Segon Lliurament de Càlcul de Diverses Variables i Optimització

Arnau Mas

8 de Gener de 2018

Problema 1

Sen's demana de resoldre una equació diferencial en derivades parcials fent servir un canvi de coordenades. L'equació en qüestió és

$$f_{xx}(x,y,z) - f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z) - 2f_{xz}(x,y,z) = (y+z)(x+z). \quad (1)$$

La solució $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suposarem que és una funció de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. El canvi que sen's proposa ve donat per

$$\begin{aligned} \Psi\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y, y+z, z+x). \end{aligned} \quad (2)$$

Denotem les components de Ψ per u, v i w. És clar que Ψ és una bijecció lineal i per tant un difeomorfisme. Definim $g = f \circ \Psi^{-1}$. D'aquesta manera es compleix $f = g \circ \Psi$ i podem, fent servir la regla de la cadena, reescriure l'equació diferencial en termes de les noves coordenades.

$$\begin{aligned} f_x &= g_u u_x + g_v v_x + g_w w_x = g_u + g_w \\ f_y &= g_u u_y + g_v v_y + g_w w_y = g_u + g_v \\ f_z &= g_u u_z + g_v v_z + g_w w_z = g_v + g_w. \end{aligned} \quad (3)$$

Tornem a derivar:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= g_{uu}u_x + g_{uv}v_x + g_{uw}w_x + g_{wu}u_x + g_{wv}v_x + g_{ww}w_x \\ &= g_{uu} + 2g_{uw} + g_{ww} \\ f_{yy} &= g_{uu}u_x + g_{uv}v_x + g_{uw}w_x + g_{vu}u_x + g_{vv}v_x + g_{vw}w_x \\ &= g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv} \\ f_{zz} &= g_{vu}u_z + g_{vv}v_z + g_{vw}w_z + g_{wu}u_z + g_{wv}v_z + g_{ww}w_z \\ &= g_{vv} + 2g_{vw} + g_{ww} \\ f_{xz} &= g_{uu}u_z + g_{uv}v_z + g_{uw}w_z + g_{wu}u_z + g_{wv}v_z + g_{ww}w_z \\ &= g_{uv} + g_{uw} + g_{wv} + g_{ww}. \end{aligned}$$

I per tant

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} - 2f_{xz} = -4g_{uv}. \quad (4)$$

Així doncs, l'equació diferencial en les noves coordenades és

$$g_{uv}(u,v,w) = -\frac{1}{4}vw. \quad (5)$$

En aquesta forma, podem solucionar 5 de forma immediata per integració:

$$g(u,v,w) = -\frac{1}{8}uwv^2 + A(v,w) + B(u,w), \tag{6}$$

on A i B són funcions arbitràries que compleixen $A_u = B_v = 0$. I en les coordenades originals, la solució és

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{8}(x+y)(x+z)(y+z)^2 + A(y+z,x+z) + B(x+y,x+z). \tag{7}$$

Un cop tenim la solució general podem trobar la solució particular que sen's demana aplicant les condicions inicials. Tenim que, en el pla $x+y=0$ es compleix $f_y + f_z - f_x = 0$. Fent servir 3 veiem que aquesta condició, traduïda a les noves coordenades, és equivalent a $g_v = 0$ en els punts del pla $u = 0$. A partir de 6 tenim que $g_v(u,v,w) = -\frac{1}{4}uvw + A_v(v,w)$. Per tant, per tots els punts que compleixen $u = 0$ tenim que $A_v(v,w) = 0$, i per tant que A només depèn de w ja que no hi ha cap restricció sobre v.

Sabem també que $f = 0$ restringida als punts del pla $x = 0$. Traduït a les noves coordenades, $g = 0$ als punts del pla $v = u + w$. Per tant, per tot $u, w \in \mathbb{R}$ es compleix

$$-\frac{1}{8}uw(u+w)^2 + A(w) + B(u,w) = 0,$$

i per tant la solució que busquem és $g(u,v,w) = \frac{1}{8}uw\left((u+w)^2 - v^2\right)$.

