S'explica que el rei Ptolemeu I va preguntar a Euclides si hi havia un camí més curt que el dels Elements *per arribar a conèixer la geometria i Euclides va respondre que no hi havia cap «camí reial»: calia seguir pas a pas la llarga sèrie de proposicions encadenades dels* Elements*. Com a conseqüència d'això, no és possible resoldre els exercicis d'aquesta llista utilitzant cap drecera, sinó que caldria anar reproduint tots els* Elements*. No es pretén que l'alumne ho faci d'aquesta manera. Es pot (s'ha de) «fer trampa» i resoldre els exercicis aplicant els coneixements bàsics de la geometria d'Euclides —com poden ser els casos de congruència de triangles o el càlcul de l'àrea d'un triangle— sense preocupar-se pels possibles cercles viciosos que, de ben segur, es generaran.*

1. Entendrem per «regle» un instrument que permet, donats dos punts diferents del pla, dibuixar la recta que passa per ells. Qualsevol altra utilització del regle (per exemple, fer-hi una «marca») és fraudulenta. Entendrem per «compàs» un instrument que, donats dos punts diferents A i B, ens permet dibuixar la circumferència de centre A que passa pel punt B. Qualsevol altra utilització del compàs (per exemple, dibuixar una circumferència i, a continuació, dibuixar, amb un altre centre, una circumferència del mateix radi), és fraudulenta.

   Feu les següents construccions utilitzant exclusivament el regle i el compàs.

   (a) Construïu la mediatriu d'un segment.

   (b) Construïu, donada una recta r,

      i. la perpendicular des d'un punt exterior.

      ii. la perpendicular des d'un punt de r.

      iii. la paral·lela per un punt exterior.

   (c) Transporteu un segment donat AB sobre una semirecta fixada de forma que el punt A es correspongui amb l'extrem de la semirecta.

   (d) Transporteu un angle sobre una semirecta donada i a un costat donat.

   (e) Trobeu el centre d'una circumferència donada.

   (f) Construïu la recta tangent a una circumferència donada que sigui paral·lela a una recta donada.

   (g) Construïu un triangle coneixent un costat i (segments congruents a) l'altura i mitjana relatives a aquest costat.

   (h) Construïu un triangle coneixent (segments congruents a) les mitjanes.

   (i) Construïu un triangle rectangle coneixent el radi de la circumferència inscrita i que un catet és 3 vegades més llarg que l'altre.

   En cada cas, justifiqueu que la construcció és correcta.

2. Siguin A, B i C tres punts d'una circumferència de centre O. Proveu que $2\widehat{ACB} \equiv \widehat{AOB}$.

3. Des d'un lloc, la situació del qual desconeixem, visualitzem 3 cims que podem reconèixer sobre un mapa. Localitzeu el punt d'observació.

4. El concepte de «longitud d'un segment» no forma part de la geometria d'Euclides, perquè el concepte de nombre a la matemàtica clàssica (que ara en diem «nombre racional») és insuficient per descriure les longituds dels segments. Malgrat això, Euclides dóna sentit a la «suma» de segments (que és un altre segment) i al «producte» de segments (que és un rectangle). El concepte d'«àrea» d'una figura tampoc no forma part de la geometria d'Euclides, però Euclides sí que pot parlar de «figures de la mateixa àrea». En aquest context, i amb l'ajuda del regle i el compàs, resoleu aquestes qüestions:

(a) Definiu suma, producte i quocient de dos segments. Construïu-los.

(b) Definiu la mitjana proporcional de dos segments. *[En el llenguatge de longituds, això voldria dir que si els segments tenen longituds a i b, la seva mitjana proporcional tindria longitud $\sqrt{ab}$]*. Construïu-la.

5. Proveu que en tot triangle, a major costat li correspon menor altura.

6. Proveu que les mediatrius d'un triangle són concurrents al circumcentre.

7. Proveu que les mitjanes es tallen a dos terços de la seva longitud.

8. Proveu que també les altures i les bisectrius són concurrents.

9. Proveu el teorema de Tales de Milet sobre els segments determinats per dues rectes paral·leles sobre un feix de rectes.

10. Donats dos punts A i B i una recta paral·lela al segment AB, trobeu una manera de construir el punt mig del segment AB utilitzant només el regle.

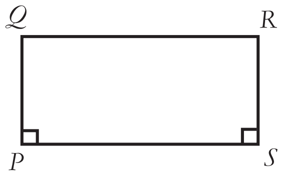
11. Proveu el teorema de Pitàgores.

1. Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, que una recta que talli els tres costats d'un triangle ha de passar per algun vèrtex.

2. Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, que ni una semirecta ni un semiplà, ni l'interior ni l'exterior d'un angle no poden ser buits.

