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\widehat{f}(n)\ e^{2\pi ikx}\end{aligned}$$

Les expressions obtingudes per a cada N són bastant semblants a les sumes parcials de la sèrie de Fourier de la funció f, i reben el nom de *suma de Cessaro*. Notem que són polinomis trigonomètrics. Acabem de trobar, doncs, un equivalent al teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass, ara en el context de les funcions periòdiques.

Corol·lari 4.4.13 (**Teorema de Fejér**). *Sigui $f \in \mathcal{P}$ contínua. Llavors, existeixen polinomis trigonomètrics p_n tals que (p_n) convergeix uniformement a f en $\mathbb{R}$.*

Aquest fet ens permet començar a respondre la primera pregunta que ens hem plantejat sobre la transformació de Fourier: és $\mathcal{F}$ una aplicació injectiva? La resposta, almenys per funcions de $\mathcal{P}$ contínues, és que sí.

Corol·lari 4.4.14. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$ contínues, tals que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Aleshores, $f \equiv g$.*

Demostració. Com que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ per a tot n enter, tenim que $f * K_N \equiv g * K_N$. Com que $(f * K_N) \longrightarrow f$ i $(g * K_N) \longrightarrow g$ uniformement, cal que $f \equiv g$, com volíem. □

Més en general, podem aprofitar el teorema 4.4.7 per estendre aquest fet a totes les funcions de $\mathcal{P}$.

Corol·lari 4.4.15. *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$, tals que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Aleshores, $f \equiv g$.*

Demostració. Novament, al tenir $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$, llavors $f * K_N \equiv g * K_N$. Pel teorema 4.4.7, $||f-(f*K_N)||^2 \longrightarrow 0$ i $||g-(g*K_N)||^2 \longrightarrow 0$ quan $N \to \infty$. Per tant, ha de ser que $||f-g||^2 = 0$, però això vol dir que

$$||f-g||^2 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx = 0$$

Ara, per ser $f, g \in \mathcal{P}$, i ser $|f(x) - g(x)|^2$ una funció positiva, només pot ser que $|f(x) - g(x)| = 0$ per a tot $x \in [0, 1]$. Queda, doncs, que $f \equiv g$. □

Donada una funció $f \in \mathcal{P}$, els seus coeficients de Fourier compleixen una important propietat, que ens serà de gran utilitat per resultats posteriors.

Corol·lari 4.4.16 (**Lema de Riemann-Lebesgue**). *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Llavors,*

$$\lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}(n) = 0$$

Demostració. Donat $\varepsilon > 0$, podem prendre N prou gran de manera que $||f - f * K_N|| < \varepsilon$. Observem que si considerem $g(x) = |f(x) - (f * K_N)(x)|$ i $h(x) = 1$, i apliquem la desigualtat d'Schwartz amb aquestes dues funcions, obtenim que

$$\int_0^1 |f(x) - (f * K_N)(x)| \, dx = \langle |f - f * K_N|, 1 \rangle \leq \left(\int_0^1 |f(x) - (f * K_N)(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1 \, dx \right)^{1/2}$$
$$= ||f - f * K_N|| < \varepsilon$$

Finalment, per $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|n| > N$, es compleix que $\widehat{f * K_N}(n) = 0$, i tenim que

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{f * K_N}(n)| = \left| \int_0^1 (f(x) - (f * K_N)(x)) \, e^{-2\pi i n x} \, dx \right|$$
$$\leq \int_0^1 |f(x) - (f * K_N)(x)| \left| e^{-2\pi i n x} \right| \, dx = \int_0^1 |f(x) - (f * K_N)(x)| \, dx < \varepsilon$$

□

Exemple 4.4.17 (**Càlcul de marees (Kelvin 1850)**). El càlcul de l'alçada de les marees ha sigut sempre una tasca molt complicada. Avui en dia, els models més realistes que tenim es basen en càlculs numèrics que són possibles, a la pràctica, gràcies a la potència actual dels ordinadors.

Kelvin, però, va ser capaç de trobar una solució analítica bastant precisa, aprofitant l'aproximació per polinomis trigonomètrics de funcions periòdiques.

La primera observació que Kelvin va fer és que el moviment de les marees és, efectivament, un procés periòdic, influenciat per l'efecte gravitatori de la Terra, la Lluna i el Sol sobre l'aigua (que també són processos periòdics). Sabem, doncs, que aquesta funció $h(t)$, que mesura l'alçada de l'aigua en un temps determinat, s'ha de poder aproximar per polinomis trigonomètrics

$$h(t) \sim \overline{\sum} a_j e^{2\pi i \lambda_j t}$$

d'on hem de trobar a_j.

Primer, observem que cada a_j el podem escriure com

$$a_j = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t) e^{-2\pi i \lambda_j t}\, dt$$

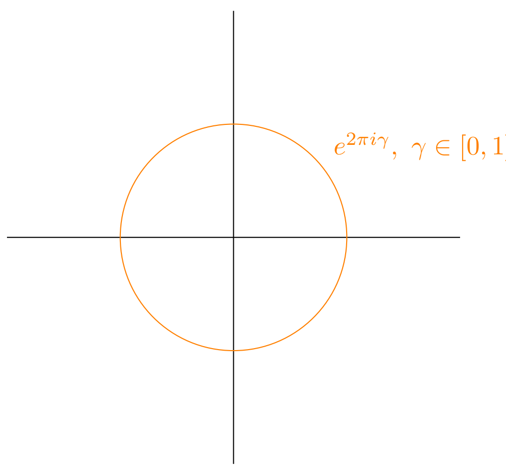
Efectivament,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t) e^{-2\pi i \lambda_j t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\sum} a_k \int_0^T e^{2\pi i \lambda_k t} e^{-2\pi i \lambda_j t}\, dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\sum_{k\neq j}} a_k \left. \frac{e^{2\pi i(\lambda_k-\lambda_j)t}}{2\pi i(\lambda_k-\lambda_j)} \right|_0^T + a_j = a_j$$

Notem que això permetia a Kelvin trobar aproximacions dels a_j, mesurant durant una gran quantitat de temps T diferents valors de $h(t)$, per poder acabar avaluant numèricament aquesta integral.

