1. Considereu la següent integral per tot $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t+itx} dt.$$

   (a) Demostreu que és una integral convergent i que f és una funció derivable.

   (b) Trobeu une equació diferencial de primer ordre que sigui satisfeta per f i demostreu que la funció $x \to (x-i)f^2(x)$ és constant. Deduïu una expressió explícita per $f(x)$.

   Indicació: Podeu fer servir que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Sigui n un enter no negatiu . Per cada $t > 0$, considereu la integral impròpia

$$F(t) = \int_0^\infty x^n e^{-tx} dx.$$

   Useu el teorema de derivació sota el signe integral per calcular $F(t)$ per a tot $t > 0$.

3. Per cada $b > 0$, considereu la integral impròpia

$$F(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(b\tan(x))}{\tan(x)} dx.$$

   Utilitzeu el teorema de derivació sota el signe integral per demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} x\cot(x) dx = \frac{\pi}{2}\log(2).$$

   (*Indicació: Podeu utilitzar que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(b\tan(x))^2+1} = \frac{\pi}{2(b+1)}$.)

4. Sigui n un enter no negatiu. Per cada $t > 0$, considereu la integral impròpia

$$F(t) = \int_0^\infty x^n e^{-tx^2} dx.$$

   Useu el teorema de derivació sota el signe integral per calcular $F(t)$ per a tot $t > 0$.