3. Suposeu els axiomes **I**, **II** i **III** i demostreu que l'axioma de les paral·leles és equivalent a: «Donats tres punts no alineats, existeix una circumferència que els conté».

4. Un *quadrilàter de Khayyam-Saccheri* està format per quatre punts P, Q, R S, no alineats tres a tres, tal que els angles $\widehat{QPS}$ i $\widehat{PSR}$ són rectes i $PQ \equiv RS$. Demostreu que, a la geometria absoluta, els angles $\widehat{PQR}$ i $\widehat{QRS}$ d'un quadrilàter de Khayyam-Saccheri són congruents.



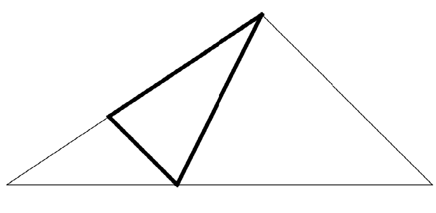
5. Demostreu que el fet que les tres bisectrius d'un triangle són concurrents és un teorema de geometria absoluta. (També ho és que les mitjanes es tallen en un punt i les alçades es tallen en un punt, però això és força més difícil de demostrar. En canvi, el fet que les mediatrius d'un triangle siguin sempre concurrents implica l'axioma de les paral·leles.)

6. Demostreu aquests teoremes de geometria absoluta:
   (a) Els criteris CAC i ACA de congruència de triangles.
   (b) Dos angles rectes són sempre congruents.
   (c) Tot angle té bisectriu.
   (d) Per un punt exterior a una recta sempre hi passa alguna paral·lela a la recta.

7. Demostreu que, a la geometria absoluta, l'axioma **V** implica que la suma dels angles d'un triangle val dos rectes. Si hi afegim els axiomes **IV**, que la suma dels angles d'un triangle valgui dos rectes implica l'axioma **V**. (Per resoldre aquesta segona part, utilitzeu aquesta conseqüència dels axiomes **IV**: donats angles α i ϵ, existeix un enter $n > 0$ tal que $\alpha/2^n$ és un angle $< \epsilon$.)

8. Demostreu, a la geometria absoluta, l'equivalència entre l'axioma **V** i l'axioma de les paral·leles tal com el va enunciar Euclides.

9. Suposeu els axiomes **I**, **II**, **III** i **IV** i també suposeu que donat un triangle sempre n'hi ha un altre de semblant (i.e., amb els mateixos angles) i amb un costat arbitrari. Demostreu que la suma dels angles d'un triangle és igual a dos rectes. Per fer-ho, apliqueu el teorema de Legendre que afirma que la suma dels angles d'un triangle és menor o igual a dos rectes i inspireu-vos en aquest dibuix:



10. Sigui k un subcòs de $\mathbb{R}$ i considerem la geometria «cartesiana» ordinària del pla k^2. Definiu acuradament els conceptes de recta, estar entre, segments congruents i angles congruents. Demostreu que es compleixen els axiomes **I**, **II**, **III.2**, **III.3**, **III.4**, **IV.1** i **V**. Doneu un exemple que no compleixi **III.1** ni **IV.2** i un altre que compleixi **III.1** però no compleixi **IV.2**. Hi pot haver algun exemple que no compleixi **III.1** però sí **IV.2**?

11. Considerem el pla $\mathbb{R}^2$ amb les nocions ordinàries de recta, estar entre i angles congruents, però amb una nova definició de segments congruents: dos segments seran congruents si tenen la mateixa longitud i, a més, són paral·lels. Demostreu que en aquesta geometria es compleixen tots els axiomes de Hilbert, excepte l'axioma **III.1**.

12. El *cos de Hilbert* $\Omega \subset \mathbb{R}$ es defineix com el cos format per tots els nombres reals que es poden obtenir a partir del 0 i l'1, usant un nombre finit de vegades les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i l'operació $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Considereu la geometria ordinària sobre el pla Ω^2.
    (a) Demostreu que aquesta geometria compleix tots els axiomes de Hilbert, excepte **IV.2**.
    (b) Trobeu, en aquesta geometria, una recta i una circumferència que no es tallin, però tals que la recta contingui punts de l'interior de la circumferència. (Utilitzeu, sense demostració, el fet que $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \Omega$.)

13. Considereu una geometria que té per punts i rectes els del pla $x+z=0$ de $\mathbb{R}^3$. Definim la congruència d'angles igual que a $\mathbb{R}^3$, però definim la congruència de segments dient que dos segments són congruents quan les seves projeccions sobre el pla $z=0$ tenen la mateixa longitud. Demostreu que aquesta geometria compleix tots els axiomes de Hilbert excepte l'axioma **III.4**.

14. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció qualsevol amb la propietat que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Definim $x \prec y$ si $f(x) < f(y)$. Considerem la geometria ordinària del pla $\mathbb{R}^2$ amb la relació d'estar entre donada per $\prec$. Comproveu que en aquesta geometria es compleixen tots els axiomes de Hilbert excepte, potser, l'axioma de Pasch. Suposeu, per exemple, que trobem una funció f i nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $f(1) = 1$, $f(a) = -a < 0$, $f(b) = b > 1$, $f(ab) = ab$. Demostreu que, en aquest cas, l'axioma de Pasch no es compleix. És possible trobar una funció així?

1. Demostreu que una geometria projectiva no pot ser unió de dues subvarietats pròpies.

2. Sigui X un pla afí. Al conjunt de les rectes de X considerem aquesta relació:

$$r \sim s \quad \Leftrightarrow \quad r = s \text{ o } r \cap s = \varnothing.$$

Demostreu que és una relació d'equivalència.

3. Sigui X un pla projectiu i sigui r una recta de X. Demostreu que $A := X - r$ té una estructura natural de pla afí.

4. Completeu els detalls de la demostració que la completació d'un pla afí que s'ha definit al curs és un pla projectiu.

5. Demostreu que en un pla projectiu tota recta té com a mínim tres punts.

6. Sigui X un pla projectiu on hi ha una recta que té $n+1$ punts.

   (a) Demostreu que totes les rectes de X tenen $n+1$ punts.
   (b) Demostreu que en total X té n^2+n+1 punts.
   (c) Demostreu que en total X té n^2+n+1 rectes.
   (d) Demostreu que a X per cada punt hi passen exactament $n+1$ rectes.

7. Trobeu tots els plans projectius que tinguin una recta amb només tres punts.

8. Considerem tres punts $A = \{x_0, x_1, x_2\}$, $B = \{y_0, y_1, y_2\}$, $C = \{z_0, z_1, z_2\}$ d'un pla projectiu $P_2(k)$. Demostreu que la condició necessària i suficient perquè A, B i C estiguin alineats és que la matriu

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

no sigui invertible.

9. Sigui V un espai vectorial i siguin $H_1 \neq H_2$ dos subespais vectorials no nuls. Considereu

$$Y := \{x \in \mathcal{P}(V) : \text{existeixen } A_1 \neq A_2,\ A_i \in \mathcal{P}(H_i),\ i = 1, 2, \text{ tals que } A_1,\ A_2,\ x \text{ estan alineats } \}.$$

Demostreu que $Y = \mathcal{P}(H_1 + H_2)$.

10. Un departament de matemàtiques vol organitzar 7 màsters diferents. Cada màster ha de tenir 3 mòduls. Només hi ha professorat per impartir 7 mòduls. Com pot fer-ho?

11. Escriviu les coordenades de tots els punts de $P_2(\mathbb{F}_3)$ i les equacions de totes les rectes de $P_2(\mathbb{F}_3)$. Indiqueu, en una taula de doble entrada, quins punts hi ha a cada recta.

12. El cos de quatre elements $\mathbb{F}_4$ és un cos de característica 2 format pels elements $\{0, 1, \alpha, 1+\alpha\}$, amb la taula de multiplicar que es dedueix de l'equació $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Escriviu les taules de sumar i de multiplicar de $\mathbb{F}_4$. Quants punts i quantes rectes té el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_4)$?

13. Tenim les quatre figures (**A**, **J**, **Q**, **K**) dels quatre colls ($\clubsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$) d'una baralla. Setze cartes en total. Volem col·locar-les en una quadrat 4×4 de manera que a cada fila i cada columna no hi hagi ni dues cartes del mateix valor ni dues cartes del mateix coll. Utilitzeu el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_4)$ per resoldre aquest problema.

    A més, tenim gots amb quatre tipus de beguda (α, β, γ, δ) i volem col·locar un got sobre cada carta de manera que a cada fila i columna no hi hagi dos gots amb la mateixa beguda i, a més, que sobre la taula no hi hagi dues combinacions valor–beguda ni valor–coll repetides. És possible?

14. Trobeu una bijecció f entre dues geometries projectives que no sigui una col·lineació però que compleixi que si A, B, C són punts alineats, aleshores $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ també són punts alineats.