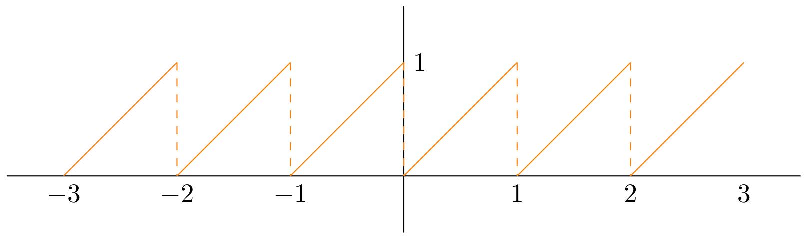
4.4.4 | Aplicació de l'aproximació per polinomis trigonomètrics: teorema d'equidistribució de Weyl

La circumferència unitat, S^1, és el subconjunt de $\mathbb{R}^2$ format per tots els vectors amb mòdul 1. Gràcies a la identificació de $\mathbb{C}$ amb el pla complex, podem donar els punts de S^1 a través de l'expressió $e^{2\pi i\gamma}$, amb $\gamma \in [0,1]$.



Ara, donat un γ concret, considerem el conjunt de punts de S^1 de la forma $\{e^{2\pi i\gamma n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. És clar que aquests punts estaran distribuïts al llarg de la circumferència, amb cada punt més endavant en sentit antihorari que l'anterior. El que volem saber és quina pinta té aquest conjunt, d'acord a la naturalesa de γ.

Abans de resoldre la qüestió, podem traslladar el problema directament a l'interval $[0,1]$, perquè aquest interval està en bijecció amb S^1 gràcies a l'expressió de l'exponencial complexa. En particular, el que farem és que, per a cada $x \in \mathbb{R}$, considerarem la seva *part decimal* com $\langle x \rangle = x - [x]$, on $[x]$ en denota la part entera. Notem que, per a tot $x \in \mathbb{R}$, es té que $\langle x \rangle \in [0,1]$. De fet, $\langle x \rangle$ és una funció $1-$periòdica.



Ara, donat un x concret, considerarem el conjunt $\{\langle nx \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$, que està contingut a l'interval $[0,1]$, i el que volem saber és com és aquest conjunt en relació al valor x que hem agafat.

Primer, veiem que passa si $x \in \mathbb{Q}$, és a dir, $x = p/q$, amb p, q sense divisors comuns, i considerem $\langle np/q \rangle$. Queda clar que cada cop que n sigui de la forma $n = kq + 1$, tindrem que

$$\left\langle n\frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle (kq+1)\frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle kp + \frac{p}{q} \right\rangle$$

però kp és un valor enter, de manera que no contribueix a la part decimal, i es té que $\langle kp + p/q \rangle = \langle p/q \rangle$. En particular, tenim que per x racional, el conjunt format pels punts $\langle nx \rangle$ és finit.

La pregunta, doncs, es redueix a veure que passa pels valors de x irracionals, i la resposta ens la dóna el teorema d'equidistribució de Weyl.

Teorema 4.4.18 (**Teorema d'equidistribució de Weyl**). *Sigui $f \in \mathcal{P}$ contínua, i sigui $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Llavors,*

1. *És certa la identitat següent*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(k\gamma) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

2. *Prenent $k \in \mathbb{N}$, la successió $(\langle k\gamma \rangle)$ està* uniformement distribuïda a l'interval $[0,1]$*: per a tot $[a,b] \subset [0,1]$, i $A_N = \{k \in \{1, 2, ..., N\} \mid \langle k\gamma \rangle \in [a,b]\}$, es té que*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#A_N}{N} = b - a$$

   on $\#A_N$ denota el cardinal de A_N.

Demostració. Veiem cada apartat per separat.

1. Sigui

$$G_N(f) = \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(k\gamma)$$

   Veurem que $G_N(f)$ sempre es fa zero quan N tendeix a infinit.

   Per començar, suposem que $f(x) = e^{2\pi i j x}$, amb $j \in \mathbb{Z}$. Si $j = 0$, $f(x) = 1$, i

$$\int_0^1 1\, dx = 1$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 1 = \frac{N}{N} = 1$$

de manera que $G_N(f) = 1 - 1 = 0$. Si $j \neq 0$, la integral $\int_0^1 e^{2\pi ijx}\ dx = 0$ i

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi ijk\gamma} = \frac{e^{2\pi ij\gamma}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{2\pi ij\gamma}\right)^k = \frac{e^{2\pi ij\gamma}}{N}\ \frac{1-e^{2\pi ijN\gamma}}{1-e^{2\pi ij\gamma}}$$

Com que γ no és racional, $j\gamma$ no pot ser enter, de manera que $e^{2\pi ij\gamma}$ sempre és diferent de 1, i queda que per a tot N natural, el terme

$$e^{2\pi ij\gamma}\ \frac{1-e^{2\pi ijN\gamma}}{1-e^{2\pi ij\gamma}}$$

està acotat. Per tant,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi ijk\gamma} = \lim_{N\to\infty}\frac{e^{2\pi ij\gamma}}{N}\ \frac{1-e^{2\pi ijN\gamma}}{1-e^{2\pi ij\gamma}} = 0$$

i novament, $\lim_{N\to\infty} G_N(f) = 0$.

Ara, suposem que f és un polinomi trigonomètric; és a dir,

$$f(x) = \overline{\sum} a_j e^{2\pi ijx}$$

Observem que $G_N(f)$, al ser combinació lineal d'operacions lineals (sumatori i integral d'una funció), és també lineal, de manera que

$$G_N\left(\overline{\sum} a_j e^{2\pi ijx}\right) = \overline{\sum} a_j G_N\left(e^{2\pi ijx}\right)$$

però cada $G_N\left(e^{2\pi ijx}\right)$ tendeix a zero pel que hem vist abans, de manera que tornem a tenir que $G_N(f)$ tendeix a zero.

Finalment, mirem el cas general, de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua i $1-$periòdica. Fixat $\varepsilon > 0$, sabem que existeix un polinomi trigonomètric p tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon/3$$

per 4.4.13. D'altra banda, $G_N(f) = G_N(f - p + p) = G_N(f - p) + G_N(p)$. Primer, si N es prou gran podem fer que $|G_N(p)| < \varepsilon/3$ per la justificació realitzada amb els polinomis trigonomètrics. A més,

$$\begin{aligned}|G_N(f-p)| &= \left|\int_0^1 (f-p)(x)\ dx - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(f-p)(k\gamma)\right| \\ &\leq \int_0^1 |(f-p)(x)|\ dx + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|(f-p)(k\gamma)| < \frac{\varepsilon}{3}\int_0^1 1\ dx + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1 = \frac{2\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Queda, doncs, que $|G_N(f)| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$, almenys si N és prou gran.

