Càlcul Integral en vàries variables

En aquest capítol estudiarem la teoria d'integració de Riemann en vàries variables. La integral definida és una eina matemàtica que permet definir rigorosament conceptes tals com longitud, àrea i volum. En particular precisarem els conjunts dels quals, dins la teoría de Riemann, podem parlar amb propietat de la seva mesura d-dimensional.

1 Funcions integrables Riemann

En tota aquesta secció, per rectangle R a $\mathbb{R}^d$ entenem un producte d'intervals tancats i acotats,

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

per tant es tracta de rectangles amb eixos i cares paralels als eixos.

Considerarem sempre funcions $f : R \to \mathbb{R}$ acotades, és a dir, acotada superior i inferiorment. Definirem un concepte, la integral de Riemann de f en R, que és un nombre real designat $\int_R f$, que en el cas que f prengui valors positius, serà la definició precisa del volum $(d+1)$-dimensional del subgràfic $A = \{(x, y) : x \in R, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Com que sabem quina és la mesura d'un rectangle R -el producte de les longituds de les arestes, que designarem $|R|$- la idea és senzillament aproximar la regió A per unions de rectangles disjunts. La manera de formalitzar això és mitjançant el concepte de *particions* de R i les sumes superiors i inferiors.

Una *partició* d'un interval és un conjunt finit de punts que inclou a, b i que representem ordenat

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Llavors, una partició P de R és el conjunt de subrectangles R_j determinats per particions P_i en $[a_i, b_i]$. Escrivim $P = P_1 \times \cdots \times P_d$. Així R és la reunió dels R_j, que tenen interiors disjunts. Si Q és una altra partició i $P \subset Q$, diem que Q és més fina que P.

Per a cada R_j considerem

$$M_j(f) = \sup\{f(x), x \in R_j\}, m_j(f) = \inf\{f(x), x \in R_j\},$$

que estan ben definits perquè per hipòtesi f està acotada superior i inferiorment.

Ara, associem a cada partició P dos nombres, *la suma superior i la suma inferior*, designats respectivament $S(f,P), s(f,P)$:

$$S(f,P) = \sum_j M_j|R_j|, s(f,P = \sum_j m_j|R_j|.$$

Quan $f \geq 0$, $s(f,P), S(f,P)$ representen respectivament una aproximació per defecte i per excés al volum de A que pretenem definir. Òbviament, $s(f,P) \leq S(f,P)$.

Proposició. *Si Q és més fina que P,*

$$s(f,P) \leq s(f,Q), S(f,Q) \leq S(f,P).$$

Si P,Q són particions arbitràries, $s(f,P) \leq S(f,Q)$.

És suficient provar-ho quan Q s'obté afegint un punt c_i a cada P_i. Al passar de P a Q, un dels rectangles R_j de P s'ha trencat en 2^d subrectangles. El suprem de f en cadascun d'ells serà menor o igual que M_j, i per tant la suma de tots els termes de $S(f,Q)$ que corresponen a aquests subrectangles serà $\leq M_j|R_j|$. Com que tots els altres sumands són els mateixos que en $S(f,P)$, veiem que $S(f.Q) \leq S(f,P)$. De la mateixa manera provem que $s(f,P) \leq s(f,Q)$.

Si P,Q són particions arbitràries, considerem $P \cup Q$, que és més fina que ambdues: Llavors,

$$s(f,P) \leq s(f,P\cup Q) \leq S(f,P\cup Q) \leq S(f,Q).$$

Definició. Les integrals inferior i superior de f en R es defineixen respectivament per

$$\int_{R-} f = \sup_P s(f,P), \int^{R+} f = \inf_P S(f,P).$$

Aquests dos nombres estan ben definits i compleixen $\int_- f \leq \int^+ f$. En efecte: com que qualsevol suma inferior és una cota inferior del conjunt de suma superiors, la integral superior està ben definida i és $\geq$ que qualsevol suma inferior. Per tant $\int^+ f$ és una cota superior del conjunt de sumes inferiors, amb la qual cosa la integral inferior està ben definida i

$$\int_- f \leq \int^+ f.$$

Quan $f \geq 0$ aquests dos nombres representen l'aproximació per excés i per defecte a la mesura de A.

Definició. Diem que f és integrable Riemann en R si $\int^+ f = \int_- f$. Aquest valor comú s'anomena la integral de Riemann de f en R, designada $\int_R f$.

Evidentment, si f és constant, $f(x) = c$, llavors $M_j = m_j = c, S(f, P) = s(f, P) = c|R|$, i per tant f és integrable amb integral sobre R igual a $c|R|$. Si $f \geq 0$, aquest valor és, per definició, la mesura $(d+1)$-dimensional de A.

Teorema. *Una funció f és integrable si i només si per a tot ε hi ha una partició P tal que*

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_j (M_j - m_j)|R_j| < \varepsilon.$$

Demostració. Si f és integrable, donat $\varepsilon > 0$ hi ha dues particions P, Q tals que

$$\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P), S(f, Q) < \int_R f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Llavors, $P \cup Q$ compleix $s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$ i per tant $S(f, P \cup Q) - s(f, P \cup Q) < \varepsilon$. Recíprocament, la condició és suficient perquè

$$0 \leq \int^+ f - \int_- f \leq S(f, P) - s(f, P),$$

de manera que si el terme dret és arbitràriament petit, ha de ser $\int^+ f = \int_- f$. $\square$

Observem que si P és com en el teorema i Q és més fina que P,

$$S(f, Q) - s(f, Q) \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

de forma que l'enunciat pot llegir-se

$$\lim_P (S(f,P) - s(f,P)) = 0,$$

i llegim *límit quan P es fa fina*.

Recordem tota funció contínua f en un rectangle R està acotada i és *uniformement contínua*: per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $x, y \in R, \|x - y\| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Teorema. *Tota funció contínua és integrable Riemann.*

Donat ε, per la continuïtat uniforme de f en R hi ha $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/|R|$ si $\|x - y\| < \delta$. Sigui P una partició tal que $\max_j \delta(R_j) < \delta$, on $\delta(R_j) = \max\{\|x - y\|, x, y \in R_j\}$ designa el diàmetres de R_j. Considerem ara l'oscilació

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_j (M_j - m_j)|R_j|.$$

Per hipòtesi f és contínua, i pel teorema de Weierstrass el suprem i ínfim de f en R_j són accessibles, és a dir, hi ha punts $c_j, d_j \in R_j$ tals que $f(c_j) = m_j, f(d_j) = M_j$. Tindrem $|d_j - c_j| < \delta$, per tant $f(d_j) - f(c_j) = M_j - m_j < \varepsilon/|R|$, i

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_j (M_j - m_j)|R_j| \geq \frac{\varepsilon}{|R|} \sum_j |R_j| = \varepsilon.$$

Pel criteri del teorema anterior, f és integrable Riemann.

El teorema anterior pot generalitzar-se a les funcions contínues a trossos:

Teorema. *Si f és una funció acotada en R amb un nombre finit de discontinuïtats, f és integrable Riemann.*

Teorema. *Tota funció monòtona en $[a,b]$ és integrable Riemann.*

Demostració. Suposem sense pèrdua de generalitat que f és creixent, no constant. Donat $\varepsilon > 0$ sigui P una partició de $[a,b]$ tal que $\max |R_j| < \frac{\varepsilon}{(f(b) - f(a))}$. Aleshores, com que $M_j = f(x_j), m_j = f(x_{j-1})$,

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)|R_j| \leq \max |R_j| \sum_j (f(x_j) - f(x_{j-1}) =$$

$$= \max |R_j|(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

$\square$

Més endavant donarem la caracterització de les funcions integrables Riemann.

2 La integral com a límit de sumes

Una *suma de Riemann associada a una partició P* és

$$\Sigma(f, P) = \sum_j f(\xi_j)|R_j|,$$

on $\xi_j \in R_j$. La notació és equívoca perquè hi ha tantes sumes de Riemann associades a P con tries dels punts ξ_j, és a dir, $\Sigma(f, P)$ les designa totes elles. Evidentment,

$$s(f, P) \leq \Sigma(f, P) \leq S(f, P),$$

perquè $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$. Hom pot utilitzar aquestes sumes enlloc de les sumes superiors i inferiors:

Teorema. *Una funció acotada és integrable Riemann amb integral L si i només si les sumes de Riemann tenen límit L en el següent sentit: per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha una partició P tal que si $P \subset Q$, aleshores*

$$|L - \Sigma(f, Q)| < \varepsilon,$$

per a tota suma de Riemann associada a Q. Aquest fet el resumim dient que les sumes de Riemann $\Sigma(f, P)$ tenen límit quan P es fa fina,

$$L = \lim_P \Sigma(f, P).$$

En aquest cas, $L = \int_R f$.

