

# Entrega 3: Conducció de la calor

Arnau Mas

4 de Maig 2018

## Problema 25

Considerem un tub cilíndric de conductivitat constant  $\lambda$  que té un radi intern  $R_1$  que es manté a temperatura constant  $T_1$  i un radi extern que es manté a temperatura constant  $T_2$ . Com que no hi ha fonts, l'equació de la temperatura és

$$\dot{T} = \alpha \nabla^2 T, \quad (1)$$

on  $\alpha := \frac{\lambda}{\rho c_e}$  és la difusivitat del material — $\rho$  i  $c_e$  són, respectivament, la densitat i calor específica del material—. Si considerem l'estat estacionari, és a dir, quan  $\dot{T} = 0$  aleshores l'?? esdevé

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2)$$

Si prenem coordenades cilíndriques  $(r, \theta, z)$  per explotar la simetria del problema podem escriure  $T = T(r)$  ja que, per simetria, la temperatura no pot dependre ni de l'angle  $\theta$  ni de la coordenada  $z$ . Així doncs, en coordenades, l'?? és

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \quad (3)$$

La solució general d'aquesta equació és  $T(r) = A \log r + B$ , ja que aleshores es compleix que  $r \partial_r T$  és una constant, la qual cosa satisfà l'?. Imposem les condicions de contorn per determinar  $A$  i  $B$ :

$$T(R_1) = A \log R_1 + B = T_1$$

$$T(R_2) = A \log R_2 + B = T_2$$

implica

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\log R_1 - \log R_2}$$

i per tant

$$B = T_1 - A \log R_1 = \frac{T_2 \log R_1 - T_1 \log R_2}{\log R_1 - \log R_2}.$$

Així doncs, la distribució de temperatures és

$$\begin{aligned} T(r, \theta, z) &= \frac{T_1 - T_2}{\log R_1 - \log R_2} \log r + \frac{T_2 \log R_1 - T_1 \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \\ &= \frac{T_1 \log(r/R_2) - T_2 \log(r/R_1)}{\log(R_1/R_2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Podem fer servir ?? i la llei de Fourier per determinar la densitat de flux de calor  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\lambda (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2} \frac{\mathbf{e}_r}{r}.$$

Per tant, si considerem un cilindre  $\mathcal{C}$  centrat a l'eix del tub de radi  $R_1 \leq r \leq R_2$  i longitud  $L$ , la potència  $\dot{Q}$  que atravessa la seva superfície és

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\lambda (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\phi dz = \frac{2\pi\lambda L (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2},$$

ja que la densitat de flux és perpendicular a les tapes del cilindre.

Per tant, la potència per unitat de longitud que atravessa la superfície d'un cilindre de radi  $R_1 \leq r \leq R_2$  centrat a l'eix del tub és

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi\lambda (T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2}.$$