

Segon Lliurament de Càlcul de Diverses Variables i Optimització

Arnau Mas

8 de Gener de 2018

Problema 1

Sen's demana de resoldre una equació diferencial en derivades parcials fent servir un canvi de coordenades. L'equació en qüestió és

$$f_{xx}(x, y, z) - f_{yy}(x, y, z) + f_{zz}(x, y, z) - 2f_{xz}(x, y, z) = (y + z)(x + z). \quad (1)$$

La solució $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suposarem que és una funció de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. El canvi que sen's proposa ve donat per

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, y + z, z + x). \end{aligned} \quad (2)$$

Denotem les components de Ψ per u , v i w . És clar que Ψ és una bijecció lineal i per tant un difeomorfisme. Definim $g = f \circ \Psi^{-1}$. D'aquesta manera es compleix $f = g \circ \Psi$ i podem, fent servir la regla de la cadena, reescriure l'equació diferencial en termes de les noves coordenades.

$$\begin{aligned} f_x &= g_u u_x + g_v v_x + g_w w_x = g_u + g_w \\ f_y &= g_u u_y + g_v v_y + g_w w_y = g_u + g_v \\ f_z &= g_u u_z + g_v v_z + g_w w_z = g_v + g_w. \end{aligned} \quad (3)$$

Tornem a derivar:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= g_{uu}u_x + g_{uv}v_x + g_{uw}w_x + g_{vu}u_x + g_{vv}v_x + g_{vw}w_x \\
&= g_{uu} + 2g_{uv} + g_{ww} \\
f_{yy} &= g_{uu}u_x + g_{uv}v_x + g_{uw}w_x + g_{vu}u_x + g_{vv}v_x + g_{vw}w_x \\
&= g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv} \\
f_{zz} &= g_{vu}u_z + g_{vv}v_z + g_{vw}w_z + g_{wu}u_z + g_{wv}v_z + g_{ww}w_z \\
&= g_{vv} + 2g_{vw} + g_{ww} \\
f_{xz} &= g_{uu}u_z + g_{uv}v_z + g_{uw}w_z + g_{vu}u_z + g_{vv}v_z + g_{vw}w_z \\
&= g_{uv} + g_{uw} + g_{vv} + g_{ww}.
\end{aligned}$$

I per tant

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} - 2f_{xz} = -4g_{uv}. \quad (4)$$

Així doncs, l'equació diferencial en les noves coordenades és

$$g_{uv}(u, v, w) = -\frac{1}{4}vw. \quad (5)$$

En aquesta forma, podem solucionar 5 de forma immediata per integració:

$$g(u, v, w) = -\frac{1}{8}uvw^2 + A(v, w) + B(u, w), \quad (6)$$

on A i B són funcions arbitràries que compleixen $A_u = B_v = 0$. I en les coordenades originals, la solució és

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8}(x+y)(x+z)(y+z)^2 + A(y+z, x+z) + B(x+y, x+z). \quad (7)$$

Un cop tenim la solució general podem trobar la solució particular que sen's demana aplicant les condicions inicials. Tenim que, en el pla $x + y = 0$ es compleix $f_y + f_z - f_x = 0$. Fent servir 3 veiem que aquesta condició, traduïda a les noves coordenades, és equivalent a $g_v = 0$ en els punts del pla $u = 0$. A partir de 6 tenim que $g_u(u, v, w) = -\frac{1}{4}uvw + A_v(v, w)$. Per tant, per tots els punts que compleixen $u = 0$ tenim que $A_v(v, w) = 0$, i per tant que A només depèn de w .

Sabem també que $f = 0$ restringida als punts del pla $x = 0$. Traduït a les noves coordenades, $g = 0$ als punts del pla $v = u + w$. Per tant, per tot $u, w \in \mathbb{R}$ es compleix

$$-\frac{1}{8}uw(u+w)^2 + A(w) + B(u, w) = 0,$$

i per tant la solució que busquem és $g(u, v, w) = \frac{1}{8}uw((u+w)^2 - v^2)$.

Per veure que és única considerem dues potencials solucions, g_1 i g_2 i la seva diferència $h = g_1 - g_2$. Per linealitat tenim que h compleix $h_{uv} = 0$. Això ens dóna que $h = A + B$ amb $A_u = B_v = 0$. La funció h clarament també compleix les condicions inicials que compleixen g_1 i g_2 . Així tenim, que en el pla $u = 0$, $h_v(0, v, w) = A_v(v, w) = 0$, per tant que A només depèn de w . Per la segona condició, sabem que h és nul·la restringida als punts que compleixen $v = u + w$. És a dir $h(u, u + w, w) = 0$ per tot $u, w \in \mathbb{R}$. Però com que h no depèn de v concloem que h és idènticament zero i per tant $g_1 = g_2$, com volíem.

