

# Entrega 1: Grups

Arnau Mas

24 d'Abril 2018

## Problema 1

Considerem dos grups  $H$  i  $K$  amb  $e_H$  i  $e_K$  els respectius elements neutres. Aleshores el producte  $G := H \times K$  té per neutre  $e = (e_H, e_K)$ . Hem de veure que  $H$  és isomorf a  $H' := H \times \langle e_K \rangle \leq G$  i que  $H'$  és normal a  $G$ . Definim la següent aplicació

$$\begin{aligned}\psi: H &\longrightarrow H \times \langle e_K \rangle \\ h &\longmapsto (h, e_K).\end{aligned}$$

Tenim que  $\psi$  és morfisme, ja que per tot  $h_1, h_2 \in H$  es verifica

$$\psi(h_1 h_2) = (h_1 h_2, e_K) = (h_1, e_K)(h_2, e_K) = \psi(h_1)\psi(h_2).$$

És cert que  $\psi$  és un monomorfisme, ja que  $(h_1, e_K) = (h_2, e_K)$  si i només si  $h_1 = h_2$ . I  $\psi$  també és epimorfisme ja que per tot  $g \in H'$  existeix  $h \in H$  tal que  $g = (h, e_K)$ . Per tant  $\psi$  és isomorfisme. Això ens dóna  $H \cong H'$ . Per veure que és normal considerem  $(x, e_K) \in H'$ . Aleshores, per tot  $(h, k) \in G$  tenim

$$(h, k)^{-1}(x, e_K)(h, k) = (h^{-1}xh, k^{-1}k) = (h^{-1}xh, e_K).$$

I com que  $h^{-1}xh \in H$  tenim que  $(h^{-1}xh, e_K) \in H'$  i per tant concloem  $H' \trianglelefteq G$ .

Tenim exactament el mateix resultat si considerem l'altre factor del producte, és a dir  $K' := \langle e_H \rangle \times K$ . Observem que tenim un isomorfisme natural de  $H \times K$  a  $K \times H$

$$\begin{aligned}\varphi: H \times K &\longrightarrow K \times H \\ (h, k) &\longmapsto (k, h).\end{aligned}$$

És clar que  $\varphi$  és bijectiva. I també és morfisme per com es defineix l'operació del producte de grups:

$$\varphi((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = \varphi((h_1 h_2, k_1 k_2)) = (k_1 k_2, h_1 h_2) = (k_1, h_1)(k_2, h_2) = \varphi((h_1, k_1))\varphi((h_2, k_2)).$$

Així doncs tenim en particular que  $\langle e_H \rangle \times K \cong K \times \langle e_H \rangle$ . Apliquem el resultat anterior a  $K \times \langle e_H \rangle$  dins de  $K \times H$  i tenim que és isomorf a  $K$  i normal a  $K \times H$ . I per tant  $K'$  és isomorf a  $K$  i normal a  $G$ .

Finalment, comprovem que  $H' \cap K' = \langle e \rangle$ . Efectivament, considerem  $(h, k) \in H' \cap K'$ . Aleshores, com que  $(h, k) \in H'$  ha de ser  $k = e_K$ . I com que  $(h, k) \in K'$  ha de ser  $h = e_H$ . I per tant  $(g, h) = (e_H, e_K) = e$ .

— \* —

Hem de veure ara el recíproc al resultat previ. És a dir, si  $H, K \trianglelefteq G$  i  $G = HK$  amb  $H \cap K = \langle e \rangle$  aleshores  $G \cong H \times K$ . Com que  $G = HK$  tenim que per tot  $g \in G$  existeixen  $h \in H$  i  $k \in K$  tals que  $g = hk$ . De fet, com que  $H \cap K = \langle e \rangle$ ,  $h$  i  $k$  són únics. Efectivament, si  $g = h_1k_1 = h_2k_2$  amb  $h_1, h_2 \in H$  i  $k_1, k_2 \in K$  aleshores tenim

$$h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1}.$$

Com que  $h_2^{-1}h_1 \in H$  i  $k_2k_1^{-1} \in K$  això vol dir que  $h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K = \langle e \rangle$ . Per tant  $h_1 = h_2$  i  $k_1 = k_2$ . Això ens dóna que tot element de  $G$  s'escriu de manera única com el producte d'un element de  $H$  i un element de  $K$ . Gràcies a això podem definir una aplicació

$$\begin{aligned} f: G &\longrightarrow H \times K \\ g = hk &\longmapsto (h, k). \end{aligned}$$