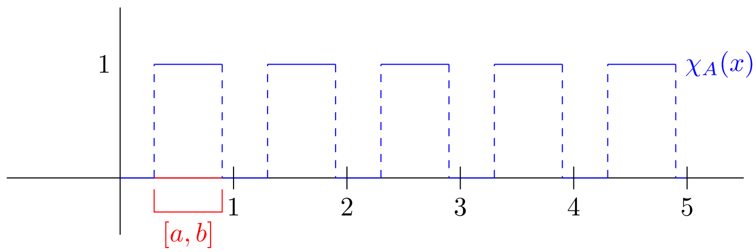
2. Donat un subconjunt A de la recta real, definim la *funció característica de A*, com la funció $\chi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Sigui

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} [j + a, j + b]$$

i considerem la gràfica de χ_A.



Observem que $\#A_N = \sum_{k=1}^{N} \chi_A(k\gamma)$, de manera que

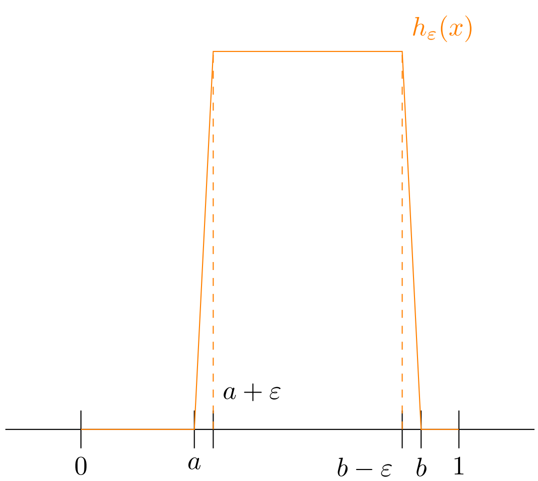
$$\frac{\#A_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \chi_A(k\gamma)$$

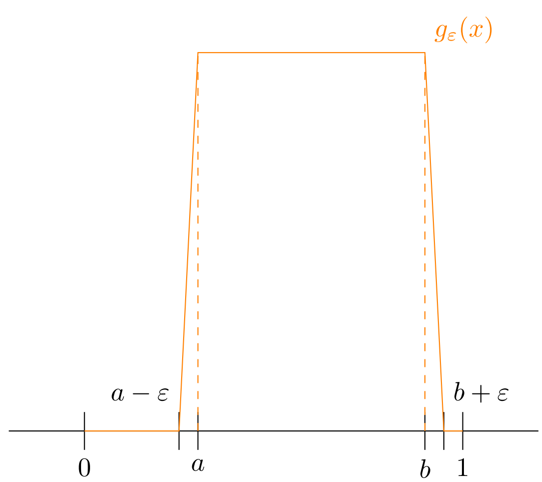
Ens agradaria poder aplicar la primera part del teorema, però χ_A no és una funció contínua. En canvi, sí que podem considerar les funcions continues $h_\varepsilon, g_\varepsilon : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, per a cada $\varepsilon > 0$, definides per

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [a,b] \\ \frac{1}{\varepsilon}(x-a) \text{ si } x \in (a, a+\varepsilon) \\ 1 \text{ si } x \in (a+\varepsilon, b-\varepsilon) \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x-b) \text{ si } x \in (b-\varepsilon, b) \end{cases}$$

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \\ \frac{1}{\varepsilon}(x-a+\varepsilon) \text{ si } x \in (a-\varepsilon, a) \\ 1 \text{ si } x \in (a,b) \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x-b-\varepsilon) \text{ si } x \in (b, b+\varepsilon) \end{cases}$$

i esteses a la recta de forma periòdica.





Observem que sempre tenim que $h_\varepsilon \leq \chi_A \leq g_\varepsilon$. En particular,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h_\varepsilon(k\gamma) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \chi_A(k\gamma) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g_\varepsilon(k\gamma)$$

Com que h_ε i g_ε són contínues, per l'apartat 1 tenim que si N es fa gran,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h_\varepsilon(k\gamma) \longrightarrow \int_0^1 h_\varepsilon(x)\ dx = b-a-\varepsilon$$
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g_\varepsilon(k\gamma) \longrightarrow \int_0^1 g_\varepsilon(x)\ dx = b-a+\varepsilon$$

Per tant, a mesura que N es fa gran, tenim que

$$b-a-\varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \chi_A(k\gamma) \leq b-a+\varepsilon$$

i això és cert per a tot ε. Per la regla del Sandwich,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \chi_A(k\gamma) \longrightarrow b-a$$

□

4.5 | Teorema de Plancherel. Identitat de Parseval

Hem vist en la secció anterior que la transformació de Fourier $\mathcal{F}$ envia, de manera injectiva, qualsevol funció $f \in \mathcal{P}$, al conjunt dels seus coeficients de Fourier, que formen una successió amb límit zero pel lema de Riemann-Lebesgue. També hem vist que, aprofitant aquesta successió, podem trobar polinomis trigonomètrics que convergeixen uniformement a f en la recta real, en cas que f sigui contínua. Del que no em parlat gaire, encara, és de la relació de la funció f amb la seva sèrie de Fourier,

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Veiem que en podem dir, doncs, d'aquesta sèrie.

Teorema 4.5.1 (Teorema de Plancherel). *Siguin $f, g \in \mathcal{P}$, i considerem*

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Llavors,

1. *La distància donada pel producte escalar entre f i $S_N(f)$ es fa petita a mesura que N es fa gran:*

$$\lim_{N\to\infty} ||f - S_N(f)|| = \lim_{N\to\infty} \langle f, S_N(f)\rangle^{1/2} = 0$$

2. *La transformació de Fourier és una isometria:*

$$||f||^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

3. *La següent identitat, coneguda com a* identitat de Parseval*, és certa:*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$$

Demostració. Demostrarem el primer i el tercer apartat. El segon serà corol·lari del tercer prenent $f \equiv g$.