Per veure que és única considerem dues potencials solucions, g_1 i g_2 i la seva diferència $h = g_1 - g_2$. Per linealitat tenim que h compleix $h_{uv} = 0$. Això ens dóna que $h = A + B$ amb $A_u = B_v = 0$. La funció h clarament també compleix les condicions inicials que compleixen g_1 i g_2. Així tenim, que en el pla $u = 0$, $h_v(0,v,w) = A_v(v,w) = 0$, per tant que A només depèn de w. Per la segona condició, sabem que h és nul·la restringida als punts que compleixen $v = u + w$. És a dir $h(u, u+w, w) = 0$ per tot $u, w \in \mathbb{R}$. Però com que h no depèn de v concloem que h és idènticament zero i per tant $g_1 = g_2$, com volíem.

Problema 2

Fixat $x \in \mathbb{R}$ tenim un polinomi de grau 5 en y:

$$x^4y^5 + x^2y^3 + y + x - 1 = 0 \tag{8}$$

que per tant té almenys una arrel. De fet, per tot $x \in \mathbb{R}$ en té exactament una, ja que si considerem la derivada d'aquest polinomi respecte de y tenim

$$5x^4y^4 + 3x^2y^2 + 1 > 1 \tag{9}$$

i per tant el polinomi és estrictament creixent a tot $\mathbb{R}$ i concloem que té una única arrel. Aquesta arrel única, que existeix per a cada $x \in \mathbb{R}$ és el $h(x)$ que busquem.

Per veure que l'assignació $x \longmapsto h(x)$ és infinitament derivable farem ús del teorema de la funció implícita. Definim

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^4y^5 + x^2y^3 + y + x - 1. \end{aligned}$$

Hem demostrat a 9 que la derivada parcial de F respecte de y és estrictament més gran que 1 per tot $x, y \in \mathbb{R}$. Per tant, el gradient de F mai no és nul. Aquestes són les condicions necessàries per, pel teorema de la funció implícita, demostrar que, per tot x, existeix una funció g en un entorn de x tal que $F(x, g(x)) = 0$. Així doncs, com que clarament $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ja que és un polinomi, la funció implícita també és de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Però acabem de demostrar que per tot $x \in \mathbb{R}$ hi ha un únic $y = h(x) \in \mathbb{R}$ tal que $F(x, h(x)) = 0$ i per tant h és la funció implícita que ens garanteix el teorema i per tant $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal i com volíem veure.

Per a calcular el desenvolupament de Taylor de h al voltant de 0 trobarem el valor de les derivades de h fins a ordre 3. Si derivem 8 respecte de x trobem

$$4x^3h(x)^5 + 5x^4h(x)^4h'(x) + 2xh(x)^3 + 3x^2h(x)h'(x) + h'(x) + 1 = 0 \tag{10}$$

i quan avaluem a $x = 0$ trobem $h'(0) = -1$. Observem que a 10 hi apareixen termes amb x de grau major que 2. Com que sempre avaluem a $x = 0$, aquests termes són sempre nuls, ja que quan haguem derivat dos cops per calcular la tercera derivada de h, tindran x amb grau almenys 1. Procedint de la mateixa manera trobem $h''(0) = -2$ i $h'''(0) = 18$. Així, el polinomi de Taylor centrat en zero a ordre tres és

$$p(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(x)}{2}x^2 + \frac{h'''(x)}{6}x^3 = 1 - x - x^2 + 3x^3. \tag{11}$$

Podem aproximar $h(0.1)$ com $p(0.1) = 0.893$.

Per a estimar l'error comès fem servir el teorema del valor mig. Tenim que existeix c entre $h(0.1)$ i $p(0.1)$ tal que

$$F(0.1, h(0.1)) - F(0.1, p(0.1)) = \partial_y F(0.1, c)(h(0.1) - p(0.1)) \tag{12}$$

i per tant

$$\begin{aligned} |h(0.1) - p(0.1)| &= \frac{|F(0.1, h(0.1)) - F(0.1, p(0.1))|}{|\partial_y F(0.1, c)|} \\ &< F(0.1, p(0.1) = 0.00018. \end{aligned}$$

ja que, per 9, $\partial_y F(x, y) > 1$ per tot $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 3

