Lliurament de Càlcul de Diverses Variables i Optimització

Arnau Mas

26 d'Octubre de 2017

Problema 3

Per veure que q és una norma observem el següent:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sqrt{(x + 2y)^2 + (y - 2x)^2} \\ &= \sqrt{5x^2 + 5y^2} \\ &= \sqrt{5}\,\|(x, y)\| \end{aligned}$$

on $\|\cdot\|$ és la norma euclidiana. Per tant ara és evident que q és una norma.

Considerem $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$, es té $q(T(x) - T(y)) = q(x, y)$. Pel que hem vist abans, això equival a dir que $\sqrt{5}\,\|T(x) - T(y)\| = \sqrt{5}\,\|x - y\|$, que és a la vegada equivalent a dir que T és una isometria. Per tant, hem de veure que qualsevol isometria —entenent per isometria una aplicació que conserva la distància euclidiana— que fixa l'origen és lineal. Com a observacions prèvies veiem que una isometria conserva la norma i el producte escalar euclidians:

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

$$\|T(x)\| = \|x\| \implies \|T(x)\|^2 = \|x\|^2 \implies \langle T(x)\,, T(x)\rangle = \langle x\,, x\rangle$$