15. Escollim un sistema de referència A, B, C, D a $P_2(k)$ i prenem coordenades homogènies respecte d'aquest sistema, de manera que $A = \{0, 0, 1\}$, $B = \{1, 0, 0\}$, $C = \{0, 1, 0\}$, $D = \{1, 1, 1\}$. Considerem la recta $z = 0$ i sigui P un punt d'aquesta recta, $P \neq \{0, 1, 0\}$. Construïm un punt $S(P)$ de la següent manera:

    (a) Unim P amb $\{1, 0, 1\}$ per una recta r.
    (b) Tallem r amb la recta $x = 0$ i obtenim el punt Q.
    (c) Unim Q amb $\{1, 1, 1\}$ per una resta s.
    (d) Tallem s amb la recta $z = 0$ i obtenim el punt $S(P)$.

    Feu un dibuix il·lustratiu. Calculeu $S(\{1, a, 0\})$.

16. Suposeu que tenim una inclusió $P_2(\mathbb{F}_p) \subset P_2(K)$ que conserva les relacions d'incidència. Apliqueu l'exercici anterior per demostrar que K ha de tenir característica p.

17. Suposem que tenim un conjunt finit de punts del pla projectiu real que no estan tots sobre dues rectes. Dibuixem les rectes que els uneixen. Afegim als punts inicials les interseccions d'aquestes rectes. Repetim el procés indefinidament. Demostreu que mai no acabarem. (Indicació: utilitzeu el teorema fonamental de la geometria projectiva.)

18. Una *configuració* és un conjunt de punts i un conjunt de rectes que compleixen aquests axiomes (més febles que els de geometria projectiva): Hi ha quatre punts, dels quan no n'hi ha tres d'alineats; per dos punts diferents hi passa com a màxim una recta. Sigui C una configuració. Construïu un pla projectiu X amb una inclusió $C \subset X$ que conservi les relacions d'incidència.

19. Apliqueu l'exercici anterior a demostrar que existeixen plans projectius on no es compleix el teorema de Desargues.

20. Siguin A i B dos punts d'un pla projectiu $P_2(k)$ i sigui r una recta que no conté ni A ni B. Digueu com es pot trobar gràficament el punt d'intersecció de la recta r amb la recta que passa per A i B, sense dibuixar la recta AB. Cal fer alguna hipòtesi sobre el cos k?

21. Quatre punts ordenats alineats A, B, C, D d'un pla projectiu $P_2(k)$ (k de característica diferent de 2) direm que formen una *quaterna harmònica* si la seva raó doble $(A, B, C, D) = -1$. Donats tres punts alineats A, B, C, trobeu una manera geomètrica de trobar un punt D tal que A, B, C, D sigui una quaterna harmònica.

22. Un *quadrilàter* és un conjunt (cíclicament ordenat) de quatre punts A, B, C, D d'un pla projectiu $P_2(k)$ tals que no n'hi ha tres d'alineats. Aquests punts s'anomenen els *vèrtex* del quadrilàter. Les rectes AB, BC, CD i DA s'anomenen *costats* del quadrilàter i les rectes AC i BD s'anomenen *diagonals* del quadrilàter. Els punts $AB \cap CD$, $BC \cap DA$, $AC \cap BD$ s'anomenen *punts diagonals*. Si coneixem els punts diagonals i un vèrtex, trobeu la manera de determinar geomètricament els altres tres vèrtex.

1. Sigui f una funció real integrable i sigui $\mathbb{A}$ el conjunt de les seves antiderivades. Doteu $\mathbb{A}$ d'estructura d'espai afí.

2. Sigui A una matriu $n \times k$ i sigui $v \in \mathbb{R}^n$. Denoteu per $\mathbb{A}$ el conjunt dels vectors $x \in \mathbb{R}^k$ tals que $Ax = v$. Doteu $\mathbb{A}$ d'estructura d'espai afí.

3. Demostreu que el conjunt $\mathbb{A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ amb l'acció de $\mathbb{R}^2$ donada per
$$(x, y, z) + (u, v) := (x + u, y + v, (x + u)^2 + (y + v)^2)$$
és un espai afí.

4. Sigui $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$.
   (a) Demostreu que l'acció de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{A}$ donada per $(x, y) + t = (x + t, y + t^2 + 2tx)$ fa de $\mathbb{A}$ un espai afí.
   (b) Vegeu que $\mathbb{A}$ no és subvarietat lineal de $\mathbb{R}^2$.

5. Considereu la circumferència unitat $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ amb l'acció de $\mathbb{R}$ donada per $z + t = ze^{it}$. Decidiu si S^1 és, amb aquesta acció, un espai afí o no ho és.

6. Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí de dimensió 2. Diem que dues rectes de $\mathbb{A}$ són paral·leles si no es tallen. Demostreu que $\mathbb{A}$ compleix els axiomes de pla afí.

