Anàlisi Matemàtica
Examen del 03/11/2015

1. (a) Estudieu la convergència de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{3^n (n+1)^{3n}}$$

(b) Estudieu la convergència de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^a+1}\sin(2/n^2)$$

segons els valors de $a > 0$.
(c) Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres positius tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Demostreu que existeix una successió $\{b_n\}$ de nombres positius amb $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \infty$$

2. (a) Sigui

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}}$$

Trobeu el límit puntual de f_n a $[0,2]$ i deduïu que f_n no convergeix uniformement a $[0,2]$.
(b) Siguin f_n les funcions de l'apartat anterior. Proveu que per a tot $0 < \varepsilon < 1$, f_n convergeix uniformement a $[0, 1-\varepsilon]$ i a $[1+\varepsilon, 2]$
(c) Sigui $\{a_n\}$ una successió decreixent de nombres positius amb límit zero i sigui $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Demostreu que per a qualsevol nombre enter $k > 1$ es compleix

$$|S - \sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n a_n| \leq a_k$$

Deduïu que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n!$ és irracional.

Tots els apartats valen el mateix

1) (a) Sigui $a_n = \dfrac{(3n)!}{3^n (n+1)^{3n}}$; calculem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!\, 3^n (n+1)^{3n}}{(3n)!\, 3^{n+1} (n+2)^{3n+3}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3(n+2)^3} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+2)^3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n}} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)}{(1+2/n)^3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{3n}{n+1}}} = \frac{9}{e^3} < 1 .$$

Aplicant el Criteri del quocient, deduïm que $\sum a_n < \infty$.

(b) Considerem $a_n = \sqrt{n^a+1}\,\sin(2/n^2)$ i $b_n = n^{a/2-2}$. Observem que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^a+1}}{n^{a/2}}\, \frac{\sin(2/n^2)}{n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^a+1}{n^a}}\, \frac{\sin(2/n^2)}{1/n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n^a}\, \frac{\sin(2/n^2)}{1/n^2} = 2$$

ja que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Pel Criteri de Comparació $\sum a_n < \infty \iff \sum b_n < \infty$. Ara bé $\sum b_n = \sum n^{\frac{a}{2}-2} < \infty \iff \frac{a}{2} - 2 < -1$, és dir $a < 2$. Per tant, $\sum a_n < \infty \iff a < 2$.

(c) Com $\sum a_n = \infty$, per tot k, existeix n_k, $n_k \nearrow \infty$, tals que $\displaystyle\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n > k$. Definim $b_n = \frac{1}{k}$ per $n_k \le n < n_{k+1}$; Per tant $\displaystyle\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{k} a_n > 1$. Tenim $\sum a_n b_n = \infty$ ja que $\displaystyle\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{k} a_n > 1$

2) (a) Sigui $x \in [0,2]$. Calculem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^{2n}}+1}} =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

Per tant el límit puntual de f_n és la funció $f(x)$ definida com $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$. Com f no és contínua a $[0,2]$, f_n no convergeix uniformement a $[0,2]$.

(b) Fixem $0<\varepsilon<1$. Tenim

$$\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}} \le \sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} x^n \le (1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Per tant $f_n \to 0$ uniformement a $[0,1-\varepsilon]$.

Sigui $x\in[1+\varepsilon,2]$. Calculem $f_n(x)-1 = \frac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}} - 1 =$

$$= \frac{x^n - \sqrt{1+x^{2n}}}{\sqrt{1+x^{2n}}} = \frac{-1}{(x^n+\sqrt{1+x^{2n}})\sqrt{1+x^{2n}}}.$$ Per tant,

$$\sup_{x\in[1+\varepsilon,2]} |f_n(x)-1| = \sup_{x\in[1+\varepsilon,2]} \frac{1}{(x^n+\sqrt{1+x^{2n}})\sqrt{1+x^{2n}}} \le \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Per tant $f_n \to 1$ uniformement a $[1+\varepsilon,2]$.

(c) Pel Criteri de Leibnitz, la serie $\sum(-1)^n a_n$ convergeix.

Tenim $\left|S-\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n a_n\right| = \left|(-1)^k(a_k-a_{k+1}+a_{k+2}-a_{k+3}+\cdots)\right| =$

$= |a_k-a_{k+1}+a_{k+2}-a_{k+3}+\cdots| = a_k-a_{k+1}+a_{k+2}-a_{k+3}+\cdots$

ja que $a_{k+j}-a_{k+j+1}\ge 0$ per tot $j\ge 0$. Com

$a_{k+1}\ge a_{k+2}$, $a_{k+3}\ge a_{k+4}$, ..., deduim que

$-a_{k+1}+a_{k+2}-a_{k+3}+a_{k+4}-\cdots \le 0$. Per tant,

$$\left|S-\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n a_n\right| \le a_k.$$

Sigui $a_n = 1/n!$ i $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n!$. Suposem que S és racional, es dir, $S=p/q$ amb p,q enters.

Tenim $\left|p/q-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}\right| \le \frac{1}{k!}$. Per tant

$$\left|\frac{p(k-1)!}{q}-\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\frac{(k-1)!}{n!}\right| \le \frac{1}{k}.$$ Si $k-1\ge q$, els nombres

$\frac{p(k-1)!}{q}$ i $\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\frac{(k-1)!}{n!}$ son enters. Com $\frac{1}{k}<1$ deduim

$\frac{p(k-1)!}{q} = \sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\frac{(k-1)!}{n!}$, es dir, $\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}$;

això és impossible ja que $\sum_{n=1}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}$ depen de k.