Que  $f$  està ben definida ens ho dóna la unicitat de  $h$  i  $k$  que acabem de provar. Per veure que  $f$  és un morfisme ens caldrà fer servir que  $H$  i  $K$  són normals a  $G$ . Considerem  $g_1 = h_1k_1$  i  $g_2 = h_2k_2$  amb  $h_1, h_2 \in H$  i  $k_1, k_2 \in K$ . Per veure que  $f$  és morfisme hem de provar que  $g_1g_2 = h_1h_2k_1k_2$  ja que  $f(g_1)f(g_2) = (h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$ . Tenim que  $g_1g_2 = h_1k_1h_2k_2$ . Com que  $H$  és normal, existeix  $h_3 \in H$  tal que  $k_1h_2 = h_3k_1$ . Similarment, per la normalitat de  $K$  existeix  $k_3 \in K$  tal que  $k_1h_2 = h_2k_3$ . Això ens dóna  $g_1g_2 = h_1h_2k_3k_2 = h_1h_3k_1k_2$ . Però pel que hem provat prèviament ha de ser  $h_1h_2 = h_1h_3$  i  $k_1k_2 = k_3k_2$ . Per tant  $f(g_1g_2) = f(h_1h_2k_1k_2) = (h_1h_2, k_1k_2) = f(g_1)f(g_2)$  i  $f$  és morfisme.  $f$  és epimorfisme ja que per tot  $(h, k) \in H \times K$  tenim  $f(hk) = (h, k)$ . I també és monomorfisme ja que  $ee = e$ . Així doncs tenim  $G = HK \cong H \times K$  quan  $H$  i  $K$  són subgrups normals amb intersecció trivial.

— \* —

A continuació generalitzem el resultat anterior per a qualsevol nombre de subgrups. És a dir, considerem un grup  $G$  amb  $H_1 \dots H_n$  subgrups normals a  $G$  i

$$H_i \cap (H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n)$$

per tot  $i \in \{1, \dots, n\}$  (podem definir  $H_0 = H_{n+1} = \langle e \rangle$  per evitar problemes amb el rang de  $i$ ). Aleshores si  $G = H_1 \dots H_n$  es té  $G \cong H_1 \times \dots \times H_n$ .

Procedim per inducció sobre  $n$ . El cas  $n = 2$  és l'apartat anterior. Considerem, per tot  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G = H_1 \dots H_{n+1}$  amb  $H_1, \dots, H_{n+1}$  subgrups en les condicions anteriors. Com que el producte de subgrups normals és normal,  $H_1 \dots H_n$  és normal a  $G$ . A més  $(H_1 \dots H_n) \cap H_{n+1} = \langle e \rangle$ , per tant podem aplicar l'apartat anterior per obtenir  $G \cong (H_1 \dots H_n) \times H_{n+1}$ . I si apliquem la hipòtesi d'inducció a  $H_1 \dots H_n$  trobem

$$G \cong (H_1 \times \dots \times H_n) \times H_{n+1} \cong H_1 \times \dots \times H_{n+1}.$$

## Problema 2

Direm que un grup  $G$  és *resoluble* si hi ha una cadena de subgrups

$$\langle e \rangle = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G,$$

tals que  $H_{i+1}/H_i$  és abelià per a tot  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Tenim que  $\mathfrak{S}_3$  és resoluble. Efectivament, tenim la cadena

$$\langle \text{id} \rangle \trianglelefteq \mathfrak{A}_3 \trianglelefteq \mathfrak{S}_3.$$

Tenim que  $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  per tant és abelià. A més  $|\mathfrak{A}_3| = 3$ , per tant  $\mathfrak{A}_3/\langle e \rangle \cong \mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  i també és abelià.

També és resoluble  $\mathfrak{S}_4$ . Com abans tenim la cadena

$$\langle \text{id} \rangle \trianglelefteq \mathfrak{A}_4 \trianglelefteq \mathfrak{S}_4.$$

Igualment  $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , que és abelià. Ara bé,  $\mathfrak{A}_4$  no és abelià. A  $\mathfrak{A}_4$  hi ha 8 3-cicles i 3 productes de transposicions disjunts. Si  $\tau_1$  i  $\tau_2$  són dos productes de transposicions disjunts diferents aleshores  $T := \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  és un subgrup normal de  $\mathfrak{A}_4$ . Efectivament, com que el producte de dues transposicions disjunts té ordre 2 tenim  $T = \{\text{id}, \tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2\}$  i  $\tau_1\tau_2$  és el tercer producte de transposicions disjunts. És normal perquè la conjugació de permutacions conserva el tipus cíclic. Tenim que  $T \cong V_4$ , on  $V_4$  és el 4-grup de Klein. A més  $|\mathfrak{A}_4/T| = 3$  per tant  $\mathfrak{A}_4/T \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  i és abelià. Per tant la cadena

$$\langle \text{id} \rangle \trianglelefteq T \trianglelefteq \mathfrak{A}_4 \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$$

prova que  $\mathfrak{S}_4$  és resoluble.

