1. Calculeu la suma de les sèries següents:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+p)} \quad \text{amb } \ 2 \le p \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)\,(1+2^{n-1})}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

2. Estudieu la convergència de les sèries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\sqrt{n^3+2}}{(n^2-3n+20)^2}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n+n^2}}{3^{n-2}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{e^n}$

3. Estudieu la convergència de les sèries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \left(\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})\right).$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^r}, \ r \in \mathbb{R}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(n))^n}{n^{\log n}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{2^{n^2}}.$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right).$

4. Discutiu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^{2n}}{(2n)!}$, segons els valors d'$a > 0$.

5. Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{-\beta n}$, en funció dels valors del paràmetres α i β.

6. Determineu per a quins valors d'$\alpha > 0$ és convergent la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{\log n}}$.

7. Siguin α, β i γ tres nombres reals no-negatius tals que $\alpha \geq \beta$. Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^{\gamma}} \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n+1} \right)$.

8. Sigui (x_n) una successió de termes positius.

   (a) Proveu que si $p > \dfrac{1}{2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és convergent, aleshores $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ és convergent. Doneu un contraexemple per $p = 1/2$

   (b) Proveu que si x_n decreix i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és convergent, aleshores $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$ i la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x_n - x_{n+1})$ és convergent. Deduïu que la sèrie harmònica és divergent.

   (c) Doneu un exemple d'una successió (x_n) de nombres reals no negatius tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sigui convergent però que $(n x_n)$ no tendeixi a 0 quan $n \to \infty$.

9. Sigui $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una sèrie convergent de termes positius. Proveu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{1-\frac{1}{n}}$ també és convergent.

10. Suposeu que $a_n > 0$ i $\sum a_n$ és divergent.

    (a) Què es pot dir de les sèries

    $$\sum \frac{a_n}{1 + n a_n}, \quad \sum \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}, \quad \sum \frac{a_n}{1 + a_n^2} \quad ?$$

    (b) Si $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, demostreu que

    $$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$$

    i per tant $\displaystyle\sum \frac{a_n}{S_n}$ és divergent.

    (c) Demostreu que

    $$\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

    i per tant $\displaystyle\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ és convergent.