Aspectes mètrics, geomètrics i topològics de l'espai euclidià. Funcions de vàries variables, corbes i superficies

11 de setembre de 2017

1 L'espai euclidià

Designarem per $\mathbb{E}^3$ l'espai euclidià físic de tres dimensions que, en primera aproximació, ens envolta. També considerarem el pla euclidià de dues dimensions $\mathbb{E}^2$ i en general l'espai euclidià abstracte $\mathbb{E}^d$ de d-dimensions. En general, tractarem amb $\mathbb{E}^d$, però pensarem en $\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3$. També s'en diu l'espai afí de d dimensions. Els elements de $\mathbb{E}^d$ són punts, que en principi designarem amb lletres majúscules $P, Q, \cdots$. Cada dos punts P, Q determinen un vector $\vec{PQ}$, el vector que va de P a Q, etc. Cóm manipulem els punts? Com que a $\mathbb{E}^d$ hi ha d graus de llibertat, necessitarem d'una familia de d nombres per a cada punt P per identificar-lo. El conjunt de les families ordenades de d nombres és el producte cartesià

$$\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_d), x_i \in \mathbb{R}\}.$$

La forma clàssica de fer això- de situar cada punt amb d nombres- és mitjançant unes *coordenades afins*. Unes coordenades afins consisteixen en escollir un *sistema de referència*, que consta d'un punt O que s'anomena *origen de coordenades* i uns eixos de vectors directors $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_d}$ linealment independents. Per a cada punt P considerem el vector $\vec{OP}$ i l'escrivim en termes d'aquesta base,

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{e_i}.$$

Els nombres $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ són les coordenades afins del punt P en aquest sistema de referència, i reciprocament, cada d-pla de números defineix un únic punt.

D'una banda tenim doncs el concepte abstracte de punt, i d'altra banda les coordenades d'aquest punt en un sistema de referència, que pot ser arbitrari.

Per agilitzar les notacions, però, pensarem que hem fixat un sistema de referència *canònic* consistent en un origen O i d eixos dos a dos perpendiculars. Identifiquem P amb el vector $\vec{OP}$ que al seu torn identifiquem amb els d nombres $(x_1, \cdots, x_d)$. Així identifiquem $\mathbb{E}^d$ amb $\mathbb{R}^d$ i també utilitzem la notació $x = (x_1, \cdots, x_d)$ per als punts. En alguna ocasió també utilitzarem la notació X per designar el vector columna que té els d $x's$. L'origen de coordenades és $0 = (0, 0, \cdots, 0)$; els vectors $\vec{e_i} = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ formen la *base canònica* de $\mathbb{R}^d$, que són els vectors directors dels eixos de coordenades. En alguns cops, però, serà convenient mantenir la notació P, particularment quan parlem d'altres sistemes de coordenades. En $\mathbb{E}^3$, utilitzarem la notació $P = (x, y, z)$, enlloc de (x_1, x_2, x_3), i en el pla utilitzarem $P = (x, y)$.

En $\mathbb{R}^d$ hi ha l'estructura d'espai vectorial donada per la suma i el producte per escalars. Hi tenim subespais vectorials V de dimensió $k \leq d$, que es poden descriure de dues maneres. Primer, mitjançant $d-k$ equacions lineals independents

$$\sum_{j=1}^{d} c_{ij} x_j = 0, i = 1, \cdots, d-k \tag{1}$$

(que vol dir la intersecció de $d-k$ hiperplans). Amb notació matricial, com abans, $MX = 0$ on $M = (m_{ij})$ és una matriu $(d-k) \times d$ de rang $d-k$. Alternativament, podem donar V en *forma paramètrica*, triant k vectors de V linealment independents, $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k}$ és a dir que formen una base de V, i posant $\vec{OP} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u_j}$. Si, com abans, els vectors $\vec{u_j}$ s'expressen $\vec{u_j} = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} \vec{e_i} = (a_{1j}, \cdots, a_{dj})$, amb notació matricial

$$X = M\Lambda,$$

on M és una matriu $d \times k$ de rang k i Λ és el vector columna de les λ. Els k nuúmeros $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ determinen els punts de V.

Hi tenim també els subespais afins $P + V$ que són paralels a V i passen per P. Aquest es descriuen posant $X = P + M\Lambda$ o bé amb $d-k$ equacions com a (1) no homogènies.

En $\mathbb{R}^d$ hi ha també una estructura mètrica donada pel producte escalar entre vectors definit de la forma següent: si $\vec{u}, \vec{v}$ són vectors que en la base canònica s'expressen $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_d), \vec{v} = (v_1, \cdots, v_d)$, llavors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_d v_d. \tag{2}$$

El nombre $\|\vec{u}\|$ definit per $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1^2 + \cdots + u_d^2$ s'anomena la longitud o *norma euclidiana* del vector $\vec{u}$. Sovint utilitzarem la notació $|u|$ per simplificar. Si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, diem que $\vec{u}, \vec{v}$ són perpendiculars o ortogonals. Una *base ortonormal* és la que està formada per vectors unitaris i dos a dos perpendiculars. És immediat comprovar que per a dos vectors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \tag{3}$$

Donats dos vectors $\vec{u}, \vec{v}$, si fem la combinació lineal $\vec{u} + t\vec{v}$ i apliquem (3) trobem que

$$t^2\|\vec{v}\|^2 + 2t\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2 \geq 0.$$

Això implica dues coses:

- Primer, que el discriminant del binomi de segon grau de l'esquerra ha de ser negatiu o zero, i trobem

  $$(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2,$$

  que és el mateix que

  $$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|, \tag{4}$$

  desigualtat anomenada de *Cauchy-Schwarz*.

- Segon, que hi ha un valor de t pel qual $\vec{u} + t\vec{v} = 0$, és a dir, un vector és múltiple escalar de l'altre, si i només si el discriminant és zero, és a dir, si i només si val la igualtat en la desigualtat de Cauchy-Schwarz.

De la desigualtat de Cauchy-Schwarz es dedueix que si cap dels vectors és zero,

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1.$$

La definició que hem donat de producte escalar és analítica, i ara procedim a interpretar-lo geomètricament. En aquest punt recordem la definició de la funció cosinus i de la funció arcosinus. Per definició, $(\cos\theta, \sin\theta)$ són les coordenades del punt P sobre el cercle de radi 1 en el pla, centrat a l'origen, que està a distància θ del punt $(1,0)$, distància aquesta al llarg del cercle i comptada positivament en la direcció antihorària. Això vol dir que per definició de la funció cosinus

$$\langle \vec{OP}, \vec{e_1} \rangle = x = \cos\theta,$$

on θ és l'angle que formen aquest dos vectors, en radians (per definició, un radià és l'angle pel qual la longitud sobre el cercle coincideix amb el radi amb el que es traça; per definició de π, que és la longitud de mig cercle de radi 1, mig cercle té π radians). La funció $\cos\theta$ decreix de 1 a -1 quan θ varia de 0 a π i, per definició, $\arccos x$ és la funció inversa d'aquesta.

Això ens porta a definir l'angle entre dos vectors unitaris com l'angle θ pel qual $\cos\theta$ és la longitud de la projecció d'un sobre l'altre (amb signe positiu si aquesta projecció està en la mateixa direcció i signe negatiu en cas contrari). Equivalentment, θ és l'arccosinus d'aquesta projecció. Ara bé, considerem dos vectors unitaris $\vec{u}, \vec{v}$ i imaginem un moviment rigid T que transformi $\vec{v}$ en $\vec{e_1}$. El vector $\vec{u}$ es transforma en un altre vector unitari $\vec{Tu} = (\alpha, \beta, \cdots)$; com que T preserva distàncies i la noció d'ortogonalitat també preserva l'angle entre vectors; per tant l'angle entre els dos vectors unitaris $\vec{u}, \vec{v}$ és el mateix que entre $\vec{Tu}, \vec{e_1}$, que és $\arccos\alpha = \arccos\langle \vec{Tu}, \vec{e_1} \rangle = \arccos\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. En definitiva, l'angle entre dos vectors unitaris és l'arccosinus del seu producte escalar. Donats dos vectors $\vec{u}, \vec{v}$ no nuls, tindrerm doncs que

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \rangle = \cos\theta,$$

on θ és l'angle que formen. Això ens permet interpretar geomètricament el producte escalar,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Si combinem la desigualtat de Cauchy-Schwarz (4) amb (3) trobem que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2,$$

per tant

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$

anomenada la *desigualtat triangular.*

Donats dos punts $x = (x_1, \cdots, x_d), y = (y_1, \cdots, y_d)$ de l'espai euclidià definim la distància euclidia entre ells per

$$d(x, y) = d(y, x) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_d - x_d)^2}.$$

També utilitzarem sovint $|x - y|$ per designar la distància. Si tenim tres punts x, y, z, com que $z - x = (z - y) + (y - x)$ tindrem, per la desigualtat triangular,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Tambe tindrem $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ i per tant

$$|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z).$$

Tenim per tant quantificada la noció de proximitat entre punts, diem que x, y són propers si $d(x, y)$ és molt petita.

Donat un subespai vectorial V de dimensió $k, 0 < k < d$, anomenem subespai ortogonal al subespai

$$V^{\perp} = \{\vec{u} : \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0, \vec{v} \in V\}.$$

Com que $V^{\perp}$ és el conjunt de solucions del sistema homogeni de rang k, $MX = 0$, on M és una matriu que té com a columnes una base de V, veiem que $V^{\perp}$ té dimensió $d - k.$, i òbviament $V \cap V^{\perp} = 0$. Afirmem que donat x qualsevol, hi ha una descomposició única

$$x = y + z, y \in V, z \in V^{\perp}.$$

Si existeix és única perquè si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, aleshores $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in V \cap V^{\perp}$ i per tant $y_1 = y_2, z_1 = z_2$. Per veure que existeix prenem qualsevol base ortonormal $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ de V; el y que busquem ha de ser de la forma $y = \sum \lambda_i \vec{v_i}$ i complir

$$\lambda_i = \langle y, \vec{v_i} \rangle = \langle x - z, \vec{v_i} \rangle = \langle x, \vec{v_i} \rangle,$$

per tant ha de ser $y = \sum_i \langle x, \vec{v_i} \rangle \vec{v_i}$. Això mateix demostra que $x - y \in V^{\perp}$. Aquesta descomposició de x s'anomena la descomposició ortogonal de x, i y s'anomena la projecció ortogonal de x sobre V.