— \* —

Considerem un grup  $G$  i  $N \trianglelefteq G$  un subgrup resoluble tal que  $G/N$  també és resoluble. Com que  $N$  és resoluble, tenim que existeix una cadena

$$\langle e \rangle = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = N$$

amb  $H_{i+1}/H_i$  abelià. També tenim que hi ha una cadena

$$\langle \bar{e} \rangle = \bar{H}_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \bar{H}_m = G/N$$

amb  $\bar{H}_{i+1}/\bar{H}_i$  abelians. Sabem que els subgrups de  $G/N$  estan en correspondència bijectiva amb els subgrups de  $G$  que contenen  $N$ . Així, per a cada  $\bar{H}_i$  existeix un únic  $H_{n+i} \leq G$  tal que  $N \trianglelefteq H_{n+i}$  i  $H_{n+i}/N = \bar{H}_i$ . Com que cada  $H_{n+i}$  és la preimatge de  $\bar{H}_i$  per la projecció a  $G \rightarrow G/N$ , que és un epimorfisme, tenim que  $H_{n+i} \trianglelefteq H_{n+i+1}$ . A més, pel tercer teorema d'isomorfia tenim

$$\bar{H}_{i+1}/\bar{H}_i = (H_{n+i+1}/N)/(H_{n+i}/N) \cong H_{n+i+1}/H_{n+i}.$$

Finalment  $\langle \bar{e} \rangle$  es correspon amb  $N$ . Tot això ens dóna una cadena

$$N = H_n \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n+m} = G$$

amb  $H_{n+i+1}/H_{n+i}$  abelià per tot  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Per tant, ajuntant-la amb la cadena que ens dóna la resolubilitat de  $N$ , concloem que  $G$  és resoluble.

Hem de veure ara el recíproc. És a dir, si  $N \trianglelefteq G$  i  $G$  és resoluble aleshores tant  $N$  com a  $G/N$  són resolubles. Com que  $G$  és resoluble tenim la cadena

$$\langle e \rangle = H_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n = G.$$

Considerem, per  $i \in \{0, \dots, n\}$ , els subgrups  $H_i \cap N$ . Tenim que  $H_i \cap N \trianglelefteq H_{i+1} \cap N$ . Tenim que  $H_i \cap N \geq H_{i+1} \cap N$ . Si  $g \in H_{i+1} \cap N$  i  $h \in H_i \cap N$  aleshores en particular  $h \in N$ , per tant  $g^{-1}hg \in N$ , per la normalitat de  $N$  a  $G$ . A més, com que  $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$  i en particular  $g \in H_{i+1}$  i  $h \in H_i$  també tenim  $g^{-1}hg \in H_i$ . Per tant  $g^{-1}hg \in H_i \cap N$  i concloem  $H_i \cap N \trianglelefteq H_{i+1} \cap N$ . Així doncs tenim la cadena

$$\langle e \rangle = H_0 \cap N \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n \cap N = N.$$

Considerem ara el morfisme

$$\begin{aligned} \pi: H_{i+1} \cap N &\longrightarrow H_{i+1}/H_i \\ g &\longmapsto \bar{g} \end{aligned}$$

que no és res més que la restricció a  $H_{i+1} \cap N$  de la projecció  $H_{i+1} \twoheadrightarrow H_{i+1}/H_i$ . És clar que si  $g \in H_i \cap N$  aleshores  $g \in \ker \pi$  ja que en particular  $g \in H_i$ . I si  $g \in \ker \pi$  aleshores  $g \in H_i$ . Però  $g \in N$  ja que  $\ker \pi \trianglelefteq H_{i+1} \cap N$ . Per tant  $\ker \pi = H_i \cap N$ . Pel primer teorema d'isomorfia,  $(H_{i+1} \cap N)/(H_i \cap N)$  és isomorf a un subgrup de  $H_{i+1}/H_i$ . Però  $H_{i+1}/H_i$  és per hipòtesi abelià. Per tant  $(H_{i+1} \cap N)/(H_i \cap N)$  és abelià per tot  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Això ens permet concloure que  $N$  és resoluble.

