Esbós d'un curs de geometria

Jaume Aguadé

Gener benigne. Sota
molt d'aire verd, les coses
avui no es fan esquerpes
ni el lloc és àrid. Mira:
tres llimones, posades
a l'aspre de la llosa.
Perquè es mullen de sol
i pots considerar
sense dubte ni pressa
la mètrica senzilla
que les enllaça, et penses
que signifiquen res?
Mira, i ja han estat prou
per tu.

Gabriel Ferrater, *Tres llimones*

Prefaci

(Prefaci de l'any 2004. Algunes coses han canviat, d'altres no gens.)

Escriure un curs de geometria és un exercici de l'art de l'omissió. Allò que s'hi pot dir, allò que s'hi pot incloure, sempre és una part infinitesimal del corpus immens d'aquesta mil·lenària manera de voler entendre l'espai que anomenem geometria. Sovint, mentre escrivia aquestes pàgines, m'imaginava com fora de senzill escriure un llarg tractat, prou ampli com per a contenir el desenvolupament —minuciós, a pleret— de cada un dels temes que m'abellís considerar. Allà on calgués un lema, o sis o set pàgines de consideracions prèvies, les hi inclouria. Allà on em vingués de gust esplaiar-me en algun tema enginyós o enigmàtic, ho faria sense parar esment en el nombre de pàgines que em calgués utilitzar. No és pas això el que he fet, sinó que he volgut escriure un *curs*, un conjunt de temes que s'han de poder explicar en les quaranta o cinquanta hores de què disposa un professor, un discurs que ha de ser assequible i coherent, engrescador, formatiu. Un repte, en definitiva, força més ambiciós i arriscat.

Escriure, ara i aquí, un curs de geometria és, també, un acte de bel·ligerància. I ho és perquè la geometria dita «elemental» —malgrat la seva importància matemàtica i el seu valor formatiu del pensament— s'ha anat convertint en la ventafocs dels nostres currículums, fins a trobar-se, ara mateix, a un pas de la defunció. En aquesta situació, escriure unes notes com aquestes, equival a posar el dit a la nafra —una de les nafres— del nostre sistema educatiu universitari.

Escriure un curs de geometria és, encara, un acte de supèrbia que espero que gaudeixi de la misericòrdia dels déus. Mentre el seny popular ens exhorta a que *el llegir no ens faci perdre l'escriure*, veiem que hi ha tants llibres de geometria excel·lents que és segur que qualsevol cosa que hom pugui trobar en aquestes notes també podrà trobar-la —dita amb millors paraules, dita amb més detall, dita amb més autoritat— en molts altres llocs. No és fàcil canviar la vida delitosa del lector de geometria per la més àrdua de l'escriptor de geometria. Cal, d'entrada, deixar de llegir llibres de geometria —fora dels autors clàssics—, oblidar el que s'ha après i començar a pensar en les rectes i els triangles com si mai ningú ho hagués fet abans, conscients, però, que res del que pensem o escrivim serà, de cap manera, inèdit.

Un cop fetes aquestes confessions d'interès força dubtós, diguem que aquests fulls que ara esteu començant a llegir pretenen ser un curs de geometria axiomàtica elemental, propi per a ser impartit en un semestre universitari. S'han anat gestant lentament al llarg dels diversos i heterogenis cursos de geometria que l'autor ha impartit en els darrers vint anys, a estudiants de matemàtiques, a estudiants de filosofia, a estudiants de primer curs o de cinquè curs. No són autocontingudes, no són originals. Fan abús de la simplificació, de la imprecisió. Reclamen del lector una complicitat constant i exigeixen, em temo, una lectura concentrada i atenta. No poden ser —ja ens ho va dir Euclides— un camí ral cap a la geometria. Malgrat això, he de dir que espero que aquestes notes tinguin algun petit valor. Així, per exemple, m'he esmerçat en posar èmfasi en allò que jo considero essencial, per davant del que considero accessori, i m'he allunyat tant com he pogut dels arguments llargs, del tedi. He pretès donar prioritat al punt de vista conceptual —filosòfic, en podríem dir— en front del punt de vista tècnic. He intentat ajudar el lector cada cop que hi ha una dificultat, però tan bon punt el camí es torna planer i poc perdedor, l'he deixat caminar segons el seu albir.

Potser fora adient dir unes paraules sobre el registre de llenguatge que he utilitzat en aquestes notes. Avui en dia, la majoria d'articles de recerca que es publiquen han adoptat un estil molt concret, universal, que es caracteritza per un llenguatge hieràtic d'una precisió extrema, per l'absència quasi absoluta del llenguatge heurístic, per l'omissió de qualsevol comentari que no sigui estrictament necessari per a la demostració, per la numeració obsessiva de totes les proposicions, lemes, teoremes, seccions, subseccions, sub-subseccions, *ad infinitum*, i per molts altres «tics» que no cal esmentar perquè són prou ben coneguts dels lectors. Aquest estil tan peculiar —tan desagradable, diria— no va aparèixer fins una època relativament recent i repugnaria —m'atreveixo a dir— als grans autors matemàtics anteriors al darrer terç del segle XX. Malauradament, aquesta manera d'escriure la matemàtica, que en els articles de recerca pot arribar a tenir una certa utilitat, s'ha estès també als textos de tota mena —àdhuc als textos de natura clarament docent— i està donant lloc, en la meva opinió, a una degradació evident del concepte de discurs matemàtic. D'una manera deliberada i, fins i tot, tossuda, m'he apartat tant com he pogut d'aquest estil. Crec que ens convé a tots retrobar un llenguatge matemàtic que recuperi el valor dialèctic del pensament matemàtic i que, sense renunciar al rigor, utilitzi amb desimboltura els recursos que els llenguatges naturals posen al nostre abast. Seguint aquest principi, he prescindit de la numeració excessiva, de la repetició cacofònica de les paraules *teorema* o *proposició*, de l'abús dels símbols, i he donat sempre prioritat al llenguatge natural en front del llenguatge simbòlic. He estat sempre conscient que m'estava adreçant a persones humanes i no pas a compiladors digitals. Deixem, doncs, per a aquests darrers el llenguatge propi de la programació, amb el seu ordre lineal de sentències sintàcticament codificades i fem ús de la riquesa immensa del llenguatge humà.

Un altre instrument clàssic que l'estil actual condemna i que jo m'he esforçat en recuperar és el que constitueixen les notes a peu de pàgina. Aquest llibre n'és ple. D'aquesta manera, el llibre es pot convertir en molts llibres, al gust del lector, segons que aquest decideixi llegir unes determinades notes o ometre-les. La inclusió d'un gran nombre de notes m'ha permès, així, mantenir un llenguatge molt més distès i àgil, ple de lleugeres imprecisions que el lector pot resoldre, en tot moment, acudint a les notes pertinents.

Són moltes les persones que m'han ensenyat geometria i que reconeixeran, en aquestes notes, idees que, en un moment o altre, m'han donat. No vull deixar de citar aquí dues persones de qui he après molt: en Sebastià Xambó i l'Agustí Reventós. També he d'agrair la revisió que ha fet d'aquestes notes en Gil Solanes.

(Afegit el 2017:)

En aquests últims anys, unes veus que semblen molt segures d'elles mateixes reclamen amb gran insistència un ensenyament basat en les «noves tecnologies». Als ulls d'aquestes persones, un curs com aquest, que expliqui Euclides i altres històries antiquíssimes, els sembla una aberració. Aquestes veus han convençut molts responsables acadèmics i, lamentablement, molts estudiants joves. L'autor d'aquestes notes sempre ha cregut que aquest argument de les «noves tecnologies» és una fal·làcia perniciosa. Ara, quan l'autor s'acosta a la jubilació i les «noves tecnologies» avancen a una velocitat inaudita, és quan més segur està que el que cal realment fer és fonamentar l'ensenyament en els conceptes més essencials i perdurables... com la geometria d'Euclides.

Sempre hi ha hagut «noves tecnologies» i la seva característica principal és que es converteixen en «velles tecnologies» a gran velocitat. Quan l'autor d'aquest llibre estudiava el batxillerat, va perdre moltes malaguanyades hores en aprendre les noves tecnologies de l'època, que eren les Taules de Logaritmes i el Regle de Càlcul. I si s'hagués sotmès, ara fa trenta anys, quan ja era professor universitari, a la dèria de les noves tecnologies, hauria fet perdre el temps als seus alumnes ensenyant-los un programa que es deia *Lotus-123* que, segurament, ningú dels qui llegeixin aquest llibre ha sentit anomenar mai.

Quan la tecnologia avança tan de pressa com ho fa ara, només té sentit basar l'ensenyament en la creació i el desenvolupament de les estructures mentals on s'anirà emmagatzemant la informació i les capacitats que, en cada moment futur, serà necessari posseir. Potser amb un exemple s'entendrà millor el que vull dir. Imaginem una competició esportiva que es juga cada cap de setmana. Els atletes s'entrenen durant la setmana i, quan arriba el diumenge, surten a competir. Imaginem que aquesta competició té una normativa ben curiosa: les característiques i les regles del joc de la competició de cada diumenge no es poden conèixer —gairebé no es poden ni imaginar— fins el dissabte al matí. Si haguéssiu d'entrenar aquests atletes, què faríeu? Els faríeu entrenar tota la setmana en l'esport del diumenge anterior —que sabeu segur que no serà l'esport del diumenge proper— o potser els ensenyaríeu a entrenar les capacitats físiques bàsiques, com la força, l'agilitat, la coordinació...? Crec fermament que la situació actual de les matemàtiques s'assembla a la d'aquesta metàfora.

I. Euclides

El concepte de geometria

El 1899 apareix el llibre *Grundlagen der Geometrie* (Fonaments de la geometria) de D. Hilbert, que havia de representar una fita essencial dintre de la història del tractament axiomàtic de la geometria elemental. El llibre comença amb una introducció on, després d'una cita de la *Crítica de la Raó Pura*,[1] podem llegir:

> «La geometria —i també l'aritmètica— necessita, per dur a terme la seva construcció lògica, només un petit nombre de principis senzills. Aquests principis s'anomenen axiomes de la geometria. L'enumeració dels axiomes de la geometria i la investigació de les seves relacions és una tasca que, d'ençà d'Euclides, ha quedat reflectida en un gran nombre de magnífics tractats de la bibliografia matemàtica. Aquesta tasca condueix a l'*anàlisis lògica de la nostra visió*[2] *de l'espai*. (...)»[3]

[1] Quin sentit té el col·locar una frase de Kant a l'inici d'un text que havia de dur a la seva màxima plenitud la concepció «relativista» de la geometria? És ben sabut que Kant defensava el punt de vista aprioríistic de la geometria, que havia de ser entesa, per tant, com un conjunt de veritats prèvies a la intuïció. Aquest punt de vista va ser el culpable, per exemple, de que Gauss no gosés publicar mai les seves recerques sobre la geometria no euclidiana, on quedava clar que l'axioma de les paral·leles, lluny de venir donat a priori, necessitava d'una confirmació experimental. Molt probablement, un millor coneixement de la filosofia kantiana i una anàlisi de la frase citada d'en Kant, podrien aclarir aquest punt. La frase diu: «tot el coneixement humà comença amb intuïcions, passa d'aquí als conceptes i acaba en idees».

[2] *Anschauungen*, que també pot traduir-se per contemplació.

[3] El subratllat és meu. No vull pas dir que Hilbert pretengués donar una *definició* de geometria quan escrivia aquesta frase.

La darrera frase pot interpretar-se com una possible *definició* de geometria. Entendrem, per tant, la geometria com l'anàlisi lògica de la nostra intuïció de l'espai. És clar que es tracta d'una definició poc precisa i clarament extramatemàtica però aquest és el tipus de definició que ens convé en aquest moment. Cal doncs, segons Hilbert, començar a fer geometria a través d'una *contemplació* de l'espai.[4]

L'inici del «moment geomètric»[5] sembla que ha de veure's dificultat per la complexitat de la nostra intuïció de l'espai. La nostra percepció de l'espai és múltiple, fragmentària, fins i tot contradictòria, i no sembla adaptar-se fàcilment a una anàlisi lògica. Veiem una gran quantitat d'objectes petits i grans, fixos o en moviment. La nostra (limitada) capacitat de desplaçament ens permet modificar i complementar les diverses percepcions locals. La subjectivitat de la percepció i les seves limitacions quan considerem objectes extremadament allunyats o extremadament petits, semblen obstacles insuperables que ens allunyen del «món real». Podríem encara parlar dels problemes filosòfics clàssics sobre el moviment, el canvi, la possibilitat d'un contínuum espacial, el temps... Però no és pas d'això del que es tracta. La geometria no és pas una teoria del coneixement ni una teoria de la percepció. És una anàlisi lògica de les diverses percepcions espacials i de les relacions entre elles. Les limitacions de la nostra intuïció i el nostre desconeixement essencial del «món real» (sigui quin sigui el sentit que es doni a aquestes paraules) no són impediments per fer geometria, sinó que ens mostren que:

I. Hi ha moltes geometries, com hi ha moltes intuïcions de l'espai.

II. Prèviament al desenvolupament de la geometria, cal extreure de la nostra intuïció de l'espai un petit nombre de trets fonamentals sobre els quals basarem la nostra anàlisi lògica.

Geometria elemental i axiomàtica

Tal i com acabem de dir, si volem construir una geometria ens cal, en primer lloc, prendre de la nostra intuïció de l'espai un petit nombre d'objectes bàsics i un petit nombre de relacions bàsiques que aquests objectes poden tenir entre ells. La *geometria elemental* pren com a objectes bàsics els de *punt,*

[4]Aquí la paraula espai no s'ha d'entendre en el sentit astronòmic o cosmològic, ni com a sinònim d'univers.

[5]Aquí estic pensant en els diversos *moments* que Joan Maragall ens descriu a l'*Elogi de la Poesia*. El moment geomètric seria aquell on els diversos objectes ens interessarien d'acord amb les relacions posicionals que es podrien establir entre ells.

recta i *pla* i com a relacions bàsiques les relacions anomenades d'*incidència*, que són del tipus: el punt x és a la recta r, les rectes r i r' es tallen, etc. Més endavant, és clar, serem molt més precisos sobre aquest punt.

No ens cal dir res sobre la «naturalesa» dels objectes ni sobre el «significat» de les relacions.[6] Preguntar-se què és un punt o bé què vol dir que un punt està sobre d'una recta, és no haver entès de què va el joc.[7] Es tracta d'analitzar la nostra intuïció de l'espai, la qual pot ser, en un moment donat, que a l'espai *hi ha* punts, rectes i plans, els quals poden estar en unes certes relacions entre ells. No ens importen la «realitat» o l'«existència real» de les rectes. El que sí que cal, un cop donats els objectes i les relacions, és establir el que seran les regles del joc i que, de manera implícita, ens donaran l'únic significat vàlid que els objectes i les relacions poden tenir per a nosaltres.[8] Cal fixar els *axiomes de la geometria.*

Els axiomes seran un conjunt relativament petit de normes d'obligat compliment per als nostres objectes i les nostres relacions. Aquestes normes, tal i com ha passat amb els objectes i les relacions, seran abstraccions obtingudes a partir d'una certa intuïció de l'espai. Tampoc no ens preguntem pel seu significat ni pel motiu de la seva necessitat. Fins i tot aquesta necessitat és ben il·lusòria perquè, de la mateixa manera que les diverses facetes de la nostra intuïció ens duen a poder escollir diversos conjunts d'objectes sobre els quals basar la nostra geometria, també l'elecció dels axiomes és un acte totalment lliure. Posarem un exemple que tindrà importància més endavant. Situem-nos sobre d'un pla i considerem les diferents línies rectes que conté el pla. Donades dues rectes i movent-nos sobre el pla, podrem, en general, arribar en un punt on aquestes dues rectes es tallen. En algun cas, però,

[6] Aquí ha de quedar ben clara la distinció entre el punt de vista del filòsof i el punt de vista del matemàtic. Per a aquest segon, la referència al «món real» o a la «realitat» no forma part del discurs. El discurs matemàtic es situa a mig camí entre el misteri de la nostra consciència i el misteri de la realitat, en un lloc «segur» que, potser d'acord amb Hilbert, podríem anomenar el «full de paper». No es tracta de la intuïció ni de l'estructura del cervell, sinó d'una anàlisi lògica sobre conceptes als quals, prèviament, hem tret el(s) significat(s). Aquesta és la minsa parcel·la de coneixement que ens hem reservat els matemàtics, a tall de minúscul cau on ens podem sentir, potser il·lusòriament, segurs. Si ens imaginem un filòsof com si fos un químic que està treballant en el seu laboratori, el matemàtic seria, potser, l'ignorant ajudant que, als vespres, endreça, d'acord amb les mides dels diversos pots, les inconegudes substàncies que contenen.

[7] Hilbert deia que el seu llibre seguiria essent totalment correcte (encara que ridícul) si substituíssim arreu les paraules punt, recta i pla per taula, cadira i gerra de cervesa.

[8] Algú que conegui la geometria analítica podria respondre a la pregunta «Què és un punt?» dient que un punt és una terna de nombres reals (x_0, x_1, x_2). Això és identificar l'espai amb $\mathbb{R}^3$. Segons el nostre concepte de geometria, això és plenament vàlid i significa que la nostra intuïció de l'espai ens l'assimila a $\mathbb{R}^3$. En aquest cas, però, ja no hi ha lloc per dur a terme cap anàlisi lògica! Certament, no és aquest el punt de vista que adoptarem aquí.

tot i que visualment veurem ben clar que les dues rectes convergeixen cap un punt comú situat a l'horitzó, no ens serà possible de desplaçar-nos fins aquest punt. A la vista d'aquesta situació, som lliures de prendre diverses opcions, com ara:

I. Bandejar del nostre discurs el punt al qual no podem arribar i postular l'existència de rectes que no es tallen.

II. Donar més importància a la nostra intuïció visual i afirmar que dues rectes d'un pla sempre es tallen.

Aquestes dues eleccions, contradictòries entre sí, són, ambdues, plenament vàlides i donen lloc a diverses geometries importants.

Un cop fixats els objectes, les relacions i els axiomes, la tasca del geòmetra serà la d'obtenir teoremes, és a dir, conseqüències lògiques dels axiomes. Aquests teoremes ens informaran sobre el comportament dels objectes i, per tant, sobre l'estructura lògica de la particular intuïció de l'espai que hem pres com a punt de partida.

Els *Elements* d'Euclides

Històricament, el primer exemple de tractament axiomàtic de la geometria que ens ha arribat va ser el d'Euclides.[9] Els *Elements de geometria* d'Euclides, escrits cap a l'any 300 a. C. són un conjunt de tretze llibres on, a partir d'una axiomàtica que ha esdevingut clàssica, s'obtenen una llarga sèrie de teoremes de geometria elemental —i d'altres disciplines, principalment aritmètica—, per un procés que, a partir dels axiomes, es desenvolupa d'una manera rigorosament lògica (vegeu, però, el que direm més endavant).

Analitzem breument el contingut d'aquests tretze llibres. El *llibre* I comença amb una llarga sèrie de *definicions*[10] seguides de cinc postulats i

[9] Ben poc és el que sabem sobre Euclides. Procle va dir que recopilà molts del teoremes d'Èudox, en va perfeccionar d'altres de Teetet i va demostrar irrefutablement el que els seus predecessors havien provat de manera imperfecte. També ens consta que un cop Ptolemeu (Ptolemeu I, dit *soter*) va preguntar-li si hi havia un camí més curt que el dels *Elements* i Euclides va respondre que no hi havia cap «camí reial» per arribar a la geometria. Joan Estobeu ens diu que, quan un estudiant va pregunta a Euclides què hi guanyava aprenent geometria, Euclides va dir al seu esclau: «Dóna tres monedes a aquest home, puig li cal treure benefici de tot allò que aprèn». Poca cosa més sabem sobre Euclides, el qual, fins el segle XV, va ser confós amb el filòsof Euclides de Mègara. (Un bon argument per a un conte d'en Borges, oi?)

[10] Respecte al nombre de definicions, teoremes, etc., hi pot haver variacions entre les diverses edicions, degudes a les alteracions i interpolacions produïdes per editors i comentaristes de l'obra d'Euclides.

cinc *nocions comunes*. A continuació hi ha un seguit de 48 proposicions referides a: (1) propietats dels triangles; (2) teoria de les paral·leles —incloent la suma dels angles d'un triangle— i (3) àrees de triangles i paral·lelògrams i el teorema de Pitàgores.

El *llibre* II comença amb dues definicions i conté catorze proposicions que tracten de relacions entre àrees. Per exemple, conté la demostració geomètrica de $a(b+c) = ab + ac$.[11] El *llibre* III conté onze definicions relatives a la circumferència i tretze proposicions sobre circumferències, tangents, etc. El *llibre* IV tracta de polígons inscrits i circumscrits a la circumferència. El *llibre* V desenvolupa la teoria de les proporcions i dels incommensurables. El *llibre* VI comença definint figures semblants i, en general, aplica la teoria de les proporcions a les figures geomètriques. El *llibre* VII està dedicat a l'aritmètica dels nombres enters i conté, entre d'altres, els conceptes de m. c. d. i m. c. m. i l'anomenat algorisme d'Euclides per calcular el m. c. d. El *llibre* VIII estudia les progressions geomètriques, mentre que el *llibre* IX estudia els nombres primers, demostrant, entre d'altres coses, que n'hi ha una infinitat. El *llibre* X estudia els nombres irracionals de la forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ i demostra la irracionalitat de $\sqrt{2}$. També estudia els nombres pitagòrics. Els *tres llibres restants* estudien la geometria dels sòlids, acabant els *Elements* amb les propietat dels cinc sòlids platònics.[12]

Aquesta monumental obra és un dels llibres més importants de la nostra cultura.[13]

L'axiomàtica d'Euclides

La primera definició del primer llibre d'Euclides diu: «Un punt és allò que no té parts». Això sembla contradir el que hem afirmat sobre que la noció d'un punt serà una noció bàsica, sobre la naturalesa de la qual no cal dir-ne res. Cal, però, fer algunes observacions:

[11] Recordem que l'àlgebra euclidiana és sempre geomètrica, és a dir, el producte de dues quantitats dóna una quantitat d'una espècie diferent: una àrea. Aquest punt de vista va dificultar moltíssim el desenvolupament de l'àlgebra. Pensem, per exemple, en la dificultat d'arribar al concepte de polinomi.

[12] És a dir, els cinc únics políedres regulars: tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosàedre. Segons l'opinió de Procle, la construcció dels cinc sòlids platònics era la finalitat principal d'Euclides en escriure els *Elements*. Sembla difícil estar totalment d'acord amb això.

[13] No és aquest el lloc adient per establir cap ranking dels llibres «més importants» de la nostra cultura. El que sí que és ben segur és que, com a llibre de text, no n'hi ha hagut cap altre amb una validesa més perdurable que els *Elements*.

1. No hem d'entendre les definicions d'Euclides en el sentit modern de la paraula, sinó que cal situar-nos en un punt de vista platònic i creure en un món on habiten els arquetipus de les coses: *el* punt, *el* cavall, etc. Les «definicions» d'Euclides pretenen fer «recordar» aquests arquetipus que havíem vist, potser, en una altra existència.

2. No totes les definicions són igualment objectables. Hi ha autèntiques definicions, quan diu, per exemple, que un triangle isòsceles és el que té només dos costats iguals, o que les paral·leles són les rectes que, jaient sobre un mateix pla, no es tallen, etc.

3. Dir que un punt és allò que no té parts, no ve a ser com dir que el concepte de punt és un concepte primitiu?

Després de les definicions segueixen els *axiomes*. Els cinc axiomes d'Euclides diuen:

I. D'un punt qualsevol a un punt qualsevol es pot traçar una (única[14]) recta.[15]

II. Tot segment es pot prolongar indefinidament.

III. Amb centre un punt qualsevol i radi qualsevol, es pot dibuixar una circumferència.

IV. Tots els angles rectes són iguals.

V. Si una recta, que talla dues rectes, fa els angles interiors del mateix costat més petits que dos rectes, aquestes rectes, convenientment prolongades, es tallaran pel costat on els angles són més petits que dos rectes.[16]

Segueixen les anomenades nocions comunes, del tipus de «dues magnituds iguals a una tercera són iguals entre sí», etc., que no discutirem aquí.[17]

Cal fer els següents comentaris als axiomes anteriors. El primer axioma és molt clar i representa la propietat essencial del nostre concepte de recta. Entre totes les línies que uneixen dos punts, n'hi ha una i només una que es pot anomenar recta. És perfectament admissible el negar-se a postular

[14]Euclides no diu que hagi de ser única, però després utilitza l'axioma primer com si hi constés la paraula «única».

[15]Euclides no pensa en una recta «infinita» sinó en el que en diríem un segment.

[16]Al llibre I, Euclides considera només geometria plana.

[17]L'anàlisi d'aquestes «nocions comunes» és, tanmateix, molt interessant, potser més des d'un punt de vista filosòfic que des d'un punt de vista matemàtic.

aquest fet, doncs ja hem dit que la nostra intuïció de l'espai és múltiple i complexa, però, aleshores, la geometria que obtindrem difícilment serà una *geometria elemental*.

Quan considerem l'axioma II ens adonem que l'axiomàtica d'Euclides no és prou precisa a l'hora d'establir clarament quines són les relacions bàsiques. Què vol dir prolongar un segment? Euclides no ho defineix, però es podria fer de la següent manera. Suposem que tenim un segment de recta AB y que el volem prolongar pel costat de B. Podem entendre això en el sentit de que volem trobar un o més punts C, diferents de B, tals que, respecte de B, estiguin a un costat diferent del costat que conté A. És a dir, el concepte de prolongar una recta té un sentit clar si admetem l'existència d'una certa *relació d'ordre* entre els punts d'una recta, de manera que tingui sentit parlar, per exemple, dels dos costats d'una recta respecte d'un punt. Euclides no postula l'existència d'aquesta relació d'ordre, ni n'axiomatitza el seu comportament, tot i que, indirectament, l'utilitza a les demostracions.

El concepte de prolongar una recta.

La noció de circumferència, que apareix a l'axioma III, necessita el concepte de segments equivalents. Aquest concepte és fonamental a tota l'obra d'Euclides, però els axiomes que verifica aquesta relació d'equivalència o *congruència* de segments no apareixen ben identificats.

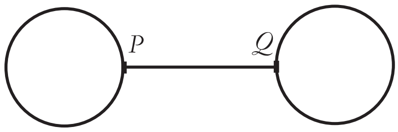
Per tal d'entendre l'axioma IV, cal recordar la definició d'angle recte que dóna Euclides: angle recte és aquell que és congruent al seu adjacent. En certa manera, podem considerar la inclusió d'aquest axioma com un error. En efecte, com veurem més endavant, si disposem d'una bona axiomàtica que inclogui els conceptes d'ordre i congruència, la igualtat dels angles rectes és un teorema relativament senzill.[18]

El punt més important de l'axiomàtica d'Euclides, tant des d'un punt de vista històric com de cara al desenvolupament de la geometria, és la inclusió del cèlebre cinquè postulat, que discutirem a l'apartat següent.

A partir de l'axiomàtica que hem comentat, Euclides desenvolupa el corpus complet de la geometria clàssica: teorema dels angles exteriors, criteris de congruència de triangles, suma dels angles d'un triangle, teorema de Tales, teorema de Pitàgores, àrea, volum, etc. L'exposició és impecable, llevat

[18] Aquest comentari és excessivament simplista. Una anàlisi seriosa de l'axioma quart ens demostraria que la seva inclusió a la llista d'axiomes no és un fet banal. En paraules d'A. Reventós, geòmetra estudiós de l'axiomàtica d'Euclides, «l'axioma quart és l'axioma del *moviment*». Vegeu el seu treball *El moviment a la geometria*, Butl. Soc. Cat. Mat., 1995.

dels problemes que ja hem comentat (referents a les nocions de congruència i ordre) i llevat que, ja des de la primera proposició del primer llibre, utilitza sense demostració l'existència de certs punts d'intersecció de circumferències, o d'una recta i una circumferència. Per exemple, quan, per construir sobre el segment PQ un triangle equilàter (proposició primer del llibre primer dels *Elements*), pren el punt d'intersecció X de la circumferència de centre P que passa per Q i la circumferència de centre Q que passa per P. Qui ens assegura l'existència d'aquest punt?



Intent fallit de construcció d'un triangle equilàter

Pensem, d'altra banda, en la geometria ordinària del pla racional $\mathbb{Q}^2$. En aquest pla, la diagonal del primer quadrant no talla la circumferència unitat. Veiem clar, doncs, que la geometria d'Euclides necessita uns *axiomes de continuïtat*.[19]

Malgrat aquestes mínimes crítiques, l'obra d'Euclides és un monument intel·lectual de primera magnitud. Entre els seus grans mèrits podem fer esment d'aquests:

- El reconeixement de la necessitat del mètode axiomàtic com a consubstancial al concepte matemàtic de «demostració», i la immensa perfecció de tota l'estructura deductiva de l'obra.
- La inclusió genial del cinquè postulat.
- La superació de les mancances del nombre. Era ben sabut que els nombres no podien resoldre el problema de la mesura de les longituds, les àrees o els volums. Malgrat això, Euclides es capaç de desenvolupar de manera completa la seva geometria sense haver de recórrer (gairebé mai[20]) a processos infinits.
- La intel·ligent manera com esquiva les apories del moviment, de l'infinit, i altres problemes filosòfics.

[19] Per a més informació sobre aquest punt tant interessant, vegeu la nota 44 del capítol II.
[20] Només quan aborda el problema del volum.

El cinquè postulat d'Euclides

L'axioma v és relativament singular. Mentre els altres axiomes són d'una «evidència» total, aquest és força complex i requereix un cert esforç de comprensió. Sorgeixen immediatament dues preguntes:

a) Respon realment l'axioma v a la nostra intuïció de l'espai?

b) No serà, potser, l'axioma v una conseqüència dels altres axiomes?

En primer lloc, diguem que l'axioma v es pot substituir per un altre d'equivalent,[21] però de comprensió més fàcil: «Per un punt que no pertany a una recta hi passa una única paral·lela a la recta». És per això que aquest axioma s'anomena també axioma de les paral·leles. Veiem, doncs, que aquest axioma sí que respon a *una certa* concepció de l'espai. Quan imposem l'axioma v estem fent una elecció molt important. Mentre que els altres axiomes es limiten a dir-nos que el món és essencialment lineal o, millor dit, que volem estudiar geometria elemental, aquest axioma, com veurem més endavant, tria un particular model d'espai, el *model euclidià*. Cal que quedi ben clar que aquesta elecció és totalment gratuïta i independent del «món real» —on, d'altra banda, l'axioma v *no* es verifica[22]—. Això que estem dient sembla indicar que la resposta a la pregunta b) d'abans és no. En efecte, tot i que van caldre molts segles per arribar a veure-ho clar, Euclides tenia raó quan va incloure l'axioma v a la seva llista d'axiomes de la geometria.[23] Aquest axioma és *independent* dels altres quatre (fins i tot convenientment perfeccionats) en el sentit de que no existeix cap demostració de l'axioma v que utilitzi només els altres quatre axiomes. Durant segles, el «problema» del cinquè postulat d'Euclides ha preocupat a nombrosos matemàtics (i filòsofs!) i la història dels desenvolupaments de les idees que van dur a la demostració de la independència del cinquè postulat respecte dels altres és certament molt interessant, però no la discutirem pas ara. Diguem

[21] Una certa proposició A direm que és equivalent a l'axioma v quan A es pot demostrar utilitzant els axiomes i, ii, iii, iv, v i també l'axioma v es pot demostrar utilitzant els axiomes i, ii, iii, iv i la proposició A, presa com a axioma. En aquest cas, però, tot això que estem dient és necessàriament imprecís, perquè ja hem dit que l'axiomàtica d'Euclides és imperfecta. Les nostres afirmacions s'han d'entendre en el sentit de que són certes en una bona teoria axiomàtica que perfeccioni la d'Euclides.

[22] Atenció! Aquesta frase és, en sentit literal, incorrecta. No sabem res sobre el «món real». El que vull dir és que els models que més acuradament descriuen l'espai físic (teoria de la relativitat, etc.) es basen en geometries que, no sols no verifiquen l'axioma v, sinó que no són pas «elementals».

[23] És lògic pensar que Euclides era conscient de la singularitat del seu cinquè postulat. Quan llegim els *Elements* ens adonem que sembla com si Euclides retardés al màxim la utilització del postulat polèmic: no l'empra fins a la proposició 29 del primer llibre.

només que hom cercava una demostració del cinquè postulat i, en molts casos, el que s'obtenia era una prova del cinquè postulat que utilitzava algun nou axioma que, inadvertidament, era donat per vàlid. Aquest tipus de demostracions no estan desproveïdes d'interès perquè, si més no, han permès d'obtenir una bona sèrie d'axiomes força interessants, tots ells equivalents a l'axioma de les paral·leles.[24] En altres casos, s'actuava per reducció a l'absurd, imposant que el cinquè postulat fos fals. Si bé no s'aconseguia arribar a contradicció, aquestes disquisicions tenen un gran interès perquè els teoremes que s'obtenen són vàlids en una geometria on no es verifiqui el cinquè postulat. Ara sabem que aquesta geometria existeix i s'anomena *geometria hiperbòlica*. Per tant, els primers tractats de geometria hiperbòlica els van escriure els qui no creien en la seva existència.[25]

L'axiomàtica de Hilbert

Hem vist com els *Elements*, malgrat la seva transcendència matemàtica, històrica i filosòfica, malgrat la magnífica col·lecció de teoremes que contenen i malgrat la inclusió genial del cinquè postulat, tenen greus defectes lògics que neixen, principalment, de no fixar amb claredat totes les relacions que es consideren com a primitives, ni tots els axiomes que aquestes relacions verifiquen. Hem trobat a faltar els axiomes que han de verificar les relacions d'*ordre* i de *congruència* i hi hem trobat a faltar uns axiomes de *continuïtat*.

Hilbert, a l'acabament del segle XIX, va voler escriure un tractat on, d'una vegada per sempre, les proposicions de la geometria elemental apareguessin demostrades amb un rigor lògic total, on apareguessin explícitament totes les relacions bàsiques i tots els axiomes que aquestes han de verificar. I

[24] Donem exemples d'axiomes equivalents al cinquè postulat d'Euclides: La suma d'angles de qualsevol triangle val dos rectes; hi ha un triangle on els angles sumen dos rectes; hi ha un triangle on els angles sumen com a mínim dos rectes; hi ha un triangle d'àrea arbitràriament gran; hi ha dos triangles semblants diferents; per tres punts no alineats qualssevol hi passa una circumferència; existeix un rectangle; per un punt interior d'un angle sempre hi passa una recta que talla els dos costats de l'angle.

[25] Un exemple important d'això que diem és el que ens proporciona Saccheri (1667–1733), autor d'un llibre titulat *Euclides vindicat de tot error* on pretén vindicar Euclides veient que la negació del cinquè postulat és contradictòria. No ho aconsegueix pas. És estrany que no sembla que s'adoni que l'autèntica vindicació d'Euclides consisteix en demostrar que el cinquè postulat *és* un postulat i, per tant, la seva negació no és contradictòria! S'ha especulat amb la idea que Saccheri, que pot considerar-se, amb ple dret, com el primer autor d'un tractat de geometria hiperbòlica, creia realment en l'existència d'aquesta geometria. En una obra tan ben fonamentada com la seva, el moment en què afirma —sense cap motiu— que la «hipòtesi de l'angle agut» és absurda, podria ser un afegitó motivat per la por a l'heterodòxia, en una societat que no la perdonava.

no només això, sinó que, a més, quedés clar quins són els axiomes que són necessaris per demostrar cada un dels teoremes importants. Anant molt més lluny que Euclides, Hilbert es planteja també els tres problemes següents:

Independència. Es tracta de veure que els axiomes són independents entre ells, de manera que cap d'ells no és conseqüència dels altres. En particular, l'axioma de les paral·leles, que també apareix a l'axiomàtica de Hilbert, és independent dels altres axiomes.[26]

Compatibilitat. El problema de la compatibilitat apareix tan bon punt considerem la geometria com un sistema axiomàtic abstracte on l'elecció dels axiomes es fa d'una manera lliure. Cal demostrar que els axiomes no es contradiuen entre ells. Mentre es creia que la geometria euclidiana era l'única «autènticament real», aquesta suposada realitat ens reduïa la seva consistència a la del món real, suposadament consistent. Quan eliminem el suport real i considerem la geometria com un sistema on els axiomes són escollits arbitràriament,[27] cal demostrar que aquests axiomes no es contradiuen entre ells.[28]

Completesa. Una teoria axiomàtica es diu que és completa quan, donada una proposició qualsevol, o ella o la seva negació són conseqüència dels axiomes.[29] Un concepte relacionat és el de la categoricitat. Una teoria axiomàtica es diu que és categòrica quan tots els possibles models de la teoria són equivalents. Hilbert demostra que la geometria euclidiana, amb els axiomes de Hilbert, és categòrica i que tots els possibles models són equivalents a l'espai de la geometria analítica ordinària, $\mathbb{R}^3$.

[26] La manera de veure que un axioma A és independent dels axiomes $A_1, \ldots, A_n$ és trobar un *model* on tots els axiomes $A_1, \ldots, A_n$ siguin certs, però no ho sigui l'axioma A. Donar un model vol dir donar definicions dels conceptes bàsics i de les relacions bàsiques. Per exemple, $\mathbb{R}^3$, amb les definicions usuals de punt i recta, és un model de la geometria euclidiana on es verifiquen tots els axiomes d'Euclides.