Si $w \in V$, tenim que $x - w = y - w + z$ amb $y - w \in V, z \in V^{\perp}$, per tant $\|x - w\|^2 = \|y - w\|^2 + \|z\|^2$. Veiem així que $d(x, w), w \in V$ és mínima quan $w = y$ i val $\|z\|$, és a dir, y és el punt de V més proper a V. L'operador definit per $P_V x = y$ (que és la identitat en V) s'anomena el projector sobre V.

A diferència del cas $d = 1$, no és possible definir en $\mathbb{R}^d$ cap relació d'ordre que tingui les propietats naturals. Quan $d = 2$, amb la identificació amb el cos dels nombres complexos, sí es pot definir un producte.

2 El concepte de sistema de coordenades

Suposem que tenim un altre sistema de referència determinat per un origen Q i uns vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$. Tindran una expressió en termes del sistema canònic

$$Q = (b_1, \cdots, b_d), \vec{u_j} = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} \vec{e_i}.$$

Els nombres a_{ij} els organitzem en la matriu $A = (a_{ij})$ on i és l'index de les files i j el de les columnes, així els vectors columna d'A són els $\vec{u_j}$. Com que aquests vectors $\vec{u_j}$ formen una base, la matriu A és invertible, té determinant diferent de zero.

Un punt P que en el sistema canònic té coordenades $P = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ tindrà unes altres coordenades $(y_1, \cdots, y_d)$ en aquest altre sistema de referència. La relació entre unes coordenades i les altres les obtenim igualant components en

$$(x_1 - b_1, \cdots, x_d - b_d) = \vec{QP} = \sum_{j=1}^{d} y_j \vec{u_j},$$

això és

$$x_i = b_i + \sum_{j=1}^{d} y_j a_{ij}, i = 1, \cdots, d.$$

En aquest punt és on veiem que és convenient utilitzar la notació matricial: X és el vector columna dels x_i, Y el vector columna del y_i, Q el dels b_i i escrivim

$$X = Q + AY.$$

La transformació inversa-la que dóna les coordenades y en termes de les x és

$$Y = A^{-1}(X - Q),$$

on A^{-1} designa la matriu inversa d'A. Quant els vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$ són de longitud 1 i dos a dos perpendiculars parlem de *sistemes de referència cartesians.* Això significa que

$$\sum_{i=1}^{d} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk},$$

que en notació matricial diu que $A^t A = I$, és a dir, que la trasposta A^t és la matriu inversa d'A. Aqueste matrius s'anomenen *ortogonals.*

Hi ha però altres maneres de situar els punts, hi ha sistemes de coordenades no afins. Per exemple en el plà $\mathbb{R}^2$, si posem

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

amb $r \geq 0$ i $\theta \in \mathbb{R}$, veiem que amb r fix el punt $P = (x, y)$ va recorrent el cercle de radi r amb periode 2π. Diem que (r, θ) són *coordenades polars* de P.

Un *sistema de coordenades abstracte* en $\mathbb{E}^d$ on en una part $U \subset \mathbb{E}^d$ vol dir una aplicació

$$\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

que assigna a cada punt $P \in U$ un conjunt ordenat de d nombres (les coordenades del punt P) i que tingui dues propietats:

- Que sigui injectiva (bijectiva sobre la imatge). Punts diferents han de tenir coordenades diferents.

- Ha de ser *contínua.* Ja precisarem més endavant el significat d'això; intuitivament vol dir que si P, P' són propers, les seves coordenades també ho han de ser.

Llavors, si volem que les coordenades polars estiguin ben definides, hem de posar $r(P) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i hem de triar per a cada P un únic $\theta(P)$. Habitualment, triem $\theta \in [0, 2\pi)$; això correspon a que per a P diferent de l'origen, $\theta(P)$ és l'angle que forma el vector $\vec{OP}$ amb l'eix positiu de les x, mesurat en el sentit contrari de les agulles del rellotge (per a l'origen triem $\theta(O) = 0$). Analíticament,

$$\theta(P) = \arccos\frac{x}{r}, y \geq 0, \theta(P) = 2\pi - \arccos\frac{x}{r}, y < 0,$$

on arccos és la funció inversa de $\cos : [0, \pi] \to (-1, 1]$. Si triem $\theta(P) \in (-\pi, \pi]$ significa que $\theta(P)$ és l'angle que forma el vector $\vec{OP}$ amb l'eix positiu de les x, mesurat en el sentit contrari de les agulles del rellotge quan $y \geq 0$ i en el sentit horari (angles negatius) si $y < 0$. Analíticament ara seria

$$\theta(P) = \arccos\frac{x}{r}, y \geq 0, \theta(P) = -\arccos\frac{x}{r}, y < 0,$$

Tant en un cas com l'altre, si volem que hi hagi continuïtat, veiem que hem de treure un semieix, l'eix positiu de les x (incloent el zero) en el primer cas, i l'eix negatiu de les x, incloent el zero en el segon cas. Així, estrictament parlant tenim coordenades polars en els conjunts U que s'obtenen del pla eliminant un semieix que surt de l'origen. Ara bé, per abús de notació, continuem parlant de les *coordenades polars* en el pla.

De la mateixa forma tenim les *coordenades esfèriques* a l'espai, que consisteixen en $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la distància a l'origen, i dos angles ϕ, θ de forma que

$$x = r \sin\phi\cos\theta, y = r\sin\phi\sin\theta, z = r\cos\phi.$$

L'angle $\phi \in [0, \pi]$ s'anomena la latitud i és l'angle que forma $\vec{OP}$ amb $\vec{e_3}$. La projecció Q de P en el pla xy té coordenades polars $r\sin\phi, \theta$. Així, θ constant i variar ϕ vol dir que recorrem un meridià, el pol nord correspònent a $\phi = 0$ i el pol sud a $\phi = \pi$. Si triem $\theta \in [0, 2\pi)$, per tal que aquest sistema de coordenades ho sigui estrictament, hem de treure els punts on hi ha discontinuitats, que serien els d'un meridià.

Finalment, les *coordenades cilíndriques* (r, θ, z) consisteixen en z, i les coordenades polars de la projecció Q de P sobre el pla xy. Per tal que ho siguin estrictament, hauríem de treure el semipla $y = 0, x \geq 0$.

Quan tenim un sistema de coordenades abstracte (U, Φ), i anomenem $\omega_i, i = 1, \cdots, d$ les funcions components de Φ, no hem de pensar en Φ com una transformació que associa un punt $\Phi(P)$ a cada punt P; els punts no es mouen, i Φ ens diu quines són les noves coordenades $\omega_1, \cdots, \omega_d$ de cada punt P en termes de les seves coordenades en la base canònica; l'aplicació inversa Φ^{-1} ens dóna les velles coordenades en termes de les noves. Cada sistema de coordenades defineix uns nous "eixos" de coordenades; si un punt P té coordenades $\omega_1(P), \cdots, \omega_d(P)$, el conjunt de punts

$$L_i(P) = \{Q : \omega_j(Q) = \omega_j(P), j \neq i,\},$$

és a dir, els que s'obtenen de P fent variar només la i-sima coordenada ω_i, és un d'aquest eixos. Dit d'una altra manera, per cada i, el conjunt de punts que s'obté fixants totes les coordenades menys la i-sima

$$\{Q : \omega_j(Q) = c_j, j \neq i\}\},$$

(tenim un conjunt per a cada tria de les c_j) són dos a dos disjunts, perquè Φ és injectiva, i omplen U. Cada punt P pertany a un únic d'aquests, el que correspon a $c_j = \omega_j(P)$, i P és la intersecció dels d eixos $L_i(P)$. Aquest eixos són línies rectes si Φ és un sistema de coordenades afí, però en general no ho són. Per exemple, en les coordenades polars (r, θ)es tracta de la família de cercles centrats en l'origen (r constant) i en les semirectes que pasen per l'origen (θ constant). En les coordenades esfèriques, r constant són les esferes, la seva intersecció amb θ constant són els meridians, mentre que la seva intersecció amb ϕ constant són els paralels.

Una de les utilitats dels sistemes de coordenades és que sovint determinats conjunts tenen una expressió més senzilla en un sistema de coordenades nou. En els sistemes de coordenades cartesians, els conjunts més sencills són els paralelepipeds de cares paraleles als eixos, que són el producte cartesià d'intervals $I_i = [a_i, b_i]$, que també anomenarem rectangles, encara que d pugui ser > 2 ; és a dir, els descrivim dient que x_i varia entre a_i i b_i, lliurament. En el pla, el disc tancat de centre l'origen i radi '1 té una descripció més complicada en coordenades cartesianes (x, y)

$$-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

És una descripció més complicada perquè l'interval on varia y depen de x. En canvi, en coordenades polars, aquest mateix disc és el rectangle $0 \leq r \leq 1, 0\theta \leq 2\pi$.

Fins ara hem parlat de sistemes de coordenades de subconjunts U de $\mathbb{R}^d$ que necessiten d coordenades, és a dir, que d'una manera intuïtiva hi ha d graus de llibertat per moure's dins U. Però hi ha conjunts on els graus de llibertat són menors i on necessitem menys coordenades. Un exemple el tenim en la parametrització d'un pla a $\mathbb{R}^3$ o més generalment d'una varietat lineal definida per (1), on deiem que els seus punts poden ser descrits per

$$X = M\Lambda.$$

Hi ha tants punts a la varietat lineal com paràmetres Λ, de tal manera que podem pensar els λ com a coordenades dels punts de la varietat lineal.

