Anàlisi Matemàtica

Examen del 14/11/2016

1. (a) Estudieu la convergència de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n+1}\,\ln(n+3)}{n^a+1}$$

segons els valors de $a > 0$.

(b) Estudieu la convergència de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+10}}{n}$$

(c) Demostreu que una sèrie absolutament convergent és convergent. És cert el recíproc?

2. (a) Sigui

$$f_n(x) = \frac{1+\sin(nx)}{1+nx^2}$$

Proveu que per a tot $a > 0$, les funcions f_n convergeixen uniformement a $\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\}$, però no convergeixen uniformement a $\mathbb{R}$.

(b) Demostreu que per a tot $r < 1$, la sèrie de funcions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

convergeix uniformement a $[-r, r]$. Deduïu que

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2^{-n})}{n}$$

(c) Sigui $C_c(\mathbb{R})$ el conjunt de funcions contínues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que existeix $M = M(f) > 0$ de forma que $f(x) = 0$ si $|x| > M$. Quines funcions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es poden aproximar uniformement a $\mathbb{R}$ per funcions de $C_c(\mathbb{R})$?

3. (a) Demostreu que el límit uniforme de funcions contínues en un interval és una funció contínua a l'interval.

(b) Demostreu que per a tot $x \in \mathbb{R}$, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(x/n))\sin(nx)$ convergeix. Demostreu que la funció $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(x/n))\sin(nx)$ és derivable a tot punt $x \in \mathbb{R}$ que no sigui un múltiple enter de 2π.

Cada apartat de cada problema val 1.25 punts

1| (a) Comparem amb la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}\ln(n)}{n^a}$. Com

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+5n+1}\,\ln(n+3)}{n^a+1}}{\frac{n^{3/2}\ln(n)}{n^a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n+1}}{n^{3/2}}\,\frac{n^a}{n^a+1}\,\frac{\ln(n+3)}{\ln n} = 1 \begin{smallmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{smallmatrix},$$

tenim, que la sèrie original és convergent si i només si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}\ln(n)}{n^a}<\infty$.

Si $a\leq 3/2$, el terme general no tendeix a zero i per tant la sèrie és divergent. Si $a>3/2$, és clar que $\frac{n^{3/2}\ln(n)}{n^a}$ és decreixent. Pel Criteri de condensació, $\sum \frac{n^{3/2}\ln(n)}{n^a}<\infty \iff \sum 2^n \frac{2^{n3/2}\ln(2^n)}{2^{na}}<\infty$.

Ara bé $\sum 2^n \frac{2^{n3/2}\ln(2^n)}{2^{na}} = \sum 2^{n(\frac{5}{2}-a)}\, n\ln(2) = \ln 2\sum n 2^{n(\frac{5}{2}-a)}$

si $a\leq 5/2$, la sèrie és divergent perquè el terme general no tendeix a zero. Si $a>5/2$, aplicant el Criteri de l'arrel, veiem que la sèrie és convergent.

Per tant la sèrie original és convergent si i només si $a>5/2$.

(b) Considerem $f(x)=\frac{\sqrt{x+10}}{x}$. Com $f'(x)=\frac{\frac{x}{2\sqrt{x+10}}-\sqrt{x+10}}{x^2} = \frac{x-2(x+10)}{2\sqrt{x+10}\,x^2}<0$ si $x>0$, deduïm que $f(x)$ és decreixent a $[0,+\infty)$. Per tant $\frac{\sqrt{n+10}}{n}$ és decreixent. Com $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+10}}{n}=0$, el Criteri de Leibnitz ens assegura que $\sum(-1)^n\frac{\sqrt{n+10}}{n}$ és convergent.

(c) Sigui (a_n) una successió de nombres reals amb $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. Hem de veure que la successió de sumes parcials $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$ té límit. Veurem la condició de Cauchy. Fixem $\varepsilon>0$. Tenim $|S_N-S_M|=\left|\sum_{n=M+1}^{N}a_n\right|\leq \sum_{n=M+1}^{N}|a_n|<\varepsilon$ si N,M són prou grans ja que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.

El recíproc és fals. Per exemple, pel Criteri de Leibnitz $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ convergeix, però $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

2) (a) Estudiem primer la convergència puntual. Fixem $x\in\mathbb{R}$. Observem que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin(nx)}{1+nx^2} = \begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$

Com la funció límit $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$ no és contínua a $\mathbb{R}$, les funcions f_n no poden convergir uniformement a $\mathbb{R}$.

Fixem $a>0$. Observem que $\sup_{|x|\geq a}|f_n(x)| \leq \sup_{|x|\geq a}\frac{2}{1+nx^2} = \frac{2}{1+na^2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Per tant, $f_n\to 0$ uniformement a $\{x\in\mathbb{R}: |x|\geq a\}$.