Problema 4

Observem que en coordenades cartesianes, podem parametritzar la cardioide que té per equació $r = 1 + \cos \varphi$ com

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= (1 + \cos \varphi) \cos \varphi \\ y(\varphi) &= (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \end{aligned} \tag{8}$$

amb $\varphi \in (0, 2\pi)$. Per a parametritzar la superfície S que resulta quan la cardioide gira al voltant de l'eix x introduïm un nou paràmetre θ , que representarà l'angle de rotació. Com que la cardioide és simètrica, només ens cal la secció que correspon a $\varphi \in (0, \pi)$. Podem parametritzar S mitjançant una funció $H: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb

$$H(\varphi, \theta) = ((1 + \cos \varphi) \cos \varphi, (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cos \theta, (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sin \theta). \tag{9}$$

És clar que H és un difeomorfisme en la seva imatge, i per tant defineix S com una varietat regular. Per ser rigurosos, amb aquesta parametrització ens deixem tot un arc del cardioide, que són tots els punts amb $\theta = 0$. Ara bé, a l'hora d'integrar no cal que ens preocupem ja que aquest conjunt té àrea nul·la. Si prenem com a domini de la parametrització $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ obtenim tota la superfície.

Per calcular l'àrea d'una superfície donada per una parametrització hem de trobar l'element d'àrea i integrar-lo en el domini de la parametrització. Ara bé, podem aprofitar que S no és una varietat qualsevol, sino que és una superfície de revolució. En general, l'element d'àrea de la superfície de revolució que resulta de rotar l'arc $\gamma(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), 0)$ al voltant de l'eix x és

$$dA = y(\varphi) \|\dot{\gamma}(\varphi)\| d\varphi d\theta = y(\varphi) \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} d\varphi d\theta. \tag{10}$$

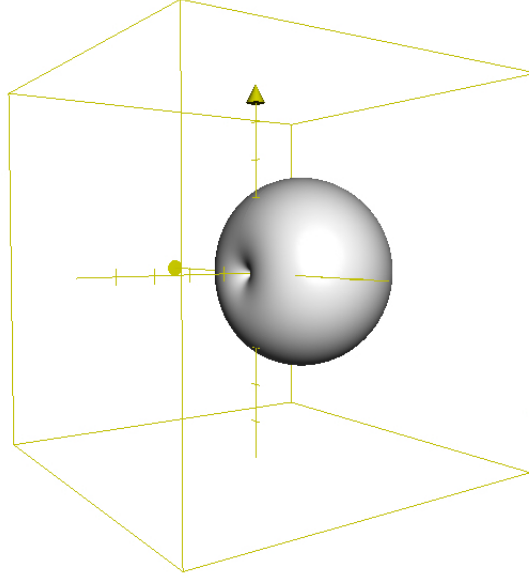


Figura 1: Resultat de la parametrització donada per 8

A més, l'arc γ està donat en coordenades polars, així que és de la forma $\gamma(\varphi) = r(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ i per tant $\|\dot{\gamma}(\varphi)\| = \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}$. Així doncs, l'àrea de S , és a dir la mesura 2-dimensional de S és

$$\begin{aligned}
 m_2(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi d\theta \\
 &= -2\pi\sqrt{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^{3/2} \sin \varphi d\varphi \\
 &= \left[-\frac{4\pi\sqrt{2}}{5} (1 + \cos \varphi)^{5/2} \right]_0^\pi = \frac{32\pi}{5}
 \end{aligned}$$

Observem que el punt $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}))$ és precisament la imatge de $\varphi = \pi/4$ al cardioide. Així doncs, l'òrbita d'aquest punt quan fem girar el cardioide per generar S és el conjunt de punts de la forma $H(\pi/4, \theta)$ amb $\theta \in [0, 2\pi]$. Si volem calcular el pla tangent a S en qualsevol d'aquests punts, cal que avaluem les derivades parcials de H en aquests punts. Tenim

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \partial_\varphi H(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi(1 + 2 \cos \varphi) \\ (\cos \varphi + \cos \varphi^2 - \sin \varphi^2) \sin \theta \\ (\cos \varphi + \cos \varphi^2 - \sin \varphi^2) \cos \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

i

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \partial_{\theta} H(\varphi, \theta) = (1 + \cos \varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

El pla tangent a una superfície regular donada per una parametrització està generat per les derivades parcials de la parametrització. En els punts de l'òrbita que estem considerant —és a dir, els punts amb $\varphi = \pi/4$ — el pla tangent en funció de l'angle θ , $\pi(\theta)$, està donat, com a subvarietat afí per

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= H(\pi/4, \theta) + \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}(\pi/4, \theta), \frac{\partial}{\partial \theta}(\pi/4, \theta) \right\rangle \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(1, \sin \theta, \cos \theta) \\ &\quad + \left\langle \left(-\left(1 + \sqrt{2}\right), \sin \theta, \cos \theta \right), (0, \cos \theta, -\sin \theta) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Al pas 13 s'ha dividit la parcial respecte de θ per $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})$ i la parcial respecte de φ s'ha multiplicat per $\sqrt{2}$. Fer això no afecta l'àlgebra lineal i alleugereix la notació.

Si volem donar una equació pel pla, observem que el vector

$$u = \left(1, \left(1 + \sqrt{2}\right) \sin \theta, \left(1 + \sqrt{2}\right) \cos \theta \right)$$

és de l'ortogonal de $\pi(\theta)$. Per tant, l'equació del pla tangent és:

$$\langle u, (x, y, z) - H(\pi/4, \theta) \rangle = 0.$$

Més en detall:

$$x + \left(\left(1 + \sqrt{2}\right) \sin \theta \right) y + \left(\left(1 + \sqrt{2}\right) \cos \theta \right) z = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}. \quad (14)$$