[27] Aquí «arbitràriament» no vol dir pas a l'atzar, dons és clar que s'han escollit basant-se en motius importants.

[28] Donat que, segons Gödel, sabem que no es pot demostrar que la matemàtica no és contradictòria, entenem que la compatibilitat dels axiomes de la geometria estarà «demostrada» si veiem que una contradicció entre ells implicaria una contradicció a l'aritmètica dels nombres enters, o a la teoria de conjunts, etc.

[29] Per exemple, la teoria de grups no és una teoria completa, perquè cap de les proposicions: «$a + a = 0$ per tot a», «existeix a tal que $a + a \neq 0$», no són conseqüència dels axiomes de grup: Hi ha grups que verifiquen la primera i altres on es compleix la segona. Com que, segons Gödel, l'aritmètica no és completa, la geometria euclidiana tampoc no ho pot ser. Això és el que fa que calgui substituir el problema de la completesa pel de la *categoricitat*.

En el proper capítol estudiarem amb un cert detall l'axiomàtica de Hilbert de la geometria elemental

El Programa d'Erlangen

El punt de vista que hem adoptat per introduir el concepte de geometria no és, de cap manera, l'únic possible ni l'únic que ha tingut una importància històrica. En aquest apartat en discutirem breument un altre que ha jugat un paper essencial en el desenvolupament de la geometria moderna i, també, d'altres parts de la matemàtica. Es tracta de l'anomenat *Programa d'Erlangen*, enunciat per F. Klein el 1872. Les arrels d'aquest punt de vista cal cercar-les, sobretot, a Riemann i, potser, a Gauss.

Plató ens diu que la geometria estudia allò que sempre és. Aquesta permanència pot, però, ser interpretada de dues maneres diferents: o bé com una situació estàtica, o bé com una persistència de l'essència malgrat el moviment. És a dir, a la base de les idees geomètriques hi ha el concepte d'invariància i podem, fins i tot, *definir* les propietats geomètriques d'un objecte com les que resten invariants quan aquest objecte es desplaça a l'espai. Si ho fem així, el concepte de moviment pren una posició central. A partir del moviment poden obtenir-se, de manera natural, els conceptes de congruència d'angles i segments, que ja no seran, per tant, conceptes primitius.[30]

El concepte de *moviment*, però, és molt ampli, de manera que no es veu clar si hi pot haver una sola propietat totalment «geomètrica», en el sentit de ser invariant per *tots* els moviments. Des d'aquest punt de vista, l'elecció de la geometria equival a fer una hipòtesi sobre quins són les moviments permesos. Clarament, aquests tindran una estructura de *grup* i escollir una geometria vol dir escollir un determinat grup de moviments. Segons el Programa d'Erlangen, la geometria és l'«estudi de les propietats de les figures que són invariants per un cert grup de moviments fixat».

La generalitat del programa d'Erlangen és molt gran i el seu concepte de geometria s'adiu amb moltes —totes?— disciplines geomètriques modernes, des de la topologia a la geometria algebraica.[31] Si volem, però,

[30] Tant l'axiomàtica d'Euclides com la de Hilbert sembla que vulguin fugir de la idea de moviment. Quan parlen de segments congruents consideren, principalment Hilbert, aquesta relació com un concepte primitiu, que ens ha estat donat d'entrada. Com podem arribar a aquest concepte de congruència? No sembla que tota mesura ha d'implicar un desplaçament? No sembla natural i gairebé inevitable basar la congruència en la «identitat llevat d'un moviment»? El Programa d'Erlangen desplaça el focus d'atenció dels objectes als seus moviments.

[31] Donar preeminència a les transformacions d'un objecte per sobre de l'essència del propi

fer geometria elemental, caldrà que ens restringim a grups de moviments «lineals». Les diverses geometries (euclidiana, hiperbòlica,...) s'obtindran prenent subgrups apropiats del grup lineal.[32]

Aquest tractament de la geometria és també susceptible d'axiomatització, la qual conduirà a una algebrització de la geometria, on la teoria de grups i la teoria d'invariants ocuparan un lloc central. Malgrat el seu interès, no aprofondirem més en aquesta direcció.

Exercicis

Aquests exercicis són un breu repàs d'algunes nocions de geometria elemental. Recordem que Euclides va dir al rei Ptolemeu I que no hi havia cap «camí reial» per arribar a la geometria: calia seguir pas a pas la llarga sèrie de proposicions encadenades dels Elements. *Com a conseqüència d'això, no és possible resoldre els exercicis d'aquesta llista utilitzant cap drecera, sinó que caldria anar reproduint tots els* Elements. *No es pretén que l'alumne ho faci d'aquesta manera. Es pot (s'ha de) «fer trampa» i resoldre els exercicis aplicant els coneixements bàsics de la geometria d'Euclides —com poden ser els casos de congruència de triangles o el càlcul de l'àrea d'un triangle— sense preocupar-se pels possibles cercles viciosos que, de ben segur, es generaran.*

1. Entendrem per «regle» un instrument que permet, donats dos punts diferents del pla, dibuixar la recta que passa per ells. Qualsevol altra utilització del regle (per exemple, fer-hi una «marca») és fraudulenta. Entendrem per «compàs» un instrument que, donats dos punts diferents A i B, ens permet dibuixar la circumferència de centre A que passa pel punt B. Qualsevol altra utilització del compàs (per exemple, dibuixar una circumferència i, a continuació, dibuixar, amb un altre centre, una circumferència del mateix radi), és fraudulenta.

   Feu les següents construccions utilitzant exclusivament el regle i el compàs.

   (a) Construïu la mediatriu d'un segment.

   (b) Construïu, donada una recta r,

      i. la perpendicular des d'un punt exterior.

      ii. la perpendicular des d'un punt de r.

objecte és una idea central a la matemàtica «moderna». Bourbaki hi veu el germen de la noció d'estructura. És clar que va conduir a l'interès per les *transformacions naturals* i a la teoria de categories.

[32] Per exemple, la longitud d'un segment no és una propietat geomètrica si considerem homotècies, però ho és si només considerem transformacions ortogonals (és a dir, transformacions que conservin el producte escalar de vectors). Més difícil seria explicar en poques paraules quin grup cal prendre per obtenir la geometria hiperbòlica.

iii. la paral·lela per un punt exterior.

(c) Transporteu un segment donat AB sobre una semirecta fixada de forma que el punt A es correspongui amb l'extrem de la semirecta.

(d) Transporteu un angle sobre una semirecta donada i a un costat donat.

(e) Trobeu el centre d'una circumferència donada.

(f) Construïu la recta tangent a una circumferència donada que sigui paral·lela a una recta donada.

(g) Construïu un triangle coneixent un costat i (segments congruents a) l'altura i mitjana relatives a aquest costat.

(h) Construïu un triangle coneixent (segments congruents a) les mitjanes.

(i) Construïu un triangle rectangle coneixent el radi de la circumferència inscrita i que un catet és 3 vegades més llarg que l'altre.

En cada cas, justifiqueu que la construcció és correcta.

2. Siguin A, B i C tres punts d'una circumferència de centre O. Proveu que $2\widehat{ACB} \equiv \widehat{AOB}$.

3. Des d'un lloc, la situació del qual desconeixem, visualitzem 3 cims que podem reconèixer sobre un mapa. Localitzeu el punt d'observació.

4. El concepte de «longitud d'un segment» no forma part de la geometria d'Euclides, perquè el concepte de nombre a la matemàtica clàssica (que ara en diem «nombre racional») és insuficient per descriure les longituds dels segments. Malgrat això, Euclides dóna sentit a la «suma» de segments (que és un altre segment) i al «producte» de segments (que és un rectangle). El concepte d'«àrea» d'una figura tampoc no forma part de la geometria d'Euclides, però Euclides sí que pot parlar de «figures de la mateixa àrea». En aquest context, i amb l'ajuda del regle i el compàs, resoleu aquestes qüestions:

   (a) Definiu suma, producte i quocient de dos segments. Construïu-los.

   (b) Definiu la mitjana proporcional de dos segments. *[En el llenguatge de longituds, això voldria dir que si els segments tenen longituds a i b, la seva mitjana proporcional tindria longitud $\sqrt{ab}$].* Construïu-la.

5. Proveu que en tot triangle, a major costat li correspon menor altura.

6. Proveu que les mediatrius d'un triangle són concurrents al circumcentre.

7. Proveu que les mitjanes es tallen a dos terços de la seva longitud.

8. Proveu que també les altures i les bisectrius són concurrents.

9. Proveu el teorema de Tales de Milet sobre els segments determinats per dues rectes paral·leles sobre un feix de rectes.

10. Donats dos punts A i B i una recta paral·lela al segment AB, trobeu una manera de construir el punt mig del segment AB utilitzant només el regle.

11. Proveu el teorema de Pitàgores.

II. Hilbert

En aquest capítol desenvoluparem una introducció a l'axiomàtica de la geometria elemental, en la línia dels *Grundlagen* de D. Hilbert.

Objectes i relacions

Ja hem dit que la geometria elemental es basa en considerar tres menes d'objectes, anomenats *punts, rectes i plans.* Per tal de simplificar l'exposició de l'axiomàtica de Hilbert, ens limitarem a l'estudi de la *geometria plana*,[33] amb la qual cosa, tot i conservant l'essència de l'obra de Hilbert, reduirem el nombre d'axiomes. Considerarem, per tant, que existeixen dues menes d'objectes, anomenats *punts* i *rectes*, els quals poden presentar entre ells tres relacions:

a) Una relació d'*incidència* entre punts i rectes. Direm, per exemple, que un punt *és* a una recta, o que una recta *passa* per un punt.

b) Una relació d'*ordre* o, millor dit, d'*estar entre*, entre ternes de punts. Direm, per exemple, que el punt A està entre els punts B i C.

c) Una relació de *congruència* entre parelles de punts.[34] Direm, per exemple, que AB és congruent a $A'B'$.

Aquestes relacions verificaran una sèrie d'axiomes que, per tal de sistematitzar l'exposició, es divideixen en cinc grups:[35]

[33]Vegeu la nota 53.

[34]Més endavant exigirem també que aquesta relació de congruència estigui definida entre angles. El concepte d'angle, però, només es pot definir un cop introduïts els axiomes **I** i **II**.

[35]Demano perdó per haver gosat alterar la numeració que Hilbert dóna als axiomes. La correspondència és la següent: Els axiomes I.1 i I.2 de Hilbert formen el nostre axioma **I.1**,

Axiomes d'incidència i d'ordre

Hi ha tres axiomes d'incidència.

I.1 Per dos punts hi passa un única recta.

I.2 Tota recta té com a mínim dos punts.

I.3 Hi ha al menys tres punts no alineats.

A partir d'aquests axiomes ja es pot demostrar el primer teorema següent:

Dues rectes tenen com a màxim un punt en comú. □ [1]

(Prenem el conveni que l'expressió «dues rectes» voldrà dir sempre dues rectes *diferents*. El mateix diem respecte dels punts, etc.)

Hem dit que una de les relacions bàsiques serà aquella en que un punt està entre dos altres punts. Aquesta relació ha de verificar els següents axiomes:

II.1 Si B està entre A i C, aleshores A, B i C estan sobre una mateixa recta, són diferents, i B està entre C i A.

II.2 Donats dos punts A i C, hi ha com a mínim un punt B tal que C està entre A i B.

Observem que aquest axioma ve a ser l'axioma II d'Euclides, que afirma que tot segment es pot prolongar.

II.3 Donats tres punts d'una recta, com a màxim n'hi ha un que està entre els altres dos.

Observem que no postulem que, donats tres punts alineats, sempre n'hi ha d'haver un que estigui entre els altres dos. Això serà, més endavant, un teorema (vegeu la proposició 3).

La relació d'«estar entre» permet definir el concepte de *punts d'un segment*. Un segment serà una parella (no ordenada) de punts. Si els punts són A i B, designarem el segment per AB o, equivalentment, BA. Anomenarem *punts del segment AB* els punts de la recta que passa per A i B tals que

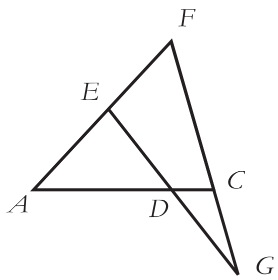
mentre que el I.3 s'ha desdoblat en els nostres **I.2** i **I.3**. Els axiomes I.4-I.8 de Hilbert són axiomes de la geometria de l'espai. Els axiomes del grup **II** romanen invariables. Al grup **III** he permutat els axiomes 1 i 2. Finalment, Hilbert col·loca l'axioma de les paral·leles com a axioma IV, mentre que el grup V està format pels axiomes de continuïtat. M'ha semblat adient el permutar aquests dos grups per tal de que l'axioma de les paral·leles segueixi essent l'axioma cinquè.

estan entre A i B. Els propis punts A i B s'anomenen *extrems* del segment i també direm que formen part del segment AB. Podem ara enunciar l'important *axioma de Pasch*,[36] que és una de les peces clau de l'axiomàtica de Hilbert i l'absència del qual és una de les principals fonts de paralogismes a Euclides. Aquest axioma ve a dir que si una recta entra a un triangle, ha de sortir-ne.

II.4 (Axioma de Pasch) Siguin A, B i C tres punts no alineats i sigui a una recta que no passi per cap d'aquests punts i talli el segment AB. Aleshores a talla el segment AC o el segment BC.

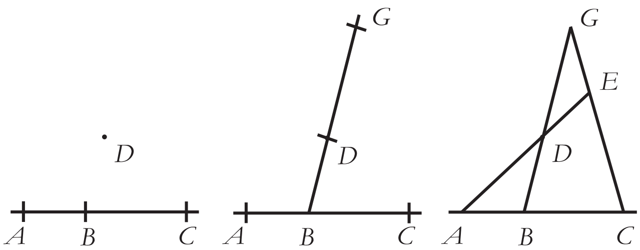
Els axiomes **I** i **II** permeten ja demostrar una sèrie de resultats interessants.

Donats A i C, com a mínim hi ha un punt D entre A i C. [2]



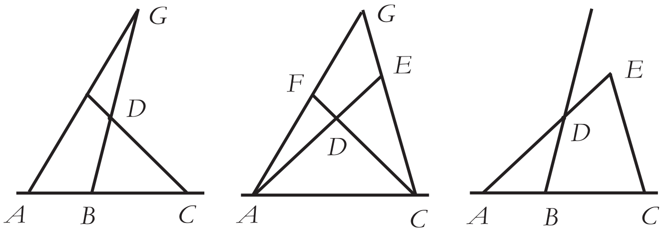
El punt E existeix per l'axioma **I.3**. F i G existeixen per l'aplicació repetida de l'axioma **II.2**. D existeix per l'axioma de Pasch i l'axioma **II.3**. □

Donats tres punts A, B i C d'una recta, sempre n'hi ha un d'ells que està entre els altres dos. [3]



[36] M. Pasch (1843–1931) va ser el primer que va indicar la necessitat i possibilitat d'introduir els axiomes d'ordre. L'axiomàtica de Hilbert és un perfeccionament d'una axiomàtica anterior deguda a Pasch.

D existeix per l'axioma **I.3**. G existeix per l'axioma **II.2**. E existeix per l'axioma de Pasch, F pel mateix motiu.



Si $E = A$ o bé $F = G$, ja hem acabat, perquè obtenim que A està entre B i C o bé C està entre A i B. Si són diferents, tornem a aplicar Pasch al triangle AGE, obtenint que D està entre A i E. Finalment, aplicant Pasch al triangle AEC, obtenim que B està entre A i C. □

La demostració de la següent proposició és similar, si bé més complicada. La deixem com a exercici.

Donats quatre punts d'una recta, sempre es poden designar amb lletres A, B, C i D, de manera que: a) B està entre A i C; b) B està entre A i D; c) C està entre A i D i d) C està entre B i D. □ [4]

Ara ja és fàcil demostrar això:

Entre dos punt d'una recta, n'hi ha infinits. [5]

Podem ara definir els conceptes de *semirecta* i *semiplà*. Donada una recta i un punt A sobre ella, tots els altres punts de la recta es distribueixen en dues classes d'equivalència, anomenats *costats* de la recta respecte de A. Dos punts B i C són al mateix costat si A no està entre B i C. La proposició anterior ens demostra que es tracta d'una relació d'equivalència. Aleshores, una *semirecta* serà, per definició, un punt A, anomenat *vèrtex* i tots els punts d'una recta que passa per A que estan a un mateix costat respecte de A. Anàlogament, si tenim una recta, els punts que no pertanyen a la recta queden classificats en dues classes d'equivalència, si diem que dos punts A i B són equivalents quan el segment AB no talla la recta donada. Novament, l'axioma de Pasch i la proposició anterior impliquen immediatament que es tracta d'una relació d'equivalència. Un *semiplà* serà una recta i tots els punts d'una d'aquestes classes d'equivalència.

Axiomes de congruència

Entre els segments tenim definida una relació de *congruència* —que, sovint, per abús de llenguatge, anomenem d'*igualtat*—, que escriurem $\equiv$. Aquesta relació ha de ser una **relació d'equivalència**[37] i ha de verificar els següents axiomes:

III.1 Siguin a i b dues rectes no necessàriament diferents, A i B punts sobre la recta a, A' un punt sobre la recta b. Fixem un costat de la recta b respecte de A'. Existeix un punt B' sobre aquest costat de b tal que $AB \equiv A'B'$

Aquest axioma és el que ens permet *traslladar* un segment donat sobre qualsevol altra recta, en un sentit prefixat. Observem que no hem postulat la unicitat de B', que serà una conseqüència dels axiomes de congruència. Observem també que AB i BA designen el mateix segment i, per tant, una expressió de la forma $AB \equiv A'B'$ és totalment idèntica a cada una de les expressions $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv A'B'$, $BA \equiv B'A'$.

El següent axioma és el que ens permetrà sumar segments:

III.2 Siguin a i a' dues rectes no necessàriament diferents. Siguin AB i BC segments sobre a que tinguin només un punt en comú. Siguin $A'B'$ i $B'C'$ sobre a' amb la mateixa propietat. Si $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$, aleshores $AC \equiv A'C'$.

Un altre concepte important de la geometria elemental és el concepte d'*angle*. Dintre del present context, el concepte d'angle admet una definició senzilla.

Un *angle* és, per definició, una parella no ordenada de semirectes del mateix vèrtex, que pertanyin a rectes diferents. Observem que no incloem dintre dels angles ni l'*angle nul* (cas de dues semirectes idèntiques) ni l'*angle pla* (cas de dues semirectes diferents, però pertanyents a una mateixa recta). Observem també que dues rectes concurrents donen lloc a *quatre* angles, però dues semirectes del mateix vèrtex determinen un *únic* angle. Tal i com passava amb els segments, les dues semirectes no estan ordenades. Aquestes semirectes s'anomenen *costats* de l'angle. El vèrtex comú d'ambdues és el *vèrtex* de l'angle. Si h i k són els costats d'un angle, designarem aquest angle per $\widehat{hk}$. És clar que $\widehat{hk}$ és el mateix que $\widehat{kh}$.

Els axiomes que hem anat introduint permeten demostrar que un angle divideix els punts del pla (llevat dels de les semirectes que defineixen l'angle) en dues classes: els punts *interiors* i els punts *exteriors*. La definició

[37] Hilbert, que busca sempre un conjunt minimal d'axiomes, només postula que «dos segments congruents a un tercer ho són entre ells».

de punt interior és la següent. Suposem que els costats de l'angle són les semirectes h i k, que pertanyen a les rectes a i b, respectivament. a divideix el pla en dos semiplans i és fàcil veure que k està totalment continguda dintre d'un d'aquests semiplans, diguem-ne H. Anàlogament, sigui K el semiplà que conté h, d'entre els dos semiplans determinats per b. Aleshores, els punts interiors de l'angle són els punts que estan, simultàniament, a H i K. Els punts que no són interiors ni pertanyen als costats, s'anomenen punts exteriors. Els punts dels costats de l'angle també els considerarem punts interiors.

La demostració de la proposició següent és senzilla i l'ometem.

a) Si els extrems d'un segment són punts interiors d'un angle, tot el segment està contingut a l'interior de l'angle. [6]

b) Si una semirecta té el mateix vèrtex que un angle, està totalment continguda a l'interior o a l'exterior de l'angle (llevat, és clar, del vèrtex).

c) Si h i k són els costats d'un angle, H un punt sobre h, K un punt sobre k i l una semirecta del mateix vèrtex que l'angle, continguda a l'interior de l'angle, aleshores l talla el segment HK. □

Postulem ara que la relació de *congruència* també està definida entre els angles i exigim que sigui una relació d'equivalència[38] i que es verifiquin els següents axiomes:

III.3 Donat un angle $\widehat{hk}$ i donada una semirecta k' i un semiplà dels dos que defineix k', existeix un únic angle $\widehat{h'k'}$ tal que $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$ i h' pertany al semiplà.

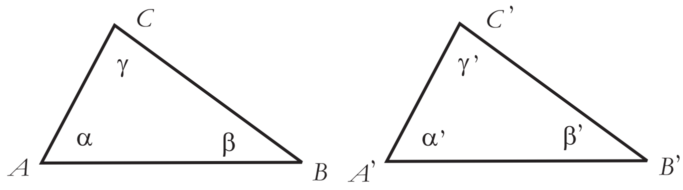
Aquest axioma és l'anàleg de l'axioma **III.1**, però referit a angles. Ens diu que tot angle pot traslladar-se (de manera única) sobre una semirecta fixada, en un costat fixat.

El darrer axioma de congruència és un dels casos clàssics de congruència de triangles, que trobem ja a Euclides.[39] Un *triangle* ve donat per tres punts (no ordenats) no alineats.

[38]Aquí Hilbert observa que n'hi ha prou amb exigir que tot angle sigui congruent a ell mateix.

[39]Aquest axioma no apareix a Euclides. De fet, és un teorema d'Euclides, el teorema 4 del llibre primer. Si Hilbert l'inclou com a axioma és perquè no és possible demostrar-lo a partir dels altres axiomes. En conseqüència, la «demostració» d'Euclides deu estar malament. On és l'error? Resulta que aquest teorema dels *Elements* és un dels pocs on Euclides utilitza un mètode anomenat «superposició»: superposa els dos triangles i veu

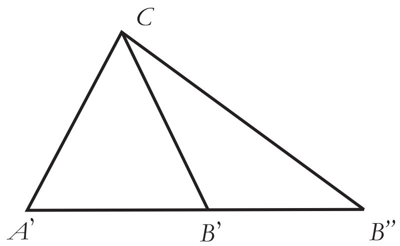
III.4 Considerem els triangles ABC i $A'B'C'$. Si $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$ i $\alpha \equiv \alpha'$, aleshores $\beta \equiv \beta'$.



Aquí és clar que, per exemple, α designa l'angle format per les semirectes que contenen els segments AB i AC, respectivament, i anàlogament amb β, γ, α', β' i γ'.

Recordem que a l'axioma **III.1** no exigíem que B' fos únic. Ara podem demostrar que ho és.

Si $AB \equiv A'B'$ i $AB \equiv A'B''$ i B' i B'' estan al mateix costat respecte de A', aleshores $B' = B''$. [7]



Considerem un punt C, exterior a la recta que conté $A'B'$. Per l'axioma **III.4**, $\widehat{A'CB'} \equiv \widehat{A'CB''}$ i, per la unicitat exigida a l'axioma **III.3**, tenim $B' = B''$. □

Teoremes elementals de la geometria absoluta

L'axiomàtica de Hilbert de la geometria elemental conté més axiomes dels que hem vist als apartats anteriors. En particular, no hem introduït encara l'axioma de les paral·leles. També ens cal, si volem reproduir la geometria d'Euclides, incloure tot un grup d'axiomes anomenats axiomes de continuïtat. No obstant això, la geometria que només utilitza els axiomes anteriors té

que, efectivament, són el mateix. És clar que aquesta operació de superposar no està admesa en els axiomes. El fet que Euclides no l'usi gairebé mai sembla indicar que la seva validesa era discutible. En conclusió, aquest axioma **III.4** està relacionat amb el *moviment*: si fonamentem la geometria en el moviment, l'axioma és un teorema; si fem una geometria *sense moviment*, ha de ser un axioma.

un gran interès, perquè els seus teoremes seran vàlids en un context molt ampli que inclourà tant la geometria euclidiana com la *geometria hiperbòlica* (on l'axioma de les paral·leles no es verifica) i fins i tot altres tipus de geometries, com la geometria no-arquimediana. La geometria que només utilitza els axiomes dels grups **I**, **II** i **III** s'anomena *geometria absoluta*. En aquest apartat demostrarem els teoremes més elementals de la geometria absoluta. És clar que aquests teoremes apareixen ja a Euclides, però, tal com hem dit, les demostracions d'Euclides són, en certs casos, insuficients.

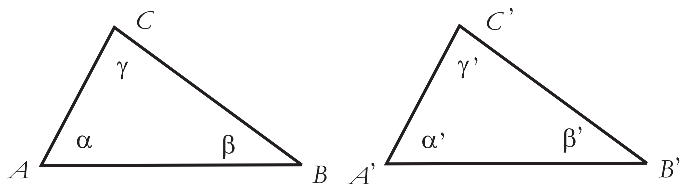
Comencem amb algunes definicions: *angles adjacents* són els que tenen el vèrtex i un costat comú i els altres dos costats són diferents, però estan sobre una mateixa recta; *angles oposats* són els que tenen el vèrtex comú i els seus costats formen dues rectes; *angle recte* és el que és congruent a un adjacent a n'ell;[40] *triangle isòsceles* és aquell que té dos costats congruents. En un triangle, l'angle *oposat* a un costat és el que té per vèrtex el vèrtex del triangle que no pertany al costat.

En un triangle isòsceles, els angles oposats als costats congruents són congruents.[41] [8]

Siguin A, B i C els vèrtex del triangle, amb $AB \equiv BC$. Apliquem l'axioma **III.4** al triangle ABC amb dues ordenacions diferents dels seus vèrtex. $\square$

Deixem com a exercici les demostracions dels criteris de congruència de triangles que enunciem a continuació. Dos triangles direm que són congruents quan puguem ordenar els seus vèrtexs de manera que els costats corresponents i els angles corresponents siguin congruents. Observem que la noció de congruència entre dos triangles pressuposa una correspondència entre els vèrtexs respectius.

[Criteri CAC de congruència de triangles] *Si $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $\alpha \equiv \alpha'$, aleshores els dos triangles són congruents.* $\square$ [9]

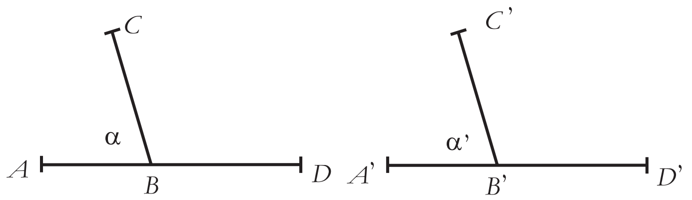


[Criteri ACA de congruència de triangles] *Si $AB \equiv A'B'$, $\alpha \equiv \alpha'$ i $\beta \equiv \beta'$, aleshores els dos triangles són congruents.* $\square$ [10]

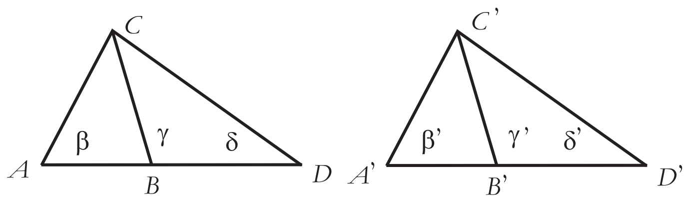
[40] Aquesta és la *definició* d'angle recte. Un altre problema diferent és que existeixi algun angle recte. Vegeu més endavant.

[41] Aquest és el cèlebre *pons asinorum*, nom amb que es coneix clàssicament la proposició 5 del llibre primer dels *Elements*. (Vegeu H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, apartat 1.3. Vegeu també I. Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, capítol 2.)

Angles adjacents d'angles congruents són congruents. [11]



Suposem $\alpha \equiv \alpha'$ i prenem punts A, C, D, A', C' i D tals que $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ i $BD \equiv B'D'$. Tindrem també $AD \equiv A'D'$. Considerarem ara els triangles ABC i $A'B'C'$. Per la proposició 9, són congruents. En particular, $\beta \equiv \beta'$ i $AC \equiv A'C'$.



Aleshores, pel criteri CAC de congruència de triangles, els triangles ACD i $A'C'D'$ són congruents. Deduïm $CD \equiv C'D'$ i $\delta \equiv \delta'$. Si ara apliquem **III.4** als triangles BCD i $B'C'D'$, obtenim $\gamma \equiv \gamma'$. □

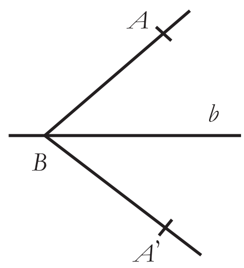
Això implica immediatament el següent resultat:

Els angles oposats són congruents. □ [12]

I ara podem demostrar:

Existeixen angles rectes. [13]

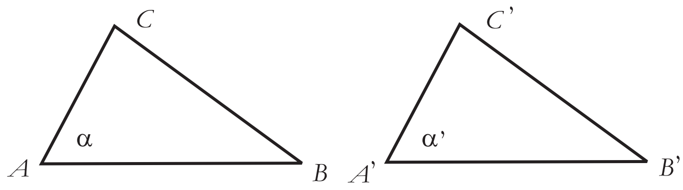
De fet, demostrarem més que la simple existència d'algun angle recte. Veurem que, donada una recta i un punt exterior, existeix una perpendicular a la recta que passa pel punt. La construcció és la següent. Prenem un punt B sobre la recta i l'unim amb el punt donat A.



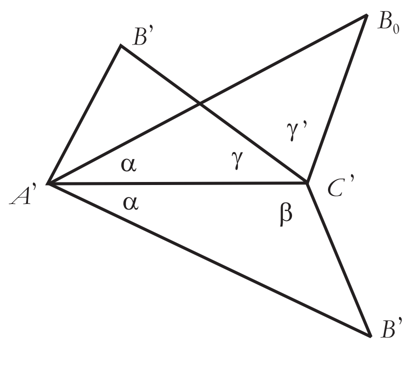
Traslladem l'angle format per AB i una qualsevol de les semirectes de vèrtex B sobre la mateixa semirecta, però a l'altre semiplà. Prenem A' amb $AB \equiv A'B'$ i unim A amb A'. Com que aquests punts són a semiplans diferents, el segment AA' tallarà la recta b en un punt D. Deixem com a exercici el veure que AA' és perpendicular a la recta b. □

La compatibilitat de la suma de segments i la relació de congruència ve donada per l'axioma **III.2**. La propietat anàloga, referida a angles, és ja una conseqüència dels axiomes, relativament senzilla de demostrar. Podem ara demostrar un *tercer cas de congruència de triangles*:

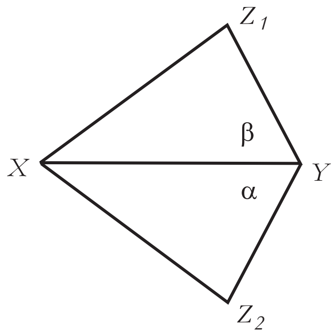
> [Criteri CCC de congruència de triangles] *Si dos triangles tenen els tres costats corresponents congruents, són congruents.* [14]



Volem demostrar que $\alpha \equiv \alpha'$. En primer lloc, traslladem l'angle α a A', a ambdós costats de $A'C'$, i prenem punts B_0 i B'' tals que $AB \equiv A'B_0 \equiv A'B''$. Pel criteri CAC de congruència de triangles, aplicat als triangles ABC, $A'B_0C'$ i $A'B''C'$, tenim $BC \equiv B_0C' \equiv B''C'$. Per tant, $A'B'' \equiv A'B'$, $B'C' \equiv C'B''$. Suposem que podem demostrar $\beta \equiv \gamma$. Fent el mateix raonament, substituint B' per B_0, veuríem que $\beta \equiv \widehat{A'C'B_0}$. La unicitat a l'axioma **III.3** implicarà que la recta B_0C' és la mateixa que la $B'C'$ i haurem acabat.



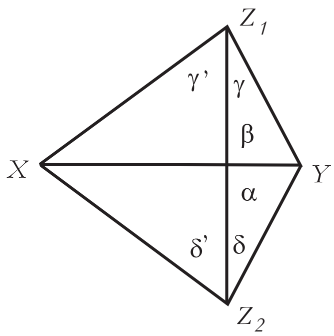
Tot es redueix, doncs, a demostrar el lema següent.



Suposem que tenim dos triangles XYZ_1 i XYZ_2, tals que $XZ_1 \equiv XZ_2$, $YZ_1 \equiv YZ_2$. Suposem que Z_1 i Z_2 estan a semiplans diferents respecte de XY. Aleshores, $\alpha \equiv \beta$. [15]

Unim Z_1 amb Z_2 per un segment que tallarà la recta que conté el segment XY. Si el punt d'intersecció és X o Y, es segueix fàcilment que $\alpha \equiv \beta$. En cas contrari, es formaran uns angles γ, γ', δ i δ'.

Pel teorema del triangle isòsceles, $\gamma' \equiv \delta'$ i $\gamma \equiv \delta$. Per tant, per la propietat citada de la suma i resta d'angles, l'angle a Z_1 és congruent a l'angle a Z_2. Pel criteri CAC de congruència de triangles, $\alpha \equiv \beta$. □



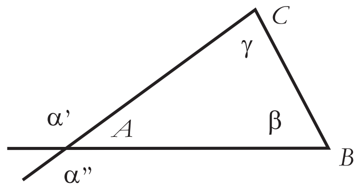
És possible de definir una *relació d'ordre* entre segments i angles, respectivament, que doni sentit a expressions del tipus $AB < CD$, $\alpha > \beta$, etc. La definició d'aquesta relació d'ordre, que serà compatible amb la relació de congruència, és ben senzilla. En el cas de segments, si tenim dos segments AB i CD, traslladarem el primer sobre el segon amb origen C i el mateix sentit que D i direm que AB és més petit, més gran o igual que CD segons que l'extrem B' del segment traslladat estigui, respecte de D, al mateix costat que C, a l'altre costat, o coincideixin.

La definició de la relació d'ordre entre angles és també senzilla, utilitzant el fet que un angle divideix el pla en dues parts, els punts interiors i els punts exteriors. Ara podem demostrar (exercici) l'axioma IV d'Euclides.

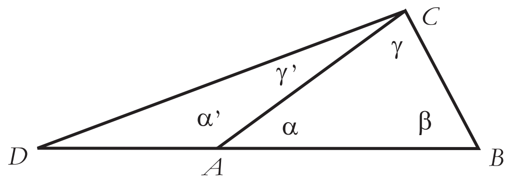
Dos angles rectes són sempre congruents.[42] □ [16]

El teorema que segueix, anomenat *teorema dels angles exteriors*, és d'una gran importància en el desenvolupament de la geometria elemental. Els *angles exteriors* d'un triangle es defineixen com els que són adjacents als angles del triangle.

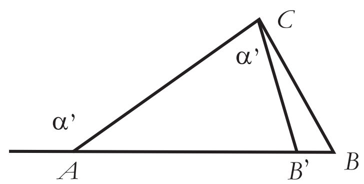
Un angle exterior d'un triangle és més gran que qualsevol dels angles del triangle no adjacents a n'ell. [17]



N'hi ha prou amb demostrar $\alpha' > \gamma$, perquè ja sabem que $\alpha' \equiv \alpha''$ i, per tant, també tindrem $\alpha' > \beta$. Prenem un punt D tal que $AD \equiv CB$.

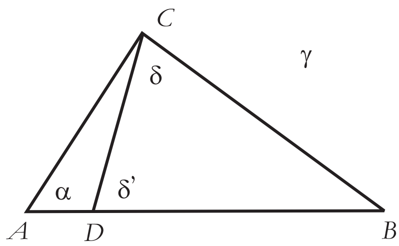


Veiem primer que $\alpha' \not\equiv \gamma$ perquè, si fossin iguals, el criteri CAC implicaria que els triangles ADC i ACB són congruents, d'on $\alpha \equiv \gamma'$. Aleshores tindríem que γ' seria adjacent a γ, cosa que no pot ser. Per tant, $\alpha' \not\equiv \gamma$. Però tampoc no és possible $\alpha' < \gamma$. En efecte, això voldria dir que, si transportem α' al vèrtex C, tindríem un triangle $AB'C$, on un angle exterior seria congruent a un angle interior, cosa que ja hem vist que no pot succeir. Resta només la possibilitat $\alpha' > \gamma$. □



Com a conseqüència d'aquest teorema s'obté que, en un triangle, els angles grans s'oposen a costats grans.

Si en un triangle ABC el costat AB és més gran que el costat [18]
BC, també l'angle de vèrtex C és més gran que l'angle de vèrtex A.



