

Objectius.

- Calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències i estudiar el comportament als extrems.
- Calcular la suma d'una sèrie de potències a partir de desenvolupaments en sèrie coneguts i dels teoremes de diferenciació i integració de sèries de potències.
- Nocions bàsiques dels nombres complexos.

Requisits.

- La noció d'interval de convergència d'una sèrie de potències $\sum a_n x^n$. Recordeu que el radi de convergència d'una sèrie de potències és:

$$R^{-1} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

- Els desenvolupaments d'algunes funcions conegudes:

$$(a) \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad (|x| < 1) \quad (b) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ACTIVITATS

1. Determineu l'interval de convergència de les sèries de potències següents i estudieu el comportament als extrems

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n x^{3n}}{\log n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n}$$

2. Determineu el desenvolupament de les funcions següents en sèrie de potències al voltant de l'origen, indicant l'interval on és vàlid.

$$(a) f(x) = \log \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (b) f(x) = \frac{3x+1}{x^2+5x+6}$$

3. Calculeu la suma de les sèries de potències següents:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n(2n-1)} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{2^n} \\ \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+\dots+n} \\ \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n & \end{array}$$

4. Determineu tots els nombres complexos que satisfan les equacions següents.

(a) $e^z = 1$.

(b) $e^z = i$.

(c) $e^z = 3 - 3i$.

(d) $\sin(z) = i$.

5. Estudieu la convergència de les sèries següents:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1+i}{2^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^n.$$