1. Sabem, pel teorema 4.4.7, i considerant com a aproximació de la unitat en $\mathcal{P}$ el nucli de Fejér, que donat $\varepsilon > 0$ existeix un polinomi trigonomètric

$$p(x) = \overline{\sum} a_j e^{2\pi i j x}$$

tal que

$$||f(x) - p(x)|| < \varepsilon$$

És clar que podem escriure el polinomi com

$$p(x) = \sum_{j=-M}^{M} b_j e^{2\pi i j x}$$

per algun M prou gran, fent $b_j = 0$ allà on calgui. Ara, si $N > M$, tenim que

$$||f - p||^2 = ||f - S_N(f) + S_N(f) - p||^2$$

Però $f - S_N(f)$ i $S_N(f) - p$ són funcions ortogonals entre elles. Efectivament, notem que

$$(S_N(f) - p)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx}$$

perquè tant $S_N(f)$ com p són polinomis trigonomètrics. Calculant el producte escalar i aplicant les propietats pertinents, tenim que

$$\langle f - S_N(f), S_N(f) - p \rangle = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \left(\langle f, e^{2\pi inx} \rangle - \langle S_N(f), e^{2\pi inx} \rangle \right) = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \left(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(n) \right) = 0$$

. Llavors,

$$\begin{aligned}
||f - p||^2 = ||f - S_N(f) + S_N(f) - p||^2 &= \langle f - S_N(f) + S_N(f) - p, S_N(f) - p + S_N(f) - p \rangle \\
&= \langle f - S_N(f), f - S_N(f) \rangle + \langle S_N(f) - p, S_N(f) - p \rangle \\
&= ||f - S_N(f)||^2 + ||S_N(f) - p||^2 \geq ||f - S_N(f)||^2
\end{aligned}$$

Per tant, $||f - S_N(f)|| \leq ||f - p|| < \varepsilon$.

3. Per començar, prenem f qualsevol, i g un polinomi trigonomètric. g es pot escriure com

$$g(x) = \overline{\sum} a_n e^{2\pi inx}$$

Però és evident que també es té

$$g(x) = \overline{\sum} \widehat{g}(n) e^{2\pi inx}$$

Llavors,

$$\langle f, g \rangle = \left\langle f, \overline{\sum} \widehat{g}(n) e^{2\pi inx} \right\rangle = \overline{\sum} \langle f, \widehat{g}(n) e^{2\pi inx} \rangle$$

Per les propietats del producte escalar,

$$\langle f, g \rangle = \overline{\sum} \overline{\widehat{g}(n)} \langle f, e^{2\pi inx} \rangle$$

i finalment

$$\langle f, g \rangle = \overline{\sum} \overline{\widehat{g}(n)} \widehat{f}(n)$$

Si g és una funció qualsevol, considerem $S_N(g)$. Pel que acabem de veure, tenim que

$$\langle f, S_N(g) \rangle = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}$$

D'altra banda,

$$|\langle f, g \rangle - \langle f, S_N(g) \rangle| = |\langle f, g - S_N(g) \rangle|$$

i per la desigualtat de Schwartz,

$$|\langle f, g \rangle - \langle f, S_N(g) \rangle| \leq ||f|| \cdot ||g - S_N(g)||$$

i com que $||g - S_N(g)|| \longrightarrow 0$ pel primer apartat, queda que $\langle f, S_N(g) \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle$, de manera que

$$\langle f, g \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle f, S_N(g) \rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}$$

$\square$

Exemple 4.5.2. Considerem la funció $f(x) = x$ definida a l'interval $[-1/2, 1/2]$, i estenem-la periòdicament. Calculem els seus coeficients de Fourier,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\ dx = \int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2\pi inx}\ dx$$

Si $n = 0$, llavors tenim $\widehat{f}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} x\ dx = 0$. Si $n \neq 0$, llavors

$$\widehat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2\pi inx}\ dx = \left[\frac{-1}{2\pi in} xe^{-2\pi inx}\right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi inx}\ dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi in}$$

Pel teorema anterior, tenim que

$$\int_0^1 |f(x)|^2\ dx = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2}$$

Però

$$\int_0^1 |f(x)|^2\ dx = \int_{-1/2}^{1/2} x^2\ dx = \frac{1}{12}$$

Sense voler-ho, acabem de calcular la suma de tots els inversos quadrats,

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4.5.1 | Aplicació del teorema de Plancherel: desigualtat isoperimètrica

Una circumferència de radi r té una longitud $L = 2\pi r$ i tanca una àrea de $A = \pi r^2$. Per tant,

$$A = \frac{L^2}{4\pi}$$

Ha sigut sempre una qüestió de gran interès el saber, donada una corda de longitud L fixa, de quina manera cal disposar-la de tal forma que l'àrea tancada màxima. Intuïtivament, tots estarem d'acord en que la millor manera de fer-ho és formant una circumferència, però la demostració va requerir una mica més d'esforç (2000 anys d'esforç, per ser precisos).

Formalitzem el problema matemàticament. Sigui $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba de longitud L fixa, de classe C^1, tancada ($\gamma(0) = \gamma(1)$) i simple (injectiva en $(0,1)$), i considerem A_γ (l'àrea que aquesta corba tanca). Com és A_γ en relació a $L^2/4\pi$, que és l'àrea de la circumferència que té la mateixa longitud que γ?

Teorema 4.5.3. *Per a tota $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 simple i tancada de longitud L, és compleix que*

$$A_\gamma \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

A més, la igualtat és compleix si i només si γ és una circumferència.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, fem que $L = 1$, i suposem que γ està parametritzada pel paràmetre arc (de manera que $||\gamma'(t)|| = 1$ per a tot $t \in [0,1]$). Com que γ és una corba al pla, s'escriu com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on $x, y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Considerem per separat aquestes dues funcions, i estenem-les periòdicament a tota la recta. Observem que la extensió periòdica és contínua, perquè x, y són contínues en $[0,1]$, i $x(0) = x(1)$, així com $y(0) = y(1)$, perquè γ és tancada.