Per provar que  $G/N$  també és resoluble farem ús de la projecció

$$\begin{aligned} \pi: G &\twoheadrightarrow G/N \\ g &\mapsto gN, \end{aligned}$$

que és un epimorfisme. En particular, si  $H_i$  són els subgrups de la cadena de resolubilitat de  $G$  aleshores  $\pi(H_i)$  són tots subgrups de  $G/N$ . No només això sino que també tenim  $\pi(H_i) \trianglelefteq \pi(H_{i+1})$ . A més, si  $H_{i+1}/H_i$  aleshores també ho és  $K_i := \pi(H_{i+1})/\pi(H_i)$ . Observem primer que els elements de  $K_i$  són precisament  $\pi(hH_i)$ , amb  $h \in H_{i+1}$ . Efectivament, considerem  $\bar{g} = g\pi(H_i) \in K_i$ . Aleshores, com que  $g \in \pi(H_{i+1})$ , existeix  $h \in H_{i+1}$  tal que  $\pi(h) = g$ . Aleshores tenim que  $\bar{g} = \pi(h)\pi(H_i)$ . Considerem  $x \in \pi(h)\pi(H_i)$ . És a dir,  $x = \pi(h)\pi(h')$  per a cert  $h' \in H_i$ . Aleshores  $x = \pi(hh') \in \pi(hH_i)$ . De la mateixa manera, si  $y \in \pi(hH_i)$  vol dir que  $y = \pi(hh')$  per a cert  $h' \in H_i$ . Per tant  $y \in \pi(h)\pi(h') \in \pi(h)\pi(H_i)$  i concloem que  $\bar{g} = \overline{\pi(h)} = \pi(h)\pi(H_i) = \pi(hH_i)$ . Així doncs, si prenem  $g_1 = \pi(h_1) \in \pi(H_{i+1})$  i  $g_2 = \pi(h_2) \in \pi(H_{i+1})$  tenim

$$\bar{g}_1\bar{g}_2 = \overline{g_1g_2} = \pi(h_1h_2H_i) = \pi(h_2h_1H_i) = \overline{g_2g_1} = \bar{g}_2\bar{g}_1,$$

on hem fet servir que  $H_{i+1}/H_i$  és abelià. Per tant tenim la cadena

$$\langle \bar{e} \rangle = \pi(H_0) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \pi(H_n) = G/N$$

amb  $\pi(H_{i+1})/\pi(H_i)$  abelià per tot  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  i concloem que  $G/N$  és abelià.

— \* —

A continuació demostrem que tot  $p$ -grup és resoluble. Sabem que un grup  $G$  és un  $p$ -grup quan  $|G| = p^n$  amb  $p$  un primer. A més tot  $p$ -grup té centre no trivial. Procedim per inducció sobre  $n$ . Considerem el cas  $n = 1$ , és a dir, d'un grup  $G$  amb  $|G| = p$ . Aleshores  $G$  és cíclic i en particular abelià. I per tant és trivialment resoluble amb la cadena  $\langle e \rangle \trianglelefteq G$ . Veiem ara que, per tot  $n \in \mathbb{N}$ , la resolubilitat de tot  $p$ -grup d'ordre  $p^r$  amb  $r \leq n$  implica la resolubilitat de tot  $p$ -grup d'ordre  $p^{n+1}$ . Efectivament, si  $|G| = p^{n+1}$  aleshores  $Z(G) > \langle e \rangle$ . Per tant  $|Z(G)| = p^s$  amb  $s \leq n$ . Tenim que  $Z(G)$  és abelià i per tant resoluble. El quocient  $G/Z(G)$  té ordre  $p^{n-r}$  i per tant podem aplicar la hipòtesi d'inducció per concloure que és resoluble. Per l'anterior resultat tenim que  $G$  també és resoluble i hem acabat.