Demostració. Si f és integrable Riemann, i ε és donat hi ha P tal que si $P \subset Q$

$$\int_R f - \varepsilon < s(f, Q) \leq \int_R f \leq S(f, Q) < \int_R f + \varepsilon.$$

Com que qualsevol $\Sigma(f, Q)$ és en mig de $s(f, Q)$ i $S(f, Q)$, trivialment $|\int_R f - \Sigma(f, Q)| < \varepsilon$. Recíprocament, suposem $L = \lim_P \Sigma(f, P)$; donat ε sigui P

com a l'enunciat. Com que $S(f,Q)$ (respectivament $s(f,Q)$) és el suprem (respectivament l'ínfim) de les $\Sigma(f,Q)$ (respecte totes les possibles tries dels punts ξ_j) tindrem també

$$|L - S(f,Q)| \leq \varepsilon, |L - s(f,Q)| \leq \varepsilon,$$

amb la qual cosa L coincideix amb la integral superior i amb la integrals inferior. $\square$

Un comentari sobre la notació: sovint $|R_j|$ es designa Δx_j, les sumes de Riemann s'escriuen $\sum_j f(x_j)\Delta x_j$. Quan la partició es fa fina i augmenten el nombre de punts, x_j es transforma en x, l'increment Δx_j es transforma en un increment infinitesimal dx i la suma $\sum$ en $\int$, d'on la notació $\int_R f(x)\,dx$. Altrament, pensem en que en el límit tenim una partició d'infinits rectangulets dx cadascun situat al voltant de x. Dit en altres paraules, $f(x)\,dx$ és la notació per a $f(x_j)|R_j|$ en el límit i $\int$ la notació per a $\sum$ en el límit, una suma infinita. Resumint, la integral és una suma infinita d'infinitèsims.

Proposició. *Sigui f una funció integrable en R. Sigui $\Phi(S)$ una quantitat assignada a cada rectangle S de forma que*

$$m_j(f) \leq \Phi(R_j) \leq M_j(f).$$

Aleshores les quantitats $\sum_j \Phi(R_j)|R_j|$ tendeixen a $\int_R f$ quan la partició es fa fina.

La demostració és evident, perquè aquestes quantitats estan entre $S(f,P)$ i $s(f,P)$. Per exemple, si f és integrable, també

$$\lim_P \sum_j \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}|R_j| = \int_R f,$$

perquè $\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}$ està entre m_j i M_j. El terme esquerra és l'area de la reunió dels trapezis determinats per les secants en els punts $(x_j, f(x_j))$ i $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ i les rectes verticals.

Hi ha una altra manera de formular el concepte P *es fa fina* i el corresponent concepte de límit. Anomenem $\|P\|$ el més gran dels diàmetres dels R_j:

$$\|P\| = \max_j \delta(R_j).$$

Teorema. *Si f és integrable Riemann, $\int_R f$ és també el límit de $\Sigma(f,P)$ en el següent sentit: per a tot ε hi ha δ tal que si $\|P\|<\delta$ aleshores*

$$|\int_R f - \Sigma(f,P)| < \varepsilon.$$

En particular, prenent com a partició de R la determinada per $N+1$ punts equidistants en cada eix, i si x_j són elsN^n punts així determinats, hom té

$$\int_R f = \lim_N \frac{|R|}{N^d} \sum_j f(x_j).$$

3 Propietats de la integral definida

Teorema.

1. *Suposem que f, g són integrables Riemann en R i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aleshores $\lambda f + \mu g$ és també integrable i*

$$\int_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_R f + \mu \int_R g.$$

2. *També la funció producte fg és integrable Riemann*

3. *Si $f(x) \leq Cg(x)$ per a tot $x \in R$, llavors $\int_R f \leq C \int_R g$.*

Per a la combinació lineal és conseqüència de

$$S(\lambda f+\mu g,P)-s(\lambda f+\mu g,P) \leq |\lambda|(S(f,P)-s(f,P))+|\mu|(S(g,P)-s(g,P)).$$

Per al producte, com que $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, és suficient provar-ho quan $f = g$, i podem suposar també $f(x) \geq 0$. Aleshores, amb les notacions habituals,

$$S(f^2,P)-s(f^2,P) = \sum_j (M_j^2-m_j^2)|R_j| = \sum_j (M_j-m_j)(M_j+m_j)|R_j| \leq 2K(S(f,P)-s(f,P)),$$

si $f(x) \leq K$. Com que el terme dret és arbitràriament petit quan P es fa fina, també el terme esquerra ho és i per tant f^2 és integrable. La darrera propietat és immediata.

En relació al domini d'integració, la integral de Riemann té la propietat natural, de demostració rutinària:

Teorema. *Suposem que R és la reunió de rectangles S_i amb interiors disjunts, i sigui f definida en R acotada. Aleshores f és integrable en R si i només si ho és en cada S_i i en aquest cas*

$$\int_R f = \sum_i \int_{S_i} f.$$

Amb aquest resultat veiem que si f és una funció integrable en R que té signe constant en els S_i, aleshores $\int_R f$ és la suma de les mesures $(n+1)$-dimensionals dels subgràfics entre el gràfic de f, afectades del signe corresponent.

Teorema. *Si f és integrable i $|f(x)| \leq C$, també és integrable $|f|$ i*

$$|\int_R f| \leq \int_R |f| \leq C|R|.$$

Demostració. Amb la notació $M_j(f) = \sup\{f(x), x \in R_j\}, m_j(f) = \inf\{f(x), x \in R_j\}$, hom té que

$$M_j(|f|) - m_j(|f|) = \sup\{||f(x)| - |f(y)||, x, y \in I_j\} \leq$$

$$\leq \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in I_j\} = M_j(f) - m_j(f),$$

i per tant

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P).$$

Com que el terme dret és arbitràriament petit, també ho és el terme esquerra i per tant $|f|$ és integrable. Un cop sabem això, posem les integrals com a sumes de Riemann,

$$|\int_R f| = |\lim_P \sum f(\xi_j)|R_j|| = \lim_P |\sum f(\xi_j)|R_j|| \leq \lim_P \sum |f(\xi_j)||R_j| = \int_R |f|.$$

Finalment, si $|f(x)| \leq C$, tindrem $\int_R |f| \leq \int_R C = C|R|$. □

Si $f(x) \geq 0$ en R la integral $\int_R f$ és evidentment ≥ 0 i representa la mesura del subgràfic. Si la integral és zero, no necessàriament $f(x) = 0$ en tots els punts (per exemple tota f que és diferent de zero en un nombre finit de punts, zero en els altres, té integral zero).

Proposició. *Si f és contínua, $f(x) \geq 0$ i $\int_R f = 0$, llavors $f(x) = 0$ per a tot x.*

Demostració. Si fos $f(c) > 0$ en un punt c, per continuïtat hi hauria $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ si $\|x - c\| \leq \delta$, per tant $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ si x és al cub S de centre c inscrit a la bola $B(a, \delta)$.

$$\int_R f \leq \int_S f \leq \frac{f(c)}{2} m(S) > 0.$$

$\square$

4 La integral com a mitjana. Teoremes del valor mig per a integrals

Si tenim un nombre finit de valors reals $y_1, y_2, \ldots, y_n$, llur mitjana aritmètica és el número real

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n},$$

i trivialment hom té que

$$\min_j y_j \leq \overline{y} \leq \max_j y_j.$$

Observem que $\overline{y}$ no és necessàriament un dels valors y_j.

Una funció f definida en R podem pensar-la com una colecció (infinita no numerable) de valors $y = f(x), x \in R$. Quina és la noció de mitjana aritmètica en aquesta situació?

Definició. Si f és integrable en R anomenem mitjana de f en R al número

$$\frac{1}{|R|} \int_R f.$$

El perquè d'aquesta definició s'entén si pensem en la integral com a límit de sumes de Riemann, prenent com a partició de R la determinada per $N+1$ punts equidistants en cada eix; si x_j són els N^d punts així determinats, hom té

$$\frac{1}{|R|} \int_R f = \lim_N \frac{1}{N^d} \sum_j f(x_j).$$

Veiem doncs que la definició significa prendre N^d dels valors de f, fem llur mitjana i després fem tendir N a infinit, que és la idea més natural.

