Lliurament de Càlcul de Diverses Variables i Optimització

Arnau Mas

26 d'Octubre de 2017

Problema 3

Per veure que q és una norma observem el següent:

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \sqrt{(x+2y)^2+(y-2x)^2} \\ &= \sqrt{5x^2+5y^2} \\ &= \|5(x,y)\| \end{aligned}$$

on $\|\cdot\|$ és la norma euclidiana. Veiem, doncs, que q prové d'un producte escalar. Explícitament

$$q(x) = \sqrt{\langle 5x \,, 5x\rangle}.$$

Per tant ara és clar que q és una norma.

Considerem $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$, es té $q(T(x)-T(y)) = q(x,y)$. Pel que hem vist abans, això equival a dir que $\sqrt{5}\,\|T(x)-T(y)\| = \sqrt{5}\,\|x-y\|$, que és a la vegada equivalent a dir que T és una isometria, és a dir, que conserva la distància euclidiana. Per tant, hem de veure que qualsevol isometria que fixa l'origen és lineal. Com a observació prèvia veiem que una isometria conserva la norma:

$$\|T(x)\| = \|T(x)-T(0)\| = \|x-0\| = \|x\|$$

No només això, sino que també conserva el producte escalar. En efecte, tenim que $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \,, y\rangle$. Per tant

$$\langle x \,, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Ara és immediat veure que T conserva el producte escalar:

$$\begin{aligned}\langle T(x)\,, T(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)\\ &= \langle x\,, y\rangle\end{aligned}$$

Per provar que T és lineal n'hi ha prou amb que vegem que per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és té $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$. Però això és equivalent a dir que $\|T(\lambda x + \mu y) - \lambda T(x) - \mu T(y)\| = 0$. Calculem, doncs, el quadrat de la norma d'aquest vector, que serà zero si i només si la pròpia norma és zero. Ho fem així per utilitzar la bilinealitat del producte escalar:

$$\begin{aligned}&\|T(\lambda x + \mu y) - \lambda T(x) - \mu T(y)\|^2\\ &= \|T(\lambda x + \mu y)\|^2 + \|\lambda T(x) + \mu T(y)\|^2 - 2\,\langle T(\lambda x + \mu y)\,, \lambda T(x) + \mu T(y)\rangle\\ &= \|T(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2\,\|T(x)\|^2 + \mu^2\,\|T(y)\|^2 + 2\lambda\mu\,\langle T(x)\,, T(y)\rangle\\ &\quad - 2\lambda\,\langle T(\lambda x + \mu y)\,, T(x)\rangle - 2\mu\,\langle T(\lambda x + \mu y)\,, T(y)\rangle\\ &= \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2\,\|x\|^2 + \mu^2\,\|y\|^2 + 2\lambda\mu\,\langle x\,, y\rangle\\ &\quad - 2\lambda\,\langle \lambda x + \mu y\,, x\rangle - 2\mu\,\langle \lambda x + \mu y\,, y\rangle\\ &= 2\,\|\lambda x + \mu y\|^2 - 2\left(\lambda^2\,\|x\|^2 + \mu^2\,\|y\|^2 + 2\lambda\mu\,\langle x\,, y\rangle\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Considerem ara una funció $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que compleix que existeix $C > 0$ tal que , per tot $x, y \in \mathbb{R}^d$ es compleix

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\,\|x - y\|^2\,.$$

Hem de veure que, en aquestes condicions, f és constant. Com que ens serà útil per al següent apartat, veurem un resultat més general. I és que només ens cal que es compleixi que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\,\|x - y\|^{1+\beta}$$

per algun $\beta > 0$ per poder afirmar que f és constant. Que sigui certa aquesta desigualtat implica que la diferencial de f és nul·la en qualsevol punt, i per tant que f és constant —ja que $\mathbb{R}^2$ és òbviament un obert arc-connex—. Verifiquem explícitament que en tot punt $a \in \mathbb{R}^2$ és té $df(a) = 0$. Segons la definició de diferencial, si és veritat que f té diferencial nul·la a tot arreu, hem de tenir, per tot $a \in \mathbb{R}^2$:

$$f(a+h) = f(a) + o(\|h\|),$$

o el que és el mateix

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} = 0.$$

Per hipòtesi, tenim que $0 \leq \|f(a+h) - f(a)\| \leq C\,\|h\|^{1+\beta}$. A més, $C\,\|h\|^{1+\beta} \to 0$ quan $\|h\| \to 0$. Per tant,

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|f(a+h) - f(a)\| = \lim_{\|h\| \to 0} C\,\|h\|^{1+\beta} = 0.$$

I aleshores el límit que volíem avaluar es redueix a

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{C\,\|h\|^{1+\beta}}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} C\,\|h\|^{\beta} = 0.$$

Per tant, efectivament, f té diferencial nul·la a tot arreu i per tant és constant.

Pel que fa a l'últim apartat, podem considerar tres casos: $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ i $\alpha < 0$ Si $\alpha = 0$, aleshores no pot existir $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijectiva que compleixi la condició. En efecte, si f és bijectiva en particular és exhaustiva. Per tant el 0 té preimatge. Però aleshores tenim que la norma de qualsevol imatge és 1, i per tant qualsevol punt amb norma diferent de 1 no té preimatge: una contradicció.

El cas $\alpha > 1$ ja l'hem resolt a l'apartat anterior. Si $\alpha > 1$, podem posar $\alpha = 1 + \beta$ amb $\beta > 0$. Però aleshores tenim, per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|^{1+\beta} \leq \|x - y\|^{1+(1+\beta)}$$

i per tant f ha de ser constant, per la qual cosa no pot ser bijectiva.

Suposem ara que f és bijectiva i compleix la condició de l'enunciat amb $0 < \alpha < 1$. Aleshores f té una inversa, també bijectiva, i tenim, per tot $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\|x - y\| = \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right\|^{\alpha}$$

i per tant

$$\|x - y\|^{1/\alpha} = \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right\|.$$

Però $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, i per tant, tal i com hem raonat abans, f^{-1} ha de ser constant: una contradicció.