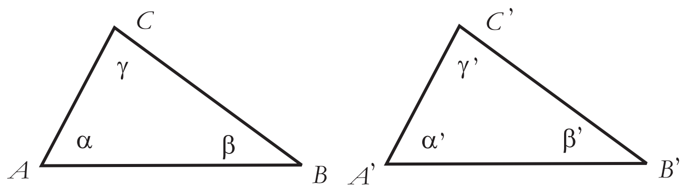
Prenem D entre A i B tal que $BC \equiv BD$. Tenim, d'una banda $\widehat{ACB} > \delta$. Com que el triangle BCD és isòsceles, tenim $\delta = \delta'$. Pel teorema anterior, $\delta' > \alpha$. □

L'afirmació següent es dedueix fàcilment:

Si un triangle té dos angles congruents, és un triangle isòsceles. [19]
□

Tenim, ara, un altre cas de congruència de triangles, que el lector pot demostrar com a exercici:

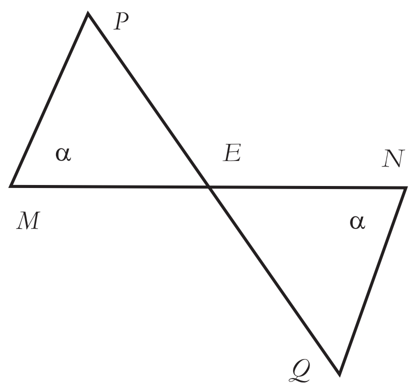
[Criteri CAA de congruència de triangles] *Si $AB \equiv A'B'$ $\alpha \equiv \alpha'$ i* [20]
$\gamma \equiv \gamma'$, aleshores els triangles ABC i $A'B'C'$ són congruents. □



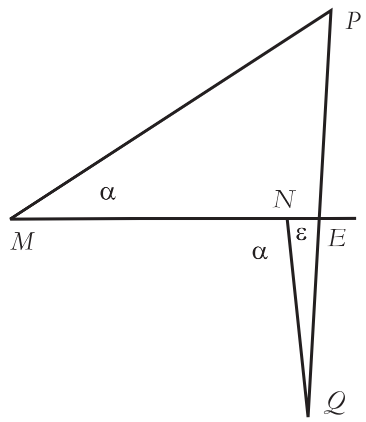
Una altra conseqüència interessant del teorema dels angles exteriors és l'existència del *punt mig* d'un segment i de la *bisectriu* d'un angle (conceptes que es defineixen de la manera natural a partir dels conceptes de congruència de segments i d'angles).

Tot segment té un punt mig. [21]

[42]El filòsof neoplatònic Procle (segle v), en el seu comentari d'Euclides, ja ens dóna una demostració d'aquest teorema, que Euclides prenia com a axioma. Hilbert coincideix amb Procle en considerar la inclusió d'aquest axioma com un error d'Euclides. Vegeu, però, la nota 18.



Prenem un angle α qualsevol i el traslladem a cada un dels extrems M i N del segment a dividir, col·locant-lo en semiplans diferents. Prenem punts P i Q tals que $MP \equiv NQ$.



Sigui E la intersecció del segment PQ amb la recta que passa per M i N. Si E està entre M i N, és fàcil veure (utilitzant el criteri CAA de congruència de triangles) que els triangles MPE i NQE són congruents i, per tant, E és el punt mig del segment MN. Suposem, doncs, que N està entre M i E (l'altre cas seria idèntic). Pel teorema dels angles exteriors, és $\alpha > \epsilon = \widehat{QEN}$ i $\epsilon > \alpha$, contradicció. □

Tot angle té bisectriu. □ [22]

Axiomes de continuïtat

Els axiomes de continuïtat que discutirem ara no apareixen explícitament a Euclides,[43] però és evident que són necessaris per al desenvolupament de

[43] De fet, l'axioma d'Arquimedes sí que apareix, en certa forma, als *Elements*. En efecte, la definició quarta del llibre cinquè diu que «dues magnituds formen raó quan cada una

la geometria euclidiana.[44] Aquests axiomes venen a dir que els punts d'una

admet un múltiple que és més gran que l'altra». Euclides utilitza per primer cop el que nosaltres anomenem axioma d'Arquimedes a la proposició primera del llibre x.

[44]L'estudi dels axiomes de continuïtat i l'estudi de la seva importància i necessitat a l'hora de fer geometria és una faceta fascinant de la geometria sintètica. No tenim temps de fer un tractament detallat dels problemes lligats a la continuïtat, però sí que volem donar algunes breus idees sobre aquest tema.

A la proposició primera del llibre primer, Euclides construeix un triangle equilàter de costat arbitrari. Per fer-ho, pren el punt d'intersecció de dues circumferències que ha construït, però l'existència d'aquest punt, ja ho hem dit en algun altre lloc, no es pot demostrar sense tenir algun tipus d'axioma de continuïtat. Dit amb més precisió, considerem la geometria ordinària sobre un cos pitagòric que no contingui $\sqrt{3}$. En aquesta geometria, el triangle equilàter de costat 1 no existeix.

Veiem, doncs, que, si volem tenir tota la geometria d'Euclides, ens cal postular els axiomes de continuïtat. Una altra pregunta més complexa és demanar-se quins han de ser els axiomes de continuïtat que cal exigir. N'hi ha diversos:

- CC Si una circumferència té punts interiors i exteriors a una altra, les dues circumferències es tallen.
- RC Si una recta té punts interiors a una circumferència, la circumferència i la recta es tallen.
- A L'axioma d'Arquimedes.
- C L'axioma de Cantor.
- D L'axioma de Dedekind: Si dividim els punts d'una recta en dues classes (disjuntes, no buides) de manera que cap punt d'una classe estigui entre dos punts de l'altra classe, aleshores una d'aquestes classes és una semirecta.

L'axioma de Dedekind implica tots els altres. CC implica RC. Els axiomes d'Arquimedes i Cantor, junts, impliquen l'axioma de Dedekind. No sé si RC implica CC. Quins axiomes es compleixen a la geometria lineal de k^2? L'axioma de Dedekind és equivalent a $k = \mathbb{R}$. L'axioma d'Arquimedes és equivalent a l'axioma d'Arquimedes per al cos k. Cada un dels axiomes CC i RC és equivalent a que k sigui *euclidià* (un cos euclidià és un cos ordenat on tots els elements positius són quadrats). Això ens permet veure que podem tenir combinacions diverses dels axiomes, per exemple, podem tenir C sense RC (vegeu la geometria no arquimediana del final d'aquest capítol) o bé A sense RC.

Quins axiomes necessitem, realment, per fonamentar la geometria de Euclides? És evident que, com a mínim, necessitem CC (o, potser, basta amb RC) perquè, sense aquest axioma, una part important de l'edifici euclidià no es sosté. Els axiomes de Cantor o Dedekind, en canvi, semblen massa forts i massa allunyats de l'esperit euclidià. Responen, més aviat, a la nostra obsessió pels nombres reals i per les coordenades cartesianes. El cas de l'axioma d'Arquimedes és més delicat. La geometria no arquimediana pot semblar francament estrambòtica, principalment en absència de l'axioma de les paral·leles. Però, si acceptem l'axioma de les paral·leles i l'axioma CC, fins a quin punt ens cal l'axioma d'Arquimedes per fer geometria? A quin teorema dels *Elements* haurem de renunciar si suprimim l'axioma d'Arquimedes? La resposta a aquesta pregunta, sorprenentment, és que tota la geometria plana d'Euclides és independent de l'axioma d'Arquimedes i que aquest axioma només és necessari per a desenvolupar la teoria del *volum*. Dit això, creiem que l'opció recta es poden identificar al contínuum dels nombres reals. Els axiomes de continuïtat que exigirem són dos:

IV.1 (Axioma d'Arquimedes)[45] Donats tres punts alineats M, N i Z, amb N i Z al mateix costat respecte de M, existeix un nombre natural n tal que, si col·loquem un darrera l'altre n segments congruents a MN, l'extrem lliure del darrer estarà a l'altra banda de Z que M.

IV.2 (Axioma de Cantor)[46] Si tenim una successió de segments A_nB_n on cada un conté el següent i es compleix que, donat qualsevol segment XY, existeix un n tal que $A_nB_n < XY$, aleshores hi ha un punt comú a tots els segments A_nB_n.[47]

Si admetem l'axioma d'Arquimedes i fixem un segment com a segment unitat, podem utilitzar aquest segment per *mesurar* qualsevol altre segment i associar, així, a cada segment un nombre real —la seva *longitud*—, de manera que dos segments són congruents si i només si tenen la mateixa longitud.[48] Aleshores, l'axioma de Cantor ens diu que hi ha segments de qualsevol longitud i tenim una correspondència bijectiva entre classes d'equivalència de congruència de segments i nombres reals.

La suma dels angles d'un triangle

Sabem que, a la geometria analítica ordinària, la suma dels angles d'un triangle és igual a dos rectes. Volem ara estudiar fins a quin punt aquest resultat es conserva a geometria absoluta.

---

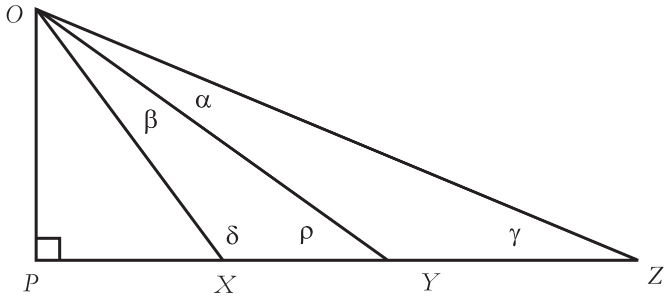
que més s'acostaria al punt de vista euclidià consistiria en prendre com a únic axioma de continuïtat l'axioma CC.

[45] Sembla que tothom està d'acord que aquest axioma no s'hauria d'atribuir a Arquimedes, perquè és certament molt més antic, però el nom *axioma d'Arquimedes* està totalment establert.

[46] Aquest no és pas l'axioma que introdueix Hilbert amb el nom d'axioma de completesa. Hilbert postula que el conjunt de punts i rectes de la geometria no es pot estendre, afegint nous punts, de manera que es conservin les relacions d'ordre i congruència i es segueixen verificant els axiomes. En el present context, l'axioma de completesa de Hilbert és equivalent a l'axioma de Cantor.

[47] Si, en aquest axioma, suprimim la condició sobre l'existència del n, obtenim un axioma més fort (s'anomena axioma de Cantor-Dedekind) que implica l'axioma d'Arquimedes.

[48] La manera de fer això és senzilla. Donat un segment AB, sigui n_0 el nombre natural més gran tal que n_0 vegades el segment unitat és menor que AB. Dividim el segment unitat en dues parts i sigui n_1 el natural més gran tal que n_1 vegades la meitat del segment unitat és menor que AB. Iterem el procés indefinidament i definim la longitud de AB com el límit de la successió $\{2^{-i}n_i\}$ (que és creixent i acotada).



Suposem que, a la configuració del dibuix (on l'angle a P és recte), tenim, $\alpha \equiv \beta$. Aleshores, $XY < YZ$. [23]

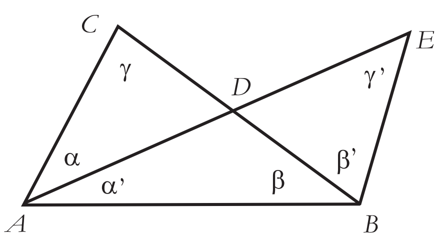
Pel teorema dels angles exteriors, δ és més gran que un recte. Pel mateix teorema, un recte és més gran que γ, d'on es dedueix que $\delta > \gamma$. Per tant, per la proposició 18, $OX < OZ$. Prenem ara X' sobre OZ tal que $OX \equiv OX'$. Pel teorema dels angles exteriors, $\gamma < \rho$. Per congruència de triangles, $\rho \equiv \widehat{OYX'} < \widehat{YX'Z}$. Per tant, $ZY > X'Y$ i, com que $X'Y \equiv YX$, ja tenim el que volíem. □

A partir d'aquest lema i de l'axioma d'Arquimedes, podem demostrar una mena d'axioma d'Arquimedes per a angles. Recordem que ja havíem establert l'existència de bisectrius.

Si α i ϵ són angles, existeix un nombre natural r tal que, si dividim l'angle α per la meitat r vegades, obtenim un angle més petit que ϵ. □ [24]

De manera semblant a com ho fem amb els segments, podem ara introduir una mesura d'angles, un cop haguem pres un angle unitat. Això es pot fer assignant arbitràriament un nombre real a l'angle recte.

[Primer teorema de Legendre] *La suma dels angles d'un triangle és menor o igual que dos rectes.* [25]



La demostració d'aquest resultat és molt bonica. Considerem el triangle ABC i suposem, per exemple, que $\beta \leq \gamma$. Sigui D el punt mig del costat

BC i sigui E tal que $AD \equiv DE$. Es compleix $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$. En efecte, els triangles ACD i DBE són congruents, per tant, $\gamma' = \alpha - \alpha'$, $\gamma = \beta' - \beta$. D'altra banda, com que $\beta \leq \gamma$ per hipòtesi, tenim $AC \leq AB$. Per tant, $\alpha' \leq \gamma' = \alpha - \alpha'$, és a dir, $\alpha' \leq \alpha/2$. Veiem, doncs, que, donat un triangle en el qual hem escollit un angle, podem trobar un altre triangle amb la mateixa suma d'angles, però amb un angle menor o igual a la meitat de l'angle inicial. Suposem que la suma dels angles del triangle inicial superés dos rectes en un angle ϵ. Si α és un angle del triangle i r és tal que $\alpha/2^r < \epsilon$ (aquest r existeix per la proposició anterior), la construcció que acabem de fer ens permet de construir un triangle amb la mateixa suma d'angles que el triangle inicial i amb un angle menor que ϵ. Això implicaria que els altres dos angles sumen més de dos rectes, la qual cosa està en contradicció amb el teorema dels angles exteriors. □[49]

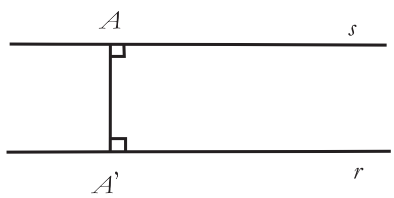
La demostració del primer teorema de Legendre que acabem de donar utilitza l'axioma d'Arquimedes. Sorgeix, per tant, la pregunta de si aquest axioma és realment necessari per poder afirmar que la suma dels angles d'un triangle és, com a màxim, dos rectes. La resposta és sí: existeix una geometria que verifica els axiomes **I**, **II** i **III**, però on, en canvi, la suma dels angles d'un triangle és més gran que dos rectes. Aquesta geometria ha de ser, necessàriament, no arquimediana. La descriurem més endavant

A partir dels axiomes **I**, **II**, **III** i **IV** *no* es pot deduir que la suma dels angles d'un triangle sigui *igual* a dos rectes. De fet, aquesta afirmació és equivalent —en presència de l'axioma d'Arquimedes— a l'axioma de les paral·leles, que discutirem a l'apartat següent.

L'axioma de les paral·leles

Direm que dues rectes són *paral·leles* quan no es tallen.[50]

Per un punt exterior a una recta hi passa, al menys, una paral·lela a la recta. [26]



[49]El fet que aquest teorema s'anomeni *primer* teorema de Legendre sembla indicar que hi ha un *segon* teorema de Legendre. En efecte, el segon teorema de Legendre diu que «si hi ha un triangle on la suma dels angles val dos rectes, aleshores, la suma dels angles de tot triangle val dos rectes». Demostrarem aquest resultat al capítol IV.

[50]Ès clar que aquesta definició ha d'ésser modificada quan fem geometria de l'espai.

Sigui A un punt que no estigui sobre la recta r. Dibuixem la perpendicular a r que passa per A i sigui s una recta que passi per A i formi un angle recte amb aquesta perpendicular. Si r i s es tallen en un punt O, el triangle $AA'O$ que es forma té dos angles rectes, en contradicció amb el teorema dels angles exteriors. Per tant, r i s són paral·leles. □

En canvi, a partir dels axiomes introduïts fins ara, no es pot demostrar que per un punt exterior a una recta no puguin passar *dues* paral·leles a la recta. Cal exigir-ho com a axioma.

V Per un punt exterior a una recta hi passa, com a màxim, una paral·lela a la recta.[51]

Aquest és l'axioma v d'Euclides.

Geometria sobre un cos

La geometria lineal ordinària de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ compleix, tanmateix, tots els axiomes que hem introduït i ens proporciona, per tant, un *model* de la geometria de Hilbert. D'aquesta manera, podem veure que els axiomes de la geometria no són contradictoris —en el sentit que no són més contradictoris que els axiomes dels nombres reals.

D'altra banda, els axiomes de Hilbert són *categòrics*, és a dir, admeten un únic model:

Tota geometria que verifiqui els axiomes **I–V** *és equivalent a la geometria ordinària de* $\mathbb{R}^2$. [27]

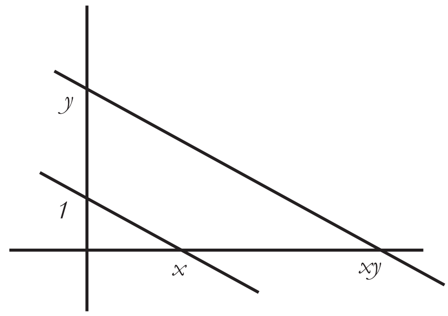
L'enunciat d'aquesta proposició és una mica imprecís.[52] Tampoc no la demostrarem perquè, dintre d'un altre context, serà discutida en profunditat més endavant. Donem, però, una idea de la demostració. Comencem escollint un punt, anomenat *origen*, dues rectes perpendiculars que passin per l'origen, anomenades *eixos* i un segment *unitat*. L'axioma de les paral·leles ens permet «prendre coordenades cartesianes», de manera que tot punt del

[51] Ja al capítol anterior hem dit que aquest axioma admet moltes formulacions equivalents. Algunes de les equivalències apareixen com a exercici.

[52] Podem fer que l'enunciat sigui rigorós definint què s'entén per una geometria i què s'entén per geometries equivalents. Una geometria serà un conjunt de punts i rectes, amb relacions d'incidència, d'ordre i de congruència, que verifiquin els axiomes **I–IV**. Dues geometries seran equivalents quan es pugui establir una correspondència bijectiva entre els punts d'una i els de l'altra i les rectes d'una i les de l'altra, que conservi les relacions d'incidència, d'ordre i de congruència.

pla ve caracteritzat per una parella de punts, un sobre el primer eix i l'altre sobre el segon.

Considerem ara els punts d'un eix. És fàcil de definir una *suma* entre ells, amb element neutre l'origen. Els axiomes d'ordre ens permeten definir una *ordenació* entre els punts de cada eix. Definir un *producte* és una mica més difícil. El producte de x i y es defineix com el punt d'intersecció amb el primer eix de la recta que passa pel punt y del segon eix i és paral·la la recta que uneix la unitat del segon eix i el punt x del primer.



Pot demostrar-se que els punts d'una recta adquireixen una estructura de cos ordenat K. Els axiomes d'Arquimedes i Cantor impliquen que K és isomorf al cos dels reals. Aleshores, la geometria del pla és la geometria ordinària de $\mathbb{R}^2$. Si, en lloc de limitar-nos a fer geometria plana, haguéssim fet geometria de l'espai,[53] hauríem arribat a l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Amb aquest resultat —que, en un capítol posterior, veurem des d'una perspectiva més general—, podem donar per acabada l'anàlisi lògica de la intuïció de l'espai que es basa en els axiomes de Hilbert. Aquesta anàlisi ens ha dut a que, necessàriament, l'espai s'identifica a un espai vectorial real, amb la geometria lineal ordinària.

[53] Diguem que, en contra del que pot semblar, l'axiomàtica necessària per estudiar la geometria de l'espai tridimensional no és gaire més gran que la que hem introduït aquí per la geometria plana. Cal només afegir la noció primitiva de *pla* i afegir, als axiomes del grup **I**, quatre nous axiomes:

I.4 Donats tres punts no alineats, sempre hi ha un únic pla que els conté. Tot pla conté al menys un punt.

I.5 Si dos punts A i B són a un pla, tots els punts de la recta que passa per A i B són al pla.

I.6 Si dos plans tenen un punt en comú, tenen com a mínim un altre punt en comú.

I.7 Hi ha com a mínim quatre punts que no són al mateix pla.

A més d'això, cal només fer molt lleugeres modificacions, per exemple a l'axioma de Pasch (cal exigir que la recta i el triangle estiguin a un mateix pla), a l'axioma **III.3** i a la definició de rectes paral·leles.

Què podem dir sobre la geometria lineal d'un espai vectorial k^2 sobre un cos k arbitrari? D'entrada, a k^2 tenim els conceptes de punt, recta i incidència i és evident que es compleixen els axiomes **I** i **V**. Si volem tenir el concepte d'estar entre ens cal que k sigui un *cos ordenat*.[54] A k^2 tenim també una noció natural de congruència de segments que es defineix dient que $AB \equiv A'B'$ si $||B - A||^2 = ||B' - A'||^2$, on $||(x, y)||^2 = x^2 + y^2$.

La noció d'angles congruents també es pot definir sobre un cos ordenat arbitrari. Per fer-ho, recordem que a la geometria analítica elemental, l'angle (agut) α format per dues rectes de pendents m i m' compleix

$$\tan \alpha = \left| \frac{m' - m}{1 + mm'} \right|.$$

El membre de la dreta d'aquesta fórmula té sentit sobre qualsevol cos k i ens permet definir el concepte d'angles congruents a k^2.[55]

Veiem, doncs, que tot cos ordenat k dóna lloc a un model de geometria k^2. En direm la geometria lineal del cos ordenat k. En aquest model, es pot comprovar sense gaire dificultat (exercici) que es compleixen tots els axiomes que hem introduït, llevat —potser— dels axiomes **III** i **IV**. Com a exemple d'això que estem dient podem prendre el *pla racional* $\mathbb{Q}^2$. En aquest pla, no podem traslladar el segment unitat sobre la diagonal del primer quadrant, perquè l'extrem hauria de ser el punt de coordenades $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, que no pertany a $\mathbb{Q}^2$.

Què ens cal si volem que k^2 compleixi, també, l'axioma **III**? Direm que un cos ordenat k és *pitagòric* si, per tot element $a \in k$, l'element $1 + a^2$ és un quadrat a k. Evidentment, $\mathbb{R}$ és un cos pitagòric i $\mathbb{Q}$ no ho és, però hi ha subcossos de $\mathbb{R}$ que són pitagòrics. Si prenem la intersecció de tots els subcossos pitagòrics de $\mathbb{R}$, obtindrem el *cos de Hilbert* Ω, que també es pot també definir com el conjunt dels nombres reals que es poden escriure a partir dels nombres racionals utilitzant un nombre finit de vegades les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i l'operació $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$.

[54]Un cos ordenat és un cos k amb una relació d'ordre total, de manera que: a) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ per tot z i b) $x, y \geq 0$ implica $xy \geq 0$.

[55]La manera de fer-ho és aquesta: Comencem dient que un angle és recte si els pendents m, m' de les rectes que el formen compleixen $mm' = -1$. Aleshores, un angle serà obtús o agut segons que contingui o no un recte. Definim la *tangent* d'un angle α com

$$\tan \alpha = \pm \left| \frac{m' - m}{1 + mm'} \right|$$

on prenem el signe $+$ si l'angle és agut i el signe $-$ si l'angle és obtús. Aleshores, diem que dos angles són congruents quan tenen la mateixa tangent.

De tota manera, aquesta definició encara no és del tot correcta, perquè cal tenir en compte les rectes de pendent infinit. Deixem els detalls al lector.

Es pot demostrar que la geometria lineal sobre aquest cos Ω compleix els axiomes **I**, **II**, **III** i **V** i, de fet, és el cos més petit amb aquesta propietat.[56]

També hi ha cossos pitagòrics que no són subcossos de $\mathbb{R}$. Donat un cos ordenat K, el podem incloure en un cos ordenat pitagòric $\tilde{K}$ de manera que $\tilde{K}$ és algebraic sobre K.[57]

Independència dels axiomes

Seguint a Hilbert, hem fonamentat la nostra geometria en dues menes d'objectes —punts i rectes—, tres relacions —d'incidència, ordre i congruència— i catorze axiomes —tres axiomes d'incidència, quatre axiomes d'ordre, quatre axiomes de congruència, dos axiomes de continuïtat i l'axioma de les paral·leles. Hauríem de trobar, per a cada axioma, un model de geometria que complís tots els axiomes llevat d'aquell. En total, ens caldria estudiar catorze *geometries no euclidianes*. Això s'ha fet, però crec que no seria realista voler-ho fer aquí. D'altra banda, la situació és més complicada del que acabem d'indicar. Pensem que hi ha axiomes que només tenen sentit en funció d'altres axiomes, axiomes que tenen diverses parts, axiomes que potser admeten formulacions més febles, etc. Estudiant les successives edicions dels *Grundlagen* veiem com Hilbert va rebaixant les seves exigències sobre la independència dels axiomes i, finalment, es limita només a donar tres geometries no euclidianes, del total de les que serien teòricament necessàries per establir la independència de tots els seus axiomes.

El que farem nosaltres aquí serà descriure les vuit geometries no euclidianes que, des del nostre punt de vista, tenen un major interès.

La geometria hiperbòlica

[56] La demostració que la geometria lineal sobre un cos pitagòric compleix els axiomes de Hilbert **I**, **II**, **III** i **V** no és del tot senzilla. De fet, la millor manera de demostrar **III**.4 és utilitzant moviments, com ho fa Euclides. Vegeu el capítol 3 del llibre *«Geometry: Euclid and Beyond»*, de R. Hartshorne.

[57] La manera de fer això és la següent: diem que un cos és *real* si -1 no és una suma de quadrats. Tot cos ordenat és automàticament real. Sigui K un cos real i $\bar{K}$ una clausura algebraica de K. El lema de Zorn, aplicat als subcossos reals de $\bar{K}$ que contenen K, ens demostra que K està inclòs a un subcòs real maximal de $\bar{K}$. Designem per $\widetilde{K}$ aquest cos real maximal i observem que tota extensió algebraica de $\widetilde{K}$ és no real. Dintre de $\widetilde{K}$, anomenem elements positius els que són quadrats (no nuls). Es pot demostrar (exercici) que aquesta definició dóna lloc a una ordenació de $\widetilde{K}$. És a dir, es comprova que: a) tota suma de quadrats és un quadrat i b) si a no és un quadrat, aleshores $-a$ és un quadrat. Clarament, $\widetilde{K}$ és un cos ordenat pitagòric. De fet, és més que això, és un cos ordenat on tots els elements positius són quadrats. Ara podem prendre un cos pitagòric minimal, prenent la intersecció de tots els subcossos pitagòrics de $\widetilde{K}$ que contenen K.

Aquest és l'exemple més important, des de molts punts de vista, i hi dedicarem dos capítols sencers d'aquesta obra. Diguem només que existeix una geometria on es compleixen els axiomes **I-IV** i on l'axioma **V** és fals.

La geometria no completa

Anomenarem així una geometria on es compleixin tots els axiomes, llevat de l'axioma de Cantor **IV.2**. La construcció d'aquesta geometria és relativament senzilla, a partir dels raonaments que hem fet a l'apartat anterior. N'hi ha prou amb prendre la geometria lineal de k^2, on k és un subcòs pitagòric propi de $\mathbb{R}$, per exemple, el subcòs $\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ dels nombres reals algebraics.

Si prenem la geometria lineal sobre el cos pitagòric minimal, es pot demostrar que en aquesta geometria una recta pot passar per punts interiors d'una circumferència sense tallar-la.

La geometria no arquimediana

Hi ha cossos ordenats que no satisfan l'axioma d'Arquimedes. Un exemple clàssic de cos no arquimedià és el següent. Considerem $\mathbb{R}(t)$, el cos de les funcions racionals, és a dir, dels quocients $f(t) = p(t)/q(t)$ on $p(t)$ i $q(t)$ són polinomis en una variable t i $q(t) \neq 0$. Aquest cos té una ordenació en la qual els elements positius són aquelles funcions $f(t)$ que prenen valors positius quan $t \to +\infty$. Aquesta ordenació és clarament no arquimediana perquè $t > n$ per tot enter n.

Aquest cos no és pitagòric, però si prenem la seva clausura pitagòrica obtenim una geometria que no compleix l'axioma d'Arquimedes. Tampoc no compleix l'axioma de Cantor. Si volem una geometria no arquimediana en la qual sigui cert l'axioma de Cantor, hem de prendre un cos més gran. Sigui K l'anell de les sèries formals de la forma

$$z = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i, \quad a_n \neq 0$$

amb coeficients reals i variant n a $\mathbb{Z}$. K és un cos ordenat no arquimedià, si prenem com a positius els elements z amb $a_n > 0$. Observem també que K és pitagòric (però no euclidià) perquè, donada una sèrie $z \in K$, podem calcular inductivament els coeficients de $x \in K$ per tal que $x^2 = 1 + z^2$. Per tant, la geometria lineal sobre K^2 complirà els axiomes **I**, **II**, **III** i **V**. Cal veure ara que també es compleix l'axioma de Cantor, però aquest punt el podem deixar com a exercici.

La geometria no-CAC

Ens referim a una geometria on es compleixen tots els axiomes llevat del criteri CAC de congruència de triangles, que és l'axioma **III.4**. Aquest axioma és el que lliga la congruència d'angles amb la de segments. La seva independència dels altres axiomes es pot veure amb el següent model:

Prenem com a punts i rectes de la geometria els punts i les rectes ordinàries del pla $x + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. Definim la congruència d'angles de la manera ordinària, però, en canvi, definim la congruència de segments dient que dos segments AB i $A'B'$ són congruents quan ho són (en el sentit ordinari) les seves projeccions sobre el pla $z = 0$.

La geometria no paschiana

Hem dit que l'axioma de Pasch és una de les característiques destacades d'aquesta axiomàtica. Per justificar la inclusió d'aquest axioma, hem de ser capaços de mostrar un model on es compleixin tots els altres axiomes, però no l'axioma de Pasch. Donat que ja hem vist que l'axioma de Pasch és sempre cert a la geometria lineal de tot cos ordenat, caldrà buscar aquest model en algun altre context.

Es pot construir una geometria no paschiana de la següent manera. Suposem que a $\mathbb{R}$ hem pogut definir una relació d'ordre $\prec$ de manera que $\mathbb{R}$ és unió disjunta de $\{x \prec 0\}$, $\{0\}$ i $\{x \succ 0\}$ i de manera que si $x, y \succ 0$, aleshores $x + y \succ 0$ però, en canvi, $\prec$ no respecti el producte. Per exemple, suposem que existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ amb $b \succ 1$, $a \prec 0$, $ab \succ 0$. És fàcil veure que la geometria lineal que s'obté sobre $\mathbb{R}^2$ a partir d'aquesta ordenació compleix tots els axiomes (també els de continuïtat) llevat del de Pasch. En efecte, la recta $x + ay - a = 0$ talla un únic costat del triangle de vèrtex $(0, 0)$, $(0, b)$, $(ab, 0)$.

Per poder definir aquesta relació d'ordre exòtica utilitzem la següent estratagema. Observem que $\mathbb{R}$ és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial i, prenent una base, podem definir funcions $\mathbb{Q}$-lineals $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no són la identitat. Per exemple, podem aconseguir que $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ i $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}$. Aleshores, diem que $x \prec y$ si $f(x) < f(y)$.

La geometria no homogènia

Ja hem dit que a la geometria lineal sobre el cos dels racionals falla l'axioma **III.1**, és a dir, no sempre podem traslladar un segment en una certa direcció. Ara bé, aquesta geometria no compleix els axiomes de continuïtat. Si volem una geometria que compleixi tots els axiomes llevat del **III.1**, podem prendre el següent model. Considerem el pla $\mathbb{R}^2$ amb les nocions ordinàries, però modifiquem el concepte de segments congruents. Diem que dos segments són congruents si ho són a $\mathbb{R}^2$ i, a més, tenen la mateixa direcció. No és difícil convèncer-se que aquesta geometria compleix tots els axiomes excepte l'axioma **III.1**. Es tracta d'una geometria no homogènia, en el sentit de que en ella no podem comparar segments que tinguin direccions diferents.

Acabem aquest catàleg de geometries exòtiques amb dos exemples més que permeten veure que certs resultats que hem vist als apartats anteriors necessiten certs axiomes.

La geometria semi-euclidiana

Es tracta d'una geometria E que compleix els axiomes, llevat de l'axioma d'Arquimedes i de l'axioma de les paral·leles i en la qual, en canvi, els angles d'un triangle sempre sumen dos rectes. Per construir aquesta geometria comencem amb el pla K^2 de la geometria no arquimediana que hem vist abans i definim els punts de la nostra geometria com els punts de K^2 que estan a *distància finita* de l'origen de coordenades. Això vol dir aquells punts (a, b) tals que existeix $n \in \mathbb{Z}$ amb $n > a, b$. Els conceptes de recta, ordre i congruència seran els mateixos que a K^2. Aleshores, veiem que l'axioma de les paral·leles es compleix a K^2, però falla a E. Tampoc no es compleix l'axioma d'Arquimedes (perquè hi ha elements infinitament petits respecte de la unitat). Es pot demostrar que l'axioma de les paral·leles implica (sense necessitat de l'axioma d'Arquimedes) que la suma dels angles d'un triangle és dos rectes. Per tant, això també serà cert a E.

La geometria no legendriana

Es tracta ara d'una geometria E que compleix els axiomes, llevat de l'axioma d'arquimedes i de l'axioma de les paral·leles i en la qual la suma dels angles d'un triangle és *més gran* que dos rectes. L'existència d'aquesta geometria demostra que el teorema de Legendre (25) no es pot demostrar sense utilitzar l'axioma d'Arquimedes.

Només donarem una idea de la construcció. Prenem el cos K de la geometria no arquimediana. Els punts de la geometria E seran els punts de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ de K^3 que estan a distància finita de $(0, 0, t)$. Les rectes seran els cercles màxims. Amb un cert esforç, es pot comprovar que és possible de definir a E les relacions d'ordre i de congruència de manera que es compleixin tots els axiomes, llevat del d'Arquimedes i el de les paral·lleles, mentre que la suma dels angles d'un triangle sempre supera dos rectes.

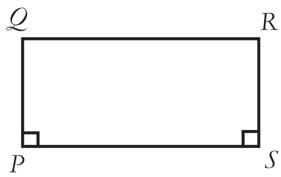
Exercicis

1. Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, que una recta que talli els tres costats d'un triangle ha de passar per algun vèrtex.

2. Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, que ni una semirecta ni un semiplà, ni l'interior ni l'exterior d'un angle no poden ser buits.

3. Suposeu els axiomes **I**, **II** i **III** i demostreu que l'axioma de les paral·leles és equivalent a: «Donats tres punts no alineats, existeix una circumferència que els conté».

4. Un *quadrilàter de Khayyam-Saccheri* està format per quatre punts P, Q, R S, no alineats tres a tres, tal que els angles $\widehat{QPS}$ i $\widehat{PSR}$ són rectes i $PQ \equiv RS$. Demostreu que, a la geometria absoluta, els angles $\widehat{PQR}$ i $\widehat{QRS}$ d'un quadrilàter de Khayyam-Saccheri són congruents.



5. Demostreu que el fet que les tres bisectrius d'un triangle són concurrents és un teorema de geometria absoluta. (També ho és que les mitjanes es tallen en un punt i les alçades es tallen en un punt, però això és força més difícil de demostrar. En canvi, el fet que les mediatrius d'un triangle siguin sempre concurrents implica l'axioma de les paral·leles.)

6. Demostreu aquests teoremes de geometria absoluta:
   (a) Els criteris CAC i ACA de congruència de triangles.
   (b) Dos angles rectes són sempre congruents.
   (c) Tot angle té bisectriu.
   (d) Per un punt exterior a una recta sempre hi passa alguna paral·lela a la recta.

7. Demostreu que, a la geometria absoluta, l'axioma **V** implica que la suma dels angles d'un triangle val dos rectes. Si hi afegim els axiomes **IV**, que la suma dels angles d'un triangle valgui dos rectes implica l'axioma **V**. (Per resoldre aquesta segona part, utilitzeu aquesta conseqüència dels axiomes **IV**: donats angles α i ϵ, existeix un enter $n > 0$ tal que $\alpha/2^n$ és un angle $< \epsilon$.)

8. Demostreu, a la geometria absoluta, l'equivalència entre l'axioma **V** i l'axioma de les paral·leles tal com el va enunciar Euclides.

9. Suposeu els axiomes **I**, **II**, **III** i **IV** i també suposeu que donat un triangle sempre n'hi ha un altre de semblant (i.e., amb els mateixos angles) i amb un costat arbitrari. Demostreu que la suma dels angles d'un triangle és igual a dos rectes. Per fer-ho, apliqueu el teorema de Legendre que afirma que la suma dels angles d'un triangle és menor o igual a dos rectes i inspireu-vos en aquest dibuix:

10. Sigui k un subcòs de $\mathbb{R}$ i considerem la geometria «cartesiana» ordinària del pla k^2. Definiu acuradament els conceptes de recta, estar entre, segments congruents i angles congruents. Demostreu que es compleixen els axiomes **I**, **II**, **III.2**, **III.3**, **III.4**, **IV.1** i **V**. Doneu un exemple que no compleixi **III.1** ni **IV.2** i un altre que compleixi **III.1** però no compleixi **IV.2**. Hi pot haver algun exemple que no compleixi **III.1** però sí **IV.2**?

11. Considerem el pla $\mathbb{R}^2$ amb les nocions ordinàries de recta, estar entre i angles congruents, però amb una nova definició de segments congruents: dos segments seran congruents si tenen la mateixa longitud i, a més, són paral·lels. Demostreu que en aquesta geometria es compleixen tots els axiomes de Hilbert, excepte l'axioma **III.1**.

