Segon Lliurament de Càlcul de Diverses Variables i Optimització

Arnau Mas

8 de Gener de 2018

Problema 1

Sen's demana de resoldre una equació diferencial en derivades parcials fent servir un canvi de coordenades. L'equació en qüèstió és

$$f_{xx}(x,y,z) - f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z) - 2f_{xz}(x,y,z) = (y+z)(x+z). \tag{1}$$

La solució $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suposarem que és una funció de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. El canvi que sen's proposa ve donat per

$$\begin{aligned} \Psi\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+y, y+z, z+x). \end{aligned} \tag{2}$$

Denotem les components de Ψ per u, v i w. És clar que Ψ és una bijecció lineal i per tant un difeomorfisme. Definim $g = f \circ \Psi^{-1}$. D'aquesta manera es compleix $f = g \circ \Psi$ i podem, fent servir la regla de la cadena, reescriure l'equació diferencial en termes de les noves coordenades.

$$\begin{aligned} f_x &= g_u u_x + g_v v_x + g_w w_x = g_u + g_w \\ f_y &= g_u u_y + g_v v_y + g_w w_y = g_u + g_v \\ f_z &= g_u u_z + g_v v_z + g_w w_z = g_v + g_w. \end{aligned} \tag{3}$$

Tornem a derivar:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= g_{uu}u_x + g_{uv}v_x + g_{uw}w_x + g_{wu}u_x + g_{wv}v_x + g_{ww}w_x \\
&= g_{uu} + 2g_{uw} + g_{ww} \\
f_{yy} &= g_{uu}u_x + g_{uv}v_x + g_{uw}w_x + g_{vu}u_x + g_{vv}v_x + g_{vw}w_x \\
&= g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv} \\
f_{zz} &= g_{vu}u_z + g_{vv}v_z + g_{vw}w_z + g_{wu}u_z + g_{wv}v_z + g_{ww}w_z \\
&= g_{vv} + 2g_{vw} + g_{ww} \\
f_{xz} &= g_{uu}u_z + g_{uv}v_z + g_{uw}w_z + g_{wu}u_z + g_{wv}v_z + g_{ww}w_z \\
&= g_{uv} + g_{uw} + g_{wv} + g_{ww}.
\end{aligned}$$

I per tant

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} - 2f_{xz} = -4g_{uv}. \tag{4}$$

Així doncs, l'equació diferencial en les noves coordenades és

$$g_{uv}(u, v, w) = -\frac{1}{4}vw. \tag{5}$$

En aquesta forma, podem solucionar 5 de forma immediata per integració:

$$g(u, v, w) = -\frac{1}{8}uwv^2 + A(v, w) + B(u, w), \tag{6}$$

on A i B són funcions arbitràries que compleixen $A_u = B_v = 0$. I en les coordenades originals, la solució és

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8}(x+y)(x+z)(y+z)^2 + A(y+z, x+z) + B(x+y, x+z). \tag{7}$$

Un cop tenim la solució general podem trobar la solució particular que sen's demana aplicant les condicions inicials. Tenim que, en el pla $x + y = 0$ es compleix $f_y + f_z - f_x = 0$. Fent servir 3 veiem que aquesta condició, traduïda a les noves coordenades, és equivalent a $g_v = 0$ en els punts del pla $u = 0$. A partir de 6 tenim que $g_u(u, v, w) = -\frac{1}{4}uvw + A_v(v, w)$. Per tant, per tots els punts que compleixen $u = 0$ tenim que $A_v(v, w) = 0$, i per tant que A només depèn de w.

Sabem també que $f = 0$ restringida als punts del pla $x = 0$. Traduït a les noves coordenades, $g = 0$ als punts del pla $v = u + w$. Per tant, per tot $u, w \in \mathbb{R}$ es compleix

$$-\frac{1}{8}uw(u+w)^2 + A(w) + B(u, w) = 0,$$

i per tant la solució que busquem és $g(u,v,w) = \frac{1}{8}uw\left((u+w)^2 - v^2\right)$.

Per veure que és única considerem dues potencials solucions, g_1 i g_2 i la seva diferència $h = g_1 - g_2$. Per linealitat tenim que h compleix $h_{uv} = 0$. Això ens dóna que $h = A + B$ amb $A_u = B_v = 0$. La funció h clarament també compleix les condicions inicials que compleixen g_1 i g_2. Així tenim, que en el pla $u = 0$, $h_v(0,v,w) = A_v(v,w) = 0$, per tant que A només depèn de w. Per la segona condició, sabem que h és nul·la restringida als punts que compleixen $v = u + w$. És a dir $h(u, u+w, w) = 0$ per tot $u, w \in \mathbb{R}$. Però com que h no depèn de v concloem que h és idènticament zero i per tant $g_1 = g_2$, com volíem.

