Entrega 3: Conducció de la calor

Arnau Mas

4 de Maig 2018

Problema 25

Considerem un tub cílindric de conductivitat constant λ que té un radi intern R_1 que es manté a temperatura constant T_1 i un radi extern que es manté a tempeartura constant T_2. Com que no hi ha fonts, l'equació de la temperatura és

$$\dot{T} = \alpha \nabla^2 T, \tag{1}$$

on $\alpha := \frac{\lambda}{\rho c_e}$ és la difusivitat del material —ρ i c_e són, respectivament, la densitat i calor específica del material—. Si considerem l'estat estacionari, és a dir, quan $\cdot T = 0$ aleshores l'equació (1) esdevé

$$\nabla^2 T = 0. \tag{2}$$

Si prenem coordenades cílindriques (r, θ, z) per explotar la simetria del problema podem escriure $T = T(r)$ ja que, per simetria, la temperatura no pot dependre ni de l'angle θ ni de la coordenada z. Així doncs, en coordenades, l'equació (2) és

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \tag{3}$$

La solució general d'aquesta equació és $T(r) = A \log r + B$, ja que aleshores es compleix $r \partial_r T$ és una constant, la qual cosa satisfa l'equació (3). Imposem les condicions de contorn per determinar A i B:

$$T(R_1) = A \log R_1 + B = T_1$$
$$T(R_2) = A \log R_2 + B = T_2$$

implica

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\log R_1 - \log R_2}$$

i per tant

$$B = T_1 - A \log R_1 = \frac{T_2 \log R_1 - T_1 \log R_2}{\log R_1 - \log R_2}.$$

Així doncs, la distribució de temperatures és

$$T(r, \theta, z) = \frac{T_1 - T_2}{\log R_1 - \log R_2} \log r + \frac{T_2 \log R_1 - T_1 \log R_2}{\log R_1 - \log R_2}. \tag{4}$$

Podem fer servir equació (4) i la llei de Fourier per determinar la densitat de flux de calor $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\lambda\,(T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2} \frac{\mathbf{e}_r}{r}.$$

Per tant, si considerem un cilindre $\mathcal{C}$ centrat a l'eix del tub de radi $R_1 \leq r \leq R_2$ i longitud L, la potència $\dot{Q}$ que atravessa la seva superfície és

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\lambda\,(T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r \, d\phi \, dz = \frac{2\pi\lambda L\,(T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2},$$

ja que la densitat de flux és perpendicular a les tapes del cilindre.

Per tant, la potència per unitat de longitud que atravessa un cilindre de $R_1 \leq r \leq R_2$ centrat a l'eix del tub és

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi\lambda\,(T_2 - T_1)}{\log R_1 - \log R_2}.$$