7. Siguin A, B, C, D quatre punts diferents d'un espai afí de dimensió 2, tal que no n'hi hagi tres d'alineats. Demostreu que si les rectes AB i CD són paral·leles i les rectes AC i BD també ho són, aleshores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

8. Siguin A, B, C tres punts diferents d'un pla afí. Prenem el sistema de referència format pel punt A i els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Escriviu les equacions de les rectes AB, AC i BC.

9. Sigui Π el pla de l'espai afí $\mathbb{A}^4$ donat per
$$\begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ \quad 4x + t = 5. \end{cases}$$
Determineu totes les rectes l que passen pel punt $(0, 1, 0, 1)$ i que satisfan $\Pi + l = \mathbb{A}^4$.

10. Siguin A, B, C tres punts alineats d'un espai afí sobre un cos k, amb $A \neq C$. Definim la seva *raó simple* (A, B, C) com l'element $\lambda \in k$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$. Calculeu, en funció de (A, B, C), els valors de (X, Y, Z) amb $\{X, Y, Z\} = \{A, B, C\}$.

11. Sigui l una recta d'un pla afí i sigui $\mathbb{A}$ el conjunt de totes les rectes paral·leles a l. Trobeu una manera natural de dotar $\mathbb{A}$ d'estructura d'espai afí.

12. Siguin $P_1, \dots, P_n$ punts d'un espai afí sobre un cos k. Suposem que n és invertible a k. Definim el *baricentre* d'aquests punts com el punt
$$B := P_1 + \frac{1}{n}\overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \frac{1}{n}\overrightarrow{P_1P_n}.$$
Demostreu que el baricentre no canvia si permutem els punts $P_1, \dots, P_n$.

13. Considerem punts $P_1, \ldots, P_n$ punts d'un espai afí sobre un cos k de característica zero. Per cada $i = 1, \ldots, r$, sigui X_i el baricentre dels punts $\{P_j : j \neq i\}$. Demostreu que G pertany a totes les rectes P_iX_i, $i = 1, \ldots, r$. Calculeu les raons simples (P_i, X_i, G).

14. En un espai afí de dimensió 4 (amb una certa referència fixada), trobeu equacions cartesianes i paramètriques per aquestes varietats lineals:

    (a) La recta que passa pels punts $(2, 1, 0, 1)$ i $(1, 1, 1, 2)$.

    (b) El pla que passa pels punts $(2, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$ i $(3, -1, 2, 3)$.

    (c) La varietat lineal de dimensió 3 que passa pels punts $(2, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(3, -1, 2, 3)$ i $(0, 0, -2, -1)$.

15. En un espai afí de dimensió 4 (amb una referència fixada) trobeu equacions cartesianes i paramètriques per al pla que passa pel punt $(1, 2, 3, 4)$ i és paral·lel al pla

$$\begin{cases} x - y + z + t = 3, \\ \quad 2x + y - 5t = 10. \end{cases}$$

16. Sigui L una varietat lineal de dimensió r d'un espai afí i sigui $Q \notin L$. Demostreu que el conjunt dels punts de totes les rectes que passen per Q i tallen L, unió amb els punts de la varietat lineal de dimensió r que passa per Q i és paral·lela a L, formen una varietat lineal de dimensió $r + 1$.

17. Demostreu el Teorema de Varignon (1791): «si s'uneixen els punts mitjos dels costats adjacents d'un quadrilàter, llavors la figura obtinguda és un paral·lelogram». Proveu també que els quatre vèrtex del quadrilàter tenen el mateix baricentre que els punts mitjans dels costats. (El punt mig de AB és el baricentre de A i B.)

18. A l'espai afí $\mathbb{A}^3$. considerem les referències

$$\mathcal{R} = \{(0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$
$$\mathcal{R}' = \{(-1, 0, 0); (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$$

    (a) Donat el punt de coordenades $(1, 2, -1)$ en la referència $\mathcal{R}$, determineu les seves coordenades en la referència $\mathcal{R}'$.

    (b) Considereu el pla que en la referència $\mathcal{R}$ té equació $2x - y + z + 2 = 0$. Trobeu la seva equació respecte de $\mathcal{R}'$.

    (c) Considereu la recta que en la referència $\mathcal{R}$ té equació

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

    Trobeu les seves equacions en la referència $\mathcal{R}'$.

19. Siguin A i B dos punts diferents d'un espai afí sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$. Definim el *segment* $[AB]$ com els punts C alineats amb A i B tals que $0 \leq (A, C, B) \leq 1$. Considerem un triangle de vèrtex A, B, C. Demostreu que una recta no pot tallar els tres segments $[AB]$, $[AC]$ i $[BC]$ (els «costats» del triangle).