Sen's demana calcular el volum de la intersecció entre l'interior de l'el·lipsoide d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i el semiespai donat per

$$Ax + By + Cz \le D.$$

Observem que podem fer un canvi de coordenades per a reduir al problema al càlcul del volum d'un casquet esfèric. Concretament el canvi que fem servir és el definit per

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right). \end{aligned}$$

Si denotem les noves coordenades per (u, v, w) tenim que ara l'el·lipsoide té equació $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ i ja no és un el·lipsoide sino que és una esfera. L'equació del semiespai es transforma en $Aau + Bbu + Ccw \le D$. És clar que H és una bijecció lineal i per tant un difeomorfisme. Calcular-ne la inversa és immediat i tenim que el jacobiá de H^{-1} és $J_{H^{-1}} = abc$. Així doncs, pel teorema del canvi de variable tenim que si denotem per A el conjunt del qual en volem calcular el volum:

$$m(A) = \int_A \mathbf{1}_A = \int_{H(A)} \mathbf{1}_{H(A)} \, |J_{H^{-1}}| = |abc| \int_{H(A)} \mathbf{1}_{H(A)} = |abc| \, m(H(A)). \tag{13}$$

Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que a, b i c són reals positius.

La regió de la qual hem de calcular el volum ara, $H(A)$ és un casquet esfèric. El volum, V, d'un casquet esfèric d'una esfera de radi r està donat per

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h), \tag{14}$$

on h és l'alçada del casquet. En el nostre cas, $r = 1$. Ens serà útil reescriure 14 en funció de la distància entre el pla que defineix el casquet i l'origen. La distància, d, entre el pla —després del canvi de coordenades— i l'origen ve donada per

$$d = \frac{D}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}. \tag{15}$$

Tal i com la definim, d pot ser negativa o positiva en funció del signe de D. Això distingeix si el pla es troba per sota de l'origen, $d < 0$, o per sobre,

$d > 0$. Tenim que h serà més petita que 1 quan $d < 0$, i de fet $h - d = 1$. Així doncs, substituïnt a 14 obtenim

$$m(H(A)) = \frac{\pi(1+d)^2}{3}(2-d) = \frac{\pi}{3}\left(2 + 3d - d^3\right). \tag{16}$$

I finalment, recuperant 13 tenim

$$m(A) = \frac{\pi}{3}abc(2 + 3d - d^3) \tag{17}$$

amb d definida com a 15. Ometem el valor absolut ja que, tal i com hem indicat abans, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a, b, c \geq 0$.

Problema 4

Observem que en coordenades cartesianes, podem parametritzar la cardioide que té per equació $r = 1 + \cos\varphi$ com

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= (1+\cos\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) &= (1+\cos\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \tag{18}$$

amb $\varphi \in (0, 2\pi)$. Per a parametritzar la superfície S que resulta quan la cardioide gira al voltant de l'eix x introduïm un nou paràmetre θ, que representarà l'angle de rotació. Com que la cardioide és simètrica, només ens cal la secció que correspon a $\varphi \in (0, \pi)$. Podem parametritzar S mitjançant una funció $H\colon (0,\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ amb

$$H(\varphi,\theta) = ((1+\cos\varphi)\cos\varphi, (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\theta, (1+\cos\varphi)\sin\varphi\sin\theta). \tag{19}$$

És clar que H és un difeomorfisme en la seva imatge, i per tant defineix S com una varietat regular. Per ser rigurosos, amb aquesta parametrització ens deixem tot un arc del cardioide, que són tots els punts amb $\theta = 0$. Ara bé, a l'hora d'integrar no cal que ens preocupem ja que aquest conjunt té àrea nul·la. Si prenem com a domini de la parametrització $[0,\pi] \times [0, 2\pi]$ obtenim tota la superfície.