3 Transformacions lineals

Parlem ara de transformacions lineals $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$, transformacions que associen un punt $T(P)$ a cada punt P (o vectors a vectors). En el sistema canònic, associa m números $y = (y_1, \cdots, y_m)$ a d números $x = (x_1, \cdots, x_d)$, donats en forma matricial per $Y = MX$, on M és una matriu $m \times d$, de m files i d columnes. La matriu M s'anomena la matriu de T en la base canònica. Els vectors columna d'M són les imatges $\vec{u_i} = T\vec{e_i}$ de la base canònica i la imatge de T és el subespai generat per aquests vectors, de dimensió igual al rang d'M, per definició. Sabem molt bé com discutir un sistema lineal $TX = Y$ de m equacions amb d incògnites.

Si utilitzem unes altres coordenades X' per a P i Y' per a $T(P)$, donades per canvis de coordenades $X = AX', Y = BY'$, de $BY' = Y = MX = MAX'$ veiem que $B^{-1}MA$ és la matriu de T en les noves coordenades. Quan $m = d$, la composició d'una transformació lineal amb una translació $Tx = x + P$ s'anomena una *transformació afí*.

Convé destacar per tant que si tenim d vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$ que formen una base i els posem com a vectors columna d'una matriu A, aquesta matriu A és alhora la matriu de la transformació lineal T que transforma $\vec{e_i}$ en $\vec{u_i}$ (que efectivament mou els punts), i la matriu de l'aplicació identitat (que no mou els punts) quan utilitzem la base $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$ i la canònica. Tenim una interpretació dinàmica i estàtica d'una matriu.

Per (3), una transformació lineal T de $\mathbb{R}^d$ en si mateix preserva longituds, és a dir, $\|T\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ per a tot $\vec{u}$, si i només si preserva el producte escalar, és a dir

$$\langle T\vec{u}, T\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Les anomenem *transformacions ortogonals* perquè això és el mateix que dir que la matriu M de T en el sistema canònic (o en quelsevol base ortonormal) és una matriu ortogonal. Evidentment, donada una base ortonormal hi ha una única transformació ortogonal que transforma la base canònica en aquesta. O també, donades dues bases ortonormals, hi ha una única transformació ortogonal que trasnforma una en l'altra. La composició d'una transformació ortogonal amb una translació preserva la distància entre punts; recíprocament, si T és una aplicació de $\mathbb{R}^d$ en sí mateix que preserva la distància, $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ per a tot parell x, y, llavors T és una traslació seguida d'una transformació ortogonal (exercici). Per això s'anomenen també *moviments rígids*.

Acabem aquesta secció amb la noció de *norma d'una transformació lineal* $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Suposem que $Tx = y$ està donada per una matriu M d'ordre $m \times d$ en la base canònica, el vector y té components $y_j = \sum_{i=1}^d m_{ij} x_i$, $j = 1, \cdots, m$. Aleshores, com que $|x_i| \leq \|x\|$,

$$|y_j| \leq (\sum_i |m_{ij}|)\|x\|,$$

i per tant

$$\|y\| = (\sum_j |y_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_j (\sum_i |m_{ij}|)^2)^{\frac{1}{2}} \|x\|,$$

és a dir, $\|Tx\| \leq C\|x\|$ per a una certa constant C. Això significa que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ es manté acotat si $x \neq 0$, i podem definir la norma $\|T\|$ (o de M) per

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}, x \neq 0\}.$$

Dit d'una altra manera, $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ i $\|T\|$ és la més petita de les constants C que compleixen $\|Tx\| \leq C\|x\|$ per a tot x. Observem que si $y = \frac{x}{\|x\|}$, llavors $\|y\| = 1$ i per la linealitat $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|Ty\|$, per tant

$$\|T\| = \sup\{\|Ty\| : \|y\| = 1\}.$$

El càlcul explícit de $\|M\|$ per a una matriu $m \times d$ és immediat si $m = 1$. En efecte, en aquest cas, si $T(x) = m_1 x_1 + \cdots + m_d x_d$, introduim el vector $\vec{v} = (m_1, \cdots, m_d)$ de manera que $T(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, és a dir, T consisteix en multiplicar escalarment per $\vec{v}$; per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$|T(\vec{u})| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|,$$

de forma que $\|T\| \leq \|\vec{v}\|$; ara bé, com que per a $\vec{u} = \vec{v}$ hom té una igualtat resulta que $\|T\| = \|\vec{v}\|$.

En dimensió $d = 2$, podem parametritzar els y de longitud 1 per $y = (\cos\theta, \sin\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$, i com que $\|Ty\|$ és una expressió en $\sin\theta, \cos\theta$, és una funció contínua de θ, amb la qual cosa el suprem anterior és de fet un màxim, és assolible. i calculable. Més endavant veurem que aquest fet- que el suprem sigui assolible- és cert en qualsevol dimensió. En dimensió $d > 2$, llevat de casos particulars, és molt complicat donar una expressió exacta per a $\|M\|$; de fet no té gaire interès trobar-la, amb l'estimació $\|Tx\| \le C\|x\|$ ja en tindrem prou més endavant.

4 La topologia de l'espai euclidià

Anomenem *bola oberta* de centre x i radi $r > 0$ al conjunt

$$B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\},$$

i *bola tancada* de centre x i radi r al conjunt

$$\overline{B}(x, r) = \{y : d(x, y) \le r\},$$

que és la reunió disjunta de $B(x, r)$ amb l'esfera $S(x, r) = \{y : d(x, y) = r\}$.

La distància $d(x, y)$ quantifica la noció de proximitat. Ara bé, si $d > 1$ hi ha altres maneres de definir la longitud d'un vector, les boles i en definitiva la distància. En general, una *norma* q a $\mathbb{R}^d$ és una aplicació $q : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ que compleix

- $q(\vec{u} + \vec{v}) \le q(\vec{u}) + q(\vec{v})$
- $q(\lambda\vec{u}) = |\lambda| q(\vec{u})$
- $q(\vec{u}) = 0$ si i només si $\vec{u} = 0$

Observem que això implica, com abans

$$|q(\vec{u}) - q(\vec{v})| \le q(\vec{u} - \vec{v}).$$

Cada norma dóna lloc a una distància $d_q(x, y) = q(x - y)$ i a una familia de boles $B_q(x, r) = \{y : d_q(x, y) < r\}$. Per exemple, són normes

$$\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_d|, \|\vec{u}\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_d|).$$

De fet hi ha tota una escala de normes depenent d'un paràmetre $p \geq 1$

$$\|\vec{u}\|_p = (|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_d|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Quan q és una norma les boles $B_q(x,r)$ per aquesta norma són conjunts convexos, és a dir, amb cada dos punts que contenen també conté el segment que els uneix. La mateixa expressió anterior per a $p < 1$ no dóna lloc a conjunts convexos i per tant no és una norma.

Observem que si q és una norma i L una aplicació lineal bijectiva de R^d en si mateix, aleshores $q(Lx)$ és també una norma. En particular,

$$(\sum_i \lambda_i |u_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

és també una norma, per a qualsevols $\lambda_i > 0$.

Així, hi ha moltes altres altres normes i per tant moltes altres formes de definir la distància entre dos punts. Ara bé, demostrarem més endavant que totes sòn equivalents en el sentit següent:

Teorema. *Si q és una norma, hi ha dues constants $m, M > 0$ tals que $m\|x\| \leq q(x) \leq M\|x\|$ per a tot x. En particular, dues normes qualssevols q_1, q_2 són equivalents.*

Això podem comprovar-ho directament per a les normes $\|\vec{u}\|_p$. És obvi a partir de la definició que $|u_i| \leq \|\vec{u}\|_p$. Per tant, si $p_1, p_2 \geq 1$,

$$\|\vec{u}\|_{p_1} \leq d^{\frac{1}{p_1}} \|\vec{u}\|_{p_2},$$

i per simetria,

$$d^{-\frac{1}{p_2}} \leq \frac{\|\vec{u}\|_{p_1}}{\|\vec{u}\|_{p_2}} \leq d^{\frac{1}{p_1}}.$$

Com a conseqüència, la distancia $q(x-y)$ definida per la norma q també serà equivalent a l'euclidiana

$$md(x,y) \leq q(x-y) \leq Md(x,y) \tag{5}$$

Amb la distància d ja podem considerar el concepte de límit d'una successió de $\mathbb{R}^d$. Formalment, una successió és una aplicació $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, informalment una tira $x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ de punts de $\mathbb{R}^d$. Les successions les utilitzarem en algunes demostracions, però sobretot apareixen en processos iteratius, com per exemple en els mètodes d'aproximació d'arrels. És important no confondre la successió (x^n) amb el conjunt $\{x^n\}$ dels punts que hi apareixen.

Diem que la successió (x^n) té límit un punt x, escrit $x^n \to x$, si per a tot $\varepsilon > 0$ (que hem de pensar que és petit), hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x^n, x) < \varepsilon$ per a $n > n_0$. En termes informals, els punts de la successió són arbitràriament propers a x. Com que

$$|x_i^n - x_i| \leq d(x^n, x) \leq \sum_i |x_i^n - x_i|,$$

això és equivalent a dir que per a cada coordenada $i = 1, \cdots, d$ la successió de coordenades (x_i^n) convergeix a x_i.

És evident que si $x^n \to x, y^n \to y$ llavors $x^n + y^n \to x + y$, etc. Igual que en $d = 1$, una successió (x^n) és convergent si i només si és de Cauchy, és a dir, $|x^n - x^m| \to 0$ si $n, m \to \infty$. El fet que totes les normes i distàncies siguin equivalents, tal com expressa (5), implica que aquests conceptes- el de successió convergent i límit- no depenen de la norma que triem. Adoptem entre totes elles la norma euclidiana $\|\vec{u}\|_2$ perquè els càlculs són sovint més fàcils.