Evidentment, de forma anàloga al cas finit, tindrem que

$$\inf_x f(x) \leq \frac{1}{|R|} \int_R f \leq \sup_x f(x).$$

Com en el cas finit, en general, el valor mig no és un dels valors de f, per exemple la funció que val 1 en $[0,1]$ i 2 en $[1,3]$ té valor mig en $[1,3]$ igual a $\frac{5}{3}$ que no és un valor de f. Quan f és contínua, llavors la desigualtat el suprem i ínfim anteriors són respectivament un màxim i mínim absoluts (pel teorema de Weierstrass), valors en certs punts p, q, de forma que la mitjana és un valor intermedi en un punt del segment que uneix p, q, pel teorema de Bolzano. Hem provat doncs:

Proposició. *Si f és contínua en R hi ha un punt $c \in R$ tal que*

$$\int_R f = f(c)|R|.$$

Una versió un xic més general és:

Proposició. *Suposem que f és contínua en R i que g és integrable en R, $g(x) \geq 0$. Aleshores hi ha $c \in R$ tal que*

$$\int_R fg = f(c) \int_R g.$$

Demostració. Siguin M, m el màxim i mínim absoluts de f en R, respectivament, de forma que $m \leq f(x) \leq M$. Multiplicant per $g(x)$ i integrant trobem

$$m \int_R g \leq \int_R fg \leq M \int_R g.$$

Si $\int_R g = 0$ també $\int_R fg = 0$ i serveix qualsevol c. En cas contrari, dividint per $\int_R g$, veiem que

$$\frac{\int_R fg}{\int_R g}$$

és un valor intermedi entre m, M i per tant, pel teorema de Bolzano, és un valor $f(c)$ per algun $c \in R$. $\square$

Per a un nombre finit de punts $y_1, y_2, \ldots, y_n$ positius es pot considerar també la mitjana geomètrica

$$y^* = \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n},$$

i és ben conegut que $y^* \leq \overline{y}$. Observant que $\log y^*$ és la mitjana aritmètica de $\log y_1, \log y_2, \ldots, \log y_n$, és natural definir també la "mitjana geomètrica"d'una funció $f(x) \geq 0$ com

$$\exp \frac{1}{|R|} \int_R \log f,$$

sempre que tingui sentit. Tal com en el cas finit, es pot demostrar que és $\leq$ que la mitjana $\frac{1}{|R|} \int_R f$.

5 Integració de funcions vectorials

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ és contínua a valors vectorials (un arc continu a $\mathbb{R}^m$), $f = (f_1, \cdots, f_m)$ definim la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ com el vector

$$\int_a^b f(t)\,dt = (\int_a^b f_1(t)\,dt, \cdots, \int_a^b f_m(t)\,dt).$$

Evidentment, el teorema fonamental del càlcul es manté

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(s)\,ds = f(t),$$

o també, si f és derivable amb derivada contínua

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

L'únic resultat en integració vectorial que no es pot obtenir fent component a component és

$$\| \int_a^b f(t)\,dt \| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

Per veure-ho, posant $u = \int_a^b f(t)\,dt$

$$\|u\| = \max\{\langle u, v\rangle, \|v\| = 1\} = \max_{\|v\|=1} \int_a^b \langle f(t), v\rangle\,dt$$

Però la darrera integral és, per a tot v

$$\leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt,$$

i ja.

En particular

$$\|f(b) - f(a)\| = \| \int_a^b f'(t)\, dt\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|\, dt,$$

que confirma que el segment que uneix dos punts és el camí més curt entre ells.

6 La integral com a eina per a definir conceptes geomètrics i físics

Hem introduït la integral de Riemann com una eina matemàtica que en particular ens permet definir rigorosament la mesura $(d+1)$-dimensional d'un subgraf $A = \{(x, y); x \in R, 0 \leq y \leq f(x)\}$. En essència la idea ha estat constatar que quan f és una funció constant en intervals d'una partició aquesta àrea està perfectament ben definida (perquè el subgraf és una reunió de rectangles), l'hem anomenada suma de Riemann, i hem imposat que f sigui ben aproximable per aquestes. Aquesta mateixa idea s'aplica en moltíssimes altres ocasions: si es vol definir una noció, mirem en quins casos particulars aquesta noció és òbvia, i en el cas general imposem que el cas general es pugui aproximar pels casos particulars.

A continuació formalitzem aquest tipus de procés de definició:

Teorema. *Suposem que tenim definida una quantitat* Ψ *associada a una funció* f *en* R *en la forma*

$$\Psi = \lim_P \sum_j A_j(f),$$

on $A_j(f) = B_j|R_j| + C_j$*, amb*

$$m_j(f) \leq B_j \leq M_j(f), |C_j| \leq C|R_j|\epsilon(|R_j|),$$

per una certa constant $C > 0$ i $\epsilon(\delta) \to 0$ quan $\delta \to 0$ Aleshores, si f és integrable en R, hom té

$$\Psi = \int_R f(x)\,dx.$$

Demostració. Tindrem

$$s(f,P) \leq \sum_j B_j|R_j| \leq S(f,P),$$

d'on

$$\lim_P \sum_j B_j|R_j| = \int_R g,$$

i tan sols cal veure que

$$\lim_P \sum_j C_j(f) = 0.$$

Però

$$|\sum_j C_j(f)| \leq C \sum_j |R_j|\epsilon(|R_j|) \leq C(\max \epsilon(|R_j|) \sum_j |R_j| = \leq C(\max \epsilon(|R_j|)|R|.$$

□

Per als següents exemples necessitem uns càlculs elementals. Sigui S el segment que uneix dos punts $(a,b),(c,d)$ del semiplà de la dreta $(a,c > 0)$ i considerem la superfície A que es genera quan S gira entorn l'eix Oy. Llavors l'àrea d'aquesta superfície és $\pi l(c+a)$ on l és la longitud del segment. Per veure-ho, pensem primer en un con amb base de radi R i generatriu G, que té àrea πHG (talleu per una generatriu). La superfície A és la diferència entre un con de radi c i generatriu $cl/|c-a|$ i un altre amb radi a i generatriu $al/|c-a|$, per tant té àrea

$$\pi c^2 \frac{l}{|c-a|} - \pi a^2 \frac{l}{|c-a|} = \pi l(c+a).$$

Fixem-nos que és $= l2\pi\frac{a+c}{2}$, el producte de l per la longitud del cercle que descriu el punt mig de S. Si girés entorn l'eix Ox obtindríem $l2\pi\frac{b+d}{2}$.

Considerem ara el volum del cos C obtingut quan el trapezi determinat per S i les rectes horitzontals $x = a, x = c$ gira entorn l'eix Ox. Novament pensem primer en un con de base R i alçada H; té volum $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. El cos C és la diferència entre dos cons, un de radi d i alçada $d\frac{c-a}{d-b}$ i un altre amb radi b i alçada $b\frac{c-a}{d-b}$. Per tant el volum de C és $\frac{1}{3}\pi|d^3-b^3|\frac{c-a}{d-b} = \pi(c-a)\frac{1}{3}(d^2+b^2+db)$.

Considerem ara una funció f positiva en $[a,b], a > 0$, G el seu gràfic i considerem la superfície A generada per G quan gira entorn l'eix Oy. Volem definir l'àrea d'A. Com abans, considerem una partició P de $[a,b]$ i la corresponent poligonal. Cada segment S_j d'aquesta poligonal genera, segons el càlcul anterior, un àrea igual a

$$2\pi\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_j)}(x_{j+1} - x_j),$$

per tant la poligonal genera un àrea

$$A(P) = 2\pi\sum_j \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_j)}(x_{j+1} - x_j).$$

Com abans, quan afinem la partició aquest àrea creix.

Definició. Definim l'area d'A com $\sup_P A(P)$ entenent que val $+\infty$ si $A(P)$ no està acotada.

Com abans, si l'àrea és finita (que pot no ser-ho), és el limit de les àrees generades per les poligonals.

Teorema. *Si f és derivable en $[a,b]$ i f' és integrable, la funció $g(x) = x\sqrt{1+f'^2}$ és integrable, l'àrea és finita i val*

$$2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Si f' és integrable també ho és g. Apliquem el teorema anterior. Amb les notacions anteriors, observem que atès que els dos són punts de $[x_j, x_{j+1}]$,

$$|\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - \xi_j| \leq (x_{j+1} - x_j)$$

per tant

$$|\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - \xi_j|\sqrt{1 + f'^2(\xi_j)}(x_{j+1} - x_j) \leq C(x_{j+1} - x_j)^2,$$

on C és una cota de g. Així,

$$\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_j)}(x_{j+1}-x_j) = g(\xi_j)(x_{j+1}-x_j) + O(|x_{j+1}-x_j|^2).$$

Si fem girar G al voltant de l'eix Ox, obtenim una superfície B. La poligonal genera un àrea igual a

$$2\pi\sum_j \frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_j)}|R_j|.$$

i definim l'area com el suprem d'aquestes.

Teorema. *Si f és derivable en $[a,b]$ i f' és integrable, l'àrea és finita i val*

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

En aquest cas, si C és una cota de $|f'|$, pel teorema del valor mig,

$$\left|\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2} - f(\xi_j)\right| = \frac{1}{2}|f(x_{j+1})-f(\xi_j)+f(x_j)-f(\xi_j)| \le C(x_{j+1}-x_j)$$

d'on

$$\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_j)}(x_{j+1}-x_j) =$$
$$= f(\xi_j)\sqrt{1+f'^2(\xi_j)}(x_{j+1}-x_j) + O(|x_{j+1}-x_j|^2).$$

Considerem ara el cos C generat per G quan gira entorn de l'eix Ox. Cada poligonal genera un volum, segons els càlculs anteriors, igual a

$$\pi\sum_j \frac{1}{3}(f(x_j)f(x_{j+1}) + f(x_j)^2 + f(x_{j+1})^2)(x_{j+1}-x_j),$$

i definim el volum de C com el suprem d'aquestes expressions.