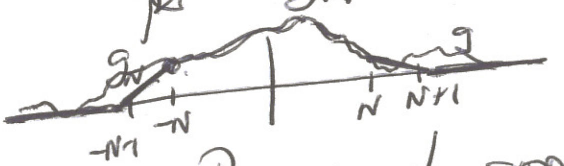
(b) Fixem $r<1$. Observem que $\left|\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\right| \leq \frac{|x|^{n-1}}{1}\leq r^{n-1}$ per tot $x\in[-r,r]$. Com $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}<\infty$, el Criteri M de Weierstrass dona que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ convergeix uniformement a $[-r,r]$.

La convergència uniforme a $[0,1/2]$ dona que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\,dx$$

Ara bé, $\int \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx = \left[\begin{matrix}x^n=t\\ nx^{n-1}dx=dt\end{matrix}\right] = \frac{1}{n}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{n}\arctan(t) = \frac{1}{n}\arctan(x^n)$. Així doncs $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\arctan(2^{-n})$

(c) Les funcions aproximables són les funcions contínues $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tals que $\lim_{|x|\to\infty} g(x)=0$. Efectivament si g compleix aquesta condició es pot aproximar uniformement a $\mathbb{R}$ per g_N definida com $g_N(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\in[-N,N]\\ 0 & \text{si } |x|\geq N+1\\ \text{lineal a } [N,N+1] \text{ i } [-N-1,-N]\end{cases}$.



Recíprocament, suposem que $f_n\to g$ uniformement a $\mathbb{R}$ i que $f_n(x)=0$ si $|x|\geq M_n$. Volem $\lim_{|x|\to+\infty} g(x)=0$. Fixem $\varepsilon>0$. Tenim, per $n\geq n_0$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. Com $f_{n_0}(x)=0$ si $|x|\geq M_{n_0}$, deduïm que $|g(x)|<\varepsilon$ si $|x|\geq M_{n_0}$. Així doncs $\lim_{|x|\to\infty} g(x)=0$.

3 (a) Suposem que f_n son funcions contínues a un interval I i que $\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Hem de veure que f és contínua a I. Fixem $x_0 \in I$. Tenim

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)| \le$$
$$\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

Fixem $\varepsilon>0$. Com $\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ si $n\ge n_0$, tenim que

$$|f(x)-f(x_0)| \le \varepsilon + |f_n(x)-f_n(x_0)|+\varepsilon \quad \text{si } n\ge n_0.$$

Fixem $n=n_0$ i deduïm $|f(x)-f(x_0)|\le 2\varepsilon+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|$.

Com f_{n_0} és contínua, existeix $\delta=\delta_{n_0}>0$ tal que $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta$. Per tant $|f(x)-f(x_0)|<3\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta$.

(b) Tenim $\left|\sum_{n=0}^{N} e^{inx}\right| = \left|\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \le \frac{2}{|1-e^{ix}|}$ si $e^{ix}\ne 1$.

Prenent parts real e imaginària, deduïm que $\left|\sum_{n=0}^{N}\cos(nx)\right|\le\frac{2}{|1-e^{ix}|}$ i $\left|\sum_{n=0}^{N}\sin(nx)\right|\le\frac{2}{|1-e^{ix}|}$ si $e^{ix}\ne 1$. D'altra banda, si $e^{ix}=1$ és clar que x és un múltiple enter de 2π i llavors $\sum_{n=0}^{N}\sin(nx)=0$.

Com $1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)$ és una successió decreixent amb límit zero, el Criteri de Dirichlet dona que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\sin(nx)$ convergeix.

Considerem $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ on $f_n(x)=\left(1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\sin(nx)$.

Sigui $[a,b]$ un interval que no conté cap múltiple enter de 2π. Utilitzarem el Criteri de Dirichlet uniforme per veure que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ convergeix uniformement a $[a,b]$. Efectivament, tenim

$$f_n'(x)=\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\sin(nx)+n\left(1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\cos(nx).$$

Com $\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)\right| \le \sup_{x\in[a,b]}\frac{2}{|1-e^{ix}|}<\infty$ i

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) \right| \leq \sup_{x\in[a,b]} \frac{2}{|1-e^{ix}|} < \infty .$$

i les successions $\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ i $n\left(1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ són decreixents amb límit zero, el Criteri de Dirichlet uniforme dona que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ convergeix uniformement a $[a,b]$. Com $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ és puntualment convergent, deduïm que f és derivable a (a,b). A més $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, per $x\in(a,b)$