Una subsuccessió o successió parcial d'una successió (x^n) consisteix en considerar un conjunt infinit d'indexs $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ i els termes $y^k = x^{n_k}$. És evident llavors que si x^n és convergent a x llavors tota subsuccessió també és convergent a x.

Donat qualsevol conjunt $A \subset \mathbb{R}^d$ no buit considerarem el següents tipus de punts:

- Els punts *interiors* són aquells punts x pels quals hi ha $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$, els que estan envoltats completament per A. El conjunt d'aquests punts interiors s'anomena l'interior d'A, designat $\mathring{A}$.

- Els punts *exteriors* són els interiors al complementari d'A, és a dir, aquells pels quals hi ha $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A$ és buit. Formen l'exterior d'A, designat A^e.

- Els punts que no són exteriors són els punts *adherents*, és a dir, aquells punts x tals que tota bola $B(x, r)$ talla A. Formen l'adherència d'A, designada $\overline{A}$.

- Els que no són ni interiors no exteriors són els *punts frontera*, que compleixen que tota bola $B(x, r)$ talla tant A com $\mathbb{R}^d \setminus A = A^c$. Formen la frontera d'$A$, designada $Fr(A)$.

El conjunt A s'anomena *obert* si $\mathring{A} = A$, i s'anomena *tancat* si $\overline{A} = A$. Evidentment, l'interior, exterior i frontera d'un conjunt són conjunts disjunts, i $\overline{A} = \mathring{A} \cup Fr(A) = \mathbb{R}^d \setminus A^e, \overline{\mathbb{R}^d \setminus A} = \mathbb{R}^d \setminus \mathring{A}$. Així, A és obert si i només si $\mathbb{R}^d \setminus A$ és tancat. És immediat de comprovar que la reunió de conjunts oberts és obert, la intersecció d'un nombre finit d'oberts és obert; equivalentment, una reunió finita de tancats és tancada, i la intersecció arbitrària de tancats és tancada. Si $B \subset A$ compleix que $A \subset \overline{B}$, diem que B és dens en A. Per exemple, el conjunt de punts amb coordenades racionals, $\mathbb{Q}^d$, és dens en $\mathbb{R}^d$. En efecte, donada una bola $B(x, r)$, és suficient triar per a cada $i = 1, 2, \cdots, d$ un racional y_i tal que $|x_i - y_i| < \frac{r}{d}$; llavors $|x - y| \leq \sum_i |x_i - y_i| < r$.

Entre els punts de $\overline{A}$ hi ha els punts *d'acumulació* d'A, que són aquells tals que tota bola $B(x, r)$ conté punts d'A diferents de x. Això és el mateix que dir que tota bola $B(x, r)$ conté infinits punts d'A. El conjunt de punts d'acumulació d'A es designa per A'. Els punts de $\overline{A}$ que no són d'acumulació són els punts $x \in A$ pels quals hi ha una bola $B(x, r)$ tal que x és l'únic punt d'A en $B(x, r)$, i s'anomenen *aïllats*. Així, A és tancat si i només si $A' \subset A$.

Finalment, direm que un conjunt A és *acotat* si està inclos en una bola, és a dir, hi ha $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ per a tot $x \in A$.

En termes de successions, és evident de provar que $x \in \overline{A}$ si i només si hi ha una successió (x^n) de punts d'A tal que $x^n \to x$, i és d'acumulació si podem triar diferents els punts de la successió.

5 Conjunts compactes

En dimensió $d = 1$, una successió (x^n) o bé no és acotada, i llavors té una parcial amb límit ∞, o bé és acotada, i llavors té una successió parcial monòtona convergent. En particular, una successió acotada sempre té una parcial convergent. Això implica que tot conjunt A infinit i acotat de $\mathbb{R}$ té punts d'acumulació finits. Això mateix podem enunciar en dimensió qualsevol.

Teorema. *Tota successió acotada (x^n) de punts de $\mathbb{R}^d$ té una successió parcial convergent. En conseqüència, tot conjunt A infinit i acotat de $\mathbb{R}^d$ té punts d'acumulació finits.*

Demostració. Prenem (x_1^n), la successió de les primeres components de (x^n); és acotada i per tant té una parcial $(x_1^{n_k})$ convergent. Així, $y^k = x^{n_k}$ és una successió parcial de (x^n) i la successió de les primeres coordenades és convergent. Ara considerem (y_2^k), la successió de les segones components de (y^k), també acotada i per tant amb una parcial $(y_2^{k_p})$ convergent, etc. En d etapes veiem que la successió (x^n) té una parcial (x^{n_k}) tal que totes les components $(x_i^{n_k}), i = 1, 2, \cdots, d$ són convergents, i per tant és convergent. $\square$

En algunes parts del curs ens serà útil el següent concepte. Diem que un conjunt K és *compacte per successions* si tota successió (x^n) de punts de K té una parcial convergent a un punt de K.

Teorema. *Un conjunt K és compacte per successions si i només si és tancat i acotat.*

Demostració. Suposem que K és tancat i acotat i sigui (x^n) una successió de punts de K. Pel teorema anterior, té una parcial convergent a un punt x; però sent K tancat, serà $x \in K$.

Recíprocament, suposem que tota successió de punts de K té una parcial convergent a un punt de K, i demostrem que K ha de ser tancat i acotat per reducció a l'absurd. Si no fos acotat, per a cada n hi haurà $x^n \in K$ amb $\|x^n\| > n$. És evident que x^n no pot tenir cap parcial convergent a un punt de K. Suposem ara que $x \in \overline{K}$, és a dir, hi ha una successió (x^n) de punts d'K que convergeix a x. La successió (x^n) tindrà una successió parcial (x^{n_k}) convergent a un punt $P \in K$, per hipòtesi. Però essent parcial de (x^n), té límit x; per tant $x = P \in K$. $\square$

Existeix una altra caracterització diferent dels conjunts compactes en termes de *recobriments oberts*. Un recobriment obert d'un conjunt A és una col·lecció U_j d'oberts tals $A \subset \cup U_j$.

Un conjunt K s'anomena *compacte* si tot recobriment obert de K admet un subrecobriment finit; és a dir, si oberts U_j cobreixen K, un nombre finit d'ells també cobreix K. Podem enunciar aquesta propietat només en termes de subconjunts de K; primer introduim una nova definició. Un subconjunt $F \subset K$ s'anomena tancat en K si tot punt de K que sigui adherent a F és de F, és a dir, $K \cap \overline{F} = F$; això és el mateix que dir que F és de la forma $F = K \cap G$ on G és tancat. Aleshores, si U_j és obert, $G_j = U_j^c$ és tancat, $F_j = G_j \cap K$ és un tancat de K. Que els U_j cobreixin K és equivalent a

$\cap_j F_j = \emptyset$. Que un nombre finit dels U_j cobreixin K equival a dir que un nombre finit dels F_j són disjunts. Per tant K és compacte si i només si per a tota col·lecció F_j de tancats de K amb intersecció buida, un nombre finit d'ells ja tenen intersecció buida. Equivalentment, K és compacte si $\cap_j F_j \neq \emptyset$ per a tota col·lecció F_j de tancats de K que compleixi $\cap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ per a tot $J \subset I$ finit.

Ens proposem provar que un conjunt és compacte si i només si és compacte per successions. Primer veurem que tots els recobriments els podem suposar numerables.

Teorema. *Si (U_j) és una familia arbitrària d'oberts, una subfamilia numerable (U_{j_n}) té la mateixa unió.*

Demostració. Considerem la familia de totes les boles amb centre de coordenades racionals i radi racional; aquesta familia és numerable, per tant podem fer una llista $(B_k), k \in \mathbb{N}$. Si $x \in U_j$, hi ha $B(x,r) \subset U_j$. Hi ha una bola $B(y,q)$ de centre i radi racionals tal que $x \in B(y,q) \subset B(x,r) \subset U_j$: en efecte, prenem primer $y \in \mathbb{Q}^d$ tal que $|x-y| < \frac{r}{4}$ i després un racional $q, \frac{r}{2} < q < \frac{r}{4}$. Per tant podem associar a tot $x \in \cup U_j$ un $k(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{k(x)}$, i tal que $B_{k(x)}$ està inclòs en un dels U_j, i ja. $\square$

Teorema. *Són equivalents, per a un conjunt K no buit de $\mathbb{R}^d$:*

1. *K és tancat i acotat.*

2. *K és compacte per successions.*

3. *Si F_n és una successió decreixent, $F_{n+1} \subset F_n$, de subconjunts tancats de K no buits, llavors $\cap_n F_n$ no és buit. Equivalentment, si $\cap_n F_n$ és buit, algun dels F_n també ho és.*

4. *K és compacte.*

Demostració. Ja sabem que 1,2 són equivalents. Veiem que 2 implica 3. Suposem que K és compacte per successions i que F_n és com a l'enunciat. Formem una successió escollint $x^n \in F_n$, per tant $x_m \in F_n, m > n$. Aquesta successió té una parcial convergent a un punt $x \in K$; però com que x és el limit de la cua $(x^m), m > n$, i F_n és tancat en K, hom té $x \in F_n$ per a cada n.

Per veure que 3 implica 4, prenem un recobriment per oberts de K; pel teorema anterior, podem suposar que és un recobriment numerable (U_n); el fem creixent posant $V_n = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Llavors $F_n = K \cap V_n^c$ són conjunts tancats de K amb intersecció buida. Per tant, algun F_n és buit, la qual cosa vol dir que $K \subset V_n$ per algun n.