Problema 2

Problema 3

Sen's demana calcular el volum de la intersecció entre l'interior de l'el·lipsoide d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i el semiespai donat per

$$Ax + By + Cz \leq D.$$

Observem que podem fer un canvi de coordenades per a reduir al problema al càlcul del volum d'un casquet esfèric. Concretament el canvi que fem servir és el definit per

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right). \end{aligned}$$

Si denotem les noves coordenades per (u,v,w) tenim que ara l'el·lipsoide té equació $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ i ja no és un el·lipsoide sino que és una esfera. L'equació del semiespai es transforma en $Aau + Bbu + Ccw \leq D$. És clar que H és una bijecció lineal i per tant un difeomorfisme. Calcular-ne la inversa és immediat i tenim que el jacobiá de H^{-1} és $J_{H^{-1}} = abc$. Així doncs, pel teorema del canvi de variable tenim que si denotem per A el conjunt del qual en volem calcular el volum:

$$m(A) = \int_A \mathbf{1}_A = \int_{H(A)} \mathbf{1}_{H(A)}\, |J_{H^{-1}}| = |abc| \int_{H(A)} \mathbf{1}_{H(A)} = |abc|\, m(H(A)). \tag{8}$$

Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que a, b i c són reals positius.

La regió de la qual hem de calcular el volum ara, $H(A)$ és un casquet esfèric. El volum, V, d'un casquet esfèric d'una esfera de radi r està donat per

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h), \tag{9}$$

on h és l'alçada del casquet. En el nostre cas, $r = 1$. Ens serà útil reescriure 9 en funció de la distància entre el pla que defineix el casquet i l'origen. La distància, d, entre el pla —després del canvi de coordenades— i l'origen ve donada per

$$d = \frac{D}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}. \tag{10}$$

Tal i com la definim, d pot ser negativa o positiva en funció del signe de D. Això distingeix si el pla es troba per sota de l'origen, $d < 0$, o per sobre, $d > 0$. Tenim que h serà més petita que 1 quan $d < 0$, i de fet $h - d = 1$. Així doncs, substituïnt a 9 obtenim

$$m(H(A)) = \frac{\pi(1 + d)^2}{3}(2 - d) = \frac{\pi}{3}\left(2 + 3d - d^3\right). \tag{11}$$

I finalment, recuperant 8 tenim

$$m(A) = \frac{\pi}{3}abc(2 + 3d - d^3) \tag{12}$$

amb d definida com a 10. Ometem el valor absolut ja que, tal i com hem indicat abans, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a, b, c \geq 0$.

Problema 4

Observem que en coordenades cartesianes, podem parametritzar la cardioide que té per equació $r = 1 + \cos\varphi$ com

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= (1 + \cos\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) &= (1 + \cos\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

amb $\varphi \in (0, 2\pi)$. Per a parametritzar la superfície S que resulta quan la cardioide gira al voltant de l'eix x introduïm un nou paràmetre θ, que representarà l'angle de rotació. Com que la cardioide és simètrica, només ens cal la secció que correspon a $\varphi \in (0, \pi)$. Podem parametritzar S mitjançant una funció $H\colon (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ amb

$$H(\varphi, \theta) = ((1+\cos\varphi)\cos\varphi, (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\theta, (1+\cos\varphi)\sin\varphi\sin\theta). \tag{14}$$

És clar que H és un difeomorfisme en la seva imatge, i per tant defineix S com una varietat regular. Per ser rigurosos, amb aquesta parametrització ens deixem tot un arc del cardioide, que són tots els punts amb $\theta = 0$. Ara bé, a l'hora d'integrar no cal que ens preocupem ja que aquest conjunt té àrea nul·la. Si prenem com a domini de la parametrització $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ obtenim tota la superfície.