20. Considerem punts A, B, C, P, Q, R, G, P' en un pla afí tals que: (a) A, B, C no estan alineats; (b) $P, P' \in AB$, $Q \in BC$, $R \in AC$; (c) P, Q, R estan alineats; (d) $G = AQ \cap BR$; (d) P', G, C estan alineats. Demostreu que, en aquestes condicions, el punt P' només depèn dels punts A, B, P. (Podeu demostrar-ho directament, però és més senzill fer-ho a l'espai projectiu.)

1. Determineu els punts fixos i les rectes invariants de l'afinitat d'un pla afí (sobre el cos $\mathbb{Q}$) en ell mateix que, en una certa referència, ve donada per les equacions $x' = x + 2y + 2$, $y' = 3y + 1$.

2. Considereu l'afinitat f de l'espai afí $\mathbb{A}^3$ en l'espai afí $\mathbb{A}^2$ (cos base $\mathbb{Q}$) donada, respecte de les referències canòniques, per

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu les equacions de f respecte de les referències

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,0,0); (2,-1,0), (0,2,-1), (-1,0,2)\}, \qquad \mathcal{R}_2 = \{(2,1); (1,1), (1,-1)\}$$

3. Sigui f l'afinitat d'un espai afí de dimensió 3 (sobre el cos $\mathbb{Q}$) en ell mateix donada (en una certa referència) per

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Trobeu els seus punts fixos. Trobeu la transformada de la recta $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$. Determineu l'antiimatge del pla d'equació $x - y - z = 2$.

4. (a) Demostreu que si dues rectes (diferents) invariants per una afinitat es tallen, el punt d'intersecció és un punt fix. (b) Demostreu que si una afinitat en un pla afí té dues rectes paral·leles (diferents) invariants, aleshores totes les rectes paral·leles a aquestes dues són invariants. (c) Demostreu que la conclusió de l'apartat (b) deixa de ser certa si substituïm «afinitat» per «col·lineació».

5. Considerem la recta d'un pla afí (sobre $\mathbb{Q}$) d'equació (en una certa referència) $2x+3y = 2$. Escriviu les equacions de la reflexió respecte d'aquesta recta, amb arrel $\overrightarrow{e} = (1,1)$.

6. Demostreu que les afinitats conserven els baricentres. És a dir, si f és una afinitat i G és el baricentre de $P_1, \ldots, P_r$, aleshores $f(G)$ és el baricentre de $f(P_1), \ldots, f(P_r)$.

7. $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ és una afinitat tal que $f(1,1,0) = (0,0,0)$ i tal que sobre el pla $x + y = 1$ és una translació de vector $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$. Escriviu les equacions de f.

8. Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinitat i sigui n invertible al cos base. Demostreu que si f^n té un punt fix, aleshores f també té un punt fix. Indicació: utilitzeu el baricentre. Podem suprimir la condició sobre n?

9. En un pla afí $\mathbb{A}$ sobre el cos $\mathbb{R}$, sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinitat tal que $f^3 = Id$ i $f \neq Id$. Determineu f. Per fer-ho, comenceu determinant l'aplicació lineal $\widetilde{f}$ i després observeu que f ha de tenir algun punt fix.

10. Considereu l'afinitat d'un pla afí sobre $\mathbb{Q}$ donada per la matriu M:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que és una reflexió. Trobeu l'eix, una arrel i una referència en la qual la matriu s'expressi en la forma B.

11. Considereu l'afinitat d'un pla afí sobre $\mathbb{Q}$ donada per la matriu M:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -22 \\ 12 & -5 & -53 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que és una reflexió amb lliscament. Trobeu l'eix, una arrel i una referència en la qual la matriu s'expressi en la forma B.

12. Si $\mathbb{A}$ és un pla afí sobre un cos de característica zero, una afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ és una *homologia especial* si té tota una recta de punts fixos (i cap més punt fix) i deixa invariants totes les rectes paral·leles a aquesta recta de punts fixos. Demostreu que tota homologia especial pot expressar-se, en una certa referència, en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Sigui $\mathbb{A}$ un pla afí real, l una recta de $\mathbb{A}$ i P i P' dos punts diferents fora de la recta l tals que la recta que passa per ells no sigui paral·lela a l, sinó que la talli en un cert punt A. Definim $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ així.

    (a) Sobre els punts de la recta l, l'aplicació f és la identitat.

    (b) Sobre els punts de la recta (PP') definim f com l'única afinitat $f : l \to l$ tal que $f(A) = A$ i $f(P) = P'$.

    (c) Sigui Q un punt que no estigui ni a la recta l ni a la recta (PP') i sigui s la recta paral·lela a (PP') per Q. Distingirem dos casos:

        i. Si la recta (PQ) és paral·lela a l, sigui r la recta paral·lela a l per P'. Definim $f(Q) = s \cap r$.

        ii. Si la recta (PQ) talla l en un punt B, definim $f(Q) = s \cap (BP')$.