12. El *cos de Hilbert* $\Omega \subset \mathbb{R}$ es defineix com el cos format per tots els nombres reals que es poden obtenir a partir del 0 i l'1, usant un nombre finit de vegades les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i l'operació $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Considereu la geometria ordinària sobre el pla Ω^2.

    (a) Demostreu que aquesta geometria compleix tots els axiomes de Hilbert, excepte **IV.2**.

    (b) Trobeu, en aquesta geometria, una recta i una circumferència que no es tallin, però tals que la recta contingui punts de l'interior de la circumferència. (Utilitzeu, sense demostració, el fet que $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \Omega$.)

13. Considereu una geometria que té per punts i rectes els del pla $x + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. Definim la congruència d'angles igual que a $\mathbb{R}^3$, però definim la congruència de segments dient que dos segments són congruents quan les seves projeccions sobre el pla $z = 0$ tenen la mateixa longitud. Demostreu que aquesta geometria compleix tots els axiomes de Hilbert excepte l'axioma **III.4**.

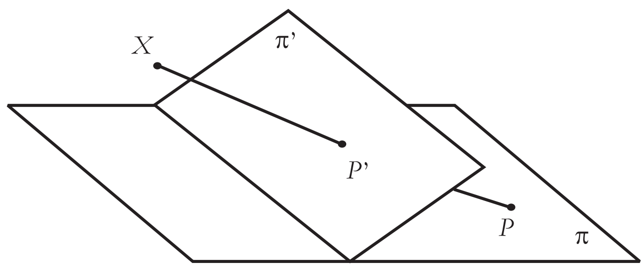
14. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció qualsevol amb la propietat que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Definim $x \prec y$ si $f(x) < f(y)$. Considerem la geometria ordinària del pla $\mathbb{R}^2$ amb la relació d'estar entre donada per $\prec$. Comproveu que en aquesta geometria es compleixen tots els axiomes de Hilbert excepte, potser, l'axioma de Pasch. Suposeu, per exemple, que trobem una funció f i nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $f(1) = 1$, $f(a) = -a < 0$, $f(b) = b > 1$, $f(ab) = ab$. Demostreu que, en aquest cas, l'axioma de Pasch no es compleix. És possible trobar una funció així?

III. Desargues

Una nova visió de l'espai

Diversos artistes del renaixement, com Leonardo da Vinci i Albrecht Dürer, es van preocupar de donar unes bases matemàtiques a la teoria de la representació en perspectiva dels objectes. El problema central d'aquesta teoria consisteix en representar sobre un pla un objecte tridimensional —o bé una figura plana situada sobre un altre pla— de manera que, quan un observador miri la representació plana «vegi el mateix» que quan mira l'objecte real.

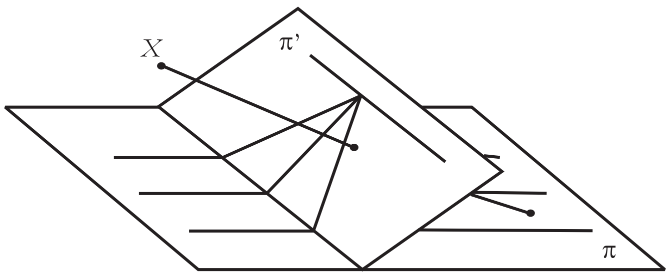
Suposem que tenim dos plans: π, el pla a representar, i π' el pla del dibuix. Per tal de representar en perspectiva el pla π sobre del pla π' cal prendre un *punt de mira* X. Aleshores, un punt P del pla π es representarà sobre π' prenent la intersecció P' de la recta PX amb el pla del dibuix.



Aquesta construcció té unes propietats que cal remarcar:

a) Una gran part de les propietats euclidianes de les figures sobre el pla π es destrueixen quan passen al pla π'. Per exemple, és clar que el concepte de distància entre dos punts no és pas invariant per projecció central.

b) Suposem que sobre el pla π tenim tot un feix de rectes paral·leles. Si ara projectem aquestes rectes sobre π', obtindrem un feix de rectes que es tallaran totes en un punt, anomenat *punt de fuga* del feix de rectes paral·leles. Els punts de fuga de tots els feixos de rectes paral·leles es situen sobre d'una recta que és l'*horitzó* del dibuix.



c) Els punts de l'horitzó no es corresponen a cap punt del pla π, sinó que semblen identificar-se a uns punts imaginaris, infinitament allunyats. Són els *punts impropis* o també *punts de l'infinit*. Sovint es diu que les rectes paral·leles es tallen a l'infinit. El sentit d'aquesta frase no és altre que dir que, quan projectem rectes paral·leles sobre d'un pla, les projeccions es tallen a un punt de l'horitzó.

Hem dit que enteníem la geometria com l'anàlisi lògica de la nostra intuïció de l'espai. La geometria projectiva pren com a base d'aquesta anàlisi lògica la visió de l'espai associada al punt de vista perspectiu. En certa manera, podríem dir que la geometria projectiva descriu l'espai tal i com el veu un observador,[58] és la geometria de la perspectiva.[59]

[58]No deixa de ser curiós observar que van ser els grans artistes del renaixement els que van donar els primers passos per «humanitzar» la geometria, fugint de la concepció impersonal de la geometria euclidiana i donant un lloc central al punt de vista d'un observador concret situat en un lloc concret de l'espai. Les rectes paral·leles d'Euclides *no poden ser vistes* per ningú, perquè el propi fet de la visió introdueix els punts de fuga on convergeixen les paral·leles.

[59]Dir que la teoria de la perspectiva va ser l'*únic* motiu que va induir a la introducció de la geometria projectiva és una simplificació exagerada. En un principi, la perspectiva va ser simplement una *tècnica* per a representar objectes en un pla. El pas d'aquesta tècnica a una *teoria* de la geometria projectiva va ser necessàriament lent. Diversos matemàtics van jugar un paper important en aquest desenvolupament. Sembla ser que Desargues va ser el primer que va veure els punts de fuga com a imatges de punts infinitament allunyats on es tallen les paral·leles. Simultàniament, va utilitzar projeccions per tal de demostrar alguns resultats importants de geometria, com el teorema que du el seu nom i que jugarà un paper fonamental més endavant. Cal no desestimar tampoc la influència de la classificació projectiva de les cúbiques, duta a terme per Newton, el qual demostra que, de la mateixa manera que totes les còniques (el·lipse, hipèrbola i paràbola) poden obtenir-se per projecció

Axiomes de la geometria projectiva

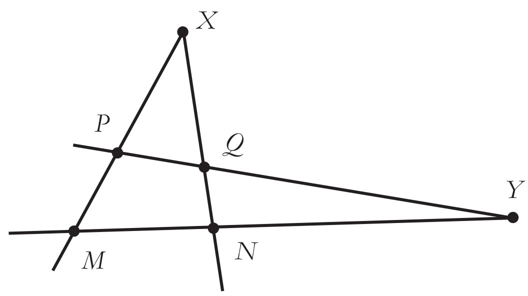
Anem a axiomatitzar aquesta nova visió de l'espai que acabem de descriure. Pretenem fer una axiomàtica el més senzilla i general possible. Prendrem només *dos* objectes bàsics, *una* única relació i *tres* axiomes. Postulem l'existència de *punts*[60] i *rectes*.[61] Postulem l'existència d'una relació d'*incidència* entre punts i rectes, de manera que tindrà sentit dir que un punt és a una recta, que una recta passa per un punt, que dues rectes es tallen, etc. Postulem tres *axiomes*:

I Tota recta té com a mínim tres punts.

II Per dos punts diferents hi passa una única recta.

III (Axioma projectiu) Si M, N, P, Q són quatre punts diferents i les rectes que passen per M, N i P, Q, respectivament, es tallen, també es tallen les rectes que passen per M, P i N, Q, respectivament.

L'axioma projectiu es pot enunciar dient que «rectes que jeuen sobre rectes que es tallen, es tallen».



És clar que aquesta axiomàtica és molt pobre, comparada amb les d'Euclides i Hilbert. Aquí pobre vol dir que és molt general, és a dir, que admet molts models diferents. Per exemple, si considerem una geometria amb un

central a partir d'una única cònica (són, per tant, projectivament equivalents), hi ha cinc corbes de tercer grau que generen, per projecció, totes les altres cúbiques. El naixement «oficial» de la geometria projectiva es produeix el 1822 quan Poncelet publica el seu *Tractat de les Propietats de les Figures*, on fixa com a objectiu de la geometria projectiva l'estudi de les propietats de les figures que són invariants per projeccions.

[60] Exigim que el conjunt dels punts sigui no buit.

[61] El fet que no postulem l'existència de *plans* no vol pas dir que aquests no existeixen, ni que ens estem restringint a fer geometria plana. El que succeeix és que el concepte de pla no és un concepte primitiu, sinó que pot definir-se a partir dels conceptes bàsics. Tot i que ara no ens interessa aprofundir en aquesta direcció, direm que un pla és el conjunt de punts que pertanyen a les rectes que tallen simultàniament dues rectes diferents concurrents fixades.

únic punt i cap recta, o una geometria amb una única recta i un conjunt arbitrari (de més de dos elements) de punts, tindrem uns models que, tot i ser poc interessants, compleixen els axiomes de la geometria projectiva.[62]

Una *geometria projectiva* serà un conjunt de punts i rectes amb una relació d'incidència que satisfaci els axiomes **I**, **II** i **III**. Un *morfisme* de geometries projectives entre X i X' serà una aplicació dels punts de X en els punts de X' i una aplicació de les rectes de X en les rectes de X', de manera que es conservi la relació d'incidència. Dit d'una altra manera, com que una recta ve determinada per dos punts, un morfisme de X a X' serà una aplicació dels punts de S als de X' tal que, si tres punts de X estan alineats, també les seves imatges a X' ho estiguin. Un *isomorfisme* entre dues geometries projectives X i X', també anomenat una *col·lineació*, serà una bijecció entre els punts de X i els de X' amb la propietat que tres punts de X estan alineats si i només si ho estan les seves imatges.[63] També tenim el concepte de *subgeometria* d'una geometria X: és una geometria projectiva X' amb un morfisme injectiu (a nivell de punts *i* a nivell de rectes) $X' \to X$.

Ara volem desenvolupar una *teoria de la dimensió* per a geometries projectives. Si X és una geometria projectiva, una *subvarietat* de X serà una subgeometria X' de X que tingui la propietat que, donats dos punts de X', tots els punts de la recta que els conté són a X'. Aleshores, definim la *dimensió* d'una geometria X com el màxim n tal que hi ha una cadena de subvarietats de X

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n.$$

Si aquest n màxim no existeix, direm que X té dimensió infinita. Els axiomes de la geometria projectiva no imposen cap restricció sobre la dimensió de X, el el sentit que hi ha geometries que tenen cadenes de subvarietats arbitràriament llargues. Als exercicis del final d'aquest capítol apareixen plantejades les propietats bàsiques de la teoria de la dimensió per a geometries projectives.

En particular, tenim el concepte de *pla projectiu*: és una geometria projectiva de dimensió dos. La teoria de la dimensió que desenvolupem en els exercicis d'aquest capítol demostra immediatament que, en un pla projectiu, dues rectes sempre es tallen en un punt. D'altra banda, és fàcil veure que en un pla projectiu hi ha quatre punts, dels quals no n'hi ha tres d'alineats.

[62] El fet que haguem construït, de manera immediata, dos models de la geometria projectiva, no ha de fer creure que construir models on les rectes tinguin un nombre finit de punts és una tasca trivial. Més endavant insistirem sobre aquest punt.

[63] D'aquesta manera, la inversa d'una col·lineació és també una col·lineació. Observem que això no seria cert si haguéssim definit una col·lineació com una bijecció que enviés punts alineats a punts alineats.

D'aquesta manera, podem axiomatitzar el concepte de pla projectiu dient que un pla projectiu és un conjunt de punts i un conjunt de rectes, amb una relació d'incidència que compleixi els tres axiomes següents:

I Per dos punts diferents hi passa una única recta.

I Dues rectes diferents es tallen en un únic punt.

III Hi ha quatre punts, dels quals no n'hi ha tres d'alineats.

Aquests axiomes **I**, **II** i **III** tenen una propietat remarcable. Si intercanviem els termes recta i punt, conservant la relació d'incidència, obtenim tres proposicions que són *equivalents* als axiomes d'un pla projectiu. Això vol dir que si, en un pla projectiu, intercanviem els conceptes de punt i recta, obtenim un altre pla projectiu, anomenat el *pla projectiu dual*. Imaginem ara que hem demostrat un teorema sobre plans projectius, vàlid, per tant, a tot pla projectiu. Si ara, a l'enunciat del teorema, intercanviem rectes i punts, obtindrem un altre teorema, anomenat *teorema dual*, que serà vàlid, també, a tots els plans projectius. Aquest fet singular, inexistent a la geometria euclidiana, que ens permet, d'un cop i sense esforç, multiplicar per dos el nombre de teoremes de la geometria projectiva, es coneix com a *Principi de Dualitat*.[64]

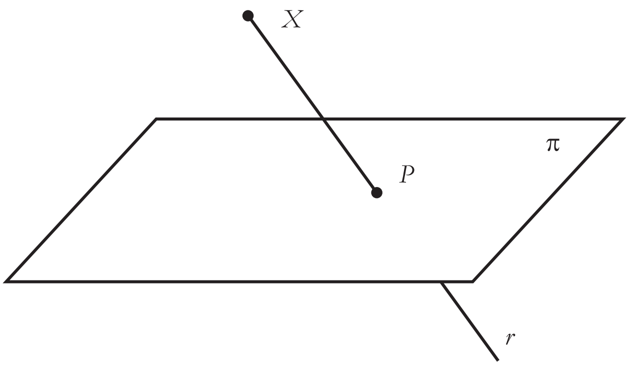
> [Principi de dualitat] *Si, en un teorema sobre plans projectius, intercanviem les paraules* recta *i* punt, *obtenim un altre teorema sobre plans projectius.*[65] [1]

[64]El *principi de dualitat* va ser introduït per Poncelet i Gergonne i, tot i que durant un cert temps va veure's més com un principi filosòfic o heurístic que com un mètode vàlid de demostració, va permetre, d'una banda, obtenir per dualitat teoremes nous i, d'altra banda, reconèixer com a duals parelles de teoremes que havien estat demostrats independentment. D'altra banda, aquest principi no es restringeix al cas del pla projectiu, sinó que, convenientment formulat, és vàlid a tota geometria projectiva de dimensió finita. En el cas general, cal intercanviar els termes *punt* i *hiperplà*.

[65]Cal fer una observació. Si volem dualitzar un teorema, cal que el teorema s'hagi obtingut utilitzant només els axiomes de pla projectiu. D'altra banda, és obvi que, si a l'enunciat del teorema apareixen conceptes que es defineixen a partir dels de recta i punt, cal també dualitzar aquests conceptes. Posem un exemple. En l'estudi de les còniques es demostra que per cinc punts hi passa una única cònica. El dual d'aquest teorema no és pas, òbviament, que cinc rectes es tallen en una única cònica! Cal prendre la definició de cònica, basada només en els conceptes primitius de la geometria projectiva, i dualitzar-la: el teorema dual és el que diu que, donades cinc rectes, hi ha una única cònica tangent a totes elles.

L'espai projectiu d'un espai vectorial

De la mateixa manera que $\mathbb{R}^n$ és el «model estàndard» de la geometria de Euclides-Hilbert, anem ara a presentar el que serà el model estàndard de la geometria projectiva: l'*espai projectiu* d'un espai vectorial. Aquest model s'obté quan apliquem el punt de vista de la projecció central que hem descrit abans a la geometria lineal ordinària d'un espai vectorial.



Sigui X el punt de mira des del qual observem el pla π. Quan, des de X, mirem el punt P, de fet, estem veient simultàniament tota la recta r. Els punts del pla π els podem identificar, doncs, a rectes que passen per X, observant, però, que hi ha rectes que no es corresponen a cap punt del pla, les rectes paral·leles a π que passen per X. Aquestes rectes horitzontals poden entendre's com les corresponents als punts de l'horitzó del pla π. Aquestes consideracions suggereixen de prendre com a *punts* de la geometria projectiva les *rectes* que passen per un punt donat.

Sigui V un espai vectorial $\neq \{0\}$. Definim *l'espai projectiu de V, $P(V)$, com el conjunt de les rectes de V que passen per l'origen.* [2]

L'espai projectiu d'un espai vectorial és, per tant un *conjunt*. Els elements d'aquest conjunt els anomenarem *punts* de l'espai projectiu. Donat que els elements del conjunt $P(V)$ són les *rectes* de l'espai vectorial V, cal, quan parlem de punts o rectes, tenir en compte si estem parlant d'un espai vectorial o bé de l'espai projectiu associat.

El conjunt $P(V)$ serà una geometria projectiva. Cal, per tant, definir què és una *recta* de $P(V)$. Direm que tres punts de $P(V)$ estan *alineats* quan, mirats com a rectes de V, estiguin contingudes a un pla. Tenim, doncs, a $P(V)$, els conceptes de punt i recta i també la relació d'incidència. Cal comprovar que es compleixen els axiomes **I**, **II** i **III**. L'axioma **I** és obvi. És clar que, donades dues rectes de V que passin per l'origen, hi ha un únic pla que les conté. Això és equivalent a l'axioma **II**. L'axioma projectiu no és més difícil. Siguin A, B, C i D quatre punts de $P(V)$, és a dir, quatre rectes de V, i siguin $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, respectivament, vectors no nuls sobre aquestes rectes. Suposem que les rectes AB i CD es tallen. Això vol dir que els plans generats per $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i per $\vec{c}$ i $\vec{d}$, respectivament, es tallen en una recta, és a dir, els quatre vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ són linealment dependents. Per tant, també els plans generats per $\vec{a}$ i $\vec{c}$ i per $\vec{b}$ i $\vec{d}$, respectivament, es tallaran en una recta, amb la qual cosa les rectes projectives AC i BD es tallaran. Això demostra que $P(V)$ compleix els axiomes de la geometria projectiva.[66]

Cada vector no nul d'un espai vectorial determina una única recta que passa per l'origen, és a dir, determina un punt de l'espai projectiu associat. Tenim, per tant, una aplicació, anomenada *projectivització*, que va de l'espai vectorial menys el zero a l'espai projectiu:

$$p\colon V - \{0\} \to P(V).$$

Aquesta aplicació és exhaustiva i dos vectors tenen la mateixa imatge si i només si un és múltiple no nul de l'altre. Això ens permet veure $P(V)$ com el conjunt quocient de $V - \{0\}$ per la relació d'equivalència

$$\vec{v} \sim \vec{v}' \iff \text{existeix } \lambda \neq 0 \text{ tal que } \vec{v} = \lambda \vec{v}'.$$

Direm, de vegades, que $P(V)$ és la projectivització de l'espai vectorial V.

En aquest curs, més que no pas aprofundir en l'estructura de l'espai projectiu $P_n(k)$, ens interessa $P_n(k)$ només en tant que *model* de geometria projectiva. De tota manera, inclourem en aquest apartat alguns temes elementals sobre l'estructura de $P(V)$.

Hi ha una sèrie de conceptes referits a espais vectorials que poden traslladar-se a l'espai projectiu. Definim la *dimensió* d'un espai projectiu $P(V)$ com la dimensió de V *menys u* . Si $P(V)$ té dimensió 1, l'anomenarem *recta projectiva*. Si $P(V)$ té dimensió 2, direm que és un *pla projectiu*.[67] Observem que una recta projectiva és la projectivització d'un espai vectorial

[66] No suposem que els cos base de l'espai vectorial V sigui un cos commutatiu. Admetem també la geometria projectiva sobre un cos no commutatiu. En aquest cas, entendrem que els espais vectorials són sempre per l'esquerra (dreta i esquerra les de l'espectador). Tot i que, sempre que sigui possible, desenvoluparem la teoria en el cas general, el lector pot suposar, si li és més còmode, que es cos base és commutatiu. Més endavant veurem una propietat geomètrica que és equivalent a la commutativitat del cos.

[67] Aquí hi ha un abús de llenguatge, perquè havíem definit un pla projectiu com una geometria projectiva de dimensió dos, mentre que ara anomenem pla projectiu a $P(V)$ amb $\dim(V) = 3$. En cada cas, el context ens ha d'indicar quin és el sentit que donem a l'expressió «pla projectiu». Diguem, però, que, tal i com estudiarem a fons més endavant, els dos conceptes *no* coincideixen.

de dimensió 2, mentre que un pla projectiu és la projectivització d'un espai vectorial de dimensió 3. Hi ha un desfase d'una unitat entre el món projectiu i el món vectorial.[68]

A un espai vectorial tenim el concepte de subespai vectorial. A l'espai projectiu podem definir un *subespai projectiu* com la projectivització d'un subespai vectorial. La dimensió d'un subespai projectiu serà la dimensió del subespai vectorial menys u. D'aquesta forma, els punts i les rectes de $P(V)$ són els subespais de dimensions 0 i 1, respectivament. En general, tot el que estem dient té sentit tant si la dimensió de V és finita com si no ho és, però, a partir d'ara, suposarem que V, i, per tant, també $P(V)$ són de dimensió finita. Si $P(V)$ té dimensió n, un *hiperplà* de $P(V)$ serà un subespai projectiu de dimensió $n-1$, és a dir, de *codimensió* 1.

Un isomorfisme $\varphi : V \cong V'$ donarà lloc, de manera òbvia, a un isomorfisme de geometries projectives $\bar{\varphi} : P(V) \cong P(V')$, anomenat la projectivització de φ. Observem, en canvi, que una simple aplicació lineal de V a V' *no* dóna lloc, en general, a una aplicació entre els espais projectius de V i V'.

Si k és un cos i $n > 0$, podem considerar el k-espai vectorial k^{n+1}. L'*espai projectiu de dimensió n sobre el cos k* serà, per definició, l'espai projectiu d'aquest espai vectorial:

$$P_n(k) = P(k^{n+1}).$$

Segons el que hem dit abans, $P_n(k)$ pot definir-se com el conjunt quocient de $k^{n+1} - \{0\}$ per la relació d'equivalència

$$v \sim w \iff v = \lambda w, \quad \lambda \neq 0.$$

La classe d'equivalència del punt $(x_0, \dots, x_n)$ s'acostuma a escriure $\{x_0, \dots, x_n\}$ i es diu que aquestes són les *coordenades homogènies* del punt corresponent de l'espai projectiu. Si V és un espai vectorial de dimensió $n+1$ sobre k, sempre podem prendre una base de V que ens doni un isomorfisme $V \cong k^{n+1}$. Via aquest isomorfisme, els punts de $P(V)$ tenen coordenades homogènies que els determinen unívocament. Observem que les coordenades d'un punt d'una recta projectiva tenen *dos* components, les d'un punt d'un pla projectiu en tenen *tres*, etc.

Si k és un cos commutatiu, hi ha una manera geomètrica d'introduir coordenades a $P(V)$. Siguin $U_0, \dots, U_n, U$ punts de $P(V)$ tals que no n'hi hagi $n+1$ en un mateix hiperplà. Direm que formen un *sistema de coordenades* amb *punt unitat U*. Aleshores, és fàcil veure que existeix una base $v_0, \dots, v_n$ de V amb la propietat que $U_i = \langle v_i \rangle$, $i = 0, \dots, n$, i $U = \langle v_0 + \cdots + v_n \rangle$.

[68]No és difícil comprovar que aquest concepte de dimensió que acabem de definir coincideix amb el concepte *intrínsec* de dimensió d'una geometria projectiva que havíem introduit abans.

Aquesta base és única llevat del producte per un escalar. Aleshores, les coordenades d'un punt P respecte d'aquest sistema de coordenades són les coordenades homogènies de P en la base $v_0, \dots, v_n$. És fàcil comprovar que, si k és commutatiu, aquestes coordenades estan unívocament determinades (com a coordenades homogènies, és a dir, estan determinades llevat d'un escalar no nul).[69]

Un cop tenim coordenades homogènies a $P(V)$ (per exemple, havent escollit una base de V), podem parlar, per exemple, de l'*equació d'un hiperplà* a $P(V)$, que serà l'equació de l'hiperplà corresponent de V o, equivalentment, l'equació que compleixen les coordenades homogènies dels punts de l'hiperplà.

Si $\{x_0, \dots, x_n\}$ són les coordenades homogènies d'un punt de $P(V)$, observem que sempre hi ha d'haver algun i tal que $x_i \neq 0$. Tenint en compte la relació d'equivalència que tenim entre les coordenades homogènies, podem escriure:

$$\{x_0, \dots, x_n\} = \left\{ \frac{x_0}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right\}.$$

En particular, tots els punts del projectiu, llevat dels de l'hiperplà $x_i = 0$, admeten coordenades homogènies amb un 1 al lloc i. Els punts que no són a l'hiperplà $x_i = 0$ venen descrits unívocament per les n coordenades restants, que s'anomenen *coordenades no homogènies* del punt.[70]

Si H és un hiperplà de $P_n(k)$, hi ha una correspondència bijectiva entre $P_n(k) - H$ i k^n. Aquesta correspondència conserva subespais. [3]

En primer lloc, podem fer un canvi de coordenades i suposar que H és l'hiperplà d'equació $x_0 = 0$. Aleshores, tots els punts del complement $P_n(k) - H$ tenen coordenades homogènies $\{x_0, \dots, x_n\}$, amb $x_0 \neq 0$. Associem a cada punt de $P_n(k) - H$ les coordenades no homogènies $(x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$. Ara és fàcil veure que aquesta aplicació de $P_n(k) - H$ a k^n és bijectiva. □

La proposició anterior ens permet veure l'espai projectiu de dimensió n com una *completació* de l'espai vectorial de dimensió n. En efecte, l'espai vectorial de dimensió n s'obté eliminant, de l'espai projectiu de dimensió n, un hiperplà. En particular, el pla vectorial (anomenat *pla afí*) s'obté traient una recta (la *recta impròpia*) del pla projectiu. Per abús de llenguatge,

[69] La unicitat falla si el cos base és no commutatiu. Malgrat això, donat un sistema de coordenades, sempre podem prendre *alguna* base de V lligada amb aquest sistema de coordenades, i considerar, aleshores, les coordenades homogènies respecte d'aquesta base.

[70] Les coordenades homogènies d'un punt estan unívocament determinades (com a classes d'equivalència!) quan hem fixat una base de V. Les coordenades no homogènies només estan determinades quan hem fixat una base de V i un vector d'aquesta base.

podem dir que l'espai projectiu s'obté adjuntant a l'espai afí l'*hiperplà de l'infinit*.[71]

Configuracions

Una *configuració* és un conjunt de punts i un conjunt de rectes, amb una relació d'incidència, de manera que es compleix que per dos punts hi passa, com a màxim, una recta. Per exemple, tota geometria projectiva és una configuració, però el concepte de configuració és més general que el de geometria. Podem definir fàcilment el concepte d'*inclusió*[72] entre configuracions i el concepte d'*automorfisme* d'una configuració. Una configuració direm que és *homogènia* si el grup dels seus automorfismes actua transitivament sobre els punts i les rectes. La configuració *dual* d'una configuració és la configuració que s'obté intercanviant els punts amb les rectes. Per tal de defugir els casos trivials, suposarem sempre que a una configuració sempre hi ha quatre punts dels quals no n'hi ha tres d'alineats.

Tota configuració pot incloure's en un pla projectiu. [4]

El que hi manca a una configuració per ser un pla projectiu és que per dos punts sempre hi ha de passar una recta i que dues rectes sempre s'han de tallar. Observem que a partir d'una configuració π podem construir una configuració $\pi^* \supset \pi$ de la manera següent. Prenem el punts i les rectes de π. Per cada parella de punts de π que no siguin incidents a cap recta, afegim una recta que només serà incident a aquests dos punts. Per cada dues rectes de π que no es tallin, afegim un punt que només serà incident a aquestes dues rectes.

D'aquesta manera, podem construir una cadena de configuracions:

$$\pi \subset \pi^* \subset \pi^{**} \subset \pi^{***} \subset \dots$$

la unió de les quals és un pla projectiu. □

Del pla que hem construit d'aquesta manera en direm el *pla lliure* sobre la configuració π.

Sigui π una configuració en la qual hem escollit una recta r. Direm que en un pla projectiu P es compleix la configuració π quan tota inclusió de $\pi - r$ a P es pot estendre a una inclusió de π a P. És clar que, si π és homogènia, l'elecció de la recta r és irrellevant.

[71] Aquesta frase, per ella mateixa, no té cap sentit. El sentit correcte és el que ve donat per la proposició 3.

[72] Si C i C' són configuracions, direm que $C \subset C'$ si els punts i rectes de C ho són també de C' i si, per tot punt x de C i tota recta r de C, x és incident a r a C si i només si x és incident a r a C'.

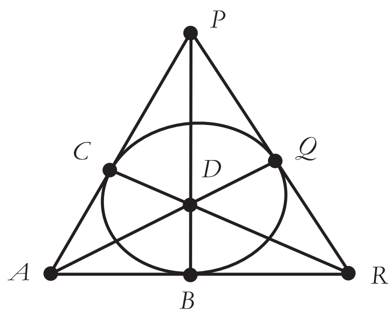
Sigui π una configuració en la qual hem escollit una recta. Existeix un pla projectiu on no *es compleix π.* [5]

Considerem la configuració $\pi - r$ i construïm el pla lliure P sobre $\pi - r$. És clar que la inclusió de $\pi - r$ a P no es pot estendre a una inclusió de π a P. □

A partir d'ara estudiarem algunes configuracions particularment rellevants.

La configuració de Fano

És la configuració de set punts i set rectes representada en el dibuix següent (on una de les set rectes està representada per una corba perquè aquesta configuració no es pot incloure al pla euclidià).



Observem que la configuració de Fano és homogènia i autodual i que, de fet, és un pla projectiu.

A $P_n(k)$, $n > 1$, es compleix la configuració de Fano si i només si k té característica 2. [6]

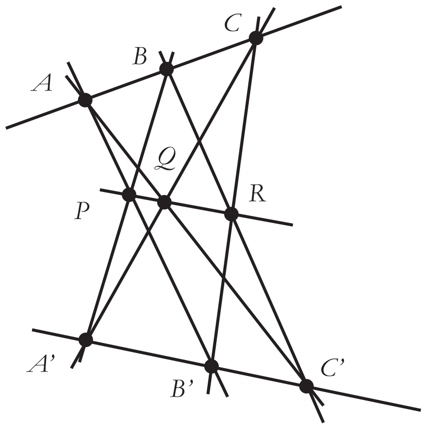
Prenem coordenades homogènies de manera que tinguem $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ i $D = (1, 1, 1)$. Ara podem determinar les equacions de les rectes. Per exemple, AC és la recta $x = 0$, AB és la recta $y = 0$, etc. Les coordenades dels punts P, Q, R resulten ser $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 1)$, respectivament. Suposem que P, Q i R estan sobre la recta $ax+by+cz = 0$. Això és equivalent a que a, b i c compleixin

$$a + b = b + c = a + c = 0$$

i aquestes equacions tenen solució no trivial si i només si k té característica 2. □

La configuració de Pappos

És la configuració de nou punts i nou rectes representada en aquest dibuix.



És una configuració homogènia i autodual.[73]

A $P_2(k)$ es compleix la configuració de Pappos si i només si k és commutatiu. [7]

Prenem coordenades homogènies de manera que tinguem $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$ i $A = (1, 1, 1)$ i ara calculem les coordenades dels diferents punts i les equacions de les diferents rectes que apareixen a la configuració. Veiem que $A' = (1, 0, a)$ i $B' = (b, 1, 1)$ per alguns $a, b \in k$ arbitraris. Aleshores, $C' = (1 - ab, 1 - a, 1 - ab)$, $C = (1, 1, a)$ i tenim que PQ és la recta $z = 0$. Observem que

$$\begin{aligned} B'C \cdot PQ &= (1, 1 + (b-1)(1-ab)^{-1}a, 0) \\ BC' \cdot PQ &= (1, (1-ab)^{-1}(1-a), 0) \end{aligned}$$

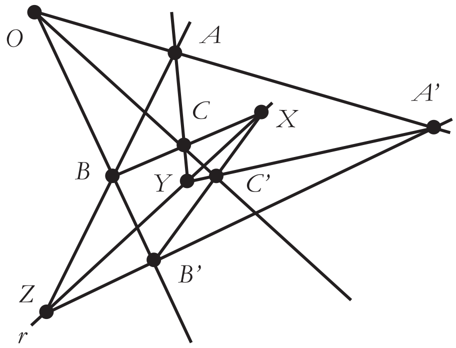
i ara és fàcil veure que aquests dos punts coincideixen si i només si $ab = ba$. □[74]

[73]Sovint s'anomena configuració de Pappos la configuració formada pels nou punts i rectes de la que nosaltres hem anomenat configuració de Pappos, més un punt O incident a la recta AB i a la recta $A'B'$. És a dir, s'imposa que la configuració de Pappos sigui *plana*. Nosaltres preferim no incloure el punt O perquè aquest punt emmascara la simetria de la configuració.

[74]Quan haguem demostrat el teorema de coordinació podrem donar una demostració més conceptual d'aquest teorema (vegeu la nota 78).

La configuració de Desargues

És una configuració de deu punts i deu rectes, homogènia i autodual, que juga un paper crucial en la fonamentació de la geometria. Ve representada pel dibuix següent.



Podem pensar aquesta configuració de la manera següent: Considerem els triangles ABC i $A'B'C'$. Aquests triangles estan en perspectiva respecte del punt O i respecte de la recta r.[75] Dir que en una geometria projectiva es compleix la configuració de Desargues és afirmar que «dos triangles perspectius respecte d'un punt ho són també respecte d'una recta».

El raonament de la proposició 5 ens garanteix que hi ha plans projectius on no es compleix la configuració de Desargues. En canvi, tenim:

> *Si X és una geometria projectiva de dimensió > 2, a X es compleix la configuració de Desargues.* [8]

Les tres rectes que es tallen a O estan dintre d'un subespai de dimensió tres de X. Per tant, no és restrictiu suposar que X té dimensió tres. Siguin π i π' els plans determinats pels triangles ABC i $A'B'C'$, respectivament. Si $\pi \neq \pi'$, aleshores la intersecció de π i π' és una recta que ha de contenir els punts X, Y, Z.

Si $\pi = \pi'$, és a dir, si la configuració està continguda en un pla de X, utilitzem l'estratagema següent per a demostrar el teorema. Prenem dos punts O', O'' alineats amb O i fora del pla π. (Aquí estem utilitzant que la dimensió de X és més gran que dos.) Considerem els triangles de vèrtex

$$\begin{aligned} A'' &= O'A \cdot O''A' \\ B'' &= O'B \cdot O''B' \\ C'' &= O'C \cdot O''C' \end{aligned}$$

[75] És a dir, hi ha una correspondència entre els vèrtex d'un triangle i els vèrtex de l'altre, de manera que les rectes que uneixen els vèrtex corresponents són concurrents (perspectivitat respecte d'un punt) i els punts d'intersecció dels costats corresponents estan alineats (perspectivitat respecte d'una recta).

Aleshores, els triangles ABC i $A''B''C''$ estan en una configuració de Desargues no plana, i també ho estan els triangles $A'B'C'$ i $A''B''C''$. D'aquí es dedueix sense gaire dificultat que ABC i $A'B'C'$ estan en perspectiva respecte d'una recta. □

Un pla projectiu *desarguesià* serà un pla projectiu on es compleixi la configuració de Desargues.

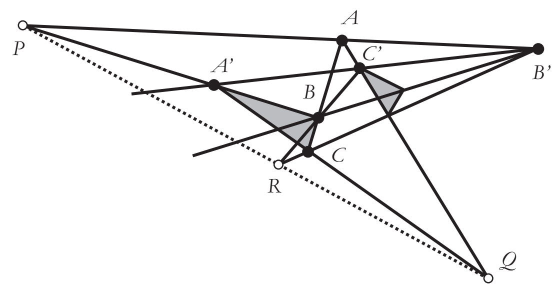
És interessant observar que la configuració de Desargues és una conseqüència de la configuració de Pappos, és a dir, es pot demostrar que, si en una geometria projectiva es compleix la configuració de Pappos, també es compleix la de Desargues.[76]

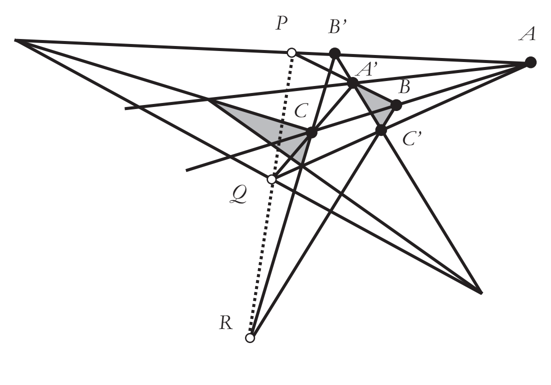
Un punt important sobre la configuració de Desargues és que està íntimament relacionada amb l'existència d'un nombre suficient de «simetries» a la geometria. Anem a estudiar ara què volem dir, exactament, amb aquesta frase.

Sigui X una geometria projectiva (de dimensió 2) i sigui C el grup de les col·lineacions de X. Escollim ara una recta de X —que anomenarem

[76]La demostració de que «Pappos implica Desargues» es fa de la manera següent.