Finalment veiem que 4 implica 1. La col·lecció de boles $B(0, n)$ cobreix K; si val 4, una familia finita de boles cobreix K i per tant K és acotat. Veiem ara que K és tancat. Si no ho fos, hi ha $x \in \overline{K}, x \notin K$; considerem llavors les boles $B(y, |x-y|/2), y \in K$, que formen un recobriment obert de K. Hi haurà un subrecobriment finit, és a dir, un nombre finit de boles $B(y_j, |x-y_j|/2)$ cobreixen K. Posem $r = \min\{|x-y_j|/2\}$; aleshores, si $y \in K$ és a $B(y_j, |x-y_j|/2)$, tindrem

$$|x-y_j| \leq |x-y| + |y-y_j| \leq |x-y| + \frac{1}{2}|x-y_j|,$$

d'on $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x-y_j| \geq r$ per a tot $y \in K$, és a dir, la bola $B(x, r)$ no conté cap punt de K, en contradicció amb el fet que $x \in \overline{K}$.

□

El nombre que apareix al teorema següent s'anomena un nombre de Lebesgue del recobriment.

Teorema. *Donat un recobriment obert (U_j) d'un compacte K, hi ha $\varepsilon > 0$ tal que tota bola $B(x, \varepsilon), x \in K$ està inclosa en un dels U_j.*

Demostració. Per a cada $y \in K$ triem $r(y) > 0$ i $j(y)$ tal que $B(y, r(y)) \subset U_{r(y)}$. La familia de boles $B(y, r(y)/2), y \in K$ cobreix K, per tant un nombre finit $B(y_j, r(y_j)/2)$ també. Aleshores $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{r(y_j)\}$ té la propietat desitjada: tot $x \in K$ està en una $B(y_j, r(y_j)/2$, i aleshores $B(x, \varepsilon) \subset B(y_j, r(y_j)) \subset U_{r(y_j)}$. □

6 Funcions de diverses variables, conjunts de nivell

Una funció f real de d variables reals és una regla que assigna un nombre real $f(P)$ a cada punt P de $\mathbb{R}^d$ o d'un cert subconjunt A, que s'anomena el domini de definició de f. El valor $f(P)$ pot venir donat per una fórmula en termes de les coordenades $P = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ en un sistema de referència cartesià o bé utilitzant qualsevol altre sistema de coordenades. Evidentment l'expressió de f canviarà en cada sistema de coordenades. Per exemple, en el pla, si $P = (x, y)$, la funció $f(P) = x$ s'escriu $f(P) = r \cos \theta$ en coordenades polars.

A part de les funcions constants, les funcions més senzilles són les funcions lineals

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_d) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d.$$

Després podem considerar les funcions quadràtiques, polinomis d'ordre dos en les variables cartesianes

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{d} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{d} b_i x_i + d.$$

Una funció pot venir donada no per una fórmula sino per una observació empírica. Per exemple, $f(x, y)$ pot ser l'alçada en metres sobre el nivell del mar del punt de coordenades geogràfiques (latitud i longitud) (x, y); o bé $f(x, y, z)$ pot ser el valor de la pressió atmosfèrica en el punt a alçada z sobre el punt de coordenades geogràfiques (x, y).

Un cas particularment important en les aplicacions és quan una de les variables independents és el temps t. En aquest casos utilitzem la notació $u(x, t), u(x, y, t), u(x, y, z, t)$ segons que la variable espaial sigui 1- dimensional, 2-dimensional o 3-dimensional. Gairebé mai l'expressió de f és explícita en aquesta casos, sinó novament de tipus heurístic. Hi ha un parell d'exemples que són particularment importants.

El primer és *la corda vibrant*; suposem que tenim una corda tensada, per exemple la d'un violí, de longitud L, i que en l'instant $t = 0$ li fem agafar el perfil donat per una funció $f_0(x), 0 \leq x \leq L$; és a dir, $(x, f_0(x))$ és la posició inicial, o dit d'una altra manera, $f_0(x)$ és l'elongació vertical respecte de la posició d'equilibri. Aleshores la deixem anar i la corda comença a vibrar; llavors definim $u(x, t) =$ elóngació vertical a l'instant t del punt que a l'instant inicial estava a $(x, f_0(x))$. Dit d'una altra manera, la posició de la corda a l'instant t és el gràfic de la funció $u(x, t), 0 \leq x \leq L$. La funció $u(x, t)$ compleix doncs que $u(x, 0) = f_0(x)$ i sobre una base intuïtiva, aquesta posició inicial determina completament $u(x, t)$ en un instant posterior.

Un segon exemple és la difució de la calor. Suposem que tenim una barra metàlica de longitud L, i que $f_0(x), 0 \leq x \leq L$ indica la distribució inicial de temperatures, per exemple, després d'escalfar un extrem amb un misto. A l'instant $t = 0$ traiem el misto i ens preguntem per la temperatura $u(x, t)$ del punt d'abscisa x a l'instant t. Novament, sobre una base intuïtiva, la distribució inicial de temperatura $f_0(x) = u(x, 0)$ determina $u(x, t)$ en tot instant posterior t.

En dimensió $d = 1$, habitualment visualitzem f mitjançant el *gràfic* de f, és a dir, el conjunt de punts $(x, f(x))$ en el pla, que designem $y = f(x)$. De la mateixa forma, si tenim una funció f de dues variables (x, y) el gràfic de f és el conjunt de punts de l'espai $(x, y, f(x, y))$, conjunt que designem $z = f(x, y)$.

Una altra forma de visualitzar gràficament una funció f de d variables és mitjançant els *conjunts de nivell*. Aquests són els conjunts

$$L_c = \{x : f(x) = c\}.$$

Evidentment, dos conjunts de nivell corresponents a valors diferents de c són disjunts. La seva unió és tot el domini de definció de f, perquè cada punt P pertany a L_c amb $c = f(P)$. Quan $d = 3$ parlem de *superficies de nivell* i quan $d = 2$ de *corbes de nivell*. Per exemple, quan f és alçada, les corbes de nivell són les representades als mapes topogràfics.

Per ser més precisos, anomenarem *superficie de* $\mathbb{R}^3$ (definida en forma contínua) tot conjunt de punts

$$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\},$$

tal que a S hi hagi dos graus de llibertat. Intuïtivament, a $\mathbb{R}^3$ hi tenim tres graus de llibertat, i en posar un lligam $f(x, y, z) = c$ ens en queden dos d'efectius. La forma precisa d'enunciar que a S hi ha dos graus de llibertat és que per a tot punt $P \in S$ hi ha una bola $B(P, r)$ tal que $S \cap B(P, r)$ és parametritzable mitjançant dos paràmetres s, t, la qual cosa vol dir que hi ha tres funcions $h_1(s, t), h_2(s, t), h_3(s, t)$ tals que $(x, y, z) \in S \cap B(P, r)$ si i només si $x = h_1(s, t), y = h_2(s, t), z = h_3(s, t)$ per a uns valors únics de s, t que anomenem els paràmetres o coordenades de (x, y, z). Habitualment aconseguirem la parametrització globalment, com passa per exemple quan S és un pla; per simplificar la notació utilitzem

$$x(s, t), y(s, t), z(s, t)$$

per designar la parametrització. També diem que S està donada en forma paramètrica per aquestes tres equacions. Per exemple,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

no defineix cap superficie si $r = 0$, però si $r > 0$ defineix l'esfera de centre l'origen i radi r, que es parametritza amb dos paràmetres

$$x = r \sin\phi \cos\theta, y = r \sin\phi \sin\theta, z = r \cos\phi.$$

Si $g(x, y)$ és una funció de dues variables el gràfic és la superficie regular de $\mathbb{R}^3$ que de forma continua està donada per

$$f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0,$$

i de forma paramètrica pels dos paràmetres x, y amb parametrització global $x = x, y = y, z = g(x, y)$.

De la mateixa forma, anomenarem *corba del pla* (definida en forma contínua) tot conjunt de punts

$$\Gamma = \{(x, y) : f(x, y) = c\},$$

tal que a Γ hi hagi un sol grau de llibertat. Això vol dir que localment Γ és parametritzable mitjançant un paràmetre $t \in \mathbb{R}$ i dues aplicacions $x(t), y(t)$: un (x, y) és de Γ si i només si $x = x(t), y = y(t)$ per a un únic valor de t. Entre les corbes del pla hi tenim els gràfics $y = g(x)$ de funcions d'una variable, que en forma contínua és $f(x, y) = y - g(x) = 0$ i es parametritzem amb x mitjançany $x = x, y = g(x)$.

Una corba regular Γ a l'espai, definida en forma contínua, és la intersecció de dues superficies

$$\Gamma = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0\},$$

de manera que hi hagi un sol grau de llibertat: per a cada punt $(x, y, z) \in \Gamma$ hi ha un únic valor de t tal que $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Evidentment, les corbes i superficies poden venir donades utilitzant altres sistemes de coordenades; de fet, una de les utilitats dels sistemes de coordenades és que certes corbes i superficies s'hi expressen d'una forma més senzilla. Per exemple, en el pla, amb coordenades polars (r, θ), la corba descrita en forma paramètrica per $r = g(\theta)$ amb g creixent és una espiral que en les coordenades cartesianes s'escriuria

$$x = g(\theta) \cos\theta, y = g(\theta) \sin\theta.$$

A l'espai, si amb coordenades esfèriques posem $r = 1, 2\phi = \theta$ tindrem una mena d'espiral sobre l'esfera de radi 1.

Abans d'estudiar amb un cert detall les superficies de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ donades per equacions quadràtiques fem unes consideracions generals. Suposem que tenim una corba Γ al pla donada per $f(x,y)=0$. Llavors,

$$f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$$

és la superficie S de $\mathbb{R}^3$ que s'obté fent girar Γ al voltant de l'eix de les x, perquè per a un punt (x,y,z) la seva distància a l'eix de les x és $\sqrt{y^2+z^2}$ (el que un punt sigui a S o no depen nomes de x i d'aquesta distància). Si $x=h(t), y=g(t)$ és una parametrització de Γ, aleshores

$$x=h(t), y=g(t)\cos\theta, z=g(t)\sin\theta,$$

és una parametrització de S. Anàlogament, $f(\sqrt{x^2+z^2},y)=0$ és la superficie de $\mathbb{R}^3$ obtinguda fent girar Γ al voltant de l'eix de les y, amb parametrització $x=h(t)\cos\theta, y=g(t), z=h(t)\sin\theta$.