Teorema. *Si f és integrable, el volum de C és finit i val*

$$\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Tan sols cal observar que

$$m_j(f^2) \leq \frac{1}{3}(f(x_j)f(x_{j+1}) + f(x_j)^2 + f(x_{j+1})^2) \leq M_j(f^2).$$

La forma àgil d'entendre les fórmules dels darrers tres teoremes és la següent. Raonem per exemple amb l'àrea de la superfície A que s'obté fent girar G al voltant de l'eix Oy. Pensem en un interval infinitesimal dx centrat en x. Com que tot l'interval és la unió de tots els intervalets infinitesimals dx, el gràfic G és la reunió de tots els segments infinitesimals dl a sobre de dx. La longitud de dl és $\sim \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$. Quan el segment infinitesimal dl gira, genera una cinta circular d'amplada dl i que té perímetre $\sim 2\pi x$ per tant té àrea $\sim 2\pi x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$. L'àrea de A és la suma infinita (integral) de les àrees de les cintes infinitesimals, és a dir,

$$2\pi \int_R x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Quant diem que quelcom és $\sim Adx$ significa que la diferència és $O(dx^2)$. El teorema 5.2 és el que fa rigorós aquesta forma de procedir.

Apliquem aquesta forma de raonar per calcular el volum del cos D generat per la regió U limitada per G i les rectes verticals $x = a, x = b$ quan gira al voltant de l'eix Oy. Trenquem U en rectangles infinitesimals de base dx i alçada $f(x)$. Quant un rectangle infinitesimal gira, genera un cos situat entre dos cilindres, amb base d'àrea $2\pi x dx$ i alçada $f(x)$, d'on el volum és

$$2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

7 Caracterització de les funcions integrables Riemann

Volem caracteritzar en aquesta secció les funcions que són integrables Riemann. Segons hem vist abans, f és integrable Riemann si i només si hi ha particions P amb oscilació arbitràriament petita

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_j (M_j - m_j)|R_j| < \varepsilon,$$

però ara hom voldria quelcom més entenedor. La suma anterior conté el producte de dos factors $(M_j - m_j)|R_j|$. Pensem en particions molt fines; el primer factor serà petit per aquells R_j on f sigui contínua i serà gran en els R_j que continguin discontinuïtats. Ara bé, si el volum total d'aquests segons és petit, la suma continuarà essent petita. Aquesta és la idea essencial en el que segueix: si el conjunt de punts de discontinuitat es pot recobrir per rectangles de suma de volums arbitràriament petita, f serà integrable.

Per precisar aquesta idea ens cal primer quantificar la discontinuitat d'una funció en un punt. Definim

$$\omega_f(a) = \lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in R(a, \delta)\},$$

on $R(a, \delta)$ és el cub centrat en a d'aresta δ. Així, f és contínua en a si i només si $\omega_f(a) = 0$ i el conjunt de punts de discontinuitat de f és $D = \{a \in R : \omega_f(a) > 0\}$. Observem que si $A \subset R$ conté a llavors

$$\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) \geq \omega_f(a).$$

Designem

$$D_\tau = \{a \in R : \omega_f(a) \geq \tau\}.$$

És immediat que D_τ és tancat, compacte.

Donat un conjunt $A \subset R$, designem per $c(A)$ la integral superior de la funció 1_A característica d'A, és a dir,

$$c(A) = \inf \sum_j |R_j|,$$

on els R_j són rectangles amb interiors disjunts que cobreixen A. S'anomena el *contingut exterior de Jordan* de A. Ens interessaran en particular aquells conjunts amb contingut zero, és a dir, tals que per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha una col·lecció finita de rectangles R_i amb interiors disjunts que cobreix A amb $\sum_i |R_i| < \varepsilon$. Observem que és el mateix que dir que 1_A és integrable amb integral zero. És immediat veure que la reunió finita de conjunts amb contingut zero és de contingut zero.

Observem també que la integrabilitat d'una funció f acotada en R, expressada en termes d'existència de particions amb oscil·lació arbitràriament petita, implica que el gràfic té contingut zero (en la dimensió superior).

Ara podem precisar la nostra idea. Fixem τ i considerem l'oscilació d'una partició de P

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_j (M_j - m_j)|R_j|.$$

Per a aquells R_j que continguin punts de D_τ serà $M_j - m_j \geq \tau$, per tant la suma de tots aquests termes serà $\geq \tau c(D_\tau)$. Si f és integrable Riemann, podem triar la partició amb oscilació total arbitràriament petita, per tant $c(D_\tau) = 0$ per a tot τ. Hem vist la meitat de

Teorema. *f és integrable Riemann si i només si $c(D_\tau) = 0$ per a tot τ.*

Suposem ara que $c(D_\tau) = 0$ per a tot τ. Donat $\varepsilon > 0$ volem trobar una partició P amb oscilació $< \varepsilon$. En primer lloc, cobrim D_ε amb rectangles R_j^1 d'interiors disjunts amb $\sum_j m(R_j^1) \leq \varepsilon$. Sigui B la reunió d'aquests; substituint cada R_j^1 per una dilatació λR_j^1 (respecte del seu centre) podem suposar que l'interior de B conté també D_ε. Ara hem d'acabar de cobrir R per rectangles R_j^2. En tot punt $x \in R$ que no està en el interior de B tenim $\omega_f(x) < \varepsilon$, per tant hi ha un cub $R(x, \delta_x)$ on l'oscilació de f és $< \varepsilon$. Com que aquest conjunt de punts és compacte, un nombre finit d'aquests, designem-los $W_1, \cdots, W_N$, cobreix el que no cobreixen els R_j^1. Aquests $W's$ determinen uns rectangles R_j^2 amb interiors disjunts amb la mateixa unió, i en cadascun d'ells l'oscilació de f és menor que ε.

En definitiva, tenim R cobert per rectangles amb interiors disjunts de dos tipus, els R_j^1 i els R_j^2. Si $P_1, P_2, cdots, P_d$ designen respectivament les projeccions en els eixos dels vertexs de tots aquests rectangles, la partició $P = P_1 \times P_2 \times \cdots P_d$ té rectangles R_i de dos tipus. Els que estan inclosos en un dels R_j^1 els diem de classe $\mathcal{A}$; evidentment

$$\sum_{S \in \mathcal{A}} m(S) = \sum_j m(R_j^1) < \varepsilon.$$

Els altres, que anomenem de classe $\mathcal{B}$, estan inclosos en un dels R_j^2 i per tant l'oscilació de f és $< \varepsilon$. Llavors, trenquem l'oscilació de P en dues parts

$$S(f,P) - s(f,P) = S_1 + S_2,$$

on S_1 correspon als de classe $\mathcal{A}$ i S_2 als de classe $\mathcal{B}$. Si $|f| \leq K$, en S_1 acotem $M(S) - m(S)$ per $2K$, amb la qual cosa $S_1 \leq 2K \sum_{S \in \mathcal{A}} m(S) < 2K\varepsilon$. En el altres acotem $M(S) - m(S)$ per ε amb la qual cosa $S_2 \leq \varepsilon \sum_{S \in \mathcal{B}} |S| \leq \varepsilon |R|$. Amb això veiem que $S(f,P) - s(f,P) < C\varepsilon$ i per tant f és integrable.

És possible donar una caracterització tan sols en termes de D, que és la reunió numerable dels $D_{\frac{1}{k}}$. Per a això necessitem una definició:

Diem que un conjunt acotat A té *mesura de Lebesgue zero* si per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha una familia numerable de rectangles R_j que el recobreix (que podem suposar amb interiors disjunts) amb $\sum_j |R_j| < \varepsilon$.

És evident que la reunió numerable de conjunts de mesura zero té mesura zero. Pot veure's fàcilment que si A és compacte llavors en la definició podem considerar recobriments finits de rectangles, és a dir, per a conjunts compactes la noció de mesura de Lebesgue zero i de contingut exterior de Jordan zero són equivalents. En particular, l'enunciat que cada D_τ tingui contingut zero és equivalent a dir que D té mesura zero. Per tant hom té:

Teorema. *f és integrable Riemann si i només si el conjunt de punts D on f no és contínua té mesura de Lebesgue zero.*

Per exemple, en dimensió $d = 1$ tota funció monòtona és integrable Riemann, perquè el conjunt de punts de discontinuïtat és finit o numerable, i per tant de mesura zero. Evidentment es pot provar aquest fet directament d'una manera elemental.

8 Integració sobre conjunts generals

Fins ara hem definit la integral sobre rectangles, ara volem definir-la sobre conjunts $A \subset R$ generals. Com que volem integrar constants i poder parlar de la mesura d'A, cal que 1_A, la funció característica d'A sigui integrable, per tant cal que la frontera ∂A d'A (els punts on la funció característica no és contínua) sigui de mesura zero. Aquests conjunts s'anomenen *mesurables Jordan*, i són aquells del quals podem parlar de

$$m(A) = \int 1_A,$$

en la teoria de Riemann. Igualant la integral a la integral superior, veiem que obviàment $m(A) = c(A)$.