Com que, en dimensió més gran que dos, Desargues és una conseqüència dels axiomes de la geometria projectiva, podem suposar que som en un pla projectiu on es compleix la configuració de Pappos. Prenem dos triangles que estiguin en perspectiva respecte d'un punt. Volem veure que els punts d'intersecció dels costats corresponents estan alineats. Això es fa aplicant tres vegades la configuració de Pappos. La millor manera de presentar aquesta demostració és mostrar tres dibuixos on hem posat en evidència, en cada un d'ells, els punts A, B, C, A', B', C', P, Q i R d'una configuració de Pappos.





recta de l'infinit— i sigui D el subgrup de C format per les col·lineacions que deixen fixos (un a un) els punts de l'infinit. Els elements de D s'anomenaran *dilatacions*. Sigui T el subconjunt de D format per la identitat i les dilatacions sense cap punt fix fora de l'infinit. Els elements de T s'anomenen *translacions*. Vegem ara una sèrie de lemes senzills sobre translacions i dilatacions.

Si una dilatació té dos punts fixos fora de l'infinit, és la identitat. [9]

Això és evident perquè si x és un punt de X, podem unir x amb cada un dels dos punts fixos fora de l'infinit. Com que les rectes que passen per dos punts fixos han de ser fixes, deduïm que x és fix. □

Si $\tau \neq 1$ és una translació, les rectes $x\tau(x)$, $x \in X - \infty$, són concurrents en un punt de l'infinit, anomenat la direcció *de τ.* [10]

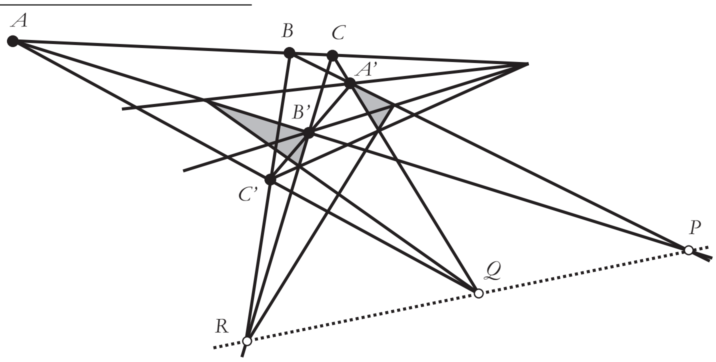
Sigui $z = x\tau(x) \cdot \infty$ i $y \in X - \infty$. El punt $xz \cdot y\tau(y)$ és un punt fix de τ. Per tant, és a l'infinit i ha de coincidir amb z. □

Una translació ve determinada per la imatge d'un punt fora de l'infinit. [11]

Si coneixem $\tau(x)$ per a un punt $x \in X - \infty$, també coneixem la direcció de τ. Aleshores, $\tau(y)$ es pot calcular de la manera següent. Si $u = xy \cdot \infty$, aleshores $\tau(y) = u\tau(x) \cdot yz$. □

T és un subgrup normal de D. [12]

Per demostrar que T és un subgrup de D, cal veure que si τ_1, τ_2 són translacions i $\tau_1\tau_2$ té un punt fix fora de l'infinit, aleshores $\tau_1\tau_2 = 1$. Però, si $\tau_1\tau_2(x) = x$, aleshores τ_2 i τ_1^{-1} són dues translacions que coincideixen



□

sobre un punt fora de l'infinit. Això implica que tenen la mateixa direcció i ara és fàcil concloure que $\tau_1\tau_2 = 1$.

Sigui ara σ una dilatació i $\tau \in T$. Suposem que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ té un punt fix x fora de l'infinit. Aleshores, $\sigma^{-1}(x)$ és un punt fix de τ. Per tant, $\tau = 1$ i $\sigma\tau\sigma^{-1} = 1$. Això demostra que T és normal a D. □

Si hi ha translacions de direccions diferents, aleshores T és abelià. [13]

Suposem que τ_1 i τ_2 tenen direccions diferents z_1, z_2. Aleshores,

$$\tau_1\tau_2(x) = \tau_1(x)z_2 \cdot \tau_2(x)z_1 = \tau_2\tau_1(x).$$

Si τ_1 i τ_2 tenen la mateixa direcció, escollim una translació τ que tingui una direcció diferent. Aleshores, també $\tau_2\tau$ té direcció diferent de la de τ_1 i τ_2 (perquè $\tau = \tau_2^{-1}(\tau_2\tau)$). Per tant, com que hem vist que les translacions de direccions diferents commuten, tenim

$$\tau_1(\tau_2\tau) = (\tau_2\tau)\tau_1 = \tau_2(\tau\tau_1) = \tau_2\tau_1\tau,$$

d'on $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. □

Si $\sigma \neq 1$ és una dilatació, definim el seu *centre* de la manera següent. Si σ és una translació, el seu centre és la seva direcció. Si σ no és una translació, el seu centre és l'únic punt fix fora de l'infinit. Ara podem enunciar i demostrar el teorema que hem indicat més amunt i que relaciona la configuració de Desargues amb l'existència de prou col·lineacions a la geometria.

Sigui X un pla projectiu. A X es compleix la configuració de Desargues si i només si, donats tres punts (diferents) alineats a, x, y i una recta de l'infinit que no contingui x ni y, existeix una dilatació σ de centre a tal que $\sigma(x) = y$. [14]

Suposem que X té prou dilatacions, en el sentit de l'enunciat del teorema, i siguin ABC, $A'B'C'$ dos triangles amb un centre de perspectiva. Siguin P, Q, R els punts d'intersecció dels costats homòlegs,

$$P = BC \cdot B'C', \quad Q = AC \cdot A'C', \quad R = AB \cdot A'B'.$$

Volem veure que P, Q, R estan alineats. Escollim la recta PQ com a recta de l'infinit i sigui σ una dilatació de centre O tal que $\sigma(A) = A'$. Aleshores, és clar que s'ha de complir $\sigma(B) = B'$ i $\sigma(C) = C'$. Per tant, $\sigma(R) = R$ i R ha de ser a l'infinit, és a dir, tenim la configuració de Desargues.

Recíprocament, escollim una recta de l'infinit i tres punts a, x_0, y_0 com a l'enunciat. Cal definir una dilatació σ de centre a amb $\sigma(x_0) = y_0$. Comencem posant $\sigma|_\infty = 1$, $\sigma(a) = a$, $\sigma(x_0) = y_0$. Si x no és a la recta x_0y_0, la construcció de la proposició 11 ens permet definir $\sigma(x)$. Escollim ara $x_1 \notin \infty$ fora de la recta x_0y_0 i definim $y_1 = \sigma(x_1)$. Ara, si tenim un punt $x \neq a$ qualsevol fora de l'infinit, o bé x no estarà alineat amb x_0y_0 o bé no ho estarà amb x_1y_1. En cada cas, tenim una manera canònica de definir $\sigma(x)$. El problema rau en que, en general, tindrem *dues* maneres de definir $\sigma(x)$ que, en principi, són diferents. El punt interessant és que la configuració de Desargues ens mostra que aquestes dues maneres de definir $\sigma(x)$ donen el mateix resultat i tenim, per tant, ben definida una bijecció $\sigma : X \to X$ que deixa fix a i els punts de l'infinit i envia x_0 a y_0. Cal veure que es tracta d'una col·lineació. Observem que n'hi ha prou amb demostrar que si x, x' i $z \in \infty$ estan alineats, aleshores $\sigma(x)$, $\sigma(x')$ i $\sigma(z) = z$ també ho estan. Això és una conseqüència fàcil, una vegada més, de la configuració de Desargues.
□

Com a corol·lari, veiem que la configuració de Desargues implica que les translacions respecte d'una recta de l'infinit formen un *grup abelià*.

La coordinació de la geometria

En aquest apartat volem demostrar el següent *teorema fonamental*:

> *Si X és una geometria projectiva de dimensió finita on es compleix la configuració de Desargues, aleshores X és isomorfa a l'espai projectiu $P_n(k)$ per un cert cos k i un cert $n > 1$.* [15]

És a dir, la configuració de Desargues és exactament l'axioma suplementari que necessitem per distingir $P_n(k)$ de les geometries projectives més generals. És l'axioma necessari i suficient per poder *introduir coordenades* a una geometria X. D'aquest fet en direm la *coordinació* de X i aquest teorema fonamental ens diu que la geometria projectiva es pot dividir en l'estudi de l'espai projectiu $P_n(k)$ —la geometria projectiva *clàssica*— i l'estudi dels plans projectius no desarguesians.

En el fons, la introducció de coordenades a X es basa en les idees que ja havíem apuntat quan vam parlar de la unicitat de la geometria de Hilbert. De tota manera, però, el punt de vista actual és molt més general i, al mateix temps, més transparent.

La demostració del teorema fonamental 15 ha de començar per la construcció, a partir de la geometria X, del *cos d'escalars* k.

Sigui X un pla projectiu desarguesià i escollim una recta de l'infinit. Sigui T el grup abelià de les translacions de X. Utilitzem notació additiva a T, de manera que la translació identitat es designarà per 0. Sigui R l'anell d'endomorfismes de T. Un *escalar* serà un element $\lambda \in R$ que conservi la direcció. És clar que els escalars formen un subanell k. Com que T és normal al grup de les dilatacions, cada dilatació σ dóna lloc a un endomorfisme de T, per conjugació:

$$\lambda_\sigma(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}.$$

Un raonament geomètric senzill prova que λ_σ és un escalar.

Recordem que una translació està determinada per la imatge d'un punt (fora de l'infinit). Denotem per $t_{x,y} \in T$ la translació que transforma x en y. Pensem T com un k-mòdul i escrivim $\lambda\tau$ per indicar $\lambda(\tau)$.

Dues translacions de la mateixa direcció difereixen en un escalar. [16]

Siguin $\tau, \tau' \in T$ dues translacions de la mateixa direcció i x un punt fora de l'infinit. Escollim una dilatació σ de centre x tal que $\sigma(\tau(x)) = \tau'(x)$ (ho podem fer en virtut de la configuració de Desargues). Aleshores, $(\sigma\tau\sigma^{-1})(x) = \tau'(x)$ i, donat que una translació queda determinada per la imatge d'un punt fora de l'infinit, tenim que $\lambda_\sigma\tau = \tau'$. □

El teorema següent és el punt clau en la coordinació de X.

k és un cos. [17]

Fixem un punt x fora de l'infinit i designem per D_x el grup de les dilatacions de centre x. L'aplicació $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ és un homomorfisme de D_x en el grup multiplicatiu de les unitats de k. Demostrarem que k és un cos veient que tot escalar diferent de zero és de la forma λ_σ per algun $\sigma \in D_x$.

Sigui $\lambda \neq 0$ un escalar i sigui $\tau \neq 0$ una translació tal que $\lambda\tau \neq 0$. Siguin $y = \tau(x)$, $y' = (\lambda\tau)(x)$. Tenim que x, y, y' són tres punts alineats i podem trobar una dilatació σ de centre x que envïi y' a y. Definim $\mu = \lambda_\sigma\lambda \in k$ i haurem acabat la demostració si veiem que $\mu = 1$.

Tenim $\tau = t_{x,y}$, $\lambda\tau = t_{x,y'}$ i

$$\begin{aligned}(\mu t_{x,y})(x) = (\lambda_\sigma\lambda t_{x,y})(x) = \sigma(\lambda t_{x,y})\sigma^{-1}(x) = \\ \sigma(\lambda t_{x,y})(x) = \sigma(y') = y.\end{aligned}$$

Sigui ara z un punt qualsevol fora de l'infinit, no alineat amb xy. Considerem

$$(\mu t_{x,z})(x) = (\mu t_{x,y} + \mu t_{y,z})(x) = (\mu t_{y,z})(\mu t_{x,y}(x)) = (\mu t_{y,z})(y)$$

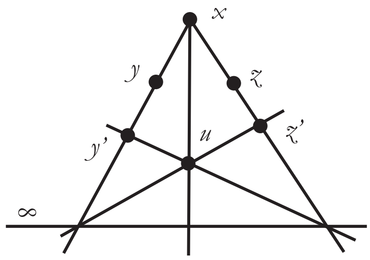
i observem que el membre de d'esquerra pertany a la recta xz mentre que el membre de la dreta pertany a la recta yz. Deduïm que $(\mu t_{x,z})(x) = z$, és a dir, $\mu t_{x,z} = t_{x,z}$ per tot z no alineat amb xy.

Si ara z és arbitrari, podem escriure $t_{x,z} = t_{x,a} + t_{x,b}$ amb a i b no alineats amb xy. Aleshores, $\mu t_{x,a} = t_{x,a}$, $\mu t_{x,b} = t_{x,b}$ i $\mu t_{x,z} = t_{x,z}$. Per tant, veiem que $\mu = 1$ i això acaba la demostració. □

És fàcil veure que l'homomorfisme $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ de la demostració anterior és també injectiu i, per tant, el grup multiplicatiu k^* és isomorf al grup D_x de les dilatacions de centre x.

T és un k-espai vectorial de dimensió dos. [18]

Escollim, fora de l'infinit, tres punts no alineats x, y, z. Demostrarem que les translacions $t_{x,y}$, $t_{x,z}$ formen una base de T. Considerem una translació $t_{x,u}$ i prenem els punts y', z' donats per la configuració del dibuix següent.



Aleshores, $t_{x,u} = t_{x,y'} + t_{x,z'}$. D'altra banda, com que $t_{x,y'}$ té la mateixa direcció que $t_{x,y}$, hauran de diferir en un escalar, i el mateix podrem dir de $t_{x,z'}$. Per tant, $t_{x,u} = \lambda t_{x,y} + \mu t_{x,z}$ per uns certs escalars $\lambda, \mu \in k$. Com que la composició de dues translacions de direccions diferents no pot ser la identitat, veiem que $t_{x,y}$ i $t_{x,z}$ són linealment independents. □

A partir de la geometria de X —inclòs l'axioma de Desargues— hem construït uns objectes algebraics: el cos d'escalars k, l'espai vectorial de les translacions T, etc. Si la geometria X és el pla projectiu sobre un cos K, voldríem identificar k i T a partir del cos K.

Prenem, doncs, $X = P_2(K) = P(K^3)$. Escollir una recta de l'infinit a X és escollir un pla P a K^3. Sigui e un vector de K^3 tal que $K^3 = P \oplus \langle e \rangle$. Si $v \in P$, li podem associar una translació t_v de X de la manera següent. t_v és la projectivització de l'aplicació lineal ϕ_v que és la identitat sobre P i envia e a $e + v$. Aleshores, és fàcil comprovar que t_v és una translació respecte de la recta de l'infinit, es compleix $t_{v+v'} = t_v + t_{v'}$ i la direcció de t_v és $\langle v \rangle$. Per tant, hem construït així un homomorfisme de grups $P \to T$, on T és el grup abelià de les translacions. Es veu fàcilment que aquest homomorfisme és un isomorfisme i, així, el grup de les translacions s'identifica al pla P.

D'altra banda, el cos d'escalars k estarà format per aquells endomorfismes de P que tinguin la propietat que tot vector de P és vector propi. Són les *homotècies* que, de manera natural, s'identifiquen al cos base K. Per tant, el cos d'escalars k construït geomètricament s'identifica al cos base K i, a més, l'acció de k sobre T es correspon a l'acció natural de K sobre P donada per les homotècies.

Ara ja podem demostrar el teorema fonamental 15. Novament, ens reduirem, per tal de simplificar l'exposició, al cas d'un pla projectiu.[77] Tenim, doncs, un pla projectiu desarguesià X i volem veure que és isomorf a $P_2(k)$ per a algun cos k. Comencem escollint una recta de l'infinit r a X i sigui k el cos d'escalars respecte d'aquesta recta de l'infinit. Sigui T l'espai vectorial de dimensió dos de les translacions.

Sabem que dues translacions de la mateixa direcció difereixen en un escalar i també sabem que hi ha translacions de qualsevol direcció. És a dir, l'espai projectiu de T s'identifica a la recta de l'infinit r. Considerem ara $E = T \oplus k$. Definim una aplicació $f : P(E) \to X$ de la manera següent. Fixem un punt z a $P(E) - P(T)$ i un punt $\bar{z}$ a $X - r$. Si $x \in P(E) - P(T)$, definim

$$f(x) = t_{z,x}(\bar{z}).$$

Això té sentit perquè abans hem vist que les translacions de $P(E)$ respecte de $P(T)$ s'identifiquen a T. L'existència de moltes translacions i el fet que una translació ve determinada per la imatge d'un punt fora de l'infinit, mostren que f és una bijecció.

Resta demostrar que f conserva rectes. Comencem veient que f commuta amb les translacions. En efecte, si τ és una translació, tenim:

$$f(\tau(x)) = t_{z,t(x)}(\bar{z}) = (t_{z,x} + t_{x,t(x)})(\bar{z}) = (\tau + t_{z,x})(\bar{z}) = \\ \tau(t_{z,x}(\bar{z})) = \tau f(x).$$

Com que la imatge per f de la recta de l'infinit és una recta, n'hi ha prou amb veure que si $a \in P(T)$, x, y estan alineats, aleshores $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$ també estan alineats. Sigui $\tau \in T$ la translació que envia x a y. És clar que la direcció de τ és a i, per tant, $a = \langle \tau \rangle$. Aleshores,

$$\tau f(x) = f(\tau(x)) = f(y)$$

i, per tant, $f(x)$ i $f(y)$ estan alineats amb la direcció de τ que, per definició, és $f(a)$. $\square$

[77] En el cas d'una geometria projectiva de dimensió (finita) arbitrària, el que caldria fer per demostrar el teorema fonamental és començar escollint un hiperplà de l'infinit i, aleshores, desenvolupar tota la teoria de dilatacions i translacions respecte d'aquest hiperplà. Finalment, la demostració seria essencialment la mateixa que en el cas del pla. Recordem que, si la dimensió és més gran que dos, la configuració de Desargues es compleix automàticament.

Com a corol·lari immediat obtenim el següent:[78]

Una geometria projectiva de dimensió finita > 1 *es pot incloure com a subvarietat pròpia d'una altra geometria projectiva si i només si compleix la configuració de Desargues.* [19]

Geometries finites

Una geometria finita (a partir d'ara entendrem sempre que es tracta de geometries projectives) és aquella que conté un nombre finit de punts. Per exemple, si k és un cos finit i V és un k-espai vectorial (de dimensió finita), aleshores $P(V)$ és una geometria finita. Si V té dimensió 3, tindrem un *pla projectiu finit*.

A tall d'exemple, estudiarem el pla projectiu més petit que existeix, que és el pla projectiu sobre el cos de dos elements, $\mathbb{F}_2$. Els punts del pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_2)$ tindran coordenades homogènies $\{x_0, x_1, x_2\}$ amb $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{F}_2$, no tots tres zero. Designant per 0 i 1 els dos elements de $\mathbb{F}_2$, veiem que $P_2(\mathbb{F}_2)$ consta de set punts, les coordenades homogènies dels quals són

$$\begin{aligned} a &= \{1, 0, 0\} \\ b &= \{1, 0, 1\} \\ c &= \{1, 1, 0\} \\ d &= \{1, 1, 1\} \\ e &= \{0, 1, 0\} \\ f &= \{0, 1, 1\} \\ g &= \{0, 0, 1\} \end{aligned}$$

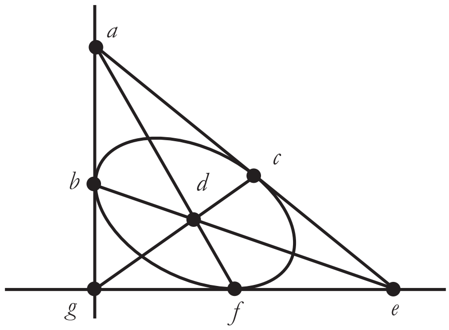
Les rectes de $P_2(\mathbb{F}_2)$ seran les projectivitzacions dels plans de $\mathbb{F}_2^3$ que passen per l'origen. Observem que cada un d'aquests plans conté només tres vectors diferents de zero i cada recta de $P_2(\mathbb{F}_2)$ tindrà només tres punts. Per saber si tres punts de l'espai projectiu estan alineats o no n'hi ha prou amb veure si els tres vectors de $(\mathbb{F}_2)^3$ corresponents són linealment dependents o no.

[78] Com a conseqüència del que acabem de veure, podem donar ara una demostració més conceptual del teorema 7 que relaciona la configuració de Pappos amb la commutativitat del cos d'escalars. Considerem, a $P_2(k)$, una configuració de Pappos plana, sense la recta PQ, que prenem com a recta de l'infinit. Sabem que k^* s'identifica al grup de les dilatacions de centre $O = AB \cdot A'B'$. Siguin σ i τ les dilatacions de centre O tals determinades per $\sigma(B') = C'$, $\tau(A') = B'$. Aleshores, la configuració de Pappus ens implica que $\tau(B) = A$ i $\tau^{-1}\sigma\tau(C) = B$. Per tant, R és un punt fix de σsi i només si σ i τ commuten. Ara bé, R només pot ser punt fix si és a la recta de l'infinit.

Obtenim un total de set rectes:

equació de la recta	punts que conté
$x = 0$	e, f, g
$y = 0$	a, b, g
$z = 0$	a, c, e
$x + y = 0$	c, d, g
$x + z = 0$	b, d, e
$y + z = 0$	a, d, f
$x + y + z = 0$	b, c, f

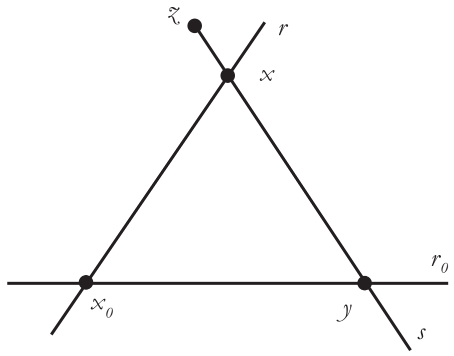
Podem representar aquest pla projectiu així:



És, exactament, la configuració de Fano. Si eliminem una recta, per exemple la recta $z = 0$, el que resta s'identifica al pla $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

Si X és un pla projectiu que conté una recta que té $n+1$ punts, aleshores: i) Totes les rectes tenen $n+1$ punts; ii) X té n^2+n+1 punts; iii) X té n^2+n+1 rectes; iv) per cada punt de X hi passen $n+1$ rectes. [20]

Siguin r_0 la recta de X que té $n+1$ punts i sigui r una recta qualsevol. Per demostrar *i)* establirem una correspondència bijectiva entre els punts de r_0 i els de r. Sigui x_0 el punt d'intersecció de r i r_0 i siguin $x \neq x_0$ sobre r i $y \neq x_0$ sobre r_0. Sigui s la recta que passa per x i y. Com que tota recta té, al menys, tres punts, hi ha un punt z sobre s, diferent de x i y. La correspondència bijectiva entre r i r_0 s'estableix fent correspondre x_0 amb ell mateix i cada punt $x' \neq x_0$ de r amb la intersecció amb r_0 de la recta que passa per z i x'.



ii) Es demostra de la següent manera. Prenem una recta r i un punt exterior x. Unim x amb cada un dels $n+1$ punts de r. Obtenim $n+1$ rectes que passen per x i és clar que tot punt de X és a alguna d'aquestes rectes. Un càlcul senzill dóna que el nombre de punts és n^2+n+1.

Utilitzem ara el *Principi de Dualitat*. El teorema dual del que hem demostrar fins ara diu que si un pla projectiu conté un punt per on passen $n+1$ rectes, aleshores, *i)* per tot punt hi passen $n+1$ rectes, *ii)* hi ha n^2+n+1 rectes. Això acaba la demostració de la proposició. □

L'enter n de la proposició anterior s'anomena l'*ordre* del pla projectiu. Per exemple, $P_2(\mathbb{F}_2)$ és un pla projectiu d'ordre 2. En general, el pla projectiu sobre un cos finit de r elements és un pla d'ordre r.[79]

[79] L'estudi de plans projectius finits és una àrea de recerca important. Cada cos finit k donarà lloc a un pla $P_2(k)$. Aquests exemples estan perfectament classificats, degut a que es coneix quins són exactament els cossos finits. Una primera pregunta que es planteja és si existeix algun pla projectiu finit que no sigui isomorf a $P_2(k)$ per cap k (és a dir, un pla no desarguesià finit). La resposta és sí, però la construcció explícita d'un exemple no és fàcil. Donarem un exemple a la secció següent. Dintre d'aquest camp de recerca, el problema obert més conegut és el de determinar quins són els possibles ordres d'un pla projectiu finit. El 1949, Bruck i Ryser van demostrar la següent restricció important sobre l'ordre d'un pla projectiu finit: Si $n \equiv 1, 2\,(4)$, una condició necessària perquè existeixi un pla d'ordre n és que n ha de ser suma de dos quadrats. D'altra banda, no s'ha pogut construir cap pla projectiu que tingui un ordre que no sigui potència d'un primer. El candidat més petit seria el pla d'ordre 10. L'existència o no existència d'aquest pla de 111 punts va ser, durant molt de temps, un problema obert que va ser objecte de nombroses investigacions. Finalment, el desembre de 1988 els mitjans de comunicació (The New York Times, Science, etc.) anunciaven la demostració de la no-existència del pla d'ordre 10. Aquesta demostració (Lam, Thiel i Swiercz) consisteix, majoritàriament, en una llarga sèrie de comprovacions fetes per ordinador. Tal i com va passar amb la conjectura dels quatre colors, hi ha molta gent que opina que aquesta mena de demostracions no són satisfactòries. (Es diu que Reinhold Baer, cap al 1957, parlant amb Hughes en un restaurant de Chicago, va dir que si mai el problema del pla d'ordre 10 s'acabava resolent per ordinador, ell preferia no haver-ho de veure.)

Quadrats llatins

Els plans projectius finits estan íntimament relacionats amb els *quadrats llatins*. Acabarem aquesta secció amb una introducció a la teoria dels quadrats llatins, des del punt de vista de la geometria projectiva.

Al 1779, Euler va conjecturar que no és possible disposar 36 militars pertanyents a 6 regiments i, dintre de cada regiment, de 6 graduacions, en una formació de 6 per 6, de manera que a cada fila i cada columna hi hagi un militar de cada graduació i un de cada regiment.[80]

És ben conegut el problema de disposar els asos, sotes, cavalls i reis d'un joc de cartes en un quadrat de 4 per 4, de manera que a cada fila i cada columna no hi hagi dues cartes del mateix coll ni del mateix valor.

Suposem que tenim 5 menes de llavors, 5 menes de fertilitzants, 5 menes de fungicides i 5 menes d'herbicides i volem comprovar l'eficàcia de cada un d'ells. La disposició òptima seria aquella on cada parella llavor–fertilitzant, fungicida–herbicida, etc. apareix una única vegada.

Aquests problemes i molts d'altres de similars estan relacionats amb els anomenats *quadrats llatins*.[81] Un quadrat llatí d'ordre n és una matriu $n \times n$ on els seus elements pertanyen al conjunt $\{1, \ldots, n\}$ (o a algun altre conjunt de n elements) i es compleix que a cada fila i a cada columna no hi ha cap nombre repetit. Per cada valor de n, és molt senzill de construir un quadrat llatí d'ordre n. N'hi ha prou, per exemple, amb escriure la taula de sumar de qualsevol grup additiu d'ordre n, per exemple el grup cíclic d'ordre n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Si ens fixem en els problemes anteriors, veurem que no involucren un únic quadrat llatí, sinó més d'un. Per exemple, per resoldre el problema del joc de cartes, ens caldria disposar de dos quadrats llatins: un per als valors de les cartes i un altre per als diferents colls, amb la condició que, superposant els dos quadrats llatins, cada parella {valor, coll} aparegui una única vegada. Direm que dos quadrats llatins L i L' *són ortogonals*[82] si, quan els superposem, cada parella (i, j), $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$ apareix una única vegada.

El problema d'Euler té solució si i només si existeixen dos quadrats llatins d'ordre 6, ortogonals entre sí. El problema del joc de cartes demana dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 4, mentre que el problema de les llavors

[80] També va conjecturar que, en general, el problema no té solució si el nombre de regiments i de graduacions és congruent amb 2 mòdul 4.

[81] Expliquem l'origen del nom «quadrat llatí». Euler, quan va proposar el problema dels 36 oficials, va designar per lletres *llatines* els sis regiments i per lletres *gregues* les sis graduacions. Aleshores, va dir que es tractava de construir un *quadrat llatí* i un *quadrat grec* de manera que, plegats, formessin un *quadrat greco-llatí*.

[82] De vegades s'utilitza el terme *quadrat greco-llatí* per indicar una parella de quadrats llatins ortogonals. L'origen d'aquesta nomenclatura és al treball original d'Euler.

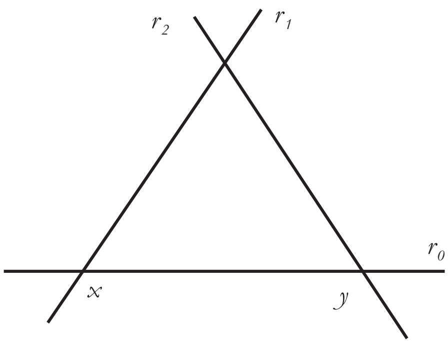
i fertilitzants que hem discutit abans necessita l'existència de 4 quadrats llatins d'ordre 5, ortogonals dos a dos.

Hi ha una relació important entre quadrats llatins i plans projectius.

Hi ha $n-1$ quadrats llatins d'ordre n, ortogonals dos a dos, si i només si existeix un pla projectiu d'ordre n. [21]

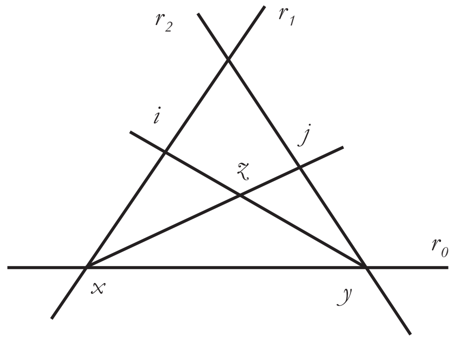
És fàcil veure que mai no hi pot haver n quadrats llatins d'ordre n, ortogonals dos a dos. L'existència dels cossos de Galois i la proposició anterior demostren que, per cada primer p i cada natural n, hi ha p^n-1 quadrats llatins d'ordre p^n, ortogonals dos a dos. En particular, els problemes del joc de cartes i dels fertilitzants tenen solució. A més, al llarg de la demostració de la proposició es veurà com, a partir del pla projectiu sobre el cos de Galois, es pot trobar una solució explícita.[83]

Podem demostrar la proposició anterior d'aquesta manera: Suposem primer que tenim un pla projectiu X d'ordre n. Sabem que X té n^2+n+1 punts i el mateix nombre de rectes. Prenem tres rectes r_0, r_1 i r_2 i siguin x i y les interseccions de r_0 i r_1, r_0 i r_2, respectivament. Cada recta de X té $n+1$ punts, per tant, hi ha n^2 punts a $X-r_0$. Designem per $\{0,1,\ldots,n-1\}$ els punts de r_1 diferents de x i per $\{0,1,\ldots,n-1\}$ els n punts de r_2 diferents de y. Fem que els punts designats per 0 a r_1 i r_2 coincideixin.



Podem establir una bijecció entre els punts de X fora de r_0 i les parelles (i,j), $i=0,\ldots,n-1$, de la següent manera. Si z és un punt fora de r_0, sigui i el punt de r_1 que pertany a la recta zy i sigui j el punt de r_2 sobre la recta zx.

[83]En canvi, el problema d'Euler dels 6 oficials i els 6 regiments no té solució, si bé això no pot deduir-se que la no existència d'un pla projectiu d'ordre 6. En efecte, la proposició anterior afirma que, si no hi ha cap pla projectiu d'ordre 6, no hi pot haver 5 quadrats llatins d'ordre 6 ortogonals dos a dos. Però podria haver-n'hi dos... En canvi, la conjectura general d'Euler (nota 80) va ser refutada el 1959 quan es va demostrar que, per tot $n\equiv 2 \pmod 4$, $n>6$, hi ha com a mínim *dos* quadrats llatins ortogonals d'ordre n.



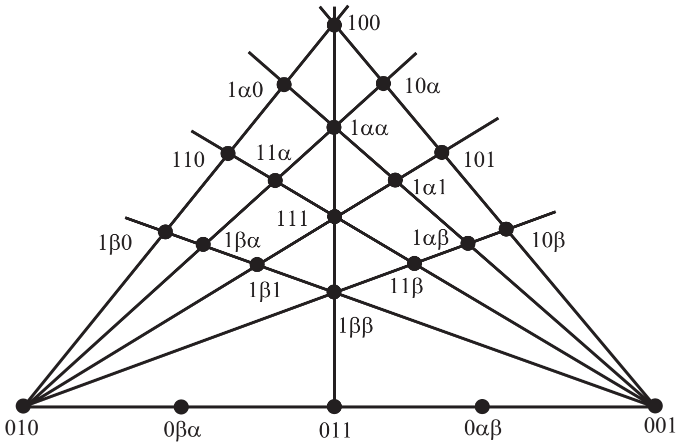
Per cada punt u de la recta r_0, diferent de x i y, podem construir un quadrat llatí de la següent manera. En primer lloc, designem per $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ cada una de les rectes, diferents de r_0, que passen per u. Al lloc de coordenades (i, j) d'una matriu posem el nom de la recta que passa per u i pel punt (i, j). Obtenim, d'aquesta manera, un quadrat llatí. Fent variar u entre els $n-1$ punts de la recta r_0, diferents de x i y, obtenim $n-1$ quadrats llatins. El fet que dues rectes es tallin en un únic punt implica que aquests quadrats són ortogonals dos a dos.

Aquesta construcció que acabem de fer és «reversible». Deixem com a exercici utilitzar aquest fet per demostrar la part «només si» de la proposició.
□

Com a exemple, anem a resoldre, geomètricament, el problema del joc de cartes. Necessitem dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 4. Segons la proposició anterior, podem obtenir aquests quadrats llatins a partir d'un pla projectiu d'ordre 4, per exemple, el pla projectiu sobre el cos de Galois de 4 elements, $\mathbb{F}_4$. Recordem que els elements d'aquest cos es poden escriure com 0, 1, α i $1+\alpha$, amb la relació $\alpha^2+\alpha+1=0$. Designem, per comoditat, $1+\alpha$ per β. El pla projectiu consta de 21 punts i és relativament fàcil fer un dibuix que representi aquests 21 punts i 10 de les 21 rectes del pla. La recta vertical és la d'equació $y=z$. La recta horitzontal és $x=0$. Les altres rectes representades són les d'equacions $y=0$, $\alpha x=y$, $x=y$, $\beta x=y$ (rectes inclinades cap a la dreta) i $z=0$, $\alpha x=z$, $x=z$, $\beta x=z$ (rectes inclinades cap a l'esquerra). Per tal de construir els quadrats llatins, cal prendre dos punts sobre la recta $x=0$ i considerar totes les rectes que passen per cada un d'aquests punts (diferents de la recta $x=0$). Escollim els punts $\{0, 1, 1\}$ i $\{0, \alpha, \beta\}$ i designem per **J**, **Q**, **K**, **A** i ♠, ♣, ♢, ♡ les rectes que passen per cada un d'ells, respectivament. Les 8 rectes no representades al dibuix són

J	$y+z=0$	♠	$\alpha x+\alpha y+z=0$
Q	$\beta x+y+z=0$	♡	$x+\alpha y+z=0$
K	$\alpha x+y+z=0$	♣	$\beta x+\alpha y+z=0$
A	$x+y+z=0$	♢	$y+\beta z=0$

Els cinc punts de cada una d'aquestes rectes poden trobar-se fàcilment.



Els quadrats llatins que s'obtenen, d'acord amb la construcció de la proposició anterior, són

♢	♡	♠	♣
♠	♣	♢	♡
♣	♠	♡	♢
♡	♢	♣	♠

J	K	A	Q
K	J	Q	A
A	Q	J	K
Q	A	K	J

Aquests dos quadrats llatins són ortogonals i ens proporcionen una solució al problema del joc de cartes.

Plans no desarguesians

En aquesta secció final del capítol donarem algunes idees sobre l'estructura dels plans no desarguesians i construirem dos exemples importants. En general, ometrem els detalls més complexos i ens centrarem en els conceptes bàsics.

La idea principal és que l'estructura algebraica d'un espai vectorial de dimensió tres sobre un cos és excessivament rica per a la construcció d'un pla projectiu, i que hi ha estructures molt més senzilles que ens permeten també construir plans projectius (però no, tanmateix, geometries projectives de dimensió superior!).

Comencem fent una anàlisi minimalista de la construcció del pla projectiu sobre un cos k, com a completació del pla afí k^2. Tenim punts, rectes i una relació d'incidència que es poden descriure així:

Punts. Prenem com a conjunt de punts $k^2 \cup k \cup \{\infty\}$, és a dir, els punts del pla afí (x, y) i els punts de la recta de l'infinit (x) i (∞).

Rectes. Si descrivim una recta per la seva equació, veiem que tenim les rectes $Y = mX + b$, les rectes $X = c$ i la recta de l'infinit ∞. Per tant, el conjunt de rectes s'identifica també a $k^2 \cup k \cup \{\infty\}$.