7 Les còniques de $\mathbb{R}^2$ i les quàdriques de $\mathbb{R}^3$

Després de les funcions lineals (polinomis de grau 1 en les coordenades), les funcions més senzilles són les quadràtiques o polinomis de grau dos en les coordenades. Aqui ens convé notacionalment utilitzar la notació x pels punts i $x_i, i=1,2,\cdots,x_d$ per a les coordenades. Aquestes funcions tenen tres componenents, $f=f_1+f_2+c$, on c és constant, f_2 és lineal

$$f_2(x)=\sum_i b_i x_i,$$

i f_2 és purament quadràtica o homogènea,

$$f_2(x)=\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}x_i x_j.$$

(f_2 es diu homogènea perquè $f_2(\lambda x)=\lambda^2 f_2(x)$). Si $i\neq j$ substituint a_{ij} per $\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ podem suposar que $a_{ij}=a_{ji}$. Fixem-nos que una altra forma d'escriure-ho, la més habitual, és agrupant els termes amb $i\neq j$,

$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{d} a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j.$$

Per manipular f és molt convenient utilitzar notació matricial. Utilitzem X pel vector columna de les x_i i A per designar la matriu simètrica d'entrades a_{ij}, i B per la matriu fila de les b_i. Llavors

$$f(x) = X^t AX + BX + c.$$

Si utilizem unes noves coordenades afins y_j, relacionades amb les x_i per $X = MY, Y = M^{-1}X$, llavors l'expressió de f en les noves coordenades és

$$f(y) = Y^t M^t AMY + BMY + c.$$

Veiem així que la matriu A es canvia a $M^t AM$. La pregunta natural és aleshores esbrinar si hi ha un canvi, és a dir una M, tal que $M^t AM$ sigui la més senzilla possible, per exemple diagonal, és a dir, que en els termes quadràtics no hi hagi els termes mixtes.

Això és efectivament possible, i ho podem veure en dimensió $d = 2, 3$ d'una manera elemental amb la tècnica de completar quadrats. En dimensió $d = 2$ partim de l'equació

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Primer eliminarem el terme en xy; si $A \neq 0$, escrivim

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A(x + \frac{B}{A}y)^2 + (C - \frac{B^2}{A})y^2,$$

i anàlogament si $C \neq 0$; si $A = C = 0$ posem

$$xy = \frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2).$$

En tots els casos veiem que hi ha unes noves coordenades x', y' tals que $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + B'y'^2$.

En dimensió $d = 3$ també hi ha sempre unes coordenades x', y', z' tals que

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2.$$

En efecte, suposem que un dels tres coeficients A, B, C no és zero, per exemple $A \neq 0$; llavors l'expressió anterior pot escriure's

$$A(x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z)^2 + \Phi(y, z),$$

on $\Phi(y,z)$ és quadràtica en y,z; posant $x' = x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z$ i aplicant el cas $d = 2$ a Φ acabem. Si $A = B = C = 0$ i per exemple $D \neq 0$ posem $xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2), x' = x+y, y' = x-y$ amb la qual cosa ja tenim un terme en x'^2, y'^2 i procedim com abans.

Ara bé, aquestes expressions simplificades no són úniques. Per exemple,

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy = 3(x - \frac{y}{3})^2 + \frac{8}{9}y^2 = (x+y)^2 + 2(x-y)^2.$$

Existeix però quelcom més intrínsec i que porta a expressions essencialment úniques, si ens limitem a canvis de coordenades cartesianes, és a dir amb M ortogonal, com demostra el teorema següent (tot i que el necessitem tan sols per a $d = 2,3$ el veurem en general).

Teorema. *Donada una matriu simètrica A d'ordre $d \times d$ hi ha una matriu ortogonal M tal que M^tAM és diagonal, $D(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$, amb $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Els nombres λ_i són únics i estan determinats per la matriu A.*

Demostració. Per entendre bé aquest resultat és convenient pensar a posteriori el què representen els λ_i. Pensem en A com a transformació (la que en la base canònica té matriu A). La simetria d'A vol dir en termes intrinsecs que

$$\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, A\vec{v}\rangle.$$

Dir que $M^tAM = D(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ és el mateix que dir que $M^tAM(\vec{e_i}) = \lambda_i\vec{e_i}$, i com que $M^t = M^{-1}$ és equivalent a

$$AM(\vec{e_i}) = \lambda_i M(\vec{e_i}).$$

En general, si $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, amb $\vec{u} \neq 0$, hom diu que $\vec{u}$ és un *vector propi* de *valor propi* λ. Així, $\vec{u_i} = M(\vec{e_i})$ (la i-sima columna de M) és un vector propi de valor propi λ_i. I dir que M és ortogonal és equivalent a dir que $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$ és una base ortonormal. Tot plegat, l'enunciat és equivalent a dir que si A és una transformació simètrica, hi ha una base ortonormal $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$ formada per vectors propis d' A.

Això porta a considerar els valors propis d'A. Ara bé, $\vec{u}$ és un vector propi de valor propi λ si i només si $(A - \lambda I)(\vec{u}) = 0$, per tant els valors propis són les arrels del polinomi caracteristic $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. Cada valor propi λ té associat l'espai propi $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, la dimensió del qual s'anomena la multiplicitat de λ.

Seguidament fem dues observacions: primer, si λ, μ són valors propis diferents, llavors E_λ, E_μ són subespais perpendiculars, perquè si $\vec{u} \in E_\lambda, \vec{v} \in E_\mu$, llavors utilitzant que A és simètrica

$$\lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle A\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{u},A\vec{v}\rangle = \mu\langle\vec{u},\vec{v}\rangle.$$

Segon, el mateix argument mostra que si E_λ és un espai propi, llavors el seu ortogonal $E_\lambda^\perp$ és invariant per A.

Amb tot això ja estem preparats per provar el teorema per inducció sobre d, i per a això, com veurem, és suficient provar que tota matriu simètrica té valors propis reals.

Per a $d = 2$, suposem que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

El polinomi caracteristic és $(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2$ que té discriminant $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + b^2$ positiu. Per tant hi ha o bé dos valors propis diferents, o bé $b = 0, a = c$, amb la qual cosa A ja és diagonal. En el primer cas, triant un vector unitari en cada espai propi, seran perpendiculars i ja formen una base ortonormal.

Suposem per inducció que tota transformació A que opera en un subespai de dimensió $d' < d$, simètrica, diagonalitza en una base ortonormal. Donada A simètrica d'ordre $d \times d$, provem que té un valor propi real (si fos $d = 3$, que és de fet el cas que ens interessa, això és evident perquè el polinomi característic té grau tres). De fet tots els valors propis λ són reals. Pel teorema fonamental de l'àlgebra sabem que hi ha valors propis complexos λ. Si treballem a $\mathbb{C}^d$, veiem que hi ha vectors X en principi complexos tals que $AX = \lambda X$. Si multipliquem per l'esquerra per $(\overline{X})^t$ trobem

$$(\overline{X})^t AX = \lambda\|X\|^2.$$

Ara bé, l'expressió de l'esquerra és $\sum_{ij} \overline{x_i} a_{ij} x_j$, que és real perquè $a_{ij} = a_{ji}$, i per tant també λ és real.

Un cop sabem que A té un valor propi real λ, considerem l'espai propi E_λ dins el qual triem qualsevol base ortonormal. Si E_λ és tot ja hem acabat. Si no, considerem la restricció A' de A al perpendicular $E_\lambda^\perp$, que té dimensió $d' < d$ i apliquem la hipòtesi d'inducció.

$\square$

En les coordenades Y definides per $X = MY$, l'expressió quadràtica X^tAX es transforma en $\sum_i \lambda_i y_i^2$ (on cada λ_i pot apareixer repetit uns quants cops). Ho podem pensar de dues maneres equivalents: que fem un canvi de coordenades donat per $X = MY$ i llavors la nostra quàdrica (que no es mou) té l'expressió més senzilla, o bé que fem un moviment rigid $TX = Y$ donat per la matriu $M^t, Y = M^tX$ i que aquesta transformació T envia la nostra quàdrica a la quàdrica d'equació $\sum_i \lambda_i y_i^2 = 0$.

Considerem ara en el pla les corbes donades per equacions quadràtiques, les còniques. Pel teorema anterior podem suposar que l'equació és, en unes certes coordenades cartesianes, de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

Si $A \neq 0$, escrivim $Ax^2 + Cx = A(x + \frac{C}{2A})^2 + E - \frac{C^2}{4A}$ i fem el canvi $x' = x + \frac{C}{2A}$; anàlogament si $B \neq 0$. ës a dir, eliminem el terme lineal si el corresponent terme quadràtic no és zero. Amb això, arribem a les següents formes canòniques:

$$Ax^2 + By^2 + E = 0, Ax^2 + Dy + E = 0.$$

En el primer cas es tracta d'una elipse si A, B tenen el mateix signe (llavors E ha de tenir el signe contrari, altrament el conjunt és buit), i una hiperbola si A, B tenen signes diferents. El segon cas es tracta d'una paràbola.