Com que la frontera ∂A és compacte, A és mesurable Jordan si i només si ∂A té contingut zero. Tal com hem dit abans, els conjunts mesurables Jordan amb $m(A) = 0$ són exactament els de contingut de Jordan zero. Ara bé, un conjunt A amb mesura de Lebesgue zero no és necessàriament mesurable

Jordan, per exemple els racionals de $[0,1]$. Aquesta incoherencia és un dels inconvenients de la integral de Riemann.

És rutinari provar que la reunió i intersecció finita de conjunts mesurables Jordan també ho és.

Ara volem definir $\int_A f$ si f està definida en A i és acotada, i A és mesurable Jordan. Direm que f és integrable Riemann en A si l'extensió a R per zero fora d'A, designem-la $\tilde{f}$, és integrable Riemann en R i en aquest cas

$$\int_A f = \int_R \tilde{f}.$$

Observem que la integral superior de $\tilde{f}$ és

$$\int_A f = \inf \sum_{R_j \cap A \neq \emptyset} \sup\{f(x), x \in R_j \cap A\}|R_j|,$$

i que la inferior és

$$\int_A f = \sup \sum_{R_j \subset A} \min\{f(x), x \in R_j \cap A\}|R_j|.$$

D'aqui veiem que si A té contingut zero, qualsevol funció acotada és integrable amb integral zero.

Les discontinuitats de $\tilde{f}$ o bé són punts de l'interior d'A on f no és contínua o bé són punts de ∂A. Per tant, f és integrable en A si i només si el conjunts de punts interiors de A on f no és contínua té mesura de Lebesgue zero. En particular, tota funció contínua en A és integrable. Si f està definida i és integrable en R, la seva restricció a A és integrable en A.

Amb aquesta definició, és evident que

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g, |\int_A f| \leq \int_A |f| \leq Km(A).$$

També, si $A \cap B$ té contingut zero i f és integrable, aleshores

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

En particular, és el mateix integrar sobre A que sobre l'interior d'A o que sobre l'adherència d'A. Llavors, si $A = \cup A_i$ i els A_i són disjunts llevat d'un conjunt de contingut zero, tenim

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

9 El teorema de Fubini

Pràcticament cap integral $\int_R f$ pot calcular-se aplicant la definició. En una variable, el teorema fonamental del càlcul redueix el càlcul d'integrals al de primitives. En vàries variables, el teorema de Fubini redueix el càlcul d'una integral en d variables al càlcul de d integrals en una variable.

En aquesta secció suposarem per simplificar que $d = 2$ i serà convenient utilitzar la notació $\int\int_R f \, dx \, dy$ per la integral doble, $R = [a, b] \times [c, d]$.

La idea és ben natural si pensem en el significat de la integral quan $f \geq 0$, el volum del subgràfic. Intuitivament el podem calcular sumant l'area de les llesques infinitesimals, la qual cosa vol dir

$$\int\int_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) \, dy) \, dx.$$

L'expressió anterior de la part dreta té sentit quan f és contínua, perquè aleshores $f(x, y)$ és integrable en y per a tot x i $F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$ és contínua i per tant integrable. Però no en general, per exemple, si f té com a conjunt de discontinuitats els punts $(\frac{1}{2}, y)$ amb y racional. És a dir, si f és integrable no necessàriament $f(x, y)$ és integrable en y per a tot x. Per això s'ha de formular en termes d'integrals superior i inferior.

Veurem que per a tota f acotada en R, diguem $|f| \leq M$

$$\int_- f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_- (\int_- f(x, y) \, dy) \, dx, \int^+ (\int^+ f(x, y) \, dy) \, dx \leq \int^+ f(x, y) \, dx \, dy,$$

(anàlogament començant integrant en x en les iterades), que implica que si f és integrable, llavors les funcions

$$F_-(x) = \int_- f(x, y) \, dy, F^+(x) = \int^+ f(x, y) \, dy,$$

$$G_-(y) = \int_- f(x, y) \, dx, G^+(y) = \int^+ f(x, y) \, dx,$$

són integrables i llurs integrals coincideixen amb la de f.

És suficient provar la segona (aplicada a $-f$ dona la primera). Siguin P_1, P_2 particions respectives de $[a, b], [c, d]$ i $P = P_1 \times P_2$. Anomenen I_j els intervals de P_1 i J_i els de P_2, de forma que $I_j \times J_i$ són els de P. Sigui M_{ij} el suprem de f en $I_j \times J_i$. Considerem la suma superior de F^+ respecte de P_1, amb $\xi_j \in I_j, \sum_j F^+(\xi_j)|I_j|$. Per definició d'integral superior $F^+(\xi_j)$ és més petit que la suma superior de $f(\xi_j, y)$ respecte de P_2; com que el suprem de $f(\xi_j, y)$ en $y \in J_i$ és menor o igual que M_{ij} tenim $F^+(\xi_j) \leq_i M_{ij}|J_i|$ i per tant

$$\sum_j F^+(\xi_j)|I_j| \leq \sum_{ij} M_{ij}|I_j||J_i|,$$

que implica el resultat.

Evidentement, quan f és continua, tenim que les integrals iterades tenen ambdues sentit i coincideixen amb la integral de f. Quan tenim una integral doble sobre un conjunt $A \subset R$ mesurable Jordan la forma com aplicarem el teorema de Fubini és

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Pi_1(A)} (\int_{A_x} f(x,y)\,dy)\,dx,$$

on $\Pi_1(A)$ designa la projecció de A sobre l'eix Ox i $A_x = \{y : (x,y) \in A\}$ per a $x \in \Pi_1(A)$. Per exemple, si A és la regió entre els gràfics de $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$ en $[a,b], \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, llavors

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy)\,dx.$$

Aquesta és la forma com a la pràctica calculem integrals en vàries variables, reduint-nos al càlcul d'unes quantes integrals d'una variable (que al seu torn es calculen amb el teorema fonamental del càlcul).

10 El teorema del canvi de variable

La construcció de la integral de Riemann que hem presentat té un defecte evident, que és la dependència de la estructura cartesiana. Hem identificat els punts de $\mathbb{R}^d$ amb les seves coordenades cartesianes, i tot s'ha fet utilitzant aquestes coordenades: els rectangles, bàsics a la teoría, estan definits en termes d'aquestes coordenades, etc.

Des d'un punt de vista intrinsec, la teoria hauria de ser formulable i utilitzable en qualsevol sistema de cooordenades. El motiu principal és que molts conjunts són fàcilment describibles en sistemes de coordenades no cartesians. En aquesta secció ens ocuparem d'aquest tema.

Considerem funcions f continues definides en conjunts A compactes mesurables Jordan, recordem que això vol dir que ∂A té contingut zero. Considerem un sistema de coordenades $u_1, u_2, \cdots, u_n$ definit en un obert V que conté A, és a dir, $h = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ és un difeomorfisme de classe C^1 de V sobre un obert U, amb inversa que designem g. Podem pensar que $h(A)$ és A descrit en les coordenades $u's$.

En primer lloc, veurem que g, h transformen conjunts de mesura de Lebesgue zero en conjunts de mesura de Lebesgue zero. Suposem que $B \subset U$ és un compacte de mesura zero, i posem $K = \{x \in U : d(x, B) < \frac{1}{2} d(B, U^c)\}$. El conjunt K és també compacte i per tant

$$M = \sup_{u \in K} \|\nabla g(u)\| < +\infty.$$

Pel teorema del valor mig, si B és una bola inclosa dins K de radi r, $g(B)$ està inclosa en una bola B' de radi Mr, per tant $m(B') \leq M^n m(B)$. Donat ε, hi ha boles B_i que cobreixen B amb $\sum_i m(B_i)$, i podem suposar $B_i \subset g(B_i)$. Llavors $g(B_i) \subset B_i'$, amb $\sum_i m(B_i') \leq M^n \varepsilon$.

En segon lloc, g, h transformen conjunts mesurables Jordan en conjunts mesurables Jordan. Això és perquè esssent homeomorfismes transformen fronteres en fronteres.

El teorema del canvi de variable afirma que si f és integrable en A llavors $f(g(u))J_g(u)$ és integrable en $h(A)$ i

$$\int_A f(x)\, dx = \int_{h(A)} f(g(u))|J_g(u)|\, du,$$

on $J_g(u)$ designa el jacobià de g, és a dir, el determinant de la matriu diferencial. El terme dret té sentit, ja que segons hem vist $h(A)$ és també mesurable Jordan.

Farem primer una prova en un cas particular on es veu ja la idea principal, quan $h(A)$ és un rectangle R i f és contínua en A.