Incidència. Tenim diversos casos d'incidència:

a) $(x) \in \infty$ per tot $x \in k$, $(\infty) \in \infty$ i $(\infty) \in \{X = c\}$ per tot $c \in k$.

b) $(x) \in \{Y = mX + b\}$ si i només si $x = m$.

c) $(x, y) \in \{X = c\}$ si i només si $x = c$.

d) $(x, y) \in \{Y = mX + b\}$ si i només si $y = mx + b$.

Observem que, de totes les definicions anteriors, l'única que utilitza l'estructura algebraica de k és el criteri d'incidència d) i aquest criteri només utilitza una única operació algebraica de k, l'operació

$$(m, x, b) \mapsto mx + b.$$

Això ens suggereix que seria possible construir un pla projectiu a partir d'un conjunt k amb una operació $T : k^3 \to k$ que complís una sèrie de propietats necessàries i suficients perquè els criteris d'incidència anteriors donin lloc a un pla projectiu. Aquesta estructura algebraica «minimal» s'anomena un *anell ternari planar*, però ara no ens detindrem a donar la llista de les propietats que ha de complir l'operació ternària T.[84] En tot cas, un cos k dóna lloc a un anell ternari planar amb l'operació $T(x, m, b) = mx + b$.

Així doncs, si R és un anell ternari planar, la construcció anterior ens defineix un pla projectiu $\mathcal{P}(\mathcal{R})$, de manera que si R és l'anell ternari planar associat a un cos k, recuperem el pla projectiu ordinari $P_2(k)$. Recíprocament, si P és un pla projectiu, r és una recta de P i ∞ és un punt de r, no

[84] Un *anell ternari planar* és un conjunt R amb dos elements distingits 0 i 1 i una operació ternària T, de manera que es compleixi, per tot a, b, c, $d \in R$:

1. $T(a, 0, c) = T(0, b, c) = c$; $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$.
2. L'equació $T(a, b, X) = c$ té solució única.
3. Si $a \neq c$, l'equació $T(X, a, b) = T(X, c, d)$ té solució única.
4. Si $a \neq c$, el sistema d'equacions

$$T(a, X, Y) = b, \quad T(c, X, Y) = d$$

té solució única.

és difícil introduir geomètricament una estructura d'anell ternari planar a $r - \infty$ de manera que P és el pla projectiu associat a aquest anell ternari planar.[85] Es tracta d'un procés de coordinació.

Ara utilitzarem aquestes idees per introduir dos exemples importants de plans projectius no desarguesians.

El pla de Veblen-Wedderburn

Es tracta del primer exemple de pla projectiu finit no desarguesià. És un pla d'ordre nou, és a dir, té 91 punts i cada recta té 10 punts.

Considerem el cos $\mathbb{F}_3 = \{0, \pm 1\}$ i sigui H un espai vectorial (per la dreta) de dimensió 2 sobre $\mathbb{F}_3$, amb base $\{1, i\}$. Definim un producte a H per la fórmula següent:

$$(a + ib)(c + id) = \begin{cases} ac + i(ad), & b = 0 \\ [ac - (-1)^a bd] + i[bc - ad], & b \neq 0 \end{cases}$$

Aquesta multiplicació té les propietats següents:

1. $0x = x0 = 0$ i $1x = x1 = x$ per tot $x \in H$.
2. $x(y + z) = xy + xz$ per tot $x, y, z \in H$.
3. La multiplicació és associativa.
4. L'equació $aX = bX + c$ té solució única per tot $a, b, c \in H$, $a \neq b$.

En canvi, la propietat distributiva per la dreta no es compleix i H no és un cos. Tot i això, l'operació $T(x, m, b) = mx + b$ dota H d'estructura d'anell ternari planar i permet coordinar un pla projectiu $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, que tindrà ordre 9. Aquest pla no pot ser desarguesià perquè H no és un cos, i és un cas particular dels anomenats *plans de Hall*.

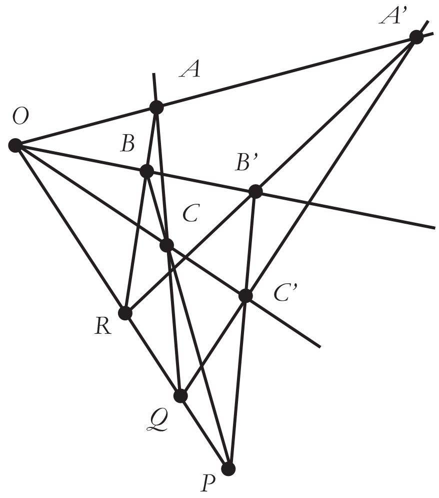
El pla de Cayley

En un apèndix construïm els *nombres de Cayley* $\mathbb{O}$. Es tracta d'una àlgebra de divisió no associativa de dimensió 8 sobre $\mathbb{R}$. Aquesta estructura algebraica és més que suficient per a coordenar un pla projectiu $\mathcal{P}(\mathbb{O})$.[86] El

[85] Aquest anell ternari planar que coordina el pla P depèn, en principi, de l'elecció de la recta r i del punt ∞.

[86] Aquí és important fer notar que aquest pla projectiu tindrà una topologia no discreta i, més encara, tindrà una estructura de varietat riemanniana compacta de dimensió 16. La geometria d'aquest objecte és interessantíssima. Parlant en termes generals, podem dir que la geometria de $\mathcal{P}(\mathbb{O})$ és la responsable, en última instància, de l'existència dels *grups de Lie excepcionals*. Però aquest és un tema que no ens correspon estudiar aquí. A l'autor li agradaria poder escriure —algun dia— un estudi que l'ajudi a entendre això que ara estic dient.

fet que l'estructura algebraica de $\mathbb{O}$ sigui tan propera a la d'un cos pot fer pensar que la geometria de $\mathcal{P}(\mathbb{O})$ no hauria d'estar molt lluny de la configuració de Desargues. Això és cert i té una formulació molt precisa. Definim la configuració *restringida* de Desargues com la configuració de Desargues a la que hem afegit la relació d'incidència que diu que el centre de perspectiva dels dos triangles és a l'eix de perspectiva.



Un *pla de Moufang* és un pla projectiu on es compleix aquesta configuració restringida. Més ben dit: si dos triangles tenen un centre de perspectiva que està alineat amb dos punts d'intersecció de costats corresponents, aleshores els dos triangles tenen un eix de perspectiva.[87] Aleshores, la propietat de Moufang de la multiplicació de $\mathbb{O}$ implica que $\mathcal{P}(\mathbb{O})$ és un pla de Moufang. Vegem-ho amb més detall.

Introduïm algunes col·lineacions de $\mathcal{P}(\mathbb{O})$. D'una banda tenim les *translacions*

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

que transformen la recta $Y = mX + v$ en la recta $Y = mx + (v - am + b)$. És clar que les translacions operen transitivament sobre els punts del pla afí i deixen invariants els punts de la recta de l'infinit.

També tenim les *involucions*

$$\begin{cases} x' = x^{-1} \\ y' = yx^{-1} \\ (0, y) \mapsto (y). \end{cases}$$

[87]El teorema d'Artin-Zorn diu que un pla de Moufang finit és desarguesià.

Aquestes transformacions són clarament involutives i són col·lineacions perquè la recta $Y = mX + v$ es transforma en la recta $Y = vX + m$ (aquí s'utilitza la propietat alternativa de $\mathbb{O}$). Les involucions deixen fix (∞) i la recta $Y = 0$, permuten $(0,0)$ i (0) i permuten la recta de l'infinit i la recta $X = 0$. La transformació dual és la involució

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

que transforma la recta $Y = mX + v$ en la recta $Y = m^{-1}X - m^{-1}v$. Aquesta col·lineació transforma (∞) en (0).

Observem ara que amb les transformacions anteriors en tenim prou per afirmar que les col·lineacions de $\mathcal{P}(\mathbb{O})$ actuen transitivament sobre els punts. En efecte, les translacions actuen transitivament sobre els punts fora de l'infinit, mentre que les involucions transformen tots els punts de l'infinit, llevat de (∞), en punts fora de l'infinit. Finalment, $(x, y) \mapsto (y, x)$ transforma (∞) en (0).

És més, les col·lineacions són *doblement transitives*, és a dir, donades dues parelles de punts, hi ha una col·lineació que transforma una parella en l'altra. En efecte, les translacions i les involucions deixen fix (∞) i el grup que generen opera transitivament sobre tots els altres punts.

Més encara, les col·lineacions operen transitivament sobre les ternes de punts no alinats. En efecte, n'hi ha prou amb veure que les col·lineacions que deixen fixos dos punts operen transitivament sobre tots els que no hi estan alineats. Però, les translacions deixen fixos (0) i (∞) i operen transitivament sobre els punts fora de l'infinit.

En virtut del que acabem de veure, a la configuració restringida de Desargues podem fixar arbitràriament les coordenades de tres punts no alineats. Prenem $A = (0, 0)$, $Q = (0)$ i $O = (\infty)$. Ara podem determinar les coordenades dels altres punts i de les rectes que apareixen i podem veure que la recta PQ passa per O i per R. Deixem que el lector ho faci com a exercici.

Exercicis

1. Demostreu que una geometria projectiva no pot ser unió de dues subvarietats pròpies.

2. Sigui X un pla afí. Al conjunt de les rectes de X considerem aquesta relació:

$$r \sim s \quad \Leftrightarrow \quad r = s \text{ o } r \cap s = \varnothing.$$

Demostreu que és una relació d'equivalència.

3. Sigui X un pla projectiu i sigui r una recta de X. Demostreu que $A := X - r$ té una estructura natural de pla afí.

4. Completeu els detalls de la demostració que la completació d'un pla afí que s'ha definit al curs és un pla projectiu.

5. Demostreu que en un pla projectiu tota recta té com a mínim tres punts.

6. Sigui X un pla projectiu on hi ha una recta que té $n+1$ punts.

   (a) Demostreu que totes les rectes de X tenen $n+1$ punts.

   (b) Demostreu que en total X té n^2+n+1 punts.

   (c) Demostreu que en total X té n^2+n+1 rectes.

   (d) Demostreu que a X per cada punt hi passen exactament $n+1$ rectes.

7. Trobeu tots els plans projectius que tinguin una recta amb només tres punts.

8. Considerem tres punts $A = \{x_0, x_1, x_2\}$, $B = \{y_0, y_1, y_2\}$, $C = \{z_0, z_1, z_2\}$ d'un pla projectiu $P_2(k)$. Demostreu que la condició necessària i suficient perquè A, B i C estiguin alineats és que la matriu

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

   no sigui invertible.

9. Sigui V un espai vectorial i siguin $H_1 \neq H_2$ dos subespais vectorials no nuls. Considereu

$$Y := \Big\{ x \in \mathcal{P}(V) : \text{existeixen } A_1 \neq A_2,\ A_i \in \mathcal{P}(H_i),\ i = 1, 2, \\ \text{tals que } A_1,\ A_2,\ x \text{ estan alineats} \Big\}.$$

   Demostreu que $Y = \mathcal{P}(H_1 + H_2)$.

10. Un departament de matemàtiques vol organitzar 7 màsters diferents. Cada màster ha de tenir 3 mòduls. Només hi ha professorat per impartir 7 mòduls. Com pot fer-ho?

11. Escriviu les coordenades de tots els punts de $P_2(\mathbb{F}_3)$ i les equacions de totes les rectes de $P_2(\mathbb{F}_3)$. Indiqueu, en una taula de doble entrada, quins punts hi ha a cada recta.

12. El cos de quatre elements $\mathbb{F}_4$ és un cos de característica 2 format pels elements $\{0, 1, \alpha, 1+\alpha\}$, amb la taula de multiplicar que es dedueix de l'equació $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Escriviu les taules de sumar i de multiplicar de $\mathbb{F}_4$. Quants punts i quantes rectes té el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_4)$?

13. Tenim les quatre figures (**A**, **J**, **Q**, **K**) dels quatre colls (♣, ♠, ♡, ♢) d'una baralla. Setze cartes en total. Volem col·locar-les en una quadrat 4×4 de manera que a cada fila i cada columna no hi hagi ni dues cartes del mateix valor ni dues cartes del mateix coll. Utilitzeu el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_4)$ per resoldre aquest problema.

    A més, tenim gots amb quatre tipus de beguda (α, β, γ, δ) i volem col·locar un got sobre cada carta de manera que a cada fila i columna no hi hagi dos gots amb la mateixa beguda i, a més, que sobre la taula no hi hagi dues combinacions valor–beguda ni valor–coll repetides. És possible?

14. Trobeu una bijecció f entre dues geometries projectives que no sigui una col·lineació però que compleixi que si A, B, C són punts alineats, aleshores $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ també són punts alineats.

15. Escollim un sistema de referència A, B, C, D a $P_2(k)$ i prenem coordenades homogènies respecte d'aquest sistema, de manera que $A = \{0, 0, 1\}$, $B = \{1, 0, 0\}$, $C = \{0, 1, 0\}$, $D = \{1, 1, 1\}$. Considerem la recta $z = 0$ i sigui P un punt d'aquesta recta, $P \neq \{0, 1, 0\}$. Construïm un punt $S(P)$ de la següent manera:

    (a) Unim P amb $\{1, 0, 1\}$ per una recta r.
    (b) Tallem r amb la recta $x = 0$ i obtenim el punt Q.
    (c) Unim Q amb $\{1, 1, 1\}$ per una resta s.
    (d) Tallem s amb la recta $z = 0$ i obtenim el punt $S(P)$.

    Feu un dibuix il·lustratiu. Calculeu $S(\{1, a, 0\})$.

16. Suposeu que tenim una inclusió $P_2(\mathbb{F}_p) \subset P_2(K)$ que conserva les relacions d'incidència. Apliqueu l'exercici anterior per demostrar que K ha de tenir característica p.

17. Suposem que tenim un conjunt finit de punts del pla projectiu real que no estan tots sobre dues rectes. Dibuixem les rectes que els uneixen. Afegim als punts inicials les interseccions d'aquestes rectes. Repetim el procés indefinidament. Demostreu que mai no acabarem. (Indicació: utilitzeu el teorema fonamental de la geometria projectiva.)

18. Una *configuració* és un conjunt de punts i un conjunt de rectes que compleixen aquests axiomes (més febles que els de geometria projectiva): Hi ha quatre punts, dels quan no n'hi ha tres d'alineats; per dos punts diferents hi passa com a màxim una recta. Sigui C una configuració. Construïu un pla projectiu X amb una inclusió $C \subset X$ que conservi les relacions d'incidència.

19. Apliqueu l'exercici anterior a demostrar que existeixen plans projectius on no es compleix el teorema de Desargues.

20. Siguin A i B dos punts d'un pla projectiu $P_2(k)$ i sigui r una recta que no conté ni A ni B. Digueu com es pot trobar gràficament el punt d'intersecció de la recta r amb la recta que passa per A i B, sense dibuixar la recta AB. Cal fer alguna hipòtesi sobre el cos k?

21. Quatre punts ordenats alineats A, B, C, D d'un pla projectiu $P_2(k)$ (k de característica diferent de 2) direm que formen una *quaterna harmònica* si la seva raó doble $(A, B, C, D) = -1$. Donats tres punts alineats A, B, C, trobeu una manera geomètrica de trobar un punt D tal que A, B, C, D sigui una quaterna harmònica.

22. Un *quadrilàter* és un conjunt (cíclicament ordenat) de quatre punts A, B, C, D d'un pla projectiu $P_2(k)$ tals que no n'hi ha tres d'alineats. Aquests punts s'anomenen els *vèrtex* del quadrilàter. Les rectes AB, BC, CD i DA s'anomenen *costats* del quadrilàter i les rectes AC i BD s'anomenen *diagonals* del quadrilàter. Els punts $AB \cap CD$, $BC \cap DA$, $AC \cap BD$ s'anomenen *punts diagonals*. Si coneixem els punts diagonals i un vèrtex, trobeu la manera de determinar geomètricament els altres tres vèrtex.

IV. Bolyai

En aquest darrer capítol d'aquesta obra —que hem posat sota l'advocació de János Bolyai[88]— estudiarem la geometria en la qual l'axioma de les paral·leles no es verifica. Per tant, afegirem als axiomes **I–IV** de la geometria (plana) de Hilbert la negació de l'axioma de les paral·leles, és a dir, afirmem que hi ha dues rectes que es tallen i són paral·leles a una tercera recta.[89] D'aquest axioma en direm l'axioma *hiperbòlic* i anomenarem *geometria hiperbòlica*[90] la geometria que compleix aquests axiomes. Recordem que, en aquesta geometria, podem utilitzar tots els resultats del capítol 2 que es van demostrar sense la utilització de l'axioma **V**, i. e. els resultats de la geometria absoluta.

El defecte d'un triangle

Recordem que podem mesurar els angles amb nombres reals, si hem escollit un valor per a l'angle recte. Per molts motius, és convenient que associem a l'angle recte el valor $\pi/2$. Podem, doncs, parlar de la mesura d'un angle. Definim el *defecte* d'un triangle com π menys la suma dels seus angles. Pel teorema de Legendre (II-25), el defecte d'un triangle és un nombre no negatiu

[88] L'elecció de János Bolyai per donar nom a aquest capítol ha estat una mica arbitrària. La història de la geometria hiperbòlica —llarga, apassionant, plena d'episodis d'una qualitat literària esplèndida— conté molts noms —de Saccheri a Beltrami, passant per Lobachevsky, Gauss o Klein— que haurien pogut, amb plena justícia, figurar al títol d'aquest capítol. Filant una mica més prim, potser podríem dir que hem escollit Bolyai per una certa simpatia intrínseca que ens desperta aquest personatge.

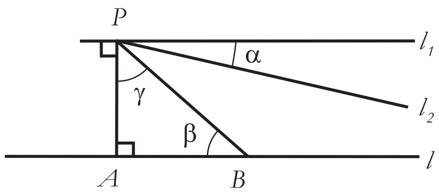
[89] Observem que no postulem que per tot punt exterior a una recta hi passa més d'una paral·lela a la recta, sinó que ens limitem a postular la negació estricta de l'axioma de les paral·leles. Més endavant veurem que ambdues formulacions són equivalents.

[90] Més endavant veurem d'on prové el nom de geometria hiperbòlica.

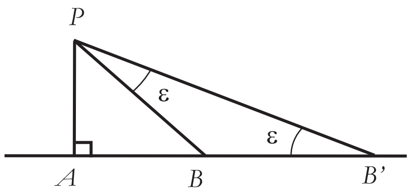
i ja sabem que l'axioma de les paral·leles implica que tots els triangles tenen defecte zero. A la geometria hiperbòlica això no és pas així.

Hi ha un triangle de defecte positiu. [1]

Sabem que hi ha un punt P per on passen dues rectes que són paral·leles a una tercera recta l. Fem la perpendicular a l per P i sigui l_1 la perpendicular per P a aquesta perpendicular. Existirà una recta l_2 que passarà per P i serà paral·lela a l. Escollim un punt B a l, que estigui al costat respecte de A on la recta l_2 és interior a l'angle recte a P. El dibuix és el següent:[91]



Si $\beta < \alpha$, ja hem acabat perquè $\gamma < \pi/2 - \alpha$ i, per tant, el triangle APB té defecte positiu. Si, en canvi, $\beta \geq \alpha$, fem la següent construcció: Prenem B' sobre l amb $PB \equiv BB'$.



Aleshores, pel teorema de Legendre (II-25) tenim que $\pi - \beta + 2\epsilon \leq \pi$, d'on $\beta \geq 2\epsilon$. Repetint aquest procés, obtindrem un triangle $PAB^{(n)}$ amb $\beta^{(n)} < \alpha$ i arribarem a la conclusió desitjada. □

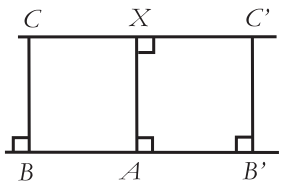
Un concepte important a la geometria hiperbòlica és el concepte de *quadrilàter de Saccheri*. Es tracta d'un quadrilàter $ABCD$ en el qual els angles a A i a B són rectes i es compleix $AD \equiv BC$.

[91] Quan hem de fer dibuixos a geometria hiperbòlica axiomàtica se'ns planteja un problema. La geometria dels objectes que podem dibuixar en un paper —és a dir, la geometria dels objectes *petits*— és, amb molta aproximació, euclidiana. Per tant, no podem representar en un paper, de manera clara, el món de la geometria hiperbòlica, mitjançant línies rectes i de manera que la mesura dels angles sigui la mesura a que estem habituats. Molts autors opten per representar les rectes de la geometria hiperbòlica per línies corbes, com les que apareixen, per exemple, al model de Riemann de la geometria hiperbòlica. Nosaltres, en general, no ho farem així. És a dir, com a norma general, representarem les rectes hiperbòliques per línies rectes, excepte en aquells casos en que, per a major claredat del dibuix, sigui convenient utilitzar una corba. És bo recordar, però, que els dibuixos tenen sempre una finalitat purament heurística.

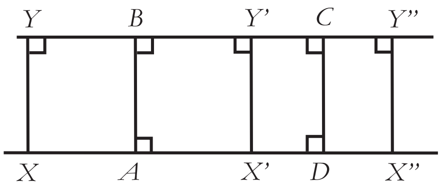
És relativament senzill de demostrar, sense utilitzar l'axioma hiperbòlic, que en un quadrilàter de Saccheri es compleix que els angles a C i D són congruents i sumen, com a màxim, dos rectes. Anomenarem *defecte* d'aquest quadrilàter de Saccheri la diferència $\pi/2$ menys el valor de l'angle a C.

Tot quadrilàter de Saccheri i tot triangle tenen defecte positiu. [2]

És clar que un quadrilàter de Saccheri ve caracteritzat per les longituds dels costats AB i AC. El defecte, en particular, és una funció d'aquestes longituds. Comencem observant que, en la situació

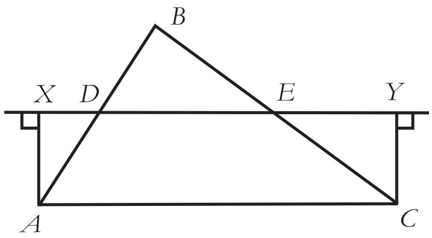


si tenim $AB \equiv AB'$, aleshores $BC \equiv B'C'$ (exercici). Sigui ara $ABCD$ un quadrilàter de Saccheri de defecte zero i suposem que tenim un punt X sobre la recta que conté AD, al costat que no conté D. Prenem un punt X' amb $AX \equiv AX'$ i un punt X'' amb $DX' \equiv DX''$. Tracem perpendiculars per X, X' i X'' a la recta que conté BC.



Tindrem $XY \equiv X'Y' \equiv X''Y''$. Hem construït, doncs, quadrilàters de Saccheri $YY'X'X$, $YY''X''X$ i $Y'Y''X''X$ i no és difícil comprovar que aquests quadrilàters tenen també defecte zero. Si repetim aquest mateix raonament amb l'altre costat del quadrilàter original, podem concloure que, si hi ha un quadrilàter de Saccheri de defecte zero, aleshores tots els quadrilàters de Saccheri tenen defecte zero.

La proposició anterior ens garanteix que hi ha un triangle ABC de defecte positiu. Prenem ara els punts mitjos D i E dels costats AB i BC d'aquest triangle i prenem les perpendiculars per A i C a la recta que conté DE.

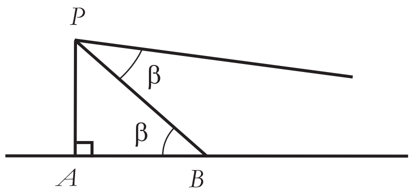


$XYCA$ és un quadrilàter de Saccheri que té el mateix defecte que el triangle ABC. Per tant, hi ha un quadrilàter de Saccheri de defecte positiu i tots els quadrilàters de Saccheri tenen defecte positiu. Com a conseqüència, també tots els triangles tenen defecte positiu. □

Ara podem demostrar que si l'axioma de les paral·leles falla per a una recta, ha de fallar per a totes.

Per un punt exterior a una recta hi passa més d'una paral·lela a la recta. [3]

Considerem un punt P i una recta l que no passi per P. Construïm la perpendicular per P a l i escollim un punt B sobre l, diferent del peu de la perpendicular.



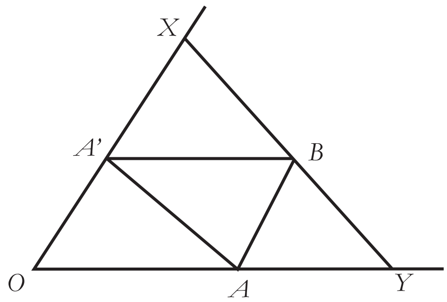
Si ara traslladem l'angle β a P, obtenim una recta que, pel teorema dels angles exteriors, no pot tallar l. Com que el triangle PAB ha de tenir defecte positiu, aquesta recta *no* és la perpendicular a AP i tenim, així, dues paral·leles a l per P. □

La propietat de la geometria hiperbòlica que demostrarem a continuació va sorprendre Legendre.[92]

Tot angle conté una recta al seu interior. [4]

Escollim A, A' sobre els costats de l'angle (podem suposar que és agut), i prenem un punt B a l'interior de l'angle, tal que $A'B \equiv OA$ i $\widehat{AA'B} \equiv \widehat{OAA'}$ (aquest punt existeix pel teorema dels angles exteriors). Observem que els triangles OAA' i $AA'B$ són congruents.

[92]Legendre, en el seu intent de demostrar el cinquè postulat, va veure que la negació de l'axioma de les paral·leles implicava que tot angle contenia una recta. Aleshores, com que, segons ell, aquesta propietat «és repugnant a la natura de la línia recta», va concloure que la geometria hiperbòlica no podia existir.



Considerem una recta que passi per B i talli els costats de l'angle a X, Y. Si aquesta recta existeix i comparem els defectes dels triangles OAA' i OXY, veiem que el segon té un defecte més gran que el doble del defecte del primer. Això vol dir que, si repetim el procés a partir del triangle OXY, arribarem a un punt en que aquest procés no és podrà continuar. Tindrem, aleshores, un punt C de l'interior de l'angle amb la propietat que les rectes que passen per ell no poden tallar els dos costats de l'angle.

Vist això, podem demostrar el teorema així. Construïm la bisectriu de l'angle i la perpendicular per C a aquesta bisectriu. Aquesta darrera recta no pot tallar els costats de l'angle, perquè és fàcil veure que si talla un dels costats, també ha de tallar l'altre. □

A la geometria hiperbòlica hi ha un criteri de congruència de triangles que no és cert a la geometria euclidiana i que ens diu que no podem construir plànols a escala.[93]

> [Criteri AAA de congruència de triangles] *Si dos triangles tenen els angles corresponents congruents, són congruents.* [5]

Considerem dos triangles ABC i $A'B'C'$ amb els angles corresponents congruents. Cal demostrar que tenen algun costat congruent. Si això no fos cert, tindríem, per exemple, $AB < A'B'$ i $AC < A'C'$ i podríem prendre punts B'' i C'' sobre $A'B'$ i $A'C'$, respectivament, amb $A'B'' \equiv AB$ i $A'C'' \equiv AC$. Ara, observem que els triangles ABC, $A'B'C'$ i $A'B''C''$ tenen els mateixos angles i tenen, per tant, el mateix defecte. SI ara unim B'' i C'' amb el punt mig D de $B'C'$, veiem que els tres triangles que es formen han de tenir defecte zero, i això no és possible. □

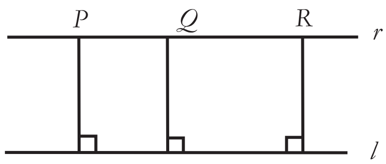
[93] Volem dir que a la geometria hiperbòlica no hi ha plànols a escala en els quals es conservin els angles. Això no ens hauria de sorprendre, perquè tampoc no en tenim de la superfície de la Terra...

Paral·leles convergents i divergents

En aquest apartat volem establir una de les propietats fonamentals de la geometria hiperbòlica, que fa referència a una classificació de les paral·leles. Imitant una dita ben coneguda, podríem dir que, a la geometria hiperbòlica, per un punt exterior a una recta hi passen moltes paral·leles a la recta, però algunes són més paral·leles que altres.[94]

Si dues rectes tenen una perpendicular comuna són, necessàriament, paral·leles. Direm que són *paral·leles divergents*. Les paral·leles que no tinguin cap perpendicular comuna —l'existència de les quals resta, ara per ara, pendent de demostració— les anomenarem *paral·leles convergents*.

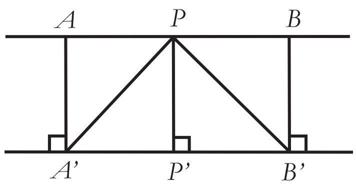
Estem acostumats a pensar les rectes paral·leles com a rectes *equidistants*[95] i també com a rectes que formen un angle constant amb una transversal. Aquestes propietats de les paral·leles són certes a la geometria euclidiana, però no pas a la geometria hiperbòlica. En efecte, suposem que tenim tres punts P, Q i R sobre una recta r que equidisten d'una segona recta l.



Observem que es formen diversos quadrilàters de Saccheri de defecte zero, una situació impossible. És a dir, no podem tenir ni tan sols tres punts d'una recta equidistants d'una altra recta. Fins i tot tenir dos punts equidistants és ja una situació particular:

Siguin r i l dues rectes paral·leles. Si hi ha dos punts de r que equidisten de l o bé si r i l tallen una tercera recta amb angles iguals, aleshores r i s són paral·leles divergents. [6]

En el primer cas, suposem que $AA' \equiv BB'$ i prenem el punt mig P de AB. Sigui P' el peu de la perpendicular per P a l.

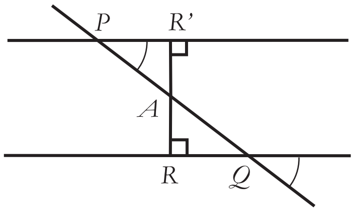


[94]Recalquem, però, que nosaltres anomenarem paral·leles a dues rectes que no es tallin, en contra de la nomenclatura habitual a la geometria hiperbòlica, en que només s'anomenen paral·leles les rectes que, en la nostra terminologia, són paral·leles *convergents*.

[95]Les paral·leles euclidianes són útils per a fer vies de tren, però les rectes hiperbòliques no serveixen per a aquesta finalitat.

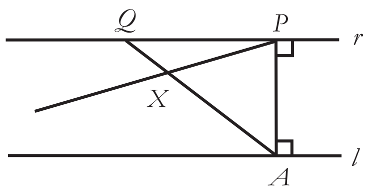
Aleshores, els triangles $AA'P$ i $BB'P$ són congruents i també ho seran els triangles $A'PP'$ i $B'PP'$. Per tant, els dos angles a P són rectes i PP' és una perpendicular comuna a r i l.

En el segon cas, prenem el punt mig A del segment PQ i tracem, des de A, les perpendiculars a cada una de les dues rectes paral·leles.



Comprovem que els triangles PAR' i QAR són congruents i d'aquí es segueix que R, A i R' estan alineats. □

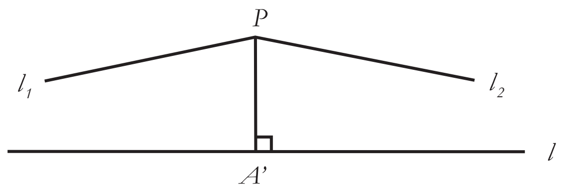
Havíem començat dient que hi ha moltes rectes paral·leles, però que algunes són més paral·leles que altres. Anem ara a formalitzar aquest concepte. Prenem un punt P i una recta l que no passi per P. Tracem la perpendicular per P a l i sigui A el peu d'aquesta perpendicular. La perpendicular r a AP per P és, tanmateix, una paral·lela a l (una paral·lela convergent), però, segons hem vist a l'apartat anterior, no és l'única paral·lela a l que passa per P: n'hi ha d'altres. Fem la construcció següent. Prenem un punt Q sobre r i considerem el segment QA. Ara, els punts X d'aquest segment es poden classificar en dues categories, segons que la semirecta d'origen P que passa per X talli o no talli la recta l.



Això ens duu a que, necessàriament, hi ha d'haver un punt X_0 en el segment QA que separi els punts d'aquestes dues categories. És a dir, si X està entre Q i X_0, la semirecta per X és paral·lela a l, mentre que si X està entre X_0 i A, aleshores la semirecta per X talla l. Què podem afirmar de la semirecta que passa per X_0? No és difícil veure que *no* pot tallar l. Obtenim, per tant, una semirecta de vèrtex P, ben determinada, que és paral·lela a l però, podríem dir-ho així, ho és d'una manera *minimal*: totes les semirectes interiors a n'ella ja tallen l. La mateixa construcció la podem fer a l'altre costat de PA. Obtenim, d'aquesta manera, per cada punt exterior a una recta, dues semirectes paral·leles peculiars que, de manera provisional, anomenarem les *infraparal·leles* a l per P. Els fonaments de la geometria hiperbòlica passen per l'estudi de les propietats d'aquestes semirectes i això és, precisament, el que farem en aquest apartat.

Observem que la demostració de l'existència de les infraparal·leles utilitza un argument de continuïtat, és a dir, utilitza els axiomes de continuïtat de la geometria. Fora molt interessant preguntar-se fins a quin punt la geometria hiperbòlica depèn dels axiomes de continuïtat, però aquest és un tema delicat que no tractarem aquí.[96]

Resumim en un únic teorema les propietats elementals de les infraparal·leles. Siguin l_1 i l_2 les rectes infraparal·leles per P a l.[97]

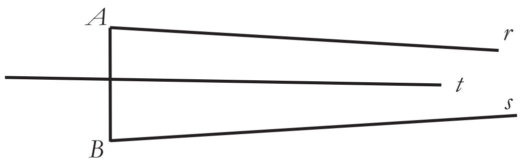


1. *Els angles que formen l_1 i l_2 amb AP són congruents i aguts.* [7]
   Aquests angles només depenen de la longitud del segment AP i són una funció decreixent d'aquesta longitud.
2. *l_1 i l_2 formen part de rectes paral·leles convergents a l. En particular,* hi ha *paral·leles convergents.*

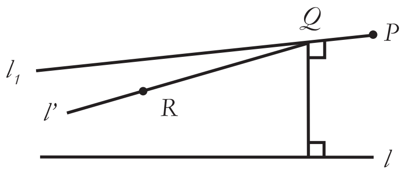
[96] L'existència de la geometria semi-euclidiana que vam introduir al capítol II ens demostra que l'axioma d'Arquimedes és necessari per a l'existència de les infraparal·leles. En efecte, en aquesta geometria no es compleix l'axioma de les paral·leles, però tots els triangles tenen defecte zero. D'altra banda, hi ha una geometria —que s'anomena *semi-el·líptica*— en la qual es compleix l'axioma d'Arquimedes i l'axioma hiperbòlic, però les rectes paral·leles tenen sempre una perpendicular comuna. Veiem, doncs, que els axiomes de continuïtat són necessaris per a desenvolupar la geometria hiperbòlica «clàssica», en la qual l'existència de les infraparal·leles hi juga un paper fonamental. Cal fer esment, per exemple, que Hilbert va donar un tractament axiomàtic de la geometria hiperbòlica en el qual va prescindir dels axiomes de continuïtat, però va posar l'existència de les infraparal·leles com a axioma. A partir d'aquí es poden obtenir les propietats de la geometria hiperbòlica, amb l'excepció que el *cos base* no cal que sigui el cos real. Finalment, diguem també que l'existència de les infraparal·leles es dedueix de l'axioma d'Arquimedes juntament amb l'axioma que diu que si A és un punt de l'interior d'una circumferència c, tota recta que passa per A talla c.

[97] Quan parlem d'infraparal·leles caiem, sovint, en un abús de llenguatge que cal esmentar. Observem que el concepte d'infraparal·lelisme fa referència a *semirectes* i que, pròpiament, no podem parlar de *rectes* infraparal·leles, a no ser que haguem pres, sobre les rectes, un *sentit* de manera que l'infraparal·lelisme faci referència a aquest sentit. D'altra banda, també podem dir que dues rectes r, s són infraparal·leles quan ho són una semirecta de r i una semirecta de s. Tanmateix, aquest abús de llenguatge, un cop detectat, no ens ha de dur a confusió.

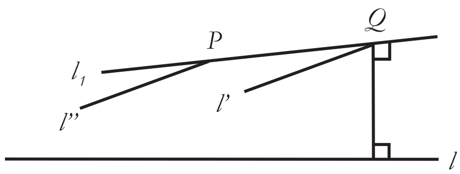
3. *Si Q és un punt de l_1 (resp. l_2), aleshores l_1 (resp. l_2) és infraparal·lela per Q a l. És a dir, el concepte d'infraparal·lelisme no depèn del punt P, sinó que és una propietat de les rectes, i. e. podem parlar de rectes infraparal·leles.*
4. *l és infraparal·lela a l_1 i l_2, i. e. la propietat de l'infraparal·lelisme és simètrica.*
5. *L'infraparal·lelisme compleix la propietat transitiva.*[98]
6. *Si r i s són semirectes infraparal·leles d'origen A i B, respectivament, i t és una recta paral·lela a r i s que talla el segment AB, aleshores, t és infraparal·lela a r i a s.*



Aquestes propietats són relativament senzilles de demostrar i ens limitarem a indicar aquí com es comproven les propietats 2 i 4. Suposem que l_1 i l tinguessin una perpendicular comuna QQ'. Distingim dos casos, segons que el punt Q estigui a la semirecta l_1 o no.