    Demostreu que f és una afinitat. Trobeu una referència en la qual la matriu de l'afinitat sigui diagonal.

14. Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinitat d'un pla afí real que no té cap punt fix i que té una única recta invariant. Demostreu que existeix $a \neq 1$ i una referència en la qual la matriu de f és

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Feu-ho seguint aquests passos: (a) Demostreu que $\widetilde{f}$ té un vector propi. (b) A partir de que f no pot tenir cap punt fix i només ha de tenir una recta invariant, descarteu totes les possibilitats per $\widetilde{f}$ excepte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & a & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amb $a \neq 1$ i $u \neq 0$. (c) Trobeu una referència $\{P; \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$ en la qual la matriu sigui igual a B.

15. Considereu aquestes dues afinitats de $\mathbb{A}^3$ sobre el cos $\mathbb{R}$:

$$f = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & -1 \\ -4 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & a \\ 5 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determineu tots els valors del paràmetre a que fan que f i g siguin similars (si és que n'hi ha algun).

[En tot aquest full, el cos base és $\mathbb{R}$ i els espais afins tenen una mètrica euclidiana. Si no es diu el contrari, es considerarà el producte escalar ordinari.]

1. En un pla afí $\mathbb{A}$, una *rotació* és un moviment rígid f tal que l'isomorfisme lineal $\tilde{f}$ té determinant 1. Si R és una rotació i fixem una referència, demostreu que existeix $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ únic (s'anomena l'angle de rotació de R) tal que $\widetilde{R}$ ve donat per la matriu

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Demostreu que tota rotació (diferent de la identitat) té un únic punt fix. S'anomena, és clar, el *centre* de la rotació. Demostreu que dues rotacions són equivalents si i només si els seus angles són iguals llevat del signe.

2. En un pla afí $\mathbb{A}$, sigui σ una reflexió ortogonal respecte d'una recta i sigui R_θ una rotació d'angle θ. Demostreu que $\sigma R_\theta \sigma$ és una rotació i determineu el seu angle de rotació.

3. En un pla afí $\mathbb{A}$, sigui σ una reflexió ortogonal respecte d'una recta. Prenem una referència de $\mathbb{A}$. Demostreu que existeix $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ únic tal que $\widetilde{\sigma}$ ve donat per la matriu

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

4. En un pla afí $\mathbb{A}$, siguin σ_i, $i = 1, 2$ dues reflexions ortogonals respecte de dues rectes no paral·leles $P_1 + \langle \overrightarrow{v}_i \rangle$, $i = 1, 2$. Demostreu que $\sigma_1\sigma_2$ és una rotació i determineu el seu centre i el seu angle de rotació.

5. Sigui R una rotació del pla $\mathbb{A}^2$ i sigui P un punt que no quedi fix: $R(P) = Q \neq P$. Demostreu que el centre de R pertany a la recta

$$r : P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp.$$

6. Considerem tres rectes d'un pla afí que determinin un triangle i siguin σ_1, σ_2, σ_3 les reflexions ortogonals respecte de cadascuna d'aquestes tres rectes. Classifiqueu el moviment rígid $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Estudieu també els casos quan les tres rectes són concurrents o paral·leles.

7. A l'espai afí $\mathbb{A}^3$, sigui σ la reflexió ortogonal respecte del pla $2x - y + z = 1$. Calculeu $\sigma(r)$ si r és la recta

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 3y + z &= 11 \end{aligned}\right\}$$

8. En una certa referència, una afinitat del pla s'escriu

$$\left.\begin{aligned} x' &= 3x + y \\ y' &= -4x - y \end{aligned}\right\}$$

   És un moviment rígid?

9. Al pla afí $\mathbb{A}^2$ (amb la referència canònica) escriviu les equacions de

(a) La rotació de centre $(2,1)$ i angle $\pi/6$.

(b) La reflexió ortogonal respecte de la recta $x+2y=2$.

10. Considereu l'afinitat del pla $\mathbb{A}^2$ d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' &= -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{aligned}\right\}$$

escrites en la referència

$$\mathcal{R} = \left\{(0,0); \overrightarrow{(1,-1)}, \overrightarrow{(1,1)}\right\}.$$

Comproveu que és un moviment rígid i classifiqueu-lo.

11. A l'espai afí $\mathbb{A}^3$ considereu el moviment rígid donat per

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}(x-2y-2z)+1 \\ y' &= \frac{1}{3}(-2x+y-2z) \\ z' &= \frac{1}{3}(-2x-2y+z)-2 \end{aligned}\right\}$$

determineu els seus punts fixos, les seves rectes invariants, el vector de lliscament i una referència ortonormal en la qual el moviment rígid s'expressi en la seva forma canònica.