Recordem que l'àrea tancada per una corba és calcula com

$$A_\gamma = \frac{1}{2}\int_\gamma x\ dy - y\ dx$$

En el nostre cas, tenim que

$$A_\gamma = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)y'(t)\ dt - y(t)x'(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)y'(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)x'(t)\ dt$$

Com que x' i y' són funcions a valors reals, es compleix que $x' \equiv \overline{x'}$ i $y' \equiv \overline{y'}$, de manera que

$$A_\gamma = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)\overline{y'(t)}\ dt - \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)\overline{x'(t)}\ dt$$

Ara, apliquem a cada integral la identitat de Parseval,

$$\begin{aligned} A_\gamma &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(n)\overline{\widehat{y'}(n)} - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{y}(n)\overline{\widehat{x'}(n)} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(n)\overline{2\pi in\ \widehat{y}(n)} - \widehat{y}(n)\overline{2\pi in\ \widehat{x}(n)} \\ &= \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)} - \widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)}\right) = \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2in\ \mathrm{Im}\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right) = -2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\ \mathrm{Im}\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right) \end{aligned}$$

Com que $A_\gamma \geq 0$, ha de ser que

$$-2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\ \mathrm{Im}\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right) = \left|2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\ \mathrm{Im}\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right)\right|$$

i tenim que

$$\begin{aligned} A_\gamma &= \left|2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\ \mathrm{Im}\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right)\right| \leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\ \left|\mathrm{Im}\left(\widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right)\right| \\ &\leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\ |\widehat{y}(n)|\ |\widehat{x}(n)| \leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\ \left|\frac{\widehat{y}(n)^2 + \widehat{x}(n)^2}{2}\right| \\ &\leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(|\widehat{y}(n)|^2 + |\widehat{x}(n)|^2\right) = \pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} |n| \left(\left|\frac{\widehat{y'}(n)}{2\pi in}\right|^2 + \left|\frac{\widehat{x'}(n)}{2\pi in}\right|^2\right) \\ &\leq \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{y'}(n)\right|^2 + \left|\widehat{x'}(n)\right|^2 \end{aligned}$$

De nou, pel teorema de Plancherel,

$$A_\gamma \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^1 |y'(t)|^2 + |x'(t)|^2\ dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 ||\gamma'(t)||^2\ dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^1\ dt = \frac{1}{4\pi}$$

Per a que hi hagi igualtat, cal que $\widehat{x}(n) = \widehat{y}(n) = 0$ per a tot $|n| > 1$. Això només passa, però, si γ és un cercle. $\square$

4.6 | Convergència puntual de les sèries de Fourier

Sabem que la sèrie de Fourier d'una funció convergeix, en norma, a la funció. Ens preguntem si també convergeix puntualment. És a dir, si per a cada $x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x)$ s'apropa a $f(x)$ a mesura que N es fa gran.

Notem que la convergència en norma de funcions no està relacionada amb la convergència puntual. Per exemple, hi ha funcions (f_n) tals que $||f_n|| \longrightarrow 0$ però que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$ per a tot x, així com hi ha funcions (g_n) tals que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ per a tot x però que $||g_n|| \nrightarrow 0$.

Podem veure un cas de cada situació. Pel primer exemple, donat $n \in \mathbb{N}$, considerem els intervals de la forma $[k/2^n, (k+1)/2^n]$, prenent $k = 0, 1, ..., 2^n - 1$, i sigui $(f_{k,n})$ la successió de funcions definides per

$$f_{k,n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \end{cases}$$

Per començar,

$$||f_{k,n}||^2 = \int_0^1 |f_{k,n}(x)|^2 \, dx = \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} \, dx = \frac{1}{2^n}$$

i clarament, $||f_{k,n}|| \longrightarrow 0$. D'altra banda, per a tot $x \in [0,1]$ existeixen k, n arbitràriament grans tals que $x \in [k/2^n, (k+1)/2^n]$, i també existeixen k', n' arbitràriament grans tals que $x \notin [k'/2^{n'}, (k'+1)/2^{n'}]$. Per tant, no pot existir el límit de $f_{k,n}(x)$ per a cap x.

Pel segon exemple, considerem la successió (g_n) definida per les funcions

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ \sqrt{n} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \end{cases}$$

Ara, donat $x \in [0,1]$, existeix n_0 prou gran tal que $x \notin [1/n, 2/n]$ per a tot $n \geq n_0$ (només cal fer $2/n_0 < x$), de manera que per a tot x es té que $g_n(x) \longrightarrow 0$. Però si calculem la seva norma,

$$||g_n||^2 = \int_0^1 |g_n(x)|^2 \, dx = \int_{1/n}^{2/n} n \, dx = 1 \nrightarrow 0$$

Vistos aquests casos, queda clara la importància d'estudiar sota quines condicions tenim convergència puntual de la sèrie de Fourier d'una funció als valors d'aquesta.

Teorema 4.6.1. *Sigui $f \in \mathcal{P}$, i sigui $x_0 \in [0,1]$, tal que la integral*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \, dh$$

és convergent. Aleshores,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

Demostració. Sabem que $S_N(f)(x_0) = (f * D_N)(x_0)$, on D_N és el nucli de Dirichlet,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{\sin\left((2N+1)\pi x\right)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin\left(2N\pi x + \pi x\right)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin(2N\pi x)\cos(\pi x) + \cos(2N\pi x)\sin(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ &= \frac{\sin(2N\pi x)}{\tan(\pi x)} + \cos(2N\pi x) \end{aligned}$$

i recordem que $\int_0^1 D_N(t)\ dt = 1$. Ara,

$$\begin{aligned}
|S_N(f)(x_0) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 f(x_0 - t) D_N(t)\ dt - f(x_0) \right| = \left| \int_0^1 f(x_0 - t) D_N(t) - f(x_0) D_N(t)\ dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 (f(x_0 - t) - f(x_0))\, D_N(t)\ dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 (f(x_0 - t) - f(x_0)) \left(\frac{\sin(2N\pi t)}{\tan(\pi t)} + \cos(2N\pi t) \right)\ dt \right| \\
&\le \left| \int_0^1 (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\sin(2N\pi t)}{\tan(\pi t)}\ dt \right| + \left| \int_0^1 (f(x_0 - t) - f(x_0)) \cos(2N\pi t)\ dt \right|
\end{aligned}$$

Pel lema de Riemann-Lebesgue aplicat a la funció $g(t) = f(x_0 - t) - f(x_0) \in \mathcal{P}$, la segona integral tendeix a zero quan N tendeix a infinit (només cal notar que és igual a la part real de $\widehat{g}(N)$).

