1. Determineu l'interval de convergència de les sèries de potències següents:

$(a) \sum 3^n x^n$ $\quad (b) \sum n! x^{n+3}$ $\quad (c) \sum 4^n (x-2)^{3n}$

$(d) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ $\quad (e) \sum \frac{n^2}{2^{3n}} (x+4)^n$ $\quad (f) \sum \log(n) x^n$

$(g) \sum x^{n!}$ $\quad (h) \sum (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$ $\quad (i) \sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^n$

2. Sigui $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergent a $(-R, R)$, amb $R > 0$.

(a) Suposeu que $f(x) = 0$ per a cada $x \in (-R, R)$. Demostreu que $a_n = 0$ per a tot n.

(b) Suposeu que $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergeix en un interval obert centrat al 0 i que $f(x_n) = g(x_n)$ per a certa successió $x_n \to 0$ amb infinits termes diferents. Demostreu que $f = g$.

3. Demostreu que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és una funció parella aleshores $a_n = 0$ per n senar, i si $f(x)$ és senar aleshores $a_n = 0$ per n parell.

4. Determineu les sèries de potències $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no nul.les de manera que

$$(1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = 0$$

5. Determineu l'interval de convergència de les següents sèries i calculeu-ne la suma:

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ $\quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ $\quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$ $\quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n(n+1)}$

$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ $\quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ $\quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n}$

6. Mitjançant procediments diversos, desenvolupeu les funcions següents en sèrie de potències de x i indiqueu els intervals de convergència

(a) $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$ $\quad$ (b) $f(x) = \arctan x$ $\quad$ (c) $f(x) = \sin^2 x$

(d) $f(x) = \log(2+x)$ $\quad$ (e) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ $\quad$ (f) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x-2x^2}$

7. Considereu la funció $f(x) = \sum_n a_n x^n$, definida en un interval centrat a l'origen. Calculeu el valor de $f(x)$ i també el valor d'a_n, $n = 1, 2, \cdots$ sabent que es verifica la següent relació de recurrència:

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -3$$

8. Determineu tots els nombres complexos que satisfan les equacions següents.

(a) $e^z = 1$.

(b) $e^z = i$.

(c) $e^z = 3 - 3i$.

(d) $\sin(z) = i$.

9. Estudieu la convergència de les sèries següents:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1+i}{2^n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^n.$$

10. Trobeu una sèrie de potències al voltant de l'origen amb valors complexos que sumi $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$. Calculeu-ne el radi de convergència i trobeu una fórmula per $f^{n)}(0)$.

11. Suposem que f és una funció contínua en $[a, b]$ i que per tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es compleix $\displaystyle\int_a^b x^n f(x) dx = 0$. Demostreu que $f(x) = 0$ per tot $x \in [a, b]$.

12. Demostreu, fent servir el Teorema d'Abel per sèries de potències, que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$