Entrega 3: Conducció de la calor

Arnau Mas

4 de Maig 2018

Problema 18

Considerem una ona sonora amb longitud λ que es propaga a velocitat c a través d'un gas. En cada instant de temps les regions comprimides i enrarides del gas estan separades una longitud $\lambda/2$. Com que les dues regions es troben a temperatures diferents degut a la diferència de pressió hi haurà transferència de calor entre les dues. Sabem que, en bona aproximació, la calor viatja una distància proporcional a $\sqrt{\alpha t}$ on α és la difusivitat tèrmica de l'aire. Si T és el període de l'ona, passat un temps $T/2$ la distribució de pressions s'inverteix, és a dir, les regions enrarides passen a estar comprimides i viceversa. Durant aquest temps, doncs, la calor haurà viatjat, en mitjana, una distància de l'ordre

$$\sqrt{\frac{\alpha T}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda\alpha}{2c}}.$$

Per poder considerar les ones sonores un procés adiabàtic cal que aquesta distància sigui molt menor que la separació entre les zones enrarides i comprimides, és a dir,

$$\sqrt{\frac{\lambda\alpha}{2c}} \ll \frac{\lambda}{2}.$$

Com que la freqüència f compleix $f\lambda = c$ podem reescriure aquesta condició sobre la freqüència:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2fc}} \ll \frac{1}{2f} \implies f \ll \frac{c^2}{2\alpha}.$$

La velocitat de propagació del so és d'uns $340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ i la difusivitat tèrmica de l'aire a temperatura ambient — $300\,\mathrm{K}$— és de $2\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Això ens dóna una ifta per a la freqüència de

$$f \ll 2.89\times10^{10}\,\mathrm{Hz}.$$

Les ones sonores compleixen aquesta condició, tenint en compte que l'espectre sonor comprèn freqüències entre $10^1\,\mathrm{Hz}$ i $10^4\,\mathrm{Hz}$.

Problema 25

Considerem un tub cílindric de conductivitat constant λ que té un radi intern R_1 que es manté a temperatura constant T_1 i un radi extern que es manté a tempeartura constant T_2. Com que no hi ha fonts, l'equació de la temperatura és

$$\dot{T} = \alpha \nabla^2 T, \tag{1}$$

on $\alpha := \frac{\lambda}{\rho c_e}$ és la difusivitat del material —ρ i c_e són, respectivament, la densitat i calor específica del material—. Si considerem l'estat estacionari, és a dir, quan $\cdot T = 0$ aleshores l'equació (1) esdevé

$$\nabla^2 T = 0. \tag{2}$$

Si prenem coordenades cílindriques (r, θ, z) per explotar la simetria del problema podem escriure $T = T(r)$ ja que, per simetria, la temperatura no pot dependre ni de l'angle θ ni de la coordenada z. Així doncs, en coordenades, l'equació (2) és

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0. \tag{3}$$

La solució general d'aquesta equació és $T(r) = A \log r + B$, ja que aleshores es compleix que $r\partial_r T$ és una constant, la qual cosa satisfa l'equació (3). Imposem les condicions de contorn per determinar A i B:

$$\begin{aligned} T(R_1) &= A \log R_1 + B = T_1 \\ T(R_2) &= A \log R_2 + B = T_2 \end{aligned}$$

implica

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\log R_1 - \log R_2}$$

i per tant

$$B = T_1 - A \log R_1 = \frac{T_2 \log R_1 - T_1 \log R_2}{\log R_1 - \log R_2}.$$

Així doncs, la distribució de temperatures és

$$\begin{aligned} T(r, \theta, z) &= \frac{T_1 - T_2}{\log R_1 - \log R_2} \log r + \frac{T_2 \log R_1 - T_1 \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \\ &= \frac{T_1 \log (r/R_2) - T_2 \log (r/R_1)}{\log (R_1/R_2)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Podem fer servir equació (4) i la llei de Fourier per determinar la densitat de flux de calor $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\mathbf{e}_r = \frac{\lambda (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2} \frac{\mathbf{e}_r}{r}.$$

Per tant, si considerem un cilindre $\mathcal{C}$ centrat a l'eix del tub de radi $R_1 \le r \le R_2$ i longitud L, la potència $\dot{Q}$ que atravessa la seva superfície és

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\lambda (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r \, d\phi \, dz = \frac{2\pi \lambda L (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2},$$

ja que la densitat de flux és perpendicular a les tapes del cilindre.

Per tant, la potència per unitat de longitud que atravessa la superfície d'un cilindre de radi $R_1 \leq r \leq R_2$ centrat a l'eix del tub és

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi\lambda\left(T_2 - T_1\right)}{\log R_1 - \log R_2}.$$