Considerem ara a l'espai les superficies donades per equacions quadràtiques, que pel teorema anterior podem ja suposar de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Exactament igual, si el terme en x^2 hi és, podem fer desapareixer el terme en x, etc. Arribem aleshores a les següents formes canòniques, mòdul canvis de coordenades cartesianes

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + G = 0, ABC \neq 0$$
$$Ax^2 + By^2 + Fz + G = 0, AB \neq 0$$
$$Ax^2 + Ey + Fz + G = 0, A \neq 0$$

En el primer cas, si A, B, C tenen el mateix signe (i G el signe oposat) es tracta d'elipsoïdes. Habitualment s'escriuen sota la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si hi ha dos del mateix signe, podem suposar $A, B > 0, C < 0$; en aquest cas, si $G < 0$ es tracta d'un hiperboloide d'un full, que s'acostuma a escriure

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si $G > 0$ d'un hiperboloide de dos fulls, que escrivim

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{z^2}{c^2}.$$

Si $G = 0$ d'un con, que escrivim

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

En el segon cas, si $F = 0$ es tracta d' un cilindre eliptic si A, B són del mateix signe,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

i d'un cilindre hiperbòlic si A, B tenen signe oposat.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si $F \neq 0$ podem suposar $G = 0$ i es tracta d'un paraboloide elíptic si A, B tenen el mateix signe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

i d'un paraboloide hiperbòlic si A, B tenen signe oposat

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

En el tercer cas, si $E = F = 0$ es tracta de dos plans paralels, $x = \pm\sqrt{-\frac{G}{A}}$, en diem una quàdrica degenerada. Si E o F no són zero, posem E, llavors podem suposar $F = G = 0$ i es tracta d'un cilindre paràbolic

$$y = cx^2.$$

Expliquem la diferència entre els hiperboloides d'un full i els de dos fulls. Considerem l'equació d'un hiperboloide d'un full en el cas $A = B$ per exemple

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1.$$

Es tracta de la superficie que s'obte fent girar al voltant de l'eix de les z la corba en el pla zx donada per $x^2 = z^2 + 1$, que és una hiperbola que té una branca en $z > 0$ i una altra en $z < 0$, disjuntes; quant aquestes dues branques giren al voltant de l'eix de les z llavors es conecten i generen un objecte d'una sola peça, d'un sol full. En canvi, considerem l'equació d'un hiperboloide de dos fulls, per exemple

$$x^2 + y^2 + 1 = z^2.$$

També és la superficie que s'obté si fem girar al voltant de l'eix de les z l'hiperbola en el pla zx donada per $x^2 + 1 = z^2$. Ara les dues branques d'aquesta hiperbola estan separades per l'eix de les x, i en girar al voltant de l'eix de les z cadascuna genera per separat un full.

8 Longituds, àrees i volums.

De les nocions de longitud, àrea i volum en tenim una idea i percepció intuitiva. Ara bé, què és i com es defineix exactament la longitud d'un conjunt $A \subset \mathbb{R}$, l'area d'un conjunt $A \subset \mathbb{R}^2$, el volum d'un cos $A \subset \mathbb{R}^3$? Com es defineix la longitud d'una corba o l'àrea d'una superficie?

En aquest curs donarem resposta a alguna d'aquestes preguntes, en alguns casos parcial. Ja podem avançar, però, que la questió de definir longitud, àrea, volum etc. (en general en diem la mesura d-dimensional d'un $A \subset \mathbb{R}^d$) és quelcom delicat relacionat de fet amb el sistema axiomàtic en el que les matemàtiques es basin. En el sistema comunment acceptat que utilitzem nosaltres, que és el de Zermelo-Franklin, resulta que no es pot parlar amb propietat de la mesura de qualsevol conjunt, sinó només d'alguns conjunts que s'anomenen *mesurables*. És a dir, hi ha conjunts no mesurables. Aquest fet, i en general el desenvolupament del que s'anomena la *teoría de la mesura*, es fa avui en el marc de la teoría de Lebesgue de la mesura i la integració.

Acceptarem com a axioma el fet que la mesura d-dimensional d'un rectangle és el producte de les longituds de les seves arestes. Aqui, entenem per rectangle de $\mathbb{R}^d$ el conjunt determinat per un punt x i d vectors dos a dos ortogonals $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$

$$R = R(x, \vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}) = \{y : y - x = \sum_i t_i \vec{u_i}, t_i \geq 0\}.$$

Designem per $m_d(R) = \|\vec{u_1}\| \cdots \|\vec{u_d}\|$ la mesura d-dimensional de R. Quant els vectors són linealment independents però no necessàriament perpendiculars dos a dos parlem de *paralelepipeds*. Quina és la mesura d-dimensional d'un paralelepiped? En dimensió dos, el paralelepiped determinat per dos vectors linealment independents $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ és la longitud de la base, pensem que és $\|\vec{v_1}\|$ per l'alçada. Ara bé, com que la projecció de $\vec{v_2}$ sobre la recta de vector director $\vec{v_1}$ medeix $\|\vec{v_2}\||\cos\theta|$, on θ és l'angle que formen, aquesta alçada és $\|\vec{v_2}\||\sin\theta|$. De la mateixa forma, el volum d'un paralelepiped a l'espai determinat per tres vectors linealment independents $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ és el producte de l'area de la base, que és un paralelepiped 2-dimensional, per l'alçada. Acceptem doncs que si $P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d})$ designa el paralelepiped determinat per d vectors linealment independents, llavors

$$m_d(P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d})) = m_{d-1}(P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_{d-1}})h,$$

on h és l'alçada respecte el subespai generat per $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_{d-1}}$.

També, si tenim k vectors linealment independents a $\mathbb{R}^d, k < d$ continuem designant $P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k})$ el paralelepiped

$$P = P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k}) = \{y : y = \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u_i}, t_i \geq 0\},$$

i per $m_k(P)$ la seva mesura k-dimensional en el subespai de k dimemsions que generen.

Teorema. *Si A és la matriu $d \times k$ que té els vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k}$ com a vectors columna (expressats en la base canònica o qualsevol base ortonormal), llavors*

$$m_k(P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k}))^2 = \det A^t A.$$

En particular, si $k = d$, $m_d(P(\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d})) = |\det A|$.

Demostració. Demostrem primer el cas $k = d$ per inducció. Per a $d = 2$ l'àrea és $a = \|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\||\sin\theta|$; posem $A = (a_{ij})$, és a dir, $\vec{u_j} = a_{1j}\vec{e_1} + a_{2j}\vec{e_2}, j = 1, 2$. Llavors

$$a^2 = \|\vec{u_1}\|^2\|\vec{u_2}\|^2\sin^2\theta = \|\vec{u_1}\|^2\|\vec{u_2}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\vec{u_1}\|^2\|\vec{u_2}\|^2 - |\langle\vec{u_1}, \vec{u_2}\rangle|^2$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2.$$

Suposat cert per a $d-1$, sigui T una transformació ortogonal amb matriu B que transformi el subespai generat per $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_{d-1}}$ en $\mathbb{R}^{d-1}$, és a dir, la matriu BA té la darrera fila de la forma $(0, \cdots, 0, c)$ i a sobre els zeros la matriu A' que té com a vectors columna els vectors $T\vec{u_1}, \cdots, T(\vec{u_{d-1}}$ mirats a $\mathbb{R}^{d-1}$. Sigui P' el paralelepiped determinat pel vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_{d-1}}$; llavors per la hipòtesi d'inducció

$$m_d(P) = m_d(T(P)) = m_{d-1}(T(P'))|h = |\det A'|h,$$

on h és l'alçada que té $T(P)$ sobre $\mathbb{R}^{d-1}$, que és c, la darrera component de $T\vec{u_d}$. Per tant

$$m_d(P) = |\det A'||c| = |\det BA| = |\det A|,$$

perquè $|\det B| = 1$.

Ara demostrem el cas $k < d$. Prenem una base ortonormal $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ del subespai generat pels $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k}$; cada $\vec{u_j} = \sum_i b_{ij}\vec{v_i}$. Pel que acabem de veure, $m_k(P) = |\det B|$. Però l'entrada (i,j) de la matriu A^tA és el producte escalar $\langle \vec{u_i}, \vec{u_j} \rangle$. Si calculem aquest mateix producte escalar utilitzant $\vec{u_j} = \sum_i b_{ij}\vec{v_i}$ i el fet que els $\vec{v_j}$ són ortogonals, veiem que $A^tA = B^tB$, d'on $\det(A^tA) = (\det B)^2 = m_k(P)^2$.

$\square$

La matriu A^tA, d'ordre $k \times k$, s'anomena la matriu de Gram dels vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k}$.

En el cas particular $k = d-1$ es pot introduir un concepte relacionat. Donats $d-1$ vectors $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_{d-1}}$ a $\mathbb{R}^d$ definim el seu *producte vectorial* $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}$ com el vector que en la base canònica té la següent expressió, obtinguda desenvolupant per la darrera columna el determinant de la matriu M que s'obté completant la matriu A amb la columna $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_d}$.

Evidentment, aquest vector serà zero si els vectors són linealment dependents. Mirem que ès en cas contrari. Fixem-nos que per a qualsevol vector $\vec{v}$, el producte escalar $\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}, v \rangle$ és el determinant de la matriu que s'obté cpmpletant A amb la columna que té les components de $\vec{v}$ en la base canònica. En particular, $\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}, u_i \rangle, i = 1, 2, \cdots, d-1$ coincideix amb el determinant de la matriu que s'obté completant A amb la seva i-sima columna, matriu que tindrà dues columnes iguals i per tant amb determinant zero. És a dir, el producte vectorial $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}$ és perpendicular a cadascun d'ells, i per tant també al subespai de dimensió $d-1$ generat pels vectors. Aplicat a $v = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}$ veiem que $\|u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}\|^2$ és la suma dels quadrats dels d menors d'ordre $d-1$ de la matriu A, per tant $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}$ és diferent de zero si són linealment independents. Això significa que $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}$ és un vector no nul perpendicular al subespai que generen. Si ara considerem el vector unitari

$$\vec{u} = \frac{u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}}{\|u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}\|},$$

tindrem utilitzant el teorema anterior

$$m_{d-1}(P) = |\det(u_1, u_2, \cdots, u_{d-1}, v) = \langle u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}, v\rangle = \|u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}\|.$$

En definitiva, si els vectors són linealment independents, $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{d-1}$ és un vector perpendicular a tots ells de longitud igual al volum $(d-1)$-dimensional del paralelepiped que determinen.