Ara, estudiem el comportament de la primera integral. Sigui $\delta > 0$ un número petit que es determinarà més endavant, i separem la integral en dos, de manera que tenim

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\sin(2N\pi t)}{\tan(\pi t)}\ dt \right| \\
&\le \int_0^\delta |f(x_0 - t) - f(x_0)| \left| \frac{\sin(2\pi N t)}{\tan(\pi t)} \right|\ dt + \left| \int_\delta^1 (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\sin(2N\pi t)}{\tan(\pi t)}\ dt \right|
\end{aligned}$$

Si prenem $\varepsilon > 0$, podem prendre δ de manera tal que

$$\int_0^\delta |f(x_0 - t) - f(x_0)| \left| \frac{\sin(2\pi N t)}{\tan(\pi t)} \right|\ dt \le \int_0^\delta \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{\tan(\pi t)} \right|\ dt < \varepsilon$$

perquè $\tan(\pi t) \sim \pi t$ quan t és petit, i la integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right|\ dt$$

és convergent per hipòtesi. Finalment, considerem l'altre part de la integral

$$\left| \int_\delta^1 (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\sin(2N\pi t)}{\tan(\pi t)}\ dt \right| = \left| \int_\delta^1 \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{\tan(\pi t)} \sin(2N\pi t)\ dt \right|$$

i veiem que també tendeix a zero a mesura que N es fa gran. Efectivament, la funció

$$h(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \delta) \\ \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{\tan(\pi t)} \text{ si } x \in [\delta, 1] \end{cases}$$

és una funció de $\mathcal{P}$, i es compleix que

$$\int_\delta^1 \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{\tan(\pi t)} \sin(2N\pi t)\ dt = \int_0^1 h(t) \sin(2N\pi t)\ dt$$

que és la part imaginària de $\widehat{h}(N)$, i que novament, pel lema de Riemann-Lebesgue, tendeix a zero si $N \longrightarrow \infty$. $\square$

Corol·lari 4.6.2. *Sigui $f \in \mathcal{P}$, i suposem que f és derivable en x_0. Aleshores, $S_N(f)(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ a mesura que $N \longrightarrow \infty$.*

Demostració. La condició de derivabilitat en x_0 fa convergent la integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \, dh$$

□

Corol·lari 4.6.3. *Sigui $f \in \mathcal{P}$, i suposem que existeixen $\alpha > 0$ i $C > 0$ tal que $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq C|h|^\alpha$, per a tot $h \in [-1/2, 1/2]$. Aleshores, $S_N(f)(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ a mesura que $N \longrightarrow \infty$.*

Demostració. Novament, només cal veure que la integral de la hipòtesis del teorema és convergent,

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \, dh \leq \int_{-1/2}^{1/2} C \frac{|h|^\alpha}{|h|} \, dh = 2C \int_0^{1/2} |h|^{\alpha-1} \, dh$$

Aquesta integral és sempre convergent, donat que $\alpha > 0$. □

Corol·lari 4.6.4. *Sigui $f \in \mathcal{P}$, i sigui x_0 una discontinuïtat de salt. Siguin l^+ i l^- els límits laterals de f en el punt x_0, i suposem que la integral*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0+h) - \frac{l^+ + l^-}{2}}{h} \right| \, dh$$

és convergent. Aleshores,

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{l^+ + l^-}{2}$$

Demostració. Només cal repetir la demostració del teorema 4.6.1 canviant $f(x_0)$ per $(l^+ + l^-)/2$. □

Observem que si la sèrie de Fourier d'una funció que pren valors reals convergeix puntualment a la funció en x_0, llavors s'han de poder arreglar les exponencials complexes (a través de simplificacions, cancel·lacions,...) de manera que el resultat sigui una sèrie de funcions reals (sinus o cosinus).

Com a dada addicional, notem que les millors condicions s'han trobat per la convergència puntual de la sèrie de Fourier les dóna el següent teorema, demostrat per Carleson al 1964.

Teorema 4.6.5. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua de període 1. Aleshores, existeix $E \subseteq \mathbb{R}$ de mesura de Lebesgue zero*[3] *tal que $S_N(f)(x) \xrightarrow{N \to \infty} f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R} \setminus E$.*

Exemple 4.6.6. Considerem $f(x) = x$ definida a $[-1/2, 1/2]$, i estenem-la periòdicament a la recta. Considerem la sèrie de Fourier d'aquesta funció, que per l'exemple 4.5.2 sabem que és

$$S(f)(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x}$$

[3]Un subconjunt $E \subseteq \mathbb{R}$ té mesura de Lebesgue zero si per a tot $\varepsilon > 0$ existeixen intervals I_j tals que $E \subseteq \bigcup I_j$ i $\sum L_j < \varepsilon$, on L_j és la longitud de l'interval I_j.

D'acord al corol·lari 4.6.2, es té que

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x}$$

sempre que $x \neq 1/2 + n$, $n \in \mathbb{Z}$, perquè excepte en aquests punts (que són punts de discontinuïtat de salt), la funció és derivable.

Podem reescriure la sèrie de manera que el que ens quedi sigui una sèrie de funcions que prenen valors reals. Tenim que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{-2\pi i n x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \left(e^{2\pi i n x} - e^{-2\pi i n x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \left(2i \sin(2\pi n x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi n x)
\end{aligned}$$

Observem que ara tenim una forma de calcular una gran quantitat de sèries numèriques. Per exemple, si prenem $x = 1/4$, tenim que

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(2\pi n \frac{1}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Veiem que valors pren el sinus,

$$\begin{aligned}
n = 1 &\Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
n = 2 &\Longrightarrow \sin(\pi) = 0 \\
n = 3 &\Longrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \\
n = 4 &\Longrightarrow \sin(2\pi) = 0
\end{aligned}$$

i per $n > 4$, tornem a tenir el mateix per periodicitat. Per tant, podem escriure

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$

quedant que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

4.7 | Coeficients de Fourier de funcions parells i senars. Sèrie de Fourier en sinus i cosinus

En aquesta secció, veiem com certes propietats de simetria d'una funció f permeten simplificar les relacions entre els seus coeficients de Fourier.