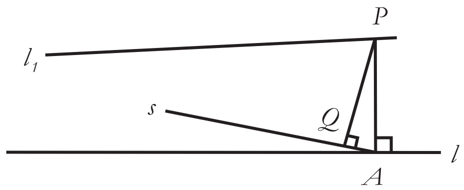
En el primer cas, prenem un punt R sobre la infraparal·lela l' per Q a l, al mateix costat que l_1. Aleshores, la semirecta d'origen P que passa per R ha de tallar l i això és absurd a no ser que l' estigui sobre l_1. En el segon cas, sigui l' infraparal·lela per Q a l i l'' infraparal·lela per P a l'.



[98] S'entén que és transitiva *entre les semirectes*. Volem dir que podem trobar tres rectes a, b i c tals que a i b siguin infraparal·leles, b i c també ho siguin i, en canvi, a i c siguin paral·leles divergents.

l'' ha de tallar l, però no pot tallar l' i això és absurd. Hem demostrat, doncs, que l_1 i l són paral·leles convergents.

Per veure la propietat simètrica de l'infraparal·lelisme, considerem la construcció següent.



Volem veure que la recta s talla l_1. Observem que $PQ < PA$ (perquè «angles grans s'oposen a costats grans», II-18). Per la propietat 1, s i l_1 s'han de tallar. □

El fet que la relació d'infraparal·lelisme sigui una relació d'equivalència[99] ens permet considerar el conjunt quocient. Els elements d'aquest conjunt quocient els anomenarem *punts ideals* de la geometria hiperbòlica. Podem pensar, doncs, un punt ideal com allò que tenen en comú totes les semirectes que són infraparal·leles a una semirecta donada o, millor encara, com el punt on es tallen dues rectes infraparal·leles.[100] Observem, doncs, que una semirecta determina un punt ideal —la seva classe d'equivalència—, mentre que una recta determina *dos* punts ideals, corresponents a les dues semirectes en que queda dividida una recta quan hi escollim un punt arbitrari. Suposem ara que tenim *tres* rectes que siguin infraparal·leles dues a dues. Aleshores, poden determinar un únic punt ideal o bé tres punts ideals. L'apartat 6 de la proposició 7 ens diu que si aquestes tres rectes tenen una secant comuna, aleshores determinen un únic punt ideal i, en aquest cas, direm que les tres rectes són infraparal·leles.

Hem vist que les infraparal·leles són paral·leles convergents. Ara volem demostrar que són les úniques paral·leles convergents, amb la qual cosa podrem abandonar la nomenclatura de semirectes infraparal·leles —que havíem introduit de manera provisional, a l'espera de poder demostrar això

[99] Hi manca la propietat reflexiva, però això no és un problema greu perquè, si tenim una relació que és simètrica i transitiva, sempre podem ampliar-la a una relació d'equivalència a base de postular que tot objecte està relacionat amb ell mateix.

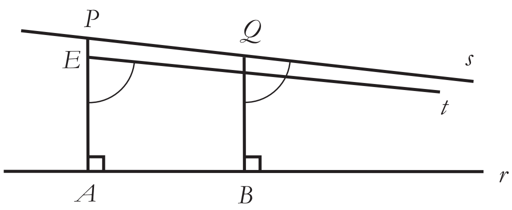
[100] D'aquesta manera, hem *completat* el pla hiperbòlic amb uns certs *punts de l'infinit* on es tallen rectes que no es tallen en el pla. Aquesta situació pot recordar la construcció del pla projectiu com a completació del pla afí, però aquí la situació és diferent, perquè no afegim punts d'intersecció per a *totes* les paral·leles, sinó només per a algunes —les paral·leles convergents. Quan estudiem el model de Klein de la geometria hiperbòlica quedarà més clar quina mena de completació estem fent realment.

que demostrarem ara— i parlarem sempre de paral·leles convergents (o divergents). Tindrem, doncs, que per un punt exterior a una recta hi passen exactament dues paral·leles convergents a la recta.

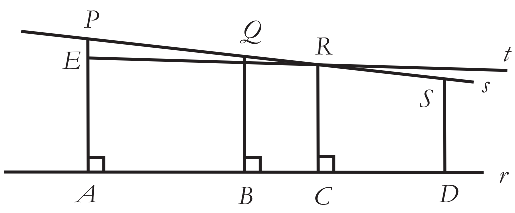
El que cal demostrar és el següent:

Si r i s són paral·leles però no són infraparal·leles, tenen una perpendicular comuna. [8]

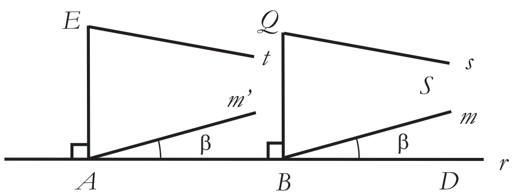
N'hi ha prou amb veure que r i s tenen dos punts equidistants. Comencem escollint dos punts P i Q sobre s i suposem que $PA > QB$. Prenem E a PA tal que $EA \equiv QB$ i sigui t la semirecta de vèrtex E que forma amb PA el mateix angle que s forma amb QB.



Suposem que s i t es tallen en un punt R. Aleshores, podem prendre un punt S sobre s tal que $ER \equiv QS$ i un punt D sobre r tal que $BD \equiv AC$.



Si ara estudiem els diversos quadrilàters que es formen, arribem a la conclusió que SD és perpendicular a r i $RC \equiv SD$, amb la qual cosa el teorema està demostrat. Ens reduïm, doncs, a comprovar que les rectes s i t es tallen. Per veure-ho, fem la construcció següent:



Aquí, m és infraparal·lela a s per B i m' fa el mateix angle amb r que m. Pel teorema dels angles exteriors, m i m' són paral·leles. D'altra banda, com que $AE \equiv BQ$, és fàcil veure que m' és infraparal·lela a t. Si t no talla

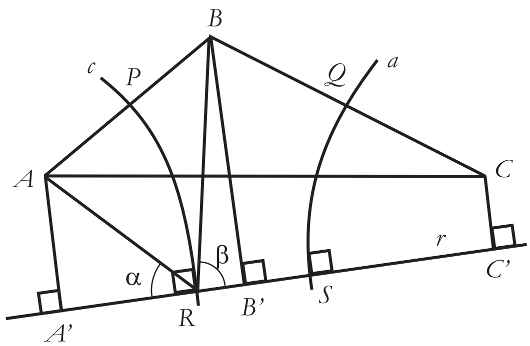
s, aleshores podem aplicar la propietat 6 de la proposició 7 i deduir que t i s són infraparal·leles. Aleshores, per les propietats simètrica i transitiva de l'infraparal·lelisme, resultaria que m i m' serien infraparal·leles, cosa que, en virtut de la proposició 6, no és possible. □

Com a aplicació del que hem vist en aquest apartat, demostrarem ara una propietat de la geometria hiperbòlica que, d'altra banda, utilitzarem més endavant. Recordem que la mediatriu d'un segment AB és la recta que és perpendicular a AB i passa pel punt mig de AB. Els punts de la mediatriu estan caracteritzats per equidistar dels punts A i B. Recordem que, a la geometria euclidiana, les mediatrius dels tres costats d'un triangle són concurrents. La situació a la geometria hiperbòlica és lleugerament més complicada.

Les tres mediatrius d'un triangle compleixen una d'aquestes tres propietats: [9]

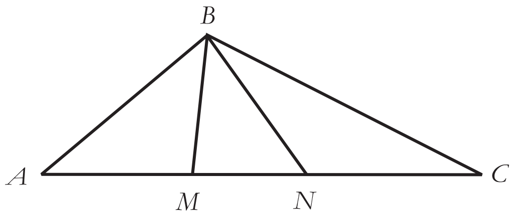
1. *Són concurrents;*
2. *Són paral·leles convergents;*
3. *Tenen una perpendicular comuna.*

Considerem un triangle ABC i designem per a, b i c les seves tres mediatrius. Si a i b es tallen en un punt O, aleshores O equidista dels tres vèrtex del triangle i, per tant, O és també a c i som al cas 1). Podem suposar, doncs, que les mediatrius són paral·leles.



Si a i c són divergents i r és una perpendicular comuna, tracem les perpendiculars a r per A, B i C. Podem representar la situació per aquest dibuix en el qual, excepcionalment, hem representat les mediatrius a i c per corbes, per tal de que el dibuix quedi més clar. Veiem que els triangles APR i BPR són congruents i també ho són els angles α i β. D'aquí deduïm que els triangles $AA'R$ i $BB'R$ són congruents i que $AA' \equiv BB'$. Pel mateix raonament, $BB' \equiv CC'$. Tenim, doncs, un quadrilàter de Saccheri $AA'C'C$, amb la qual cosa veiem que la mediatriu de AC és perpendicular a $A'C'$ i som al cas 3).

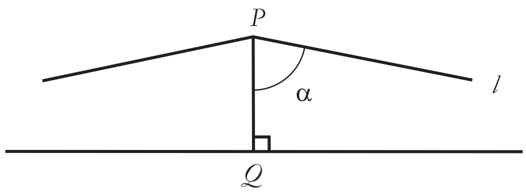
Podem ara suposar que les mediatrius a, b i c són dues a dues convergents. Per poder concloure que les tres són convergents (és a dir, que es tallen en un punt ideal) cal veure que tallen una recta. Suposem que l'angle a B és màxim i considerem els punts M, N sobre el costat AC tals que $\widehat{ABM} \equiv \widehat{MAB}$ i $\widehat{MBC} \equiv \widehat{NCB}$.



Aleshores, és clar que M és a c i N és a a. Per tant, el costat AC talla les tres mediatrius i la demostració és completa. □

L'angle de paral·lelisme

La teoria de les paral·leles convergents implica l'existència, a la geometria hiperbòlica, d'una funció numèrica important, que s'anomena l'*angle de paral·lelisme*. Aquesta funció serà designada per Π i es defineix de la manera següent. Prenem un segment PQ i considerem una semirecta l que passa per P i és paral·lela convergent a la perpendicular per Q a PQ. Definim l'angle de paral·lelisme del segment PQ com l'angle α que forma aquest segment amb la recta l.

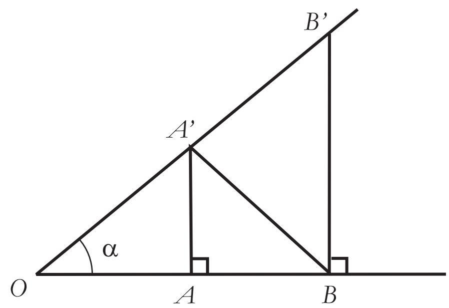


$$\Pi(PQ) = \alpha$$

Ja hem vist a [7] que aquesta funció està ben definida i només depèn de la longitud del segment PQ. També hem vist que es tracta d'una funció *decreixent*, és a dir, es compleix que si $PQ < P'Q'$, aleshores $\Pi(PQ) > \Pi(P'Q')$. Una altra propietat important de l'angle de paral·lelisme és que és una funció exhaustiva.

Si α és un angle agut, hi ha un segment PQ tal que $\Pi(PQ) = \alpha$. [10]

La manera de veure això consisteix en fer la construcció següent. Prenem punts A i B sobre els costats de l'angle α tals que $OA \equiv AB$, on O és el vèrtex de l'angle. Prenem les perpendiculars per A i B al costat OB de l'angle i suposem que aquestes perpendiculars tallen l'altre costat en punts A' i B', respectivament. Observem que els triangles OAA' i BAA' són congruents.



Ara, no és difícil veure que el defecte del triangle OBB' és més del doble del defecte de OAA'. Com que el defecte d'un triangle està acotat i és sempre positiu, veiem que aquesta construcció que hem fet no es pot repetir indefinidament. Això vol dir que hi ha punts sobre un costat de l'angle tals que la perpendicular per ells no talla l'altre costat. Per una aplicació simple dels axiomes de continuïtat, hi haurà un punt P sobre un costat de l'angle tal que la perpendicular per P serà paral·lela convergent a l'altra costat. Això ens demostra que $\Pi(OP) = \alpha$. $\square$[101]

Observem també que, donat que les paral·leles convergents no tenen perpendiculars comunes, l'angle de paral·lelisme és, òbviament, una funció *injectiva*, en el sentit que $\Pi(PQ) \equiv \Pi(P'Q')$ implica $PQ \equiv P'Q'$. Per tal de convertir Π en una funció numèrica ens cal escollir una unitat de mesura d'angles (ja ho hem fet quan hem assignat el valor $\pi/2$ a l'angle recte) i una unitat de mesura de segments. Fet això, podem pensar l'angle de paral·lelisme com una funció real

$$\Pi : \mathbb{R}^+ \to (0, \pi/2).$$

Aquesta funció és estrictament decreixent i exhaustiva. Per tant, és una *funció contínua*.

[101] Hem tornat a utilitzar els axiomes de continuïtat. Diguem que hi ha una demostració d'aquesta propietat de l'angle de paral·lelisme que no utilitza els axiomes de continuïtat, sinó que utilitza només l'existència de les paral·leles convergents, però ja hem dit que l'existència de les paral·leles convergents necessita els axiomes de continuïtat (o ha de ser postulada independentment).

Observem ara un fenomen molt interessant que està lligat a l'existència de la funció Π. La bijectivitat d'aquesta funció ens dóna una equivalència entre longituds de segments i angles, de manera que, a la geometria hiperbòlica és possible definir una *unitat canònica de longitud*.[102] Amb això volem dir que podem donar una propietat geomètrica que ens determini unívocament una longitud. Ho fem així: Escollim un angle agut —per exemple l'angle de valor $\pi/4$— i prenem com a unitat de longitud la del segment que té angle de paral·lelisme igual a $\pi/4$.[103]

És clar que la funció $\Pi(x)$ tendeix a $\pi/2$ quan x tendeix a zero. Això ens permet estendre Π a una funció definida sobre tota la recta real, posant $\Pi(0) = \pi/2$ i $\Pi(x) = \pi - \Pi(-x)$ per $x < 0$. Tenim així una funció

$$\Pi : \mathbb{R} \to (0, \pi),$$

que és contínua, bijectiva i estrictament decreixent. Ens plantegem el problema d'identificar aquesta funció Π, és a dir, de determinar el seu valor a partir de funcions analítiques elementals.

La demostració del teorema següent no podrem dur-la a terme fins més endavant, però ens sembla apropiat d'escriure el seu enunciat en aquest moment:[104]

Podem escollir, de manera canònica, una unitat de longitud tal [11]

[102] L'existència, a la geometria hiperbòlica, del criteri AAA de congruència de triangles ja ens permetia entreveure que les propietats geomètriques de les figures del pla hiperbòlic depenen de la *mida* de les figures, ben a l'inrevés de com passa a la geometria euclidiana.

[103] Tenim, doncs, unitats canòniques de longitud i d'angle, però encara tenim un cert grau de llibertat, en el sentit de que podem assignar a l'angle recte el valor r que vulguem i que podem prendre com a unitat de longitud la que té per angle de paral·lelisme qualsevol angle α que ens abelleixi. Fins ara hem pres $r = \pi/2$ i acabem de suggerir de prendre, per exemple, $\alpha = \pi/4$. No hi ha motius geomètrics per preferir uns valors de r i α sobre altres, però sí que hi ha motius de tipus pràctic. És ben sabut que les fórmules de la trigonometria són molt més simples si treballem en *radiants*, és a dir, si assignem a l'angle recte el valor $\pi/2$. Més endavant veurem que, de la mateixa manera, hi ha una elecció de α que és òptima en el sentit de simplificar al màxim les fórmules de la trigonometria hiperbòlica. Aquesta elecció òptima de la unitat de longitud correspon, ja ho veurem, a prendre

$$\frac{\pi}{4} = \Pi(\log(1 + \sqrt{2})).$$

[104] La demostració de la fórmula de l'angle de paral·lelisme, feta independentment per Bolyai i Lobachevsky va representar, ni que només fos des d'un punt de vista psicològic, la consolidació de la geometria hiperbòlica com una geometria consistent —és a dir, «veritable». Des d'un punt de vista formal, però, la consistència de la geometria hiperbòlica no va ser establerta definitivament fins que Beltrami no va donar, per primera vegada, un model del pla hiperbòlic al si de la geometria diferencial.

que

$$\Pi(x) = \arccos \tanh x.$$

Aquí, tanh indica la funció *tangent hiperbòlica*. Les funcions trigonomètriques hiperbòliques apareixen de manera natural en l'estudi de la geometria hiperbòlica[105] i és convenient que fem ara un petit resum de les seves propietats. Les funcions *sinus hiperbòlic, cosinus hiperbòlic* i *tangent hiperbòlica* es defineixen per

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

També tenim les funcions *inverses* arc sinh, arc cosh i arc tanh. La relació fonamental és aquesta:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

que moltes vegades s'utilitza en la forma

$$\frac{1}{\cosh x} = \sqrt{1 + \tanh^2 x}$$

També tenim fórmules per a les funcions hiperbòliques de la suma i diferència d'angles, per exemple:

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}
\end{aligned}$$

I fórmules per a les funcions hiperbòliques de la meitat d'un angle, etc. Com a aplicació de tot això, vegem ara com la fórmula de l'angle de parallelisme es pot escriure d'una altra manera, potser més habitual, fent les manipulacions següents:

[105] De fet, el nom de geometria *hiperbòlica* prové del nom de les funcions hiperbòliques i les funcions hiperbòliques es diuen així perquè, de la mateixa manera que les funcions trigonomètriques ordinàries parametritzen la circumferència, les funcions trigonomètriques hiperbòliques parametritzen la hipèrbola.

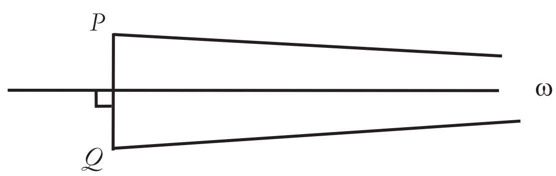
$$\begin{aligned}
\tan\frac{\Pi(x)}{2} &= \frac{\sin\Pi(x)}{1+\cos\Pi(x)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\Pi(x)}}{1+\tanh x} \\
&= \frac{\sqrt{1-\tanh^2 x}}{1+\tanh x} = \frac{1}{\cosh x(1+\tanh x)} \\
&= \frac{1}{\cosh x+\sinh x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}.
\end{aligned}$$

I la fórmula del teorema 11 s'escriu[106]

$$\Pi(x) = 2\arctan e^{-x}.$$

Horocicles

El desenvolupament de la geometria hiperbòlica —la determinació de l'angle de paral·lelisme, el teorema de Pitàgores, etc.— passa per l'estudi d'unes corbes que s'anomenen *horocicles* i que es defineixen com a llocs geomètrics,[107] de la manera següent. Sigui P un punt del pla i ω un punt ideal. L'horocicle de centre ω que passa per P està format pel punt P i tots els punts Q que tenen la propietat que la mediatriu del segment PQ pertany a ω. Les propietats de les mediatrius d'un triangle que hem vist a la proposició 9 ens permeten veure que aquesta relació és d'equivalència i, per tant, el concepte d'horocicle està ben definit. Les semirectes de ω que tenen vèrtex a punts de l'horocicle s'anomenen *radis*.



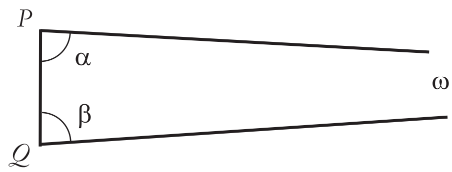
El nostre objectiu ara és poder parlar de la *longitud* d'un horocicle. Abans, cal establir algunes propietats elementals d'aquestes corbes, la demostració de les quals deixem com a exercici.

1. Per dos punts P i Q hi passen exactament dos horocicles. [12]

[106] Ara podem comprovar l'afirmació de la nota 103 on hem dit que la unitat de longitud ha estat escollida de manera que l'angle de paral·lelisme $\pi/4$ correspongui a una longitud de $\log(1+\sqrt{2})$ (cal només recordar que $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$).

[107] El concepte clàssic de *lloc geomètric* es correspon, en la terminologia actual, amb el concepte de classe d'equivalència respecte d'una relació d'equivalència.

2. *Si P i Q són punts d'un horocicle, els angles que formen els radis de l'horocicle amb el segment PQ són iguals i valen $\Pi(PQ/2)$.*



3. *Cada recta de ω talla un horocicle de centre ω en un únic punt.*
4. *Si l és una semirecta de vèrtex P que forma un angle agut amb una semirecta de ω de vèrtex P, existeix un únic punt $R \neq P$ sobre l que pertany a l'horocicle de centre ω que passa per P.*

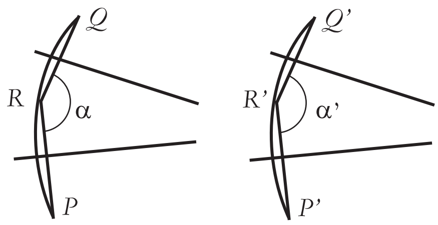
□

Té sentit parlar d'un *arc* d'horocicle. Si P i Q són dos punts d'un horocicle de centre ω, l'arc $\widehat{PQ}$ estarà format per P, Q i tots els punts de l'horocicle tals que els seus radis estiguin entre el radi a P i el radi a Q.[108] El segment PQ s'anomenarà la *corda* de l'arc $\widehat{PQ}$. Observem que la notació $\widehat{PQ}$ comporta un cert abús de llenguatge perquè hi ha dos arcs d'horocicle entre P i Q i la notació no permet distingir entre ells.

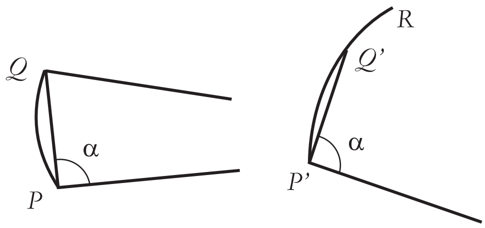
Direm que dos arcs d'horocicle són *congruents* quan ho siguin les seves cordes. Direm que un arc és més petit que un altre quan aquesta mateixa relació sigui certa entre les seves cordes. Tenim, doncs, relacions de congruència i ordre entre els arcs d'horocicle. Si el que volem, però, és poder parlar de la *longitud* d'un horocicle —una longitud donada per un nombre real— ens cal tenir, a més d'una unitat de mesura, els axiomes **III**.2, **III**.3 i l'axioma d'Arquimedes, referits no pas a segments, sinó a arcs d'horocicle.

[108] Aquí cal observar que, donades tres semirectes convergents, té sentit dir que una [13]
d'elles està entre les altres dues i que aquesta relació compleix les propietats habituals de la relació d'ordre. No és difícil.

a) Si R és un punt de $\overset{\frown}{PQ}$ i R' és un punt de $\overset{\frown}{P'Q'}$ i si $PR \equiv P'R'$ i $QR \equiv Q'R'$, aleshores $PQ \equiv P'Q'$.



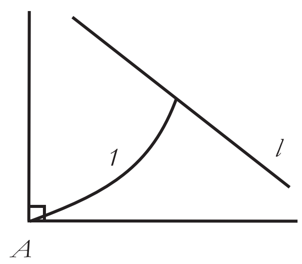
b) Donats arcs $\overset{\frown}{PQ}$ i $\overset{\frown}{P'R}$, existeix un punt Q' a l'horocicle que conté $\overset{\frown}{P'R}$ tal que $PQ \equiv P'Q'$.



c) Els arcs d'horocicle compleixen els axiomes de Cantor i Arquimedes.

Aquestes propietats són fàcils de demostrar. En el primer cas, n'hi ha prou amb veure que $\alpha \equiv \alpha'$, però tenim $\alpha = \Pi(PR/2) + \Pi(QR/2) = \alpha'$. En el segon cas, prenem un angle α de vèrtex P' i trobem així el punt Q' sobre l'horocicle $\overset{\frown}{P'R}$. Aleshores, cal veure que $PQ \equiv P'Q'$, però $\alpha = \Pi(PQ/2) = \Pi(P'Q'/2)$ i podem aplicar la injectivitat de l'angle de paral·lelisme. Per al tercer apartat de la proposició, observem que hi ha una correspondència bijectiva que conserva l'ordre entre els punts d'un arc $\overset{\frown}{PQ}$ i els de la seva corda PQ, que fa correspondre a cada punt R de l'arc la intersecció de la corda amb el radi que passa per R. Aquest isomorfisme entre el conjunt ordenat $\overset{\frown}{PQ}$ i el conjunt ordenat PQ implica, immediatament, que en un horocicle es compleix l'axioma de Cantor. En canvi, l'axioma d'Arquimedes no és pas una conseqüència immediata d'aquest isomorfisme, perquè aquest isomorfisme no respecta la suma i l'axioma d'Arquimedes depèn de l'estructura d'ordre i també de l'estructura additiva. De tota manera, l'axioma d'Arquimedes a $\overset{\frown}{PQ}$ no és difícil de comprovar utilitzant l'argument següent. Si l'axioma fos fals a $\overset{\frown}{PQ}$, tindríem un arc $\overset{\frown}{PX}$ que, per addicions successives, mai podria superar $\overset{\frown}{PQ}$. Aleshores, podríem dividir els punts de $\overset{\frown}{PQ}$ en dues classes no buides: la dels punts Y tals que $\overset{\frown}{PX}$ pot superar $\overset{\frown}{PY}$ i la dels que no. Per l'axioma de Cantor, aquestes dues classes estan separades per un punt X_0 però, tant la hipòtesi que X_0 pertany a una de les classes com la hipòtesi que X_0 pertany a l'altra són absurdes. □

Si ara escollim un arc d'horocicle com a arc unitat,[109] podem assignar a cada arc un nombre real que podem interpretar com la seva longitud, de manera que cada nombre real és la longitud d'algun arc. Aquesta longitud fa compatible la juxtaposició d'arcs amb la suma de nombres reals. De cara al desenvolupament de la teoria, no ens cal escollir un arc unitat però, si volem fer-ho, podem veure que, tal i com passa amb la longitud de segments, és possible escollir una unitat canònica de longitud d'arcs, de la manera següent. Prenem un angle recte de vèrtex A i sigui l una recta que sigui paral·lela convergent als dos costats d'aquest angle (deixem com a exercici l'existència d'aquesta recta). Considerem l'horocicle que passa per A i té per centre un qualsevol dels dos punts ideals determinats per l. Prenem com a arc de longitud 1 l'arc d'aquest horocicle entre A i l.



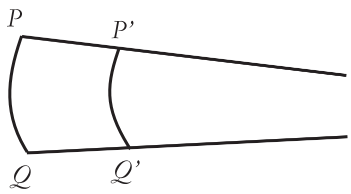
Observem que la distància entre el punt A i la recta l és $\Pi^{-1.eps}(\pi/4)$.

La propietat dels horocicles que demostrem a continuació té una gran importància en el desenvolupament de la geometria hiperbòlica.

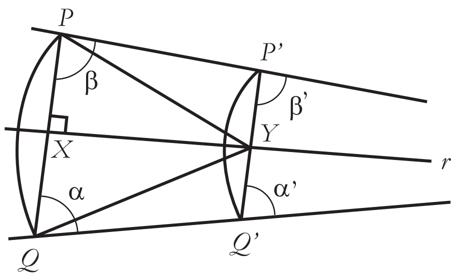
El quocient entre les longituds d'arcs concèntrics només depèn de la separació entre ells. [14]

El que volem dir és que si tenim arcs concèntrics $\widehat{PQ}$ i $\widehat{P'Q'}$ de longituds s i s', respectivament, aleshores el quocient s/s' només depèn de la longitud del segment QQ'. Observem que, tanmateix, el quocient s/s' no depèn de la unitat de longitud d'arcs que haguem escollit.

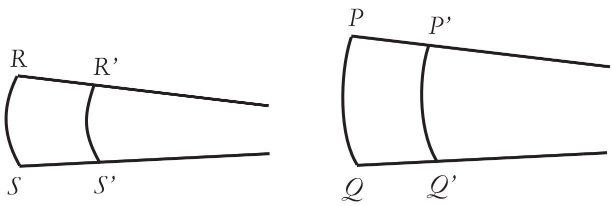
[109]Observem que la longitud de segments i la longitud d'arcs són dos conceptes independents, en el sentit que, encara que tinguem una unitat de longitud (de segments!), no podem mesurar arcs si no escollim una unitat de longitud d'arcs, i aquestes dues unitats són totalment independents entre elles.



Comencem observant que $PP' \equiv QQ'$. En efecte, sigui r la mediatriu de PQ. Observem que $\alpha \equiv \beta$ i $\alpha' \equiv \beta'$. Per tant, com que els triangles PXY i QXY són congruents, també ho seran els triangles $PP'Y$ i $QQ'Y$. Això demostra que $PP' \equiv QQ'$ i que la recta r és també mediatriu de $P'Q'$.



Suposem ara que tenim dos sistemes d'arcs concèntrics:



amb $QQ' \equiv SS'$. Suposem $\widehat{RS} \leq \widehat{PQ}$ i prenem X a $\widehat{PQ}$ tal que $\widehat{XQ} \equiv \widehat{RS}$. Segons hem vist fa un moment, si X fos el punt mig de $\widehat{PQ}$, també X' seria el punt mig de $\widehat{P'Q'}$ i el resultat seria cert. De la mateixa manera, el resultat ha de ser cert si els arcs $\widehat{QX}$ i $\widehat{QP}$ són *commensurables*, és a dir si hi ha un arc $\widehat{QY}$ del qual ambdós són múltiples. Això ja implica que el resultat és cert sempre perquè si, per exemple, $\widehat{PQ} > \frac{\widehat{XQ}}{\widehat{X'Q'}}\,\widehat{P'Q'}$, podríem prendre un punt Z sobre $\widehat{PQ}$ tal que $\widehat{PQ} > \widehat{ZQ} > \frac{\widehat{XQ}}{\widehat{X'Q'}}\,\widehat{P'Q'}$ i $\widehat{QZ}$ i $\widehat{QX}$ fossin commensurables i arribar, així, a una contradicció. □

Aquesta proposició ens diu que, si hem escollit una unitat de longitud (de segments), tenim una funció ben definida

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

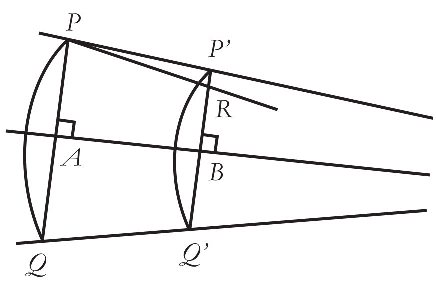
que assigna a cada nombre real $x > 0$ el quocient entre les longituds de dos arcs concèntrics separats una distància x. Aquesta funció no depèn de l'elecció d'una unitat de mesura d'arcs i compleix les propietats elementals següents.

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$. [15]

b) φ *és estrictament creixent.*

c) Existeix $\lambda > 0$ *tal que* $\varphi(x) = e^{\lambda x}$.

c) és una conseqüència ben coneguda de a) i b). a) és evident i b) es demostra de la manera següent. Considerem dos arcs concèntrics $\widehat{PQ}$ i $\widehat{P'Q'}$.



N'hi ha prou amb demostrar que $PQ > P'Q'$. Prenem la semirecta que és mediatriu de PQ i $P'Q'$. Si fos $PQ < P'Q'$, podríem prendre un punt R sobre $P'B$ amb $PA \equiv RB$. Aleshores, $PABR$ seria un quadrilàter de Saccheri i això és contradictori, perquè la semirecta de vèrtex P que passa per R ha de tallar la semirecta de vèrtex A que passa per B. □

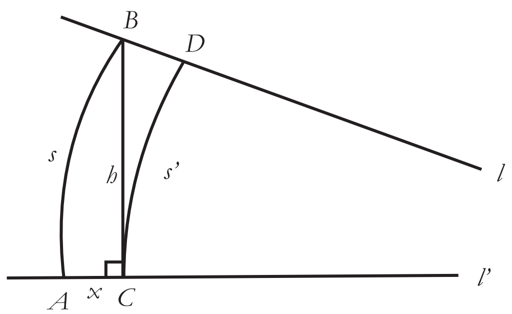
Per tant, tenim ben determinada la relació entre les longituds d'arcs concèntrics, llevat d'una constant λ que dependrà —és clar— de la unitat de longitud que haguem escollit. Ara ens adonem que la millor elecció de la unitat de longitud —en el sentit que serà l'elecció que donarà lloc a unes fórmules més simples— serà aquella en què aquesta constant valgui 1. A partir d'ara, doncs, *fixem la unitat de longitud de manera que la relació entre les longituds d'arcs d'horocicle concèntrics separats per una distància* x *sigui* e^x.[110] És a dir, el segment unitat és aquell que separa arcs que estan en la relació $1 : e$.

[110] És curiós que la millor elecció de la unitat de mesura d'angles involucra el nombre π, mentre que la millor elecció de la unitat de mesura de segments —a la geometria hiperbòlica— involucra el nombre e.

El teorema de Pitàgores

Entenem per *teorema de Pitàgores* la fórmula que ens relaciona les longituds dels tres costats d'un triangle rectangle. En el cas de la geometria euclidiana, aquesta fórmula és $c^2 = a^2 + b^2$ i a partir d'ella es poden obtenir resultats com el que s'anomena *teorema del cosinus* i, en definitiva, les fórmules de la trigonometria elemental, que ens permeten determinar uns elements d'un triangle en funció d'uns altres. En aquest apartat volem dur a terme aquest mateix programa, però en el sí de la geometria hiperbòlica. Demostrarem el teorema de Pitàgores i el teorema del cosinus (hiperbòlics) i tindrem, així, les bases de la trigonometria hiperbòlica —que no estudiarem a fons. Com a aplicació important d'aquests teoremes obtindrem la demostració de la fórmula de l'*angle de paral·lelisme* (proposició 11).

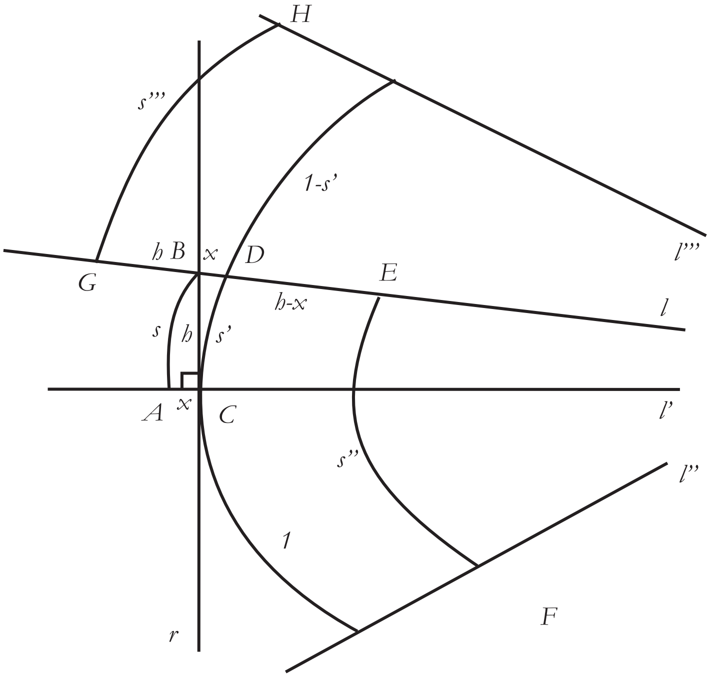
La demostració del teorema de Pitàgores es basa en el següent lema, que ens relaciona la distància entre dos radis d'un horocicle i la longitud de l'horocicle. Suposem, doncs, que tenim un arc d'horocicle $\widehat{AB}$ de longitud s i amb radis l' i l, i suposem que la distància entre B i l' val h. Sigui C el peu de la perpendicular de B a l' i sigui s' la longitud de l'arc concèntric $\widehat{CD}$. Suposem que hem pres la unitat de longitud d'arcs que hem discutit a l'apartat anterior. Tenim una situació com la d'aquesta figura:



Amb aquestes hipòtesis, es compleix la relació següent entre les magnituds s, s', h i $x = AC$.

$$e^x = \cosh h = \frac{s}{s'}, \quad s = \sinh h. \tag{16}$$

Per demostrar això, fem la construcció de la figura següent, en la qual hem pres l'' que sigui convergent a r i l'', i l''' que sigui convergent a r i l'. Cal recordar la definició de la unitat de longitud d'arcs. La resta de la construcció s'entén sense més explicació.



Ara, observem que els arcs s'' i s''' tenen ambdós longitud 1. En efecte, per veure que s'' té longitud 1 cal veure que la perpendicular per E a l no talla r ni l'' i això es desprèn de que la distància entre B i E és, per construcció, igual a h i $\Pi(h) = \widehat{CBE}$. Apliquem ara, reiteradament, el teorema 14. Tenim:

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{s'} &= e^{x} \\
1 + s' &= e^{h-x} \\
1 - s' &= e^{-h-x}
\end{aligned}
$$

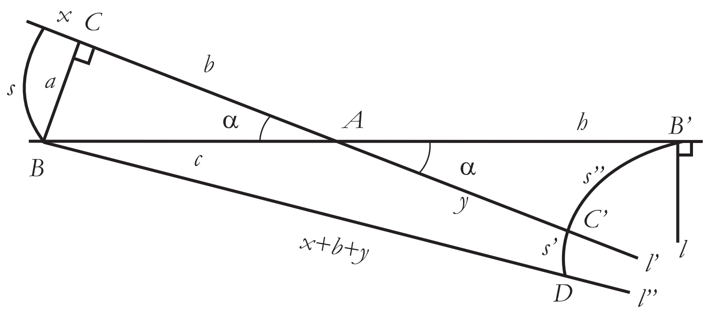
□

Considerem ara un triangle rectangle ABC, amb l'angle recte al vèrtex C. Designem per a, b i c els costats oposats a A, B i C, respectivament (o les seves longituds). Designem per α i β els angles de vèrtex A i B, respectivament.