Amb $\delta > 0$ petit, trenquem R en cubs R_i d'aresta δ, i posem $S_i = g(R_i)$, llavors A està cobert pels S_i. Els S_i són rectangles en les coordenades $u's$. Com que els S_i són disjunts llevat de conjunts de contingut zero (les imatges de les cares dels R_i), tenim que

$$\int_A f dx = \sum_i \int_{S_i} f dx.$$

Com abans, el diàmetre de S_i és $\leq M\delta$, on M és una cota de $\|\nabla g\|$ en R, per tant tendeix a zero quan $\delta \to zero$. Per la continuitat uniforme de f en A, donat $\varepsilon > 0$ tindrem doncs $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $x, y \in S_i$ i δ és prou petit. Anomenem p_i el vertex de baix a l'esquerra de $R_i, q_i = g(p_i)$. Llavors tindrem

$$\sum_i \int_{S_i} f(x)\,dx = \sum_i f(q_i)|S_i| + \sum_i \int_{S_i} (f(x) - f(q_i))\,dx,$$

i el segon terme té valor absolut controlat per

$$\varepsilon \sum_i |S_i| = \varepsilon m(A).$$

Per tant

$$\int_A f\,dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_i f(q_i)|S_i|,$$

això és, és el límit de sumes de Riemann però prenent els S_i enlloc de rectangles cartesians.

El punt essencial és demostrar que

$$|S_i| = |J_g(p_i)||R_i| + E_i,$$

amb $E_i = o(\delta^n)$ uniformement en i(és a dir, $|E_i| \leq \omega(\delta)\delta^n, \omega(\delta) \to 0$), juntament amb l'observació que $|J_g(p_i)|$ és el volum del paralelepiped determinat pels vectors columna de $dg(p_i)$, els vectors $\frac{\partial}{\partial u_i}$.

Abans de veure això en general, és ilustratiu comprovar un cas particular, el de les coordenades polars al pla. Aqui, utlitzant r, θ enlloc de u_1, u_2

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$$

Pensem que $R_i = [r, r+\delta] \times [\theta, \theta+\delta], p_i = (r, \theta)$. Llavors S_i és el tros de corona entre el cercles de radis r i $r+\delta$ i angle entre θ i $\theta+\delta$. La seva àrea és

$$\pi((r+\delta)^2 - r^2)\frac{\delta}{2\pi} = r\delta^2 + \frac{\delta^3}{2} = J_g(p_i)|R_i| + \frac{\delta^3}{2}.$$

Per provar-ho en general necessitem primer una precissió tècnica. Per la mateixa definició de diferenciabilitat, si f és diferenciable en a hom té

$$f(x) - f(a) = df(a)(x-a) + o(\|x-a\|).$$

El que afegim ara és que si f és de classe C^1 en un obert U que conté un compacte K aleshores el terme $o(\|x-a\|)$ és uniforme en $a \in K$, és a dir, per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha δ tal que si $a \in K, \|x-a\| < \delta$, llavors $\|f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\| \leq \varepsilon \|x-a\|$. Com abans, considerem $L = \{x : d(x,K) \leq d\}$ amb d prou petit per tal que $L \subset U$. Si $a \in K, \|x-a\| < d$, considerem

$$\phi(t) = f(a + t(x-a), 0 \leq t \leq 1,$$

de forma que

$$f(x) - f(a) - df(a)(x-a) = \phi(1) - \phi(0) - \phi'(0) = \int_0^1 (\phi'(t) - \phi'(0))\, dt =$$

$$= \int_0^1 (df(a + t(x-a)) - df(a))(x-a)\, dt.$$

Això és la forma integral del rest de Taylor d'ordre 1. Ara, com que df és contínua en U, és uniformement contínua en L, per tant donat ε hi ha $\delta > 0$ tal que $\|df(z) - df(w)\| \leq \varepsilon$ si $z, w \in L, \|z-w\| < \delta$. Si en l'expressió anterior hom té $\|x-a\| < \delta$, aleshores per a tot t

$$\|df(a+t(x-a)) - df(a))(x-a)\| \leq \|df(a+t(x-a)) - df(a)\| \|x-a\| \leq \varepsilon \|x-a\|,$$

i ja.

Per veure

$$|S_i| = |J_g(p_i)||R_i| + E_i,$$

suposem sense pèrdua de generalitat que $p_i = 0$ i escrivim $v_i = \frac{\partial g}{\partial u_i}(0)$, el i-sim vector columna de $dg(0)$; pel que hem acabat de veure,

$$g(u_1, u_2, \cdots, u_n) = q_i + \sum_i u_i v_i + R(u), |u_i| < \delta$$

amb $\|R(u)\| = o(\delta)$ uniformement en i. Considerem la corba γ_i imatge de la i-aresta de R_i, és a dir, fem $u_j = 0, j \neq i$; veiem que

$$\gamma_i(u_i) = q_i + u_i v_i + R, 0 \leq u_i \leq \delta,$$

i quelcom semblant passa amb les imatges de les cares; és a dir, si considerem el paralelepiped P determinat pels n segments $q_i + u_i v_i, 0 \leq u_i \leq \delta$ i dilatem P pel factors $1 + R(\delta), 1 - R(\delta)$ respecte el seu centre, tindrem que

$$(1 - R(\delta))P \subset S_i \subset (1 + R(\delta))P.$$

Com que el volum de P és $|J_g(0)|\delta^n$ i el $(1+R(\delta))P \setminus (1-R(\delta))P$ és $O(R(\delta)\delta^{n-1} = o(\delta^n)$, hem vist $|S_i| = |J_g(p_i)||R_i| + E_i$, amb $|E_i| \leq \omega(\delta)\delta^n = \omega(\delta)|R_i|$.

Reprenent la demostració, tindrem ara

$$\int_A f\,dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_i f(q_i)|S_i| = \lim_{\delta\to 0}\sum_i f(g(p_i)|J_g(p_i)||R_i| +$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)\sum_i f(g(p_i)|R_i|.$$

La primera suma és una suma de Riemann de $f(g(u))|J_g(u)|$, per tant té límit la seva integral sobre R; la segona suma és una suma de Riemann de $f(g(u))$, per tant té un límit finit, que multiplicat per ω té límit zero. Això acaba la prova del cas particular.

Per provar el cas general ens basem ara en el cas $f = 1$ que acabem de provar, que diu

$$m(g(R)) = \int_R |J_g(u)|\,du,$$

per a tot rectangle $R \subset U$. Veurem que això és cert per a tot $B \subset U$ mesurable Jordan. En efecte: igualant a la integral inferior

$$\int_B |J_g(u)|\,du = \sup\sum_{R_i\subset B}(\min\{|J_g(u)|, u\in R_i\})|R_i|,$$

on el suprem és respecte tots els recobriments de B per rectangles amb interiors disjunts (i que podem suposar dins U). Això és menor o igual que

$$\sup\sum_i\int_{R_i}|J_g(u)|\,du = \sup\sum_i m(g(R_i)),$$

que és menor que $m(g(B))$ perquè els $g(R_i)$ són disjunts llevat de conjunts de contingut zero, inclosos dins $g(B)$. Per tant hem vist que

$$\int_B |J_g(u)|\,du \leq m(g(B)).$$

Però raonant ara amb la integral superior també

$$\int_B |J_g(u)|\,du = \inf\sum_{R_i\cap B\neq\emptyset}(\max\{|J_g(u)|, u\in R_i\})|R_i| \geq \inf\sum_{R_i\cap B\neq\emptyset}\int_{R_i}|J_g(u)|\,du$$

$$= \inf \sum_{R_i \cap B \neq \emptyset} m(g(R_i)) \geq m(g(B)).$$

Suposem ara que f és integrable en A. Igualant a la integral inferior,

$$\int_A f = \sup \sum_{S_i \subset A} (\min\{f(x), x \in S_i\})|S_i|.$$

Posem $R_i = h(S_i)$ i apliquem l'anterior a R_i

$$\int_A f = \sup \sum_{R_i \subset h(A)} (\min\{f(g(u)), u \in R_i\}) \int_{R_i} |J_g(u)|\, du \leq$$

$$\leq \sum_{R_i \subset h(A)} \int_{R_i} f(g(u))|J_g(u)|\, du \leq \int_{h(A)} f(g(u))|J_g(u)|\, du.$$

Però el mateix s'aplica al difeomorfisme invers

$$\int_{h(A)} f(g(u))|J_g(u)|\, du \leq \int_A f(x)|J_g(h(x))||J_h(x)|\, dx,$$

i acabem tot observant que $|J_g(h(x))||J_h(x)| = 1$ perquè les diferencials corresponents són inverses una de l'altra.

11 Una versió del teorema fonamental del càlcul en vàries variables

Anem a reinterpretar el teorema fonamental del càlcul en una variable amb un llenguatge lleugerament diferent.

