Objectius.

- Aprofundir en la noció de sèrie numèrica convergent.
- Calcular la suma d'algunes sèries per mètodes directes.
- Utilitzar els criteris de comparació de sèries.

Requisits.

S'utilitzaran la condició necessària de convergència i els criteris de comparació de sèries:

- **Condició necessària de convergència.** Si a_n no convergeix a 0 aleshores $\sum a_n$ és divergent.
- **Criteri de Comparació directa per a sèries de termes positius.**
  1. Si $0 \leq a_n \leq b_n$ i $\sum b_n$ és convergent aleshores $\sum a_n$ és convergent.
  2. Si $a_n \geq b_n \geq 0$ i $\sum b_n$ és divergent aleshores $\sum a_n$ és divergent.
- **Criteri de Comparació en el límit per a sèries de termes positius.** Suposem que $b_n > 0$ i $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l$.
  1. Si $0 < l < +\infty$, $\sum a_n$ és convergent $\Leftrightarrow \sum b_n$ és convergent.
  2. Si $l = 0$, $\sum b_n$ convergent $\Rightarrow \sum a_n$ convergent.
  3. Si $l = +\infty$, $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

ACTIVITATS

1. Calculeu la suma de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{5}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n}$

(c) $\displaystyle\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$

2. Estudieu la convergència de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2n}{7n-5}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\big(\frac{n+1}{n}\big) \arcsin\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\cdot 14\cdots(10+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$

3. Per a cadascuna de les successions (x_n) següents trobeu un infinitèssim equivalent i estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_n x_n$

Successió (x_n)	Infinitèssim equivalent	Caràcter de $\displaystyle\sum_n x_n$
$x_n = 1-\cos(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$		
$x_n = \dfrac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$		
$x_n = 1-\sec\big(\frac{1}{n}\big)$		
$x_n = 1-e^{-\sin(\frac{1}{n})}$		
$x_n = \frac{\pi}{2}-\arctan n$		
$x_n = \log\big(\frac{n^3+n+1}{n^3}\big)$		
$x_n = \frac{1}{4^n}(2^n+3^n+n^4)$		
$x_n = \frac{1}{n^3}(1+2+\cdots+n)$		