12. Al pla afí $\mathbb{A}^2$ considerem el producte escalar donat per la matriu $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comproveu que realment és un producte escalar definit positiu. Trobeu la imatge del punt $P=(2,3)$ per la reflexió ortogonal d'eix $x+y+1=0$.

13. Sigui f un moviment rígid i sigui $\overrightarrow{u}$ el vector de lliscament. Demostreu que $\|u\| = \min_P \left\{d(P, f(P))\right\}$.

14. Trobeu a l'espai euclidià afí $\mathbb{A}^4$ la distància del pla

$$\Pi : \left\{ \begin{aligned} 2y-3z-2 &= 0 \\ y-3t-1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

a la recta $r : (1,2,3,1) + \langle(0,3,2,1)\rangle$. Doneu punts del pla i la recta que realitzin aquesta distància.

15. Calculeu la distància entre aquestes dues rectes i els punts que realitzin aquesta distància

$$\begin{aligned} L_0 &: (0+4t, 1-3t, -3-t) \\ L_1 &: (2, 1+2t, 2t) \end{aligned}$$

16. A $\mathbb{A}^5$ considereu l'hiperplà H amb equació

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 8 = 0.$$

Calculeu la distància a H del punt $(1,2,3,5,2)$.

17. Sigui L la varietat lineal de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^4$ donada per

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ x+t &= 3. \end{cases}$$

Trobeu el pla Π ortogonal a L tal que $L \cap \Pi = \{(1,1,1,1)\}$.

1. Siguin Q, Q' formes quadràtiques sobre un cos k (de característica diferent de 2) i siguin M, M' les seves matrius respectives en una certa base. Demostreu que si $Q \sim Q'$, aleshores existeix $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ tal que $\det(M) = \lambda^2 \det(M')$.

2. Considerem formes quadràtiques de rang dos sobre el cos de cinc elements. Demostreu que tota forma quadràtica d'aquestes és equivalent a una d'aquestes dues: $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$. Demostreu que aquestes dues formes quadràtiques no són equivalents.

3. Sigui $p(x)$ un polinomi de grau tres sobre el cos real. Classifiqueu la cònica afí
$$\frac{p(x) - p(y)}{x - y}.$$

4. Siguin ρ, i, $\tilde{\rho}$, $\tilde{i}$ els invariants d'una quàdrica afí real. Demostreu que $\rho - 2 \leq \tilde{\rho} \leq \rho$. Demostreu que aquestes desigualtats no es poden millorar.

5. Sigui Q una quàdrica afí. Direm que un punt P és un *centre* de Q si la simetria central respecte de P deixa invariant Q. Demostreu que P és un centre de Q si i només si $\nabla Q(P) = 0$.

6. Estudieu els centres de les quàdriques de dimensions 2 i 3 sobre el cos real.

7. Considereu la cònica real afí
$$3x^2 + 7y^2 + 6xy + x + y = 0.$$
Demostreu que és una el·lipse. Trobeu el seu únic centre. Trobeu una afinitat que converteixi la cònica donada en la cònica $x^2 + y^2 = 1$.

8. Classifiqueu aquesta quàdrica de l'espai afí real de dimensió tres:
$$x^2 - y^2 - 4xz - 8yz - 3y + z - 1.$$

9. Sigui Q una quàdrica i sigui l una recta. Direm que l és *tangent* a Q si la intersecció de Q amb l és un *punt doble* (és a dir, és equivalent a la quàdrica x^2). Trobeu totes les rectes del pla afí que passen pel punt $(1, -2)$ i són tangents a la cònica $2x^2 - y^2 - x - y = 3$.

10. Demostreu que la quàdrica no degenerada de dimensió 3 i índex 2 és *doblement reglada* perquè per cada punt hi passen dues rectes contingudes a la quàdrica.

11. Considereu la quàdrica $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ de l'espai projectiu real de dimensió 3. Per cada λ sigui H_λ l'hiperplà $x + y = \lambda t$. Classifiqueu, en funció de λ, la quàdrica afí que s'obté prenent H_λ com a hiperplà de l'infinit.

12. (Definició «sintètica» de cònica.) Sigui f una projectivitat d'un pla projectiu, sigui P un punt qualsevol i sigui $Q = f(P)$. Suposem que la recta PQ no és invariant per f. Observem que f transforma les rectes que passen per P en les rectes que passen per Q. Definim
$$\mathcal{Q} := \{r \cap f(r) : r \text{ recta que passa per } P\}.$$
Demostreu que $\mathcal{Q}$ és una cònica no degenerada.