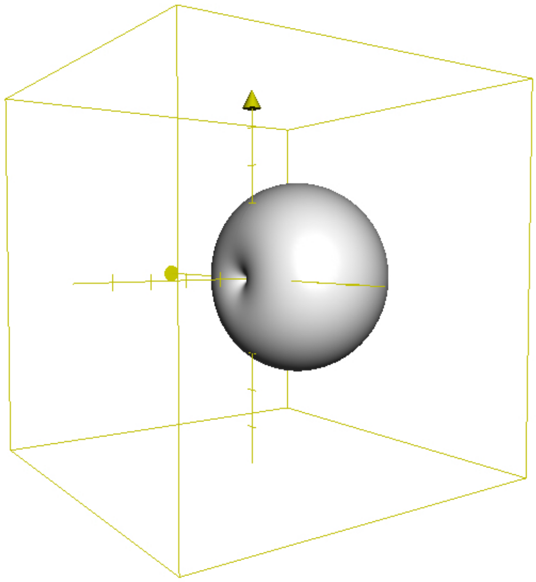

Figura 1: Resultat de la parametrització donada per 13

Per calcular l'àrea d'una superfície donada per una parametrització hem de trobar l'element d'àrea i integrar-lo en el domini de la parametrització. Ara bé, podem aprofitar que S no és una varietat qualsevol, sino que és una superfície de revolució. En general, l'element d'àrea de la superfície de revolució que resulta de rotar l'arc $\gamma(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), 0)$ al voltant de l'eix x és

$$dA = y(\varphi) \, \|\dot{\gamma}(\varphi)\| \, d\varphi \, d\theta = y(\varphi) \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} d\varphi \, d\theta. \tag{15}$$

A més, l'arc γ està donat en coordenades polars, així que és de la forma $\gamma(\varphi) = r(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ i per tant $\|\dot{\gamma}(\varphi)\| = \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}$. Així doncs, l'àrea de S, és a dir la mesura 2-dimensional de S és

$$\begin{aligned} m_2(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin\varphi^2}\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi\,d\theta \\ &= -2\pi\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^{3/2}\sin\varphi\,d\varphi \\ &= \left[-\frac{4\pi\sqrt{2}}{5}(1+\cos\varphi)^{5/2}\right]_0^{\pi} = \frac{32\pi}{5} \end{aligned}$$

Observem que el punt $\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}),\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\right)$ és precisament la imatge de $\varphi=\pi/4$ al cardioide. Així doncs, l'òrbita d'aquest punt quan fem girar el cardioide per generar S és el conjunt de punts de la forma $H(\pi/4,\theta)$ amb $\theta\in[0,2\pi]$. Si volem calcular el pla tangent a S en qualsevol d'aquests punts, cal que avaluem les derivades parcials de H en aquests punts. Tenim

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)=\partial_\varphi H(\varphi,\theta)=\begin{bmatrix}-\sin\varphi(1+2\cos\varphi)\\(\cos\varphi+\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\sin\theta\\(\cos\varphi+\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\cos\theta\end{bmatrix} \tag{16}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi,\theta)=\partial_\theta H(\varphi,\theta)=(1+\cos\varphi)\begin{bmatrix}0\\\sin\varphi\cos\theta\\-\sin\varphi\sin\theta\end{bmatrix}. \tag{17}$$

El pla tangent a una superfície regular donada per una parametrització està generat per les derivades parcials de la parametrització. En els punts de l'òrbita que estem considerant —és a dir, els punts amb $\varphi=\pi/4$— el pla tangent en funció de l'angle θ, $\pi(\theta)$, està donat, com a subvarietat afí per

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &= H(\pi/4,\theta)+\left\langle\frac{\partial}{\partial\varphi}(\pi/4,\theta),\frac{\partial}{\partial\theta}(\pi/4,\theta)\right\rangle \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1,\sin\theta,\cos\theta) \\ &\quad+\left\langle\left(-\left(1+\sqrt{2}\right),\sin\theta,\cos\theta\right),(0,\cos\theta,-\sin\theta)\right\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

Al pas 18 s'ha dividit la parcial respecte de θ per $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$ i la parcial respecte de φ s'ha multiplicat per $\sqrt{2}$. Fer això no afecta l'àlgebra lineal i alleugereix la notació.

Si volem donar una equació pel pla, observem que el vector

$$u = \left(1, \left(1+\sqrt{2}\right)\sin\theta, \left(1+\sqrt{2}\right)\cos\theta\right)$$

és de l'ortogonal de $\pi(\theta)$. Per tant, l'equació del pla tangent és:

$$\left\langle u\,, (x,y,z) - H(\pi/4,\theta)\right\rangle .$$

Més en detall:

$$x + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)\sin\theta\right)y + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)\cos\theta\right)z = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}. \qquad (19)$$