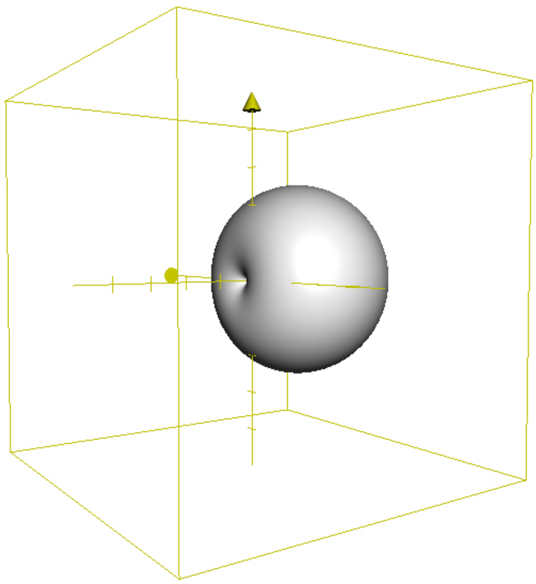

Figura 1: Resultat de la parametrització donada per 18

Per calcular l'àrea d'una superfície donada per una parametrització hem de trobar l'element d'àrea i integrar-lo en el domini de la parametrització. Ara bé, podem aprofitar que S no és una varietat qualsevol, sino que és una superfície de revolució. En general, l'element d'àrea de la superfície de revolució que resulta de rotar l'arc $\gamma(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), 0)$ al voltant de l'eix x és

$$dA = y(\varphi) \, \|\dot{\gamma}(\varphi)\| \, d\varphi \, d\theta = y(\varphi)\sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} d\varphi \, d\theta. \tag{20}$$

A més, l'arc γ està donat en coordenades polars, així que és de la forma $\gamma(\varphi) = r(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ i per tant $\|\dot{\gamma}(\varphi)\| = \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}$. Així doncs, l'àrea de S, és a dir la mesura 2-dimensional de S és

$$\begin{aligned}
m_2(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin\varphi^2} \, d\varphi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi \sqrt{2(1+\cos\varphi)} \, d\varphi \, d\theta \\
&= -2\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^{3/2} \sin\varphi \, d\varphi \\
&= \left[-\frac{4\pi\sqrt{2}}{5}(1+\cos\varphi)^{5/2} \right]_0^{\pi} = \frac{32\pi}{5}
\end{aligned}$$

Observem que el punt $\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\right)$ és precisament la imatge de $\varphi = \pi/4$ al cardioide. Així doncs, l'òrbita d'aquest punt quan fem girar el cardioide per generar S és el conjunt de punts de la forma $H(\pi/4, \theta)$ amb $\theta \in [0, 2\pi]$. Si volem calcular el pla tangent a S en qualsevol d'aquests punts, cal que avaluem les derivades parcials de H en aquests punts. Tenim

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\theta, \varphi) = \partial_\varphi H(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi(1+2\cos\varphi) \\ (\cos\varphi + \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\sin\theta \\ (\cos\varphi + \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\cos\theta \end{bmatrix} \tag{21}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi, \theta) = \partial_\theta H(\varphi, \theta) = (1+\cos\varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{22}$$

El pla tangent a una superfície regular donada per una parametrització està generat per les derivades parcials de la parametrització. En els punts de l'òrbita que estem considerant —és a dir, els punts amb $\varphi = \pi/4$— el pla tangent en funció de l'angle θ, $\pi(\theta)$, està donat, com a subvarietat afí per

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &= H(\pi/4,\theta) + \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi}(\pi/4,\theta), \frac{\partial}{\partial\theta}(\pi/4,\theta) \right\rangle \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1,\sin\theta,\cos\theta) \\ &\quad + \left\langle \left(-\left(1+\sqrt{2}\right), \sin\theta, \cos\theta\right), (0,\cos\theta,-\sin\theta) \right\rangle . \end{aligned} \tag{23}$$

Al pas 23 s'ha dividit la parcial respecte de θ per $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$ i la parcial respecte de φ s'ha multiplicat per $\sqrt{2}$. Fer això no afecta l'àlgebra lineal i alleugereix la notació.

Si volem donar una equació pel pla, observem que el vector

$$u = \left(1, \left(1+\sqrt{2}\right)\sin\theta, \left(1+\sqrt{2}\right)\cos\theta\right)$$

és de l'ortogonal de $\pi(\theta)$. Per tant, l'equació del pla tangent és:

$$\langle u\,, (x,y,z) - H(\pi/4,\theta)\rangle\,.$$

Més en detall:

$$x + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)\sin\theta\right)y + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)\cos\theta\right)z = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}. \tag{24}$$