1. Desenvolupeu en sèrie de Fourier les funcions següents, definides a l'interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

(a) $f(x) = x$.

(b) $f(x) = |x|$.

(c) $f(x) = \cos \frac{2\pi x}{3}$.

(d) $f(x) = \sin 2\pi x$.

2. Desenvolupeu en sèrie de Fourier a $\mathbb{R}$ les funcions

(a) $f(x) = \sin^2(2\pi x)$.

(b) $f(x) = \cos^2(2\pi x)$.

3. Utilitzeu els desenvolupaments de $f(x) = x$ i de $f(x) = |x|$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ per a calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

4. Desenvolupeu $f(x) = x^2$ en sèrie de sinus i sèrie de cosinus a l'interval $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. Feu servir una d'aquestes sèries per a calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció 1−periòdica que val $x \sin(2\pi x)$ en $|x| < \frac{1}{2}$ i utilitzeu-lo per a calcular el valor de les sumes

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2}.$$

6. Considereu el nucli de Fejer,

$$k_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{2\pi i j t}.$$

Si $P(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j e^{2\pi i j t}$ és un polinomi trigonomètric de grau n, demostreu que

$$P'(t) = -2n \int_{-1/2}^{1/2} P(s)k_{n-1}(t-s)\sin n(t-s)ds = -2nP * k_{n-1}(t)\sin(2\pi nt)$$

i deduïu-ne la desigualtat de Bernstein:

$$\|P'\|_\infty \leq 2n\|P\|_\infty.$$

7. Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x^2$ a $[-1/2, 1/2]$ i aplicant la identitat de Parseval, calculeu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

8. Utilitzant la identitat de Parseval demostreu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

9. Demostreu la *desigualtat de Wirtinger.* si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ i $f(a) = f(b) = 0$, llavors

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Indicació. Reduïu-ho al cas $a = 0$, $b = 1$ i utilitzeu Parseval.