Suposem que Φ és quelcom que assigna a tot interval tancat $J \subset [a, b]$ una quantitat $\Phi(J)$; per exemple, fixada f definida en R, $\Phi(J)$ pot ser la longitud del gràfic de f sobre J, o l'area de la superfície de revolució que aquest gràfic genera, etc. O si pensem que l'interval R és una barra de metall, $\Phi(J)$ podria ser la massa que porta J, etc. Suposem que Φ té la propietat que si trenquem J en N parts $J_1, J_2, \cdots, J_N$, aleshores $\Phi(J) = \Phi(J_1) + \Phi(J_2) + \cdots + \Phi(J_N)$. Suposem també que coneixem $\Phi(J)$ per a intervals J petits, infinitesimals, en el sentit que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi([x, x + \delta])}{\delta} = f(x).$$

Aquesta funció f s'anomena la *densitat de* Φ. Aleshores, si J és qualsevol interval, gran o petit, i f és integrable

$$\Phi(J) = \int_J f(x)\, dx.$$

En efecte, tan sols cal que introduim

$$F(x) = \Phi([a, x]).$$

Per hipòtesi,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} = \frac{\Phi([x, x+h])}{h} = f'(x),$$

de forma que pel teorema fonamental del càlcul, si $J = [c, d]$,

$$\Phi([c, d]) = F(d) - F(c) = \int_c^d F'(t)\, dt = \int_c^d f(t)\, dt.$$

Amb aquesta reformulació podem plantejar una versió d-dimensional.

Suposem que Φ és quelcom que assigna a tot rectangle $S \subset R$ una quantitat $\Phi(S)$; per exemple, fixada f definida en R, $\Phi(S)$ pot ser l'àrea del gràfic de f sobre S. O si pensem que R és una superficie de metall, $\Phi(S)$ podria ser la massa que porta S, etc. Suposem que $\Phi(S)$ depen continuament de S (és a dir de les coordenades dels vertexs de S), que Φ té la propietat que si trenquem S en N parts $S_1, S_2, \cdots, S_N$, aleshores $\Phi(S) = \Phi(S_1) + \Phi(S_2) + \cdots + \Phi(S_N)$.

Suposem també que coneixem $\Phi(S)$ per a rectangles S petits, infinitesimals, en el sentit que si $S(x, \delta)$ designa el cub centrat en x d'aresta δ

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi(S(x, \delta))}{\delta^n} = f(x).$$

Aquesta funció f s'anomena la *densitat de* Φ. Aleshores, si R és qualsevol rectangle, gran o petit, i f és contínua, hom té

$$\Phi(R) = \int_R f(x)\, dx.$$

Sovint utilitzem això en la següent manera: tenim una idea intuitiva del que volem que sigui Φ i volem donar-ne una definició precisa. Identifiquem la densitat i aleshores prenem $\Phi(R) = \int_R f(x)\, dx$ com a definició.

Si la convergència en el límit anterior és uniforme en x, és a dir,

$$\Phi(S(x,\delta)) = f(x)\delta^n + \epsilon(\delta)\delta^n,$$

amb $\epsilon(\delta) \to 0$ quan $\delta \to 0$, llavors és gairebé tautològic perquè trenquem R en cubs S_i d'aresta δ centrats en punts x_i i llavors.

$$\Phi(R) = \sum_i \Phi(S_i) = \sum_i f(x_i)|S_i| + \epsilon(\delta)\sum_i |S_i| = \sum_i f(x_i)|S_i| + \epsilon(\delta)|R|.$$

El primer sumand de la dreta és una suma de Riemann de f en R, i per tant fent $\delta \to 0$ obtenim el resultat.

Fem la prova del cas general en dues variables, $x = (x_1, x_2)$. Suposem que $R = [0,1] \times [0,1]$ i definim

$$F(x_1, x_2) = \Phi([0, x_1] \times [0, x_2]).$$

Aleshores el límit anterior s'escriu

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{F(x_1+\delta, x_2+\delta) - F(x_1+\delta, x_2) - F(x_1, x_2+\delta) + F(x_1, x_2)}{\delta^2} = f(x_1, x_2).$$

Si F fos una funció de classe amb segones derivades contínues, això diria que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = f$, i per iteració del resultat en una variable hom té

$$F(x_1, x_2) = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f(s,t)\,ds\,dt,$$

d'on es dedueix el resultat. En el cas general cal fer un argument d'aproximació.

12 L'element de volum en una subvarietat regular de dimensió k

Recordem que per a una corba regular Γ, la longitud, que es defineix com el suprem de les longituds de les poligonals inscrites, es pot computar a partir d'una parametrització $\gamma(t)$. L'element de longitud $ds = \|\gamma'(t)\|\,dt$ és el que cal intergrar sobre una part $A \subset \Gamma$ per calcular-ne la longitud. S'ha de pensar com la longitud d'un trosset infinitesimal de corba, entre els punts de paràmetres $t, t+dt$; quan diem que $ds = \|\gamma'(t)\|\, dt$ estem substituint aquest trosset de corba per la seva aproximació lineal, el segmentet de la tangent que uneix $\gamma(t)$ amb $\gamma(t) + \gamma'(t)\,(t)\,dt$.

A l'hora d'aproximar-se al concepte d'àrea d'una superficie hi ha un fet diferencial molt significatiu. Hom podría pensar, per analogia amb el cas de les corbes, que és natural definir l'àrea d'una superficie S com el suprem de les àrees de les triangulacions inscrites en S. L'exemple següent, conegut com la *làmpara de Schwarz* mostra que aquesta definició no és la correcta. Considerem el cilindre S parametritzat per $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < t < 1$ per

$$x(t,\theta) = \cos\theta, y(t,\theta) = \sin\theta, z(t,\theta) = t.$$

Atès que el cilindre pot desenvolupar-se sobre un pla sense distorsions com el rectangle $[0, 2\pi] \times [0, 1]$, és indiscutible que hauria de tenir àrea 2π. Veurem però que hi ha triangulacions inscrites en S amb àrea arbitràriament gran. Trenquem l'alçada en m parts iguals, i dins de cadascun dels $m+1$ cercles prenem n punts equidistants angularment. Si prenem els punts

$$p_{i,j} = (\cos i\frac{2\pi}{n}, \sin i\frac{2\pi}{n}, \frac{j}{m}), i = 0, \cdots, n-1, j = 0, \cdots, m,$$

i considerem els triangles de vertexs $p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j+1}$ i $p_{i,j+1}, p_{i+1,j+1}, p_{i+1,j}$ la triangulació resultant és un prisma regular que té per base el polígon regular de n costats, independentment de m. L'àrea té evidentment límit 2π quan $n \to \infty$. Ara considerarem però la situació si els punts d'un nivell i els del nivell superior estan desfasats en $\frac{\pi}{n}$, de forma que cada base forma un triangle isòsceles amb un vertex del nivell superior i un altre amb un vertex del nivell inferior. La triangulació consisteix en nm triangles tots iguals al triangle determinat pel punts

$$(1,0,0), (\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}, 0), (\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}, \frac{1}{m}),$$

és a dir pels vectors

$$(\cos\frac{2\pi}{n} - 1, \sin\frac{2\pi}{n}, 0), (\cos\frac{\pi}{n} - 1, \sin\frac{2\pi}{n}, \frac{1}{m}).$$

Substituint $\sin x$ per x i $1 - \cos x$ per $\frac{x^2}{2}$ veiem que l'àrea d'aquest triangle és de l'ordre de

$$\frac{1}{mn} + \frac{1}{mn^2} + \frac{1}{n^3},$$

i per tant triant $m = n^3$ l'àrea total és arbitràriament gran. L'explicació intuïtiva és que la triangulació es plega sobre si mateixa més i més quant més gran és m, talment com a les làmpares xineses. Aquesta construcció pot fer-se en altres superficies reglades, però no és possible en superficies de curvatura positiva.

La definició correcta d'àrea d'una superficie (no necessàriament regular) s'ha de fer mitjançant la *mesura de Haussdorf*, que aqui no tractarem. Enlloc d'això definirem directament l'element d'àrea d'una superficie regular a partir d'una parametrització. Més generalment definirem l'element de volum k-dimensional en una subvarietat regular de dimensió k. Si $H(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ és una carta local, situats en el punt $H(t)$, considerem el trosset infinitesimal de M que consisteix en els punts $H(t_1 + \lambda_1 dt_1, \cdots, t_k + \lambda_k dt_k), 0 \leq \lambda_i \leq 1$, és a dir, tots els punts que tenen paràmetres entre t_i i $t_i + dt_i, i = 1, \cdots, k$ (podem pensar que aquest trosser és una mena de rectangle k- dimensional dins M). L'aproximació lineal d'aquest trosset, la seva projecció en l'espai tangent, és el rectangle k-dimensional determinat pels k vectors linealment independents $\frac{\partial H}{\partial t_i}(t)\, dt_i, i = 1, \cdots, k$ (millor dit, aquest rectangle traslladat a $H(t)$).

En definitiva, definim l'element de volum k-dimensional dm_k a M com el volum d'aquest rectangle infinitesimal, és a dir, l'arrel del valor absolut del determinant de Gramm d'aquests k vectors,

$$dm_k(t) = |\det G_H(t)|^{\frac{1}{2}}\, dt_1\, dt_2 \cdots, dt_k,$$

on

$$G_H(t) = (\langle \frac{\partial H}{\partial t_i}, \frac{\partial H}{\partial t_j} \rangle)_{i,j=1,\cdots,k}.$$

En termes de la matriu $d \times k$ diferencial $dH(t)$ que té aquests vectors com a columnes, el determinant de Gramm és el producte de matrius $(dH(t))^* \times dH(t)$.