Definició 4.7.1. *Una funció* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *és* parell *si* $f(x) = f(-x)$ *per a tot* $x \in \mathbb{R}$. *Una funció* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *és* senar *si* $f(x) = -f(-x)$ *per a tot* $x \in \mathbb{R}$.

Veiem algunes propietats de les funcions parells i senars.

Proposició 4.7.2. *Siguin* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*, tals que* f *és parell i* g *és senar. Llavors, són certes les següents afirmacions:*

1. f^2 *i* g^2 *són funcions parells.* $f \cdot g$ *és una funció senar.*
2. *Si* f, g *són integrables en* $[-a, a]$, *llavors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$
$$\int_{-a}^{a} g(x)\ dx = 0$$

Demostració. 1. Veiem que f^2 i g^2 són funcions parells. Efectivament,

$$f^2(x) = f(x)\cdot f(x) = f(-x)\cdot f(-x) = f^2(-x)$$
$$g^2(x) = g(x)\cdot g(x) = (-g(-x))\cdot(-g(-x)) = g(-x)\cdot g(-x) = g^2(-x)$$

Ara, veiem que $f\cdot g$ és senar,

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = f(-x)\cdot(-g(-x)) = -f(-x)\cdot g(-x) = -(f\cdot g)(-x)$$

2. Calculem les integrals de les dues funcions. Per començar, en el cas de f es té que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Fent un canvi de variable a la primera integral, $x = -y$, $dx = -dy$, queda

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(-y)\ dy + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(y)\ dy + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Finalment, per la funció g tenim

$$\int_{-a}^{a} g(x)\ dx = \int_{-a}^{0} g(x)\ dx + \int_{0}^{a} g(x)\ dx$$

Tornem a fer el mateix canvi de variable que abans, de manera que

$$\int_{-a}^{a} g(x)\ dx = \int_{0}^{a} g(-y)\ dy + \int_{0}^{a} g(x)\ dx = -\int_{0}^{a} g(y)\ dy + \int_{0}^{a} g(x)\ dx = 0$$

□

Proposició 4.7.3. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Si f és parell, $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Si f és senar, $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$.*

Demostració. Suposem que f és parell, i calculem $\widehat{f}(n)$,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)e^{-2\pi int}\, dt$$

Si fem un canvi de variable $s = -t$, $ds = -dt$, llavors

$$\widehat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} f(-s)e^{2\pi ins}\, ds$$

Com que f és parell, $f(-s) = f(s)$. D'altra banda, podem escriure $e^{2\pi ins} = e^{-2\pi i(-n)s}$. Tot plegat,

$$\widehat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} f(s)e^{-2\pi i(-n)s}\, ds = \int_0^1 f(s)e^{-2\pi i(-n)s}\, ds = \widehat{f}(-n)$$

Deixem el cas de f senar per al lector. □

Proposició 4.7.4. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Si f és parell, la seva sèrie de Fourier s'escriu com*

$$S(f)(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi nx)$$

on

$$A_0 = \int_0^1 f(x)\, dx$$
$$A_n = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)\, dx$$

Si f és senar, la seva sèrie de Fourier s'escriu com

$$S(f)(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nx)$$

on

$$B_n = \int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\, dx$$

Demostració. Veiem el cas de la funció parell, i deixem pel lector el de la funció senar.

La sèrie de Fourier de f és

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

que la podem reescriure com

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx} + \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n)e^{-2\pi inx} + \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

Com que f és parell, per la proposició 4.7.3 tenim que

$$S(f)(x) = \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)\left(e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx}\right) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)\cos(2\pi nx)$$

Ara, anomenem

$$A_0 = \widehat{f}(0) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i 0 x}\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx$$

i

$$\begin{aligned} A_n = \widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x}\ dx &= \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx - i\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\ dx \\ = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx - i\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sin(2\pi n x)\ dx \end{aligned}$$

Com que f és parell i el sinus és senar, $f(x)\sin(2\pi n x)$ és una funció senar, i la integral entre $-1/2$ i $1/2$ val zero. Per tant,

$$A_n = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx$$

□

Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, i considerem les funcions

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f_s(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Observem que f_p és una funció parell, i f_s és una funció senar. A més,

$$f_p(x) + f_s(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

Per tant, tota funció descompon de manera única com a suma d'una funció parell i una funció senar. Amb aquest resultat, i el teorema anterior, obtenim una nova manera d'expressar una sèrie de Fourier, no a través de les funcions $e^{2\pi i n x}$, sinó a través de sinus i cosinus.

Corol·lari 4.7.5. *Sigui $f \in \mathcal{P}$. Llavors, la sèrie de Fourier de f es pot escriure com*

$$S(f)(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(2\pi n x)$$

amb

$$A_0 = \int_0^1 f(x)\ dx$$

$$A_n = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx$$

$$B_n = \int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\ dx$$

Demostració. Com que $f(x) = f_p(x) + f_s(x)$, i la transformació de Fourier és lineal, tenim que

$$S(f)(x) = S(f_p)(x) + S(f_s)(x)$$

Ara, com que f_p és una funció parell, i f_s és una funció senar, podem aplicar la proposició 4.7.4, de manera que

$$S(f_p)(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n x)$$

$$S(f_s)(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n x)$$

on

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^1 f_p(x)\ dx \\
A_n &= \int_0^1 f_p(x)\cos(2\pi n x)\ dx \\
B_n &= \int_0^1 f_s(x)\sin(2\pi n x)\ dx
\end{aligned}
$$

Calculem ara els termes A_0, A_n i B_n. Per començar,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^1 f_p(x)\ dx = \int_0^1 \frac{f(x)+f(-x)}{2}\ dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\ dx + \int_0^1 f(-x)\ dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\ dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(-x)\ dx\right)
\end{aligned}
$$

Fent un canvi de variable $x = -y$, $dx = -dy$ en la segona integral, queda que

$$
A_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\ dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\ dy\right) = \int_0^1 f(x)\ dx
$$

Pels A_n,

$$
\begin{aligned}
A_n &= \int_0^1 f_p(x)\cos(2\pi n x)\ dx = \int_0^1 \frac{f(x)+f(-x)}{2}\cos(2\pi n x)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(-x)\cos(2\pi n x)\ dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\cos(-2\pi n y)\ dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\cos(2\pi n y)\ dy\right) = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\ dx
\end{aligned}
$$