Podem, però, dir més sobre la cadena de subgrups d'un  $p$ -grup: tot  $p$ -grup té una cadena

$$\langle e \rangle = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G,$$

amb  $H_{i+1}/H_i \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  per tot  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Com abans procedirem per inducció. El cas d'un grup d'ordre  $p$  és immediat ja que aleshores és cíclic i isomorf a  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Ara veurem que si la condició es compleix per tot  $p$ -grup d'ordre  $p^n$  per tot  $n \in \mathbb{N}$  aleshores és certa també per tot  $p$ -grup d'ordre  $p^{n+1}$ . Prenem, doncs, un grup  $G$  d'ordre  $p^{n+1}$ . Com que  $G$  és un  $p$ -grup té centre no trivial, i pel teorema de Cauchy existeix un element  $x \in Z(G)$  d'ordre  $p$ . En particular  $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ . Tenim que  $G/\langle x \rangle$  és un  $p$ -grup d'ordre  $p^n$ . Si apliquem la hipòtesi d'inducció obtenim la següent cadena

$$\langle \bar{e} \rangle = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G/\langle x \rangle$$

amb  $H_{i+1}/H_i \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Ja hem fet servir anteriorment la correspondència bijectiva que hi ha entre els subgrups del quocient d'un grup  $G$  per un subgrup normal  $N$  i els subgrups de  $G$  que contenen  $N$ . Si denotem per  $\pi$  la projecció  $G \twoheadrightarrow G/N$  aleshores també es verifica que si  $H_1 \trianglelefteq H_2 \leq G/N$  aleshores  $N \trianglelefteq \pi^{-1}(H_1) \trianglelefteq \pi^{-1}(H_2) \leq G$  i a més, fent ús del tercer teorema d'isomorfia,  $(H_2 : H_1) = (\pi^{-1}(H_2) : \pi^{-1}(H_1))$ , ja que un subgrup  $H \leq G/N$  és precisament de la forma  $H'/N$  amb  $H' \leq G$ . Així doncs obtenim la cadena

$$\langle e \rangle \trianglelefteq \langle x \rangle = \pi^{-1}(H_0) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \pi^{-1}(H_n) = G.$$

A més, per tot  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tenim  $(H_{i+1} : H_i) = (\pi^{-1}(H_{i+1}) : \pi^{-1}(H_i)) = p$ , per tant  $\pi^{-1}(H_{i+1})/\pi^{-1}(H_i) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  i tenim la condició també per a  $G$ .

— \* —

Hem de provar que per a tot grup  $G$  existeix una cadena de subgrups

$$\langle e \rangle = H_0 \leq \cdots \leq H_n = G$$

tal que els quocients  $H_{i+1}/H_i$  són simples. Procedirem per inducció sobre l'ordre de  $G$ . El cas  $|G| = 1$  és trivial. Així mateix, si  $|G| = 2$  aleshores  $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  i hem acabat ja que  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  és simple. Veiem doncs, que si tot grup d'ordre  $r \geq n$  per tot  $n \in \mathbb{N}$  aleshores també la compleix tot grup d'ordre  $n+1$ . Considerem un grup  $G$  d'ordre  $n+1$ . Si  $G$  és

simple hem acabat. Si  $G$  no és simple, hi ha un subgrup normal  $N \trianglelefteq G$ . En particular podem aplicar la hipòtesi a  $N$  per obtenir la cadena

$$\langle e \rangle = H_0 \leq \cdots \leq H_n = N$$

on els quocients successius són tots simples. Si  $G/N$  és simple simplement extenem la cadena amb  $G$  i hem acabat. Si no és el cas, apliquem la hipòtesi a  $G/N$  i obtenim la cadena

$$\langle \bar{e} \rangle = \bar{H}_0 \leq \cdots \leq \bar{H}_m = N$$

tal que els quocients successius són simples. Tenim que per tot  $\bar{H}_i$  existeix un  $N \trianglelefteq H_{n+i} \leq G$  tal que  $H_{n+i}/N = \bar{H}_i$  i pel tercer teorema d'isomorfia tenim

$$\bar{H}_{i+1}/\bar{H}_i = (H_{n+i+1}/N)/(H_{n+i}/N) \cong H_{i+1}/H_i.$$

Així, com que  $N/N = \bar{H}_0 = \langle \bar{e} \rangle$ , podem completar la cadena que ens donava  $N$  per obtenir

$$\langle e \rangle = H_0 \leq \cdots H_n = N \leq H_{n+1} \leq \cdots \leq H_{n+m} = G$$

on els quocients successius són simples.

— \* —

Sigui  $G$  un grup d'ordre  $2p^n$  amb  $p$  un primer diferent de 2. Pel primer teorema de Sylow, hi ha almenys un subgrup  $P \leq G$  d'ordre  $p^n$ . Com que  $P$  té índex 2 a  $G$  aleshores és normal, i pel segon teorema de Sylow és únic. Com que  $P$  és un  $p$ -grup aleshores és resoluble. A més  $G/P \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  per tant és abelià i en particular resoluble. Per un resultat previ concloem que  $G$  és resoluble.