Amb dm_k podem parlar de la mesura k-dimensional d'una part compacta A de M; si A està cobert per una única carta H i té paràmetres $D = H^{-1}(A)$, llavors

$$m_k(A) = \int_D dm_k(t) = \int_D |\det(\langle \frac{\partial H}{\partial t_i}, \frac{\partial H}{\partial t_j} \rangle)_{i,j=1,\cdots,k}|^{\frac{1}{2}}\, dt_1\, du_2 \cdots dt_k.$$

Si A no està tapat per una única carta el trenquem en trossets que si ho estiguin.

Més generalment, si h és una funció contínua definida en A, definim

$$\int_A h\, dm_k = \int_D h(H(t))\,|\det G_H(t)|^{\frac{1}{2}}\, dt_1\, dt_2 \cdots, dt_k.$$

Equivalentment, és el límit de les sumes de Riemann

$$\sum_i h(p_i) m_k(A_i),$$

on els A_i és una partició de A que es va fent fina, i $p_i \in A_i$.

El resultat d'aquestes integrals no depen de la parametrització. En efecte, igual que abans, si considerem un canvi de paràmetre $t = \xi(s)$ (és a dir, $t_i = t_i(s_1, \cdots, s_k), i = 1, \cdots, k$) i la nova parametrització $\Psi(s) = H(\xi(s))$, llavors la matriu $d\Psi(s)$ és el producte de matrius $dH(t)d\xi(s)$, amb la qual cosa

$$G_\Psi(s) = (d\Psi(s))^* d\Psi(s) = (d\xi(s))^*(dH(t))^* dH(t) d\xi(s) = (d\xi(s))^* G_H(t) d\xi(s),$$

per tant, utilitzant el teorema del canvi de variable en integrals,

$$|\det G_\Psi(s)|^{\frac{1}{2}}\, ds_1 \cdots ds_k = |\det G_H(t)|^{\frac{1}{2}} |\det \xi(s)|\, ds_1 \cdots ds_k =$$

$$= |\det G_H(t)|^{\frac{1}{2}}\, dt_1 \cdots dt_k.$$

En el cas de superficies S ($k = 2$) utilitzem la notació dA, element d'àrea. Anomenant u, v els dos paràmetres, en aquest cas es pot utilitzar el producte vectorial dels dos vectors $\frac{\partial H}{\partial u} \times \frac{\partial H}{\partial v}$, que és un vector perpendicular a la superficie en el punt $H(u, v)$ i té mòdul igual a l'area del paralelogram determinat per aquest dos vectors,

$$dA = \|\frac{\partial H}{\partial u} \times \frac{\partial H}{\partial v}\|\, du\, dv.$$

Si $h \geq 0$ representa una densitat de massa, la integral $M = \int_S h dA$ és la massa total de S. Igual que per a corbes, el centre de masses és el punt de coordenades $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ amb

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \int_S x h(x)\, dA(x),$$

i anàlogament $\overline{y}, \overline{z}$.

Per exemple, si la superficie és el gràfic $z = f(x, y), (x, y) \in A$, és a dir, $H(x, y) = (x, y, f(x, y))$, aleshores els dos vectors tangents són $(1, 0, f_x), (0, 1, f_y)$, el normal és $(-f_x, -f_y, 1)$ i $dA = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$.

Considerem ara una superficie de revolució S , obtinguda fent girar un gràfic Γ $z = f(y), 0 \leq a \leq y \leq b$ al voltant de l'eix z. Una parametrització de S és

$$x = r\cos\theta, r\sin\theta, z = f(r), 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq r \leq b.$$

Els vectors tangents base de $T_p(S)$ són

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \frac{\partial}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, f'(r)),$$

amb la qual cosa el vector normal és

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \times \frac{\partial}{\partial r} = r(\cos\theta f'(r), \sin\theta f'(r), -1),$$

llavors $dA = r\sqrt{1 + f'(r)^2}\, d\theta dr$ i l'àrea és

$$2\pi \int_a^b r\sqrt{1 + f'(r)^2}\, dr,$$

tal i com hem vist abans. D'una forma anàloga retrobem la fórmula

$$2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt,$$

per l'àrea de la superficie obtinguda quan gira al voltant de l'eix y.

Evidentment el mateix podem fer si Γ és una corba general $z = z(t), y = y(t) \geq 0, a \leq t \leq b$ en el semiplà $y \geq 0$. Si gira al voltant de l'eix z, la superficie generada es parametritza per

$$x = y(r)\cos\theta, y = y(r)\sin\theta, z = z(r), a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ara els vectors tangents són

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = (-y(r)\sin\theta, y(r)\cos\theta, 0), \frac{\partial}{\partial r} = (y'(r)\cos\theta, y'(r)\sin\theta, z'(r)),$$

el vector normal és

$$(y(r)z'(r)\cos\theta, -y(r)z'(r)\sin\theta, -y(r)y'(r)),$$

l'element d'àrea és

$$dA = y(r)\sqrt{z'(r)^2 + y'(r)^2}\,dr\,d\theta,$$

i l'àrea és

$$2\pi \int_a^b y(r)\sqrt{z'(r)^2 + y'(r)^2}\,dr.$$

La totalitat de M pot tenir o no volum k-dimensional finit, fins i tot si són conjunts acotats en $\mathbb{R}^d$. Per exemple, la corba que té parametrització global donada per

$$\gamma(t) = (t, t\sin\frac{1}{t}), 0 < t < 1,$$

té longitud infinita, i la superficie donada per la parametrització

$$H(u,v) = (u, v, u\sin\frac{1}{u}), 0 < u, v < 1,$$

té àrea infinita. De la mateixa manera, per a una funció h contínua a M no sempre està definida la integral $\int_M h\,dm_k$, si ho està si h té suport compacte dins M.

Per analogia amb el teorema de Fubini hom podria pensar que si S és una superficie a $\mathbb{R}^3$, per exemple, el gràfic $z = f(x,y), a \le x \le b, c \le y \le d$, i designem per Γ_x el gràfic $z = f(x,y), c \le y \le d$ amb x fix, hom tingui

$$\text{àrea}\, S = \int_a^b (\text{longitud}\, \Gamma_x)\, dx,$$

però això és evidentment fals, perquè el termes esquerra és

$$\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy,$$

mentre que el terme dret és

$$\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + f_y^2}\,dx\,dy.$$

13 Integral de Riemann i integral de Lebesgue

La teoria d'integració de Lebesgue (considerem per simplificar a la recta) utilitza particions en el domini dels valors de f. Així, si f pren valors en $[m, M]$ considera particions $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = M$ de $[m, M]$ i sumes de Lebesgue, amb $y_i \leq \tau_i < y_{i+1}$

$$\sum_i \tau_i m(f^{-1}([y_i, y_{i+1})).$$

Però això necessita definir prèviament la mesura (longitud en aquest cas) del conjunt antiimatge $f^{-1}([y_i, y_{i+1})$ que en general no serà un interval. Per aixó la teoria d'integració de Lebesgue requereix la construcció prèvia de la mesura de Lebesgue. De l'aplicació $A \subset \mathbb{R} \to m(A) \in [0, +\infty]$ s'espera que compleixi una sèrie de propietats evidents, entre les quals que si $A_n, n \in \mathbb{N}$ són disjunts, llavors $m(\cup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$, i també que sigui invariant per traslacions, $m(A + c) = m(A)$.

Aquesta mesura, però, no és possible definir-la per a un conjunt arbitrari, és a dir, hi ha conjunts "no mesurables". Els conjunts que resulten ser mesurables Lebesgue són aquells que poden expressar-se com a reunió d'un conjunt borelià i un conjunt de mesura zero en el sentit que hem considerat abans. La familia de conjuts borelians és la que s'obté a partir de les boles obertes fent reunions/interseccions numerables, passos al complementari, etc. Les funcions mesurables Lebesgue, les protagonistes de la integració de Lebesgue són per tant aquelles tals que la antiimatge de tot interval és mesurable Lebesgue.

La teoría de la integració de Lebesgue presenta alguns avantatges de tipus tècnic que no té la de Riemann, però per a les aplicacions pràctiques aquesta darrera és perfectament suficient, doncs s'aplica a les funcions contínues. Per exemple, en la teoria de Lebesgue, la funció característica d'un conjunt de mesura zero és integrable amb integral zero, i el teorema de Fubini té l'enunciat natural, és a dir, les integrals iterades tenen sentit sempre. Un altre avantage molt important és que a diferència de la de Riemann, l'espai de funcions integrable Lebesgue és un espai complet (en el sentit que amb la noció de convergència $f_n \to f$ si $\int |f_n - f| \to 0$) dóna lloc a espais complets (tota successió de Cauchy és convergent), la qual cosa és la base per als teoremes d'existència, punt fix, etc.