I finalment, pels B_n,

$$
\begin{aligned}
B_n &= \int_0^1 f_s(x)\sin(2\pi n x)\ dx = \int_0^1 \frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin(2\pi n x)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\ dx - \int_{-1/2}^{1/2} f(-x)\sin(2\pi n x)\ dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\ dx - \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\sin(-2\pi n y)\ dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\ dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\sin(2\pi n y)\ dy\right) = \int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\ dx
\end{aligned}
$$

□

Per acabar, fem un apunt sobre funcions $f : [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{C}$ contínues a trossos. Suposem que volem estendre de forma 1−periòdica una d'aquestes funcions. Al estar definida només sobre la meitat del període que volem tenir, podem estendre-la de dues maneres, d'acord a les possibilitats que tenim per completar un període. La primera es coneix com a *extensió parell*, on obtenim una nova funció $\tilde{f}$ definida com

$$
\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [0, 1/2] \\ f(-x) \text{ si } x \in [-1/2, 0] \end{cases}
$$

La segona opció es coneix com a *extensió senar*, que defineix $\tilde{f}$ com

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [0,1/2] \\ -f(-x) \text{ si } x \in [-1/2,0] \end{cases}$$

I ara, al considerar l'extensió 1−periòdica de qualsevol d'aquestes funcions, el que tenim és una funció parell o senar.

L'avantatge de considerar aquestes extensions en particular és que tenen una sèrie de Fourier particularment simple.

Proposició 4.7.6. *Sigui $f : [0,1/2] \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció contínua a trossos. Si estenem f de forma parell, aleshores*

$$S(f)(x) = 2A_0 + 4\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi nx)$$

on

$$A_0 = \int_0^{1/2} f(x)\ dx$$
$$A_n = \int_0^{1/2} f(x)\cos(2\pi nx)\ dx$$

Si estenem f de forma senar, aleshores

$$S(f)(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nx)$$

on

$$B_n = \int_0^{1/2} f(x)\sin(2\pi nx)\ dx$$

Demostració. És conseqüència immediata del fet que les integrals de A_0, A_n i B_n les realitzem en $[0,1/2]$ i de l'expressió de la sèrie de Fourier de funcions parells i senars donada per 4.7.4. □

Exemple 4.7.7 (**Equació de la calor**)**.** Tenim una barra de longitud $L = 1/2$ que es troba a una determinada temperatura $f(x)$ per a cada punt $x \in [0,1/2]$, i suposem que f es de la classe C^2 (dos cops derivable amb derivada segona contínua). Suposant que, en els extrems, $f(0) = f(1/2) = 0$ i que sempre romanen d'aquesta manera, i suposant que la barra no intercanvia calor amb l'exterior, volem estudiar l'evolució de la temperatura de la barra a mesura que passa el temps.

Sigui $u(x,t)$ la funció que dóna la temperatura del punt x de la barra a temps t. Aquesta funció resulta complir la següent equació diferencial, coneguda com *equació del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

El que volem, doncs, és resoldre el següent sistema,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0 \end{cases}$$

Per resoldre'l, comencem estenen f de forma $1-$periòdica. Observem que f està definida en $[0, 1/2]$, de manera que per estendre-la podem fer-ho de manera que la funció resultant és una funció senar, i d'acord a la proposició 4.7.6 la sèrie de Fourier és

$$S(f)(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nx)$$

amb

$$B_n = \int_0^{1/2} f(x)\sin(2\pi nx)\ dx$$

Com que f és C^2, l'extensió $1-$periòdica senar que hem considerat és contínua i derivable, de manera que la sèrie convergeix puntualment a la funció, i tenim que

$$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nx)$$

Seria desitjable que per a cada temps t, la funció $u(x,t) = u_t(x)$, pensada com l'evolució de la funció $f(x)$, tingués també les mateixes propietats que aquesta, de manera que es pogués identificar amb la seva sèrie de Fourier. Per tant, el que realment ens interessa es veure com evolucionen els coeficients de Fourier de f al llarg del temps, i la solució $u(x,t)$ que busquem serà de la forma

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin(2\pi nx)$$

on

$$B_n(t) = \int_0^{1/2} u(x,t)\sin(2\pi nx)\ dx$$

Ara, observem que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial B_n}{\partial t}(t)\right)\sin(2\pi nx)$$

i que

$$\frac{\partial B_n}{\partial t}(t) = \int_0^{1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)\sin(2\pi nx)\ dx = \int_0^{1/2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)\sin(2\pi nx)\ dx$$

Integrant dues vegades per parts, arribem a que

$$\frac{\partial B_n}{\partial t}(t) = -4\pi^2 n^2\int_0^{1/2} u(x,t)\sin(2\pi nx)\ dx = -4\pi^2 n^2 B_n(t)$$

Per tant,

$$B_n(t) = Ke^{-4\pi^2 n^2 t}$$

i com que a $t=0$ volem $B_n(0) = B_n$, ha de ser $B_n(t) = B_n e^{-4\pi^2 n^2 t}$. Per tant,

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} B_n \sin(2\pi nx)$$

Referències

[1] Allaart, P.C.; Kawamura, K.: *The Takagi function: a survey.* arXiv:1110.1691, 2011.

[2] Bernués, J.; Cuartero, B.; Arregui, J.L.; Pérez, M.: *Teoría de Funciones de una Variable Real.* Colección Textos Docentes, 165. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009.

[3] Bruna, J.: *Anàlisi Real.* UAB Servei de publicacions, Barcelona, 1996.

[4] Bruna, J.; Cufí, J.: *Anàlisi Complexa.* UAB Servei de publicacions, Barcelona, 2008.

[5] Cerdà, J.: *Weierstrass i l'aproximació uniforme.* Butl. Soc. Catalana Mat. 28 (2013), no. 1, 51–85, 118.

[6] Cilleruelo, J.; Córdoba, A.: *La teoría de los números.* Mondadori, Madrid, 1992.

[7] Körner, T.W.: *Fourier Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[8] Ortega, J.M.: *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.* UAB Servei de publicacions, Barcelona, 2013.

[9] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1976.