[El teorema de Pitàgores] *En un triangle rectangle, les longituds* [17] *dels costats compleixen*[111]

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Sigui h una longitud tal que $\Pi(h) = \alpha$ i fem la construcció que s'indica en aquest dibuix:



En aquesta construcció, les rectes l, l' i l'' són paral·leles convergents i s, s' i s'' són arcs d'horocicle. Ara aplicarem repetidament el lema 16. Si apliquem aquest lema al segment a, obtenim

$$\begin{aligned} e^x &= \cosh a \\ s &= \sinh a \end{aligned}$$

Si l'apliquem al segment h, obtenim

$$\begin{aligned} e^y &= \cosh h \\ s'' &= \tanh h \end{aligned}$$

Si, finalment, l'apliquem al segment $c + h$, tenim

$$\begin{aligned} e^{x+y+b} &= \cosh(c+h) \\ s' + s'' &= \tanh(c+h) \end{aligned}$$

D'altra banda, per la propietat fonamental 14, tenim $s = s'e^{x+b+y}$. El que ve a continuació comporta una sèrie de manipulacions més o menys complexes de les fórmules anteriors i les funcions hiperbòliques, que no podem

[111]El desenvolupament de Taylor de la funció cosh al zero ens demostra que, per a triangles petits, la fórmula del teorema de Pitàgores hiperbòlic es pot aproximar per $c^2 = a^2 + b^2$, que és, tanmateix, el teorema de Pitàgores euclidià. D'altra banda, podem dir que —tal i com passa en el cas euclidià— també és cert el recíproc del teorema de Pitàgores hiperbòlic: Si els costats d'un triangle compleixen la relació $\cosh c = \cosh a \cosh b$, aleshores el triangle és rectangle.

reproduir aquí amb tot detall. Fem-ne un esbós. La fórmula $s = s'e^{x+y+b}$ dóna

$$\sinh a = [\tanh(c+h) - \tanh h]\cosh(c+h)$$

i ara, aplicant les fórmules del sinus i els cosinus hiperbòlics de la suma de dos nombres, obtenim

$$\sinh c = \sinh a \cosh h.$$

Novament, la fórmula $e^{x+y+b} = \cosh(c+h)$ ens dóna

$$e^b = \frac{\cosh(c+h)}{\cosh a \cosh h} = \frac{\cosh c \cosh h + \sinh c \sinh h}{\cosh a \cosh c}$$

i si ara utilitzem

$$\cosh b = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b}), \quad \cosh h = \frac{\sinh c}{\sinh a},$$

arribarem, després d'algunes manipulacions, a la fórmula del teorema de Pitàgores. □

Cal fer esment que, al llarg de la demostració del teorema de Pitàgores, hem obtingut una fórmula que és també molt interessant:

$$\sinh c = \sinh a \cosh \Pi^{-1.eps}(\alpha), \tag{*}$$

que és vàlida a tot triangle rectangle. També, amb un xic més de feina hauríem pogut obtenir altres relacions com, per exemple,

$$\tanh c = \frac{\tanh b}{\tanh \Pi^{-1.eps}(\alpha)}.$$

Ara, a partir del teorema de Pitàgores, podem obtenir el que s'anomena, clàssicament, *teorema del cosinus*,[112] que ens relaciona les longituds dels tres costats d'un triangle arbitrari, amb un dels angles.

[Teorema del cosinus] *En un triangle ABC, de costats a, b i c, es compleix* [18]

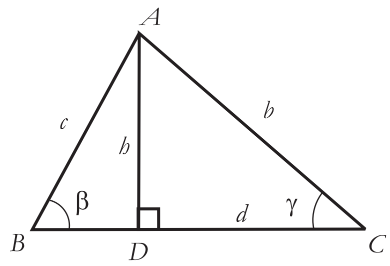
$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \tanh \Pi^{-1.eps}(\widehat{C}).$$

[112] Recordem que el teorema del cosinus de la trigonometria clàssica (euclidiana!) ens diu que en un triangle arbitrari, les longituds a, b i c dels seus tres costats estan relacionades per la fórmula

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}).$$

El teorema de Pitàgores és, aleshores, un cas particular d'aquest teorema més general.

Suposem, per tal de simplificar la demostració, que els tres angles del triangle són aguts i deixem els altres casos com a exercici. Sigui AD l'alçada corresponent al costat a i apliquem la fórmula (*) als dos triangles ADC i ABD que es formen.



Tenim:

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh h \cosh(a-d) \\ \cosh b &= \cosh h \cosh d \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh h \cosh(a-d) = \frac{\cosh b}{\cosh d}\cosh(a-d) \\ &= \frac{\cosh b}{\cosh d}(\cosh a \cosh d - \sinh a \sinh d) \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \cosh b \tanh d \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \tanh \Pi^{-1.eps}(\widehat{C}). \end{aligned}$$

□

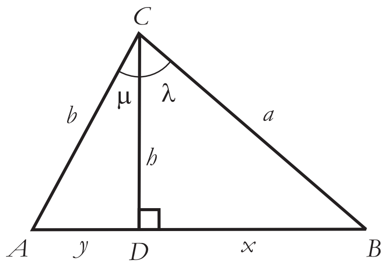
No volem aprofundir més en l'estudi de la trigonometria hiperbòlica. El que sí volem fer ara és *demostrar la fórmula de l'angle de paral·lelisme*. Recordem que havíem anunciat que la funció Π ve donada per

$$\cos \Pi(x) = \tanh x.$$

La demostració d'aquesta fórmula es fa així. Considerem la funció $f : (0,\pi) \to (0,\pi)$, $f(x) = \arccos \tanh \Pi^{-1.eps}(x)$. Es tracta de demostrar que f és la identitat. Observem que f és una funció contínua amb $f(\pi/2) = \pi/2$. El que farem serà veure que la funció f és additiva, és a dir,

$$f(\lambda+\mu) = f(\lambda) + f(\mu), \quad 0 < \lambda, \mu < \frac{\pi}{2}.$$

Construïm un triangle ABC de manera que els angles que formi l'alçada corresponent a c amb els costats a i b siguin iguals a λ i μ, respectivament.



Per simplificar la notació, posem $l = \Pi^{-1.eps}(\lambda)$, $m = \Pi^{-1.eps}(\mu)$ i $t = \Pi^{-1.eps}(\lambda+\mu)$. Apliquem el teorema del cosinus al triangle anterior i obtenim

$$\cos f(\lambda + \mu) = \tanh t = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh(x + y)}{\sinh a \sinh b}. \tag{1.eps}$$

Els triangles rectangles BCD i ADC ens donen

$$\begin{aligned} \tanh h &= \tanh a \tanh l = \tanh a \cos f(\lambda) \\ \tanh h &= \tanh b \tanh m = \tanh b \cos f(\mu), \end{aligned}$$

I, per tant,

$$\frac{1}{\tanh a \tanh b} = \frac{\cos f(\lambda) \cos f(\mu)}{\tanh^2 h}. \tag{2.eps}$$

D'altra banda, si apliquem el teorema de Pitàgores als triangles rectangles BDC i ADC, tenim

$$\frac{\cosh x}{\sinh a} = \frac{\cosh a}{\sinh a \cosh h} = \frac{1}{\tanh a \cosh h} = \frac{\cos f(\lambda)}{\sinh h}, \tag{3.eps}$$

i, anàlogament,

$$\frac{\cosh y}{\sinh b} = \frac{\cos f(\mu)}{\sinh h}. \tag{4.eps}$$

Considerem també

$$\frac{\sinh x}{\sinh a} = \frac{\sinh x}{\sinh x \cosh l} = \sqrt{1 - \tanh^2 l} = \sin f(\lambda), \tag{5.eps}$$

i, anàlogament,

$$\frac{\sinh y}{\sinh b} = \sin f(\mu). \tag{6.eps}$$

Si ara considerem les fórmules 1–6 que acabem d'obtenir, deduïm

$$\begin{aligned} \cos f(\lambda + \mu) &= \cos f(\lambda) \cos f(\mu) - \sin f(\lambda) \sin f(\mu) \\ &= \cos(f(\lambda) + f(\mu)), \end{aligned}$$

i això acaba la demostració.

El model de Klein de la geometria hiperbòlica

Al llarg d'aquest capítol hem anat desenvolupant la geometria que s'obté quan l'axioma de les paral·leles deixa de complir-se —la geometria hiperbòlica. Em vist que la negació de l'axioma d'Euclides ens introdueix en un món francament estrany. Propietats com el criteri AAA de congruència de triangles —que ens diu que els angles d'un triangle ens determinen la *mida* del triangle—, o l'existència de rectes a l'interior de tot angle, xoquen frontalment contra la nostra intuïció geomètrica quotidiana. De tota manera, hem vist que, d'una banda, la geometria hiperbòlica dels objectes *petits* difereix poc de la geometria euclidiana i, d'una altra banda, la coherència interna de la teoria, el fet que no haguem trobat cap contradicció al llarg del desenvolupament que n'hem fet, ens inclina a pensar que aquest món estrany és, potser, tan consistent com pugui ser el món de la geometria euclidiana. Ara bé, això no passa de ser una simple intuïció —la mateixa que van tenir Gauss, Bolyai o Lobachevsky— i no és pas una *demostració* de la consistència de la geometria hiperbòlica. Aquesta demostració, finalment, l'obtindrem en aquest apartat, en el qual construirem, al si de la geometria euclidiana, un *model* de la geometria hiperbòlica.[113] Construirem el que es coneix com el *model de Klein* o també *model projectiu* del pla hiperbòlic.

Considerem, en el pla euclidià ordinari $\mathbb{R}^2$, els dos subconjunts següents:[114]

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \\ \mathcal{K} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

Els *punts* de la geometria seran els punts de $\mathcal{K}$ i les *rectes* de la geometria seran les rectes de $\mathbb{R}^2$ que tallen $\mathcal{K}$. La relació d'*incidència* i la relació d'*ordre* són les mateixes que al pla $\mathbb{R}^2$. Hem de tenir en compte, doncs, que només els punts de $\mathcal{K}$ són punts de la geometria i així, per exemple, dues rectes que es tallin en un punt exterior a $\mathcal{K}$ seran, en la nostra geometria, paral·leles.

[113] Diguem que també és possible, al sí de la geometria hiperbòlica, construir un model de la geometria euclidiana. D'aquesta manera, la consistència relativa de les dues geometries queda totalment resolta. Donem una indicació, sense cap demostració, de com es fa això. Es considera l'espai tridimensional de la geometria hiperbòlica i es defineixen unes superfícies anomenades *horosferes*, que generalitzen a dimensió tres el concepte d'horocicle. Aleshores, es pot demostrar que si en una horosfera prenem com a rectes els horocicles, l'horosfera es converteix en un pla *euclidià*.

[114] També podríem construir geometries hiperbòliques basades en el pla k^2, per a un cos ordenat euclidià k, però, per tal de simplificar l'exposició, considerarem només el cas del cos real, de manera que la nostra geometria hiperbòlica complirà els axiomes d'Arquimedes i Cantor. D'altra banda, en lloc de considerar els punts interiors d'una circumferència $\mathcal{C}$, podríem considerar els punts interiors d'una cònica no degenerada de $P^2(\mathbb{R})$.

Ens n'adonem immediatament que, en aquesta geometria, es compleixen els axiomes d'incidència, els axiomes d'ordre i l'axioma de Cantor. També és evident que l'axioma de les paral·leles *no* es compleix. És més, en aquest model és molt fàcil veure l'existència de les paral·leles convergents: són les rectes que es tallen en un punt de $\mathcal{C}$. D'altra banda, els punts ideals de la geometria s'identifiquen als punts de $\mathcal{C}$. En aquest model també veiem clarament l'existència de rectes a l'interior de qualsevol angle.

Però no podem afirmar encara que tinguem un model de la geometria hiperbòlica, perquè no hem definit el concepte de *congruència* de segments i angles. Aquest és el punt més complicat de la construcció del model. El concepte de congruència es basa en el concepte de *raó doble* i hem de començar discutint aquest invariant i les seves propietats.

Siguin A, B, C i D quatre punts (ordenats) de la recta projectiva sobre un cos k. Suposem que els punts A, B i C són diferents. Aleshores, podem prendre un sistema de coordenades a $P_1(k)$ en el qual els punts anteriors tinguin coordenades homogènies $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 0\}$, $C = \{1, 1\}$, $D = \{a, b\}$. Definim la *raó doble* d'aquests quatre punts com

$$(A, B, C, D) = b/a \in k \cup \{\infty\}.$$

Si, en un sistema de coordenades determinat, els punts A, B, C i D tenen coordenades no homogènies a, b, c i d, respectivament, aleshores és fàcil comprovar que

$$(A, B, C, D) = \frac{c-a}{c-b}\,\frac{d-b}{d-a}.$$

Fem ara un resum ràpid de les propietats de la raó doble.

1. Si permutem els punts A, B o permutem els punts C, D, la raó doble (A, B, C, D) s'inverteix.
2. $(A, B, C, A) = \infty$, $(A, B, C, B) = 0$, $(A, B, C, C) = 1$.
3. $(A, B, C, E) = (A, B, C, D)(A, B, D, E)$.
4. La raó doble és invariant per transformacions de $P_1(k)$ que provinguin d'automorfismes lineals de k^2.
5. En el cas $k = \mathbb{R}$, si B és un punt entre A i C, aleshores, la funció $X \mapsto (A, B, C, X)$ dóna una correspondència bijectiva i contínua entre els punts del segment BC i l'interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
6. Es pot definir, de la manera natural, la raó doble de quatre punts alineats de $P_n(k)$, $n \geq 1$.

7. La raó doble és invariant per projecció central.

8. Si k no té automorfismes diferents de la identitat, la raó doble és invariant per col·lineacions de $P_n(k)$.

9. Si a, b, c i d són quatre rectes concurrents de $P_2(k)$, podem definir la seva raó doble com la raó doble dels seus punts d'intersecció amb una recta arbitrària no concurrent. Aquesta raó doble de rectes té les mateixes propietats anteriors.

La manera de definir la congruència de segments consistirà en definir la *longitud hiperbòlica* d'un segment i dir, aleshores, que dos segments són congruents quan tenen la mateixa longitud hiperbòlica. Siguin A i B dos punts de $\mathcal{K}$ i siguin U i V els punts d'intersecció de la recta que passa per A i B amb $\mathcal{C}$. Ordenem els punts U i V de manera que A estigui entre U i B. Definim:

$$\ell(AB) = (U, V, A, B).$$

Observem que això està ben definit, és a dir, no depèn de l'ordre dels punts A i B. Si ara definim $AB \equiv A'B'$ si i només si $\ell(AB) = \ell(A'B')$,[115] obtenim una noció de congruència de segments que compleix els axiomes **III**.1, **III**.2, **III**.3 i l'axioma d'Arquimedes.

La definició de la congruència d'angles és lleugerament més complicada que la definició de la congruència de segments. La idea, però, és la mateixa: utilitzem la raó doble per a donar una *mesura hiperbòlica* d'angles i definim, llavors, angles congruents com aquells que tenen la mateixa mesura. Suposem, doncs, que tenim dues rectes a, b que es tallen en un punt $P \in \mathcal{K}$. Considerem $\mathcal{K}$ submergit, de la manera natural, a $P^2(\mathbb{C})$ i siguin u i v les rectes de $P^2(\mathbb{C})$ que passen per P i són tangents a la cònica $\mathcal{C}$. Com que el punt P és interior a $\mathcal{C}$, aquestes rectes, tanmateix, no són a $P^2(\mathbb{R})$. Considerem ara la raó doble (u, v, a, b) i fem les observacions següents:

[115] Observem que hem associat a cada segment AB un nombre real $\ell(AB)$ i que hem definit segments congruents com aquells per als quals la funció ℓ pren el mateix valor. D'aquesta manera, té sentit anomenar $\ell(AB)$ la *longitud hiperbòlica* del segment AB. Ara bé, aquesta funció distància ℓ és multiplicativa i pren valors a l'interval $[0, 1]$, de manera que el segment *nul* AA té longitud 1 i una semirecta té longitud 0. Tot això és perfectament coherent, però no s'adiu amb les propietats que té la funció distància de la geometria elemental. Per tal d'evitar això, s'acostuma a introduir la funció $-\log$ en la definició de la longitud hiperbòlica, de manera que es defineix

$$\ell(AB) = -\log(U, V, A, B).$$

Així, tenim una funció distància que és additiva, el segment nul té longitud zero i una semirecta té longitud ∞. De tota manera, des del punt de vista que adoptem en aquest llibre, la introducció de $-\log$ té un interès exclusivament estètic.

1. Les rectes a i b tallen la recta de l'infinit en punts reals, mentre que les rectes u i v tallen la recta de l'infinit en dos punts no reals conjugats. Per tant, (u, v, a, b) és un nombre complex de mòdul u.

2. La raó doble (u, v, a, b) està definida llevat d'una indeterminació, que prové de que les rectes a i b no estan ordenades, ni tampoc no ho estan les rectes u i v. Per tant, la raó doble (u, v, a, b) és un nombre complex de mòdul u, definit llevat de conjugació. Prenem l'ordenació convenient per tal que tingui part real no negativa.

3. Si ara fixem el punt P i la recta a, la correspondència $b \mapsto (u, v, a, b)$ dóna una funció bijectiva i contínua entre les rectes que passen per P i la semicircumferència

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \Im(z) \geq 0\}.$$

Ara, podem definir la mesura de l'angle format per les rectes a i b com[116]

$$\ell(ab) = (u, v, a, b).$$

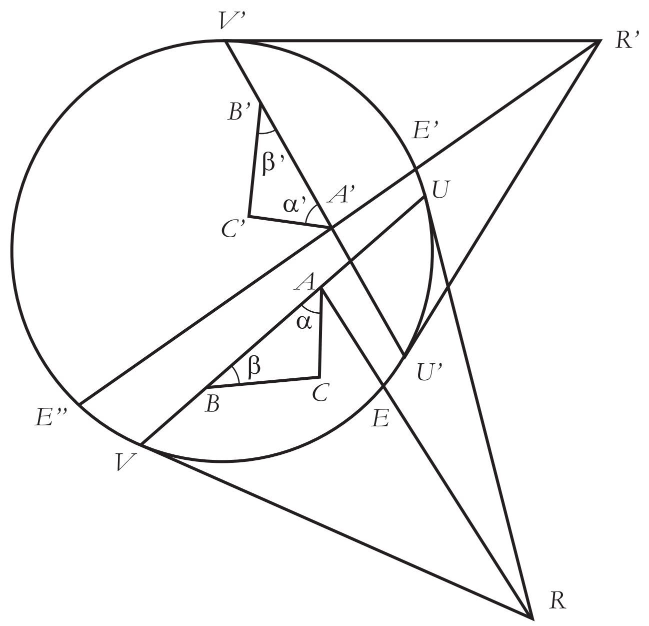
A partir d'aquí ja és senzill de definir angles congruents[117] i comprovar que es compleix l'axioma **III**.4.

La construcció del model de Klein de la geometria hiperbòlica estarà completa si veiem que es verifica l'axioma **III**.5, el criteri CAC de congruència de triangles. Prenem, doncs, dos triangles ABC i $A'B'C'$ a $\mathcal{K}$ tals que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $\alpha \equiv \alpha'$.

[116] Tornem a estar en una situació similar a la que es donava en la definició de la distància hiperbòlica entre dos punts: per tal de definir angles congruents hem introduit una funció *mesura hiperbòlica d'un angle* ℓ que és multiplicativa i pren valors complexos. Si preferim mesurar els angles per nombres reals, de manera additiva i fer que l'angle recte mesuri $\pi/2$, n'hi ha prou amb modificar la definició de ℓ amb la introducció de la funció logaritme i d'un factor d'escala convenient:

$$\ell(ab) = \frac{1}{2i}\log(u, v, a, b) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

[117] Es fa així. Comencem dient que dues rectes són perpendiculars si $\ell = -1$. Aleshores, podem parlar d'angles aguts (no contenen un recte) i angles obtusos (contenen un recte) i podem definir angles congruents com aquells que són ambdós aguts o ambdós obtusos i que les rectes que contenen els seus costats donen lloc al mateix valor de la funció ℓ.



Considerem la construcció que s'indica al dibuix, on hem pres les rectes tangents a $\mathcal{C}$ als punts U, V, U' i V', respectivament. Ara cal distingir dos casos, segons que els punts C i C' siguin interiors o exteriors als triangles UVR i $U'V'R'$. Considerem la col·lineació ρ de $P^2(\mathbb{R})$ que envia el sistema de referència U, V, R, E al sistema de referència U', V', R', X, on prenem $X = E'$ si C i C' són ambdós exteriors o ambdós interiors als triangles UVR i $U'V'R'$, respectivament, i prenem $X = E''$ en cas contrari. Ara observem el següent: ρ existeix i és única; $\rho(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ perquè una col·lineació transforma còniques en còniques i una cònica està determinada per tres punts i les tangents en dos d'ells; $\rho(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ i $\rho(A) = A'$; ρ conserva la raó doble i, per tant, ρ conserva longituds hiperbòliques i angles hiperbòlics; per tant, $\rho(B) = B'$ i $\rho(C) = C'$; això implica que $\beta \equiv \beta'$.

Tenim, per tant, un model de la geometria hiperbòlica. No és difícil demostrar que, en aquest model, la noció de congruència de segments i angles es podria definir també de la manera següent: *Dues figures són congruents quan hi ha una col·lineació de $P_2(\mathbb{R})$ que conserva $\mathcal{C}$ i transforma una en l'altra.*

Unicitat del model

Exercicis

Apèndix A. Cossos

Els exemples més importants de geometries projectives són els espais projectius $P_n(k)$. Deixant de banda la dimensió, tenim un espai projectiu per cada cos k. En aquest apartat estudiarem algunes propietats dels cossos i donarem alguns exemples importants.

Considerem que el lector està familiaritzat amb els cos dels nombres racionals ($\mathbb{Q}$), amb el cos dels nombres reals ($\mathbb{R}$) i amb el cos dels nombres complexos ($\mathbb{C}$), així com amb el cos finit de p elements, per cada primer p, que designem per $\mathbb{F}_p$. Els cossos racional, real i complex són cossos infinits, mentre que $\mathbb{F}_p$ té un nombre finit d'elements. Hi ha una altra diferència important. A $\mathbb{F}_p$ es verifica que $1 + \overset{p}{\dots} + 1 = 0$, mentre que, a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ la suma de n vegades la unitat mai no dóna zero. Definim la *característica* d'un cos com el mínim enter n tal que $1 + \overset{n}{\dots} + 1 = 0$. Si aquest n no existeix, direm que el cos té *característica zero*. Amb aquesta definició, tant $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ són cossos de característica zero, mentre que $\mathbb{F}_p$ té característica p.

És fàcil veure que la característica d'un cos és sempre zero o un nombre primer. Tot cos finit té característica diferent de zero, però hi ha cossos infinits de característica diferent de zero.

El cos dels quaternions

Per definició, la multiplicació d'un cos ha de complir la propietat commutativa. Però té sentit pensar en una estructura idèntica a la d'un cos, sense la propietat commutativa de la multiplicació. En podríem dir «cos no commutatiu», però normalment aquestes estructures s'anomenen *«anells de divisió»*. És a dir, un anell de divisió és un conjunt amb dues operacions que compleixen les mateixes propietats dels cossos excepte, potser, la propietat commutativa de la multiplicació.

L'exemple més important, i el primer exemple conegut, d'anell de divisió no commutatiu és el cos dels quaternions, que designarem per $\mathbb{H}$ i descriurem a continuació.[118] La construcció de $\mathbb{H}$ recorda la de $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$. Recorden que $\mathbb{C}$ es construeix prenent un espai vectorial de dimensió 2 sobre $\mathbb{R}$, amb una base, els vectors de la qual es designen per 1 i i. Aleshores, per definir el producte de $\mathbb{C}$, n'hi ha prou amb dir que 1 és l'element neutre i $i^2 = -1$. $\mathbb{H}$ es construeix prenent un espai vectorial V de dimensió *quatre* sobre $\mathbb{R}$, amb una base els elements de la qual es designen per 1, i, j, k. Per tant, tot quaternió s'expressarà en la forma

$$a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Es defineix un producte a V a partir d'una aplicació bilineal $\varphi\colon V \times V \to V$. φ quedarà unívocament determinada donant les imatges de les parelles de vectors de la base. Això es fa imposant que 1 sigui element neutre i que i, j i k es multipliquin segons les regles següents:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ ki = -ik &= j \\ jk = -kj &= i. \end{aligned}$$

Tenim definida una multiplicació a V que té com a element neutre el vector 1 i verifica la propietat distributiva per la pròpia definició de φ. Per tal de veure que es compleix la propietat associativa, n'hi ha prou amb comprovar-ho per als vectors i, j, i k, és a dir cal fer 27 comprovacions del tipus

$$i(ji) = -ik = j = ki = (ij)i, \quad \text{etc.}$$

Fetes aquestes comprovacions, hom observa que V adquireix estructura d'anell, els elements del qual anomenarem *quaternions*. Veiem que la multiplicació no és commutativa. El punt important és que es tracta, de fet, d'un *cos*, és a dir, cada element no nul té un invers. Abans de demostrar-ho, definim el *conjugat* d'un quaternió $q = a + bi + cj + dk$ com el quaternió $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. Direm que un quaternió és *real* quan sigui un múltiple del vector 1 o, equivalentment, quan coincideixi amb el seu conjugat. El pas al conjugat compleix les propietats següents:

1) $\overline{q + r} = \bar{q} + \bar{r}$;

2) $\overline{qr} = \bar{r}\bar{q}$;

[118] La lletra $\mathbb{H}$ fa referència a W. R. Hamilton (1805–1865), que va ser el descobridor del cos dels quaternions.

3) $q\bar{q}$ és real.

La propietat 1) és evident. La propietat 2) es demostra veient primer que és certa per als elements de la base i la propietat 3) és una conseqüència immediata de 2) i del fet que $\bar{\bar{q}} = q$.

Definim la *norma* d'un quaternió $q = a + bi + cj + dk$ com el nombre real $N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Observem que $N(qr) = N(q)N(r)$. Ara és fàcil demostrar l'existència d'inversos. En efecte, si $q \neq 0$ és un quaternió, $N(q)$ és un nombre real no nul i té sentit considerar el quaternió $q' = N(q)^{-1}\bar{q}$. Es verifica que $qq' = q'q = 1$. Tenim, per tant, un cos, el *cos dels quaternions*.[119] Es comprova immediatament que els nombres complexos $\mathbb{C}$ formen un subcòs de $\mathbb{H}$, identificant $a+bi \in \mathbb{C}$ amb el quaternió $a + bi \in \mathbb{H}$.[120]

Els nombres de Cayley

El mètode que hem seguit per anar construint, successivament, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ es pot repetir indefinidament. S'anomena el mètode de Cayley-Dickson. Comencem amb una $\mathbb{R}$-àlgebra B (no necessàriament associativa) de dimensió n —és a dir, com a $\mathbb{R}$-espai vectorial, $B \cong \mathbb{R}^n$— i suposem que B té una *involució* $x \mapsto \overline{x}$ lineal que compleixi que $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$. Per exemple, B podria ser el cos dels reals amb $\overline{x} = x$ o podria ser el cos dels complexos amb la conjugació ordinària. Introduïm un nou element v i postulem $v^2 = -1$ i $\overline{v} = -v$.

[119] Diguem alguna cosa sobre la descoberta d'aquest cos. El 1837, Hamilton publica una memòria on descriu els nombres complexos com a parelles de nombres reals, amb un cert producte donat per

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay - bx).$$

Hamilton, com molts d'altres matemàtics de l'època, volia trobar un producte similar a $\mathbb{R}^3$, mitjançant una expressió com l'anterior, però amb tres variables. Calia, també, que aquest producte fos compatible amb la norma. Avui sabem que això no és possible. El fet que el producte de dues sumes de quatre quadrats pugui expressar-se com una suma de quatre quadrats d'expressions lineals, podia haver motivat Hamilton a buscar un producte en *quatre* variables. Aquest producte només existeix si renunciem a la commutativitat, cosa realment audaç a l'època d'en Hamilton. Es diu que la inspiració genial la va tenir en Hamilton el 16 d'octubre de 1843 quan passejava pel pont de Brougham i va concebre una multiplicació no commutativa en dimensió 4 on

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

[120] Tenim, doncs, tres exemples d'anells de divisió que són simultàniament espais vectorials reals de dimensions 1, 2 i 4. És natural preguntar-se si podem obtenir productes en dimensions superiors. Segons el teorema de Frobenius (1877), no hi ha cap més exemple.

Aleshores, a $N = B \times B \cong \mathbb{R}^2$ tenim una multiplicació i una conjugació que converteixen B en una $\mathbb{R}$-àlgebra B (no necessàriament associativa) de dimensió $2n$ amb una conjugació, a la que podem tornar a aplicar el mateix procés.

D'aquesta manera, tenim una successió de $\mathbb{R}$-àlgebres

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \cdots$$

Els *nombres de Cayley* —també coneguts com a *octonions*— són el pas següent d'aquesta sèrie després dels quaternions. En particular,

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus v\mathbb{H}$$

i un octonió u s'escriu com a vuit nombres reals, o com a quatre nombres complexos, o com a dos quaternions

$$u = q_1 + vq_2.$$

De manera més explícita, la multiplicació ve donada per les regles

$$qv = v\overline{q}, \quad v^2 = -1, \quad p(vq) = v(\overline{p}q), \quad (vp)q = v(qp), \quad (vp)(vq) = -q\overline{p}$$

on $p, q \in \mathbb{H}$. En tot cas, podríem dir allò de que *«a cada bugada es perd un llençol»* perquè, en aquest procés de Cayley-Dickson comencem amb un cos amb involució trivial ($\mathbb{R}$), en el pas següent tenim un cos amb involució no trivial ($\mathbb{C}$), un pas més i perdem la propietat commutativa de la multiplicació ($\mathbb{H}$); en el pas següent, el dels octonions $\mathbb{O}$, perdem la propietat associativa de la multiplicació i un pas més enllà —els que es coneixen com a *«setenions»*— la multiplicació, a més de no ser ni commutativa ni associativa, té divisors de zero.

Malgrat això, els nombres de Cayley sí que admeten divisió única per octonions diferents de zero. És a dir, si $a, b \in \mathbb{O}$ i $\neq 0$, existeixen $x, y \in \mathbb{O}$ únics tals que

$$ax = b, \qquad ya = b.$$

Encara que haguem perdut l'associativitat de la multiplicació, els nombres de Cayley encara compleixen un parell de versions febles de l'associativitat:

1. (Propietat alternativa) $x^2y = x(xy)$ i $yx^2 = (yx)x$ per tot $x, y \in \mathbb{O}$.

2. Tota subàlgebra de $\mathbb{O}$ generada per dos elements és associativa. En particular, té sentit escriure x^n o xy^2x^3y sense que calgui posar parèntesis.

3. (Propietat de Moufang) $(zx)(yz) = z(xy)z$ per tot $x, y, z \in \mathbb{O}$ (el terme de la dreta té sentit per la propietat anterior).

Cossos finits

Ja sabem que per cada primer p hi ha un cos que té exactament p elements. Aquest cos, anomenat $\mathbb{F}_p$, té característica p. En general, si k és un cos de característica p, l'element neutre del producte generarà dintre k un subcòs isomorf a $\mathbb{F}_p$. En particular, k tindrà estructura de $\mathbb{F}_p$-espai vectorial, que serà de dimensió finita si k és un cos finit. Tindrem, doncs, un isomorfisme de $\mathbb{F}_p$-espais vectorials $k \cong \mathbb{F}_p \times \cdots \times \mathbb{F}_p$. Això demostra que *tot cos finit de característica p té p^n elements*, per algun n. Observem també que, per cada primer p, hi ha un únic cos de p elements, el cos $\mathbb{F}_p$. Això és cert en general per tot n.

Per cada primer p i cada natural n hi ha, llevat d'isomorfisme, un únic anell de divisió p^n elements. Aquest anell de divisió és un cos. □ [1]

Aquest únic cos de p^n elements s'anomena sovint *el cos de Galois* de p^n elements i es designa per $GF(p^n)$ o també per $\mathbb{F}_{p^n}$. El teorema anterior diu que tot anell de divisió finit és commutatiu (resultat ben sorprenent, perquè a priori no sembla que hi hagi cap relació entre la finitud i la commutativitat) i que no hi ha altres cossos finits a banda dels cossos de Galois. També implica que n'hi ha prou amb donar el nombre d'elements per determinar un cos finit. La demostració del teorema no la inclourem aquí degut a que no és senzilla i el seu lloc natural seria dintre d'un curs d'àlgebra i teoria de cossos. No obstant això, sí que veurem com, si admetem el teorema, podem construir els cossos de Galois $\mathbb{F}_{p^n}$.

Sigui $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ un polinomi amb coeficients al cos de Galois $\mathbb{F}_p$. Considerem ara l'anell de polinomis en una variable $\mathbb{F}_p[x]$ i fem quocient d'aquest anell per l'ideal generat pel polinomi $f(x)$. Obtenim un anell $A = \mathbb{F}_p[x]/(f(x))$. Donat explícitament el polinomi f, l'estructura de l'anell A és ben senzilla de determinar. Els elements de A seran de la forma

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1}x^{n-1},$$

on $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ recorre el cos $\mathbb{F}_p$ i x designa ara la classe de x al quocient $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$. El producte de dos elements s'obtindrà fent primer el producte com a polinomis en x i després passant al quocient, on tenim

$$x^n = -a_0 - a_1x - \cdots - a_{n-1}x^{n-1}.$$

Observem clarament que, donat que els coeficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ poden prendre, cada un d'ells, n valors diferents, A té exactament p^n elements. En general, però, A no serà un cos. Per exemple, si f fos producte de dos polinomis, $f = gh$, passant al quocient A tindríem $[g][f] = 0$, és a dir, A té divisors de zero i no pot ser cos. D'altra banda, és ben sabut que un anell finit sense divisors de zero és un cos. Per tant, n'hi ha prou amb prendre $f(x)$ *irreductible* perquè A sigui un cos, necessàriament isomorf a $\mathbb{F}_{p^n}$, perquè hem dit que hi havia un *únic* cos de p^n elements. En resum:

Si $f(x)$ és un polinomi de grau n, irreductible sobre $\mathbb{F}_p$, aleshores $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[x]/(f(x))$. □ [2]

Per construir el cos de Galois de p^n elements, basta, doncs, trobar un polinomi de grau n, irreductible sobre $\mathbb{F}_p$. Com a exemple, construirem explícitament el cos de 4 elements. Segons el que acabem de dir, n'hi ha prou amb troba un polinomi de grau 2, irreductible sobre $\mathbb{F}_2$. Podem prendre, per exemple, el polinomi $x^2 + x + 1$. Aleshores, els elements de $\mathbb{F}_4$ seran

$$0, 1, x, 1 + x,$$

és a dir, els polinomis de grau 1 sobre $\mathbb{F}_2$. La suma es definirà de la manera natural com la suma de polinomis i el producte s'obtindrà aplicant la fórmula $x^2 + x + 1 = 0$. Més explícitament, tindrem

$+$	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

x	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	$1+x$	1
$1+x$	0	$1+x$	1	x

Exercicis

1. Demostreu que, si k és un cos commutatiu de característica p, l'aplicació $\varphi\colon k \to k$, $\varphi(x) = x^p$, és un endomorfisme, anomenat endomorfisme de Frobenius. Demostrar que, si k és finit, φ és un automorfisme.

2. És ben sabut que, en un cos commutatiu, un polinomi de grau n té, com a màxim, n arrels. Demostreu que el polinomi $x^2 + 1 = 0$ té infinites arrels al cos dels quaternions.

3. Demostreu que, si els nombres enters a i b són suma de quatre quadrats, el seu producte ab també ho és. Indicació: utilitzar la norma del cos dels quaternions.

4. En aquest exercici es tracta de veure que, de la mateixa manera que els nombres complexos de norma 1 es poden identificar a les rotacions del pla, també els quaternions de norma 1 es poden identificar a les rotacions de l'espai de tres dimensions. Sigui S el grup multiplicatiu dels quaternions de norma 1 i sigui R el grup de les rotacions de $\mathbb{R}^3$ (amb la composició com a operació). Identifiquem cada vector $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ amb el quaternió $v = ai + bj + ck \in H$. Si $q \in S$, definim

$$r_q(v) = q^{-1} v q.$$

   a) Demostreu que r_q és una rotació de $\mathbb{R}^3$.
   b) Demostreu que $r \colon S \to R$ donat per $r(q) = r_q$ és un homomorfisme de grups.
   c) Demostreu que si φ és una rotació de $\mathbb{R}^3$ d'angle 2α i d'eix el vector unitari v, aleshores $\varphi = r_q$, on q és el quaternió $q = \cos\alpha + v \sin\alpha$.
   d) Deduïu que r és un epimorfisme de nucli $\{\pm 1\}$.

5. Construïu les taules de suma i producte del cos de 8 elements. Fer el mateix amb el cos de 9 elements.

Índex