Quan $d = 3$ la direcció de $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ és la determinada per la regla de la mà dreta: si els dits els corbem de $\vec{u_1}$ cap $\vec{u_2}$, (és a dir, l'index apunta en la direcció de $\vec{u_1}$ i els altres dits menors en la direcció de $\vec{u_2}$, llavors $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ té la direcció del polze.

La teoria d'integració de Riemann en una variable ens permet definir àrees i longituds en alguns casos. En primer lloc, per la mateixa definició d'integral de Riemann, si f és una funció positiva integrable Riemann en $[a, b]$, la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

es pren com a definició de l'àrea del subgraf $A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Així mateix, la longitud de la corba $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), a \leq x \leq b\}$ es defineix com

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

El cos que s'obté fent girar A al voltant de l'eix de les x té volum

$$\pi \int_a^b f(x)^2\, dx,$$

mentre que si $0 < a < b$ i el fem girar al voltant de l'eix de les y té volum

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

La superficie S que s'obté fent girar Γ al voltant de l'eix de les x té àrea definida per

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

mentre que si la fem girar al voltant de l'eix de les y té àrea

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Amb aquestes fórmules per a cossos de revolució és possible calcular l'area de l'esfera de radi r, $4\pi r^2$, el volum d'una bola de radi r, $\frac{4}{3}\pi r^3$, etc.

En aquest curs avançarem una mica i veurem com definir el volum d-dimensional de qualsevol subconjunt $A \subset \mathbb{R}^d$ raonable, i la longitud de corbes i superficies generals.

9 Límits

En aquest apartat designem $B'(a,r) = \{x : 0 < |x-a| < r\}$. Suposem que f està definida en $B'(a,r)$ (per tant no necessàriament en a) a valors en $\mathbb{R}^m$. La idea de límit en a és la mateixa que en una variable: diem que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ si $\|x - a\| < \delta$. Intuïtivament, diem que $f(x)$ és arbitràriament proper (aquest és el sentit del "per a tot ε) a l quan x s'acosta a a.

Més en general, si f està definida en un conjunt general $A \subset \mathbb{R}^d$ i a és un punt d'acumulació d'A (la qual cosa vol dir que podem acostar-nos a a tant com vulguem mantenint-nos dins A), diem que $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = l$ si per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ si $x \in A$ i $\|x - a\| < \delta$.

Com que totes les normes són equivalents, aquesta noció de convergència és independent de la norma i distància que utilitzem, és intrínseca a $\mathbb{R}^d$.

A l'hora d'analitzar aquest concepte, el primer que veiem és que podem suposar $m = 1$; això és perquè si $f_j, j = 1, \cdots, m$ són les funcions components de f, és evident que f té límit $l = (l_1, \cdots, l_m)$ si i només si f_j té límit l_j. També és evident que el limit de la suma és la suma de límits , etc. En conseqüència, si f està definida per una expressió $E(x)$ en termes de funcions elementals, hom té $\lim_{x\to a} f(x) = E(a)$ en tots els punts a on $E(a)$ té sentit.

Per tant suposem $m = 1$ i suposem f definida en $B'(a,r)$ per simplificar. El cas $d > 1$ presenta algunes diferències envers el cas $d = 1$. En dimensió

$d = 1$ la variable x només pot acostar-se a a per la dreta o per l'esquerra, i per això parlem de límits laterals. En dimensió $d > 1$, la variable x pot acostar-se a a d'una infinitat de maneres: pot seguir una semirecta d'origen a, o en general mantenirse dins qualsevol conjunt B que tingui a com a punt d'acumulació. Si el límit ha d'existir i ser l vol dir que independentment de com x s'acosta a a $f(x)$ s'ha d'acostar a l. Com que hi ha infinites maneres d'acostar-se, en un cert sentit l'existència de límit quan $d > 1$ és quelcom més ric.

Una altra forma d'expressar aquesta idea és utilitzar successions: és immediat veure que $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = l$ si i només si per a tota successió (x^n) de punts d'A convergent a a, hom té $f(x_n) \to f(a)$

Un cas quan no cal cap anàlisi és quan

$$|f(x) - l| \leq \phi(\|x - a\|),$$

on ϕ és una funció d'una variable $t > 0$. Si $\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0$, llavors $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Per exemple, en el pla, i amb la notació (x, y) pels punts

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$$

té límit zero en l'origen: utilitzant coordenades polars tenim $f(x, y) = r^2 \cos^4\theta + r\sin^3\theta$, per tant $|f(x, y)| \leq r^2 + r$.

Aquest exemple també ens ensenya que pot ser útil treballar en unes coordenades diferents de les cartesianes.

Imitant els límits laterals, per a cada vector u unitari podem acostar-nos a a a través de la semirecta d'origen a i vector unitari u: $x = a + tu, t > 0$. Llavors si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, tots aquests límits han de ser l, dits d'una altra manera, si el límit canvia amb u, no hi ha limit. Per exemple, considerem en el pla

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Al llarga de la semirecta $y = mx$ la funció és constantment $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, per tant té límit aquest valor, i com que depen de m no existeix el limits de f en $(0, 0)$.

Això no vol dir que si tots els limits u-direccionals existeixen i són iguals a l el límit sigui l. Per exemple, si definim

$$f(x, y) = \phi(\frac{x}{y^2}), y \neq 0, f(x, 0) = 0,$$

on $\phi(t)$ és qualsevol funció d'una variable $t \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t\to\infty}\phi(t) = 0$, tindrem que tots els límits u-direccionals són zero, però la funció no té límit zero a l'origen perquè si ens hi acostem al llarg de la paràbola $x = cy^2$ la funció és constant a $\phi(c)$ que canvia amb c.

Sembla natural intentar resoldre un límit d'una funció de dues variables $f(x, y)$ en (a, b) mitjançant un dels *límit iterats*

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)), \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y))$$

L'existència del primer límit iterat significa que $\lim_{x\to a} f(x, y)$ existeix per a yn proper a b, i si designem per $\phi(y)$ aquest límit, que $lim_{y\to b}\phi(y)$ existeix. És immediat provar que si $\lim_{x\to a, y\to b} f(x, y)$ existeix i té sentit i existeix un límit iterat, llavors han de ser iguals. En particular, si els dos límits iterats existeixen i són diferents, no hi ha límit. Aquest és el cas per exemple amb

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4},$$

a l'origen. Tenim

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}) = \lim_{x\to 0} 1 = 1, \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Però l'existència del limit doble no implica l'existència del límit iterat. Per exemple,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\frac{1}{y} = 0,$$

però trivialment no existeix $\lim_{y\to 0} x \sin\frac{1}{y}$ si $x \neq 0$. Tampoc l'existència i igualtat dels limits iterats implica l'existència del límit doble. Per exemple, $\frac{xy}{x^2+y^2}$ té els dos límits iterats en $(0, 0)$ iguals a zero, però no té límit en zero. La propietat que cal afegir a l'existència dels límits iterats per tal que impliqui l'existència del límit és la convergència uniforme, que aqui no tractarem.

10 Continuïtat

Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^d$ i $a \in A$ no és un punt aïllat d'A, hom diu que f és contínua en a si $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = f(a)$, és a dir, per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ si $x \in A, \|x - a\| < \delta$. Com abans, això és el mateix que dir que cada funció component de f és contínua en a i també equivalent a dir que per a tota successió de punts $(x^n), x^n \in A$ convergent a a hom té $f(x_n) \to f(a)$. És evident que si f és contínua en a i g ho és en $f(a)$, aleshores la composició $g(f(x))$ és contínua en a.

Si $A' = A$ i f és contínua en tots els punts d'A diem que f és contínua en A. Evidentement, la suma, producte etc. de funcions contínues també ho és en els punts on aquestes operacions tenen sentit. Si tenim una expressió $E(x)$ en termes de les coordenades cartesianes x_i de x i funcions elementals, $E(x)$ és contínua en tots els punts a on $E(a)$ té sentit (que no dividim per zero, que no prenguem logaritme de quelcom nul o negatiu, etc.). Els punts a on E no té sentit són habitualment aïllats; si existeix $\lim_{x\to a} E(x) = l$, donant el valor l en a tenim definida una funció contínua arreu. Això s'anomena una discontinuïtat evitable, per exemple $\frac{\sin xy}{xy}$ és contínua en tot el pla.

Passem ara a estudiar les relacions entre compacitat i continuïtat.

Proposició. *Sigui $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un compacte K de $\mathbb{R}^d$. Aleshores f té un màxim i un mínim absoluts en K, és a dir, hi ha (almenys) un punt $a \in K$ i (almenys) un punt $b \in K$ tals que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), x \in K.$$

Demostració. La demostració és la mateixa que per al cas $d = 1$ i K un interval tancat.

Primer provem que f està acotada superiorment. Si no ho fos, per a cada $n \in \mathbb{N}$ hi hauria $x^n \in K$ amb $f(x^n) > n$. Com que K és compacte, hi ha una subsuccessió (x^{n_k}) convergent a un punt $c \in K$. Aleshores, d'una banda tenim que $f(x^{n_k}) \to f(c)$, per la continuïtat de f en c, i d'altra banda tenim que $f(x^{n_k}) > n_k$ tendeix a infinit, que és una contradicció.

Per tant té sentit considerar $M = \sup_{x\in K} f(x)$, i cal veure que aquest suprem és un màxim. Per definició, per a cada n hi ha $x^n \in K$ amb $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, de manera que $f(x^n) \to M$. La successió (x^n) té una parcial (x^{n_k}) convergent a un punt $a \in K$ i per la continuïtat de f en a tenim que $f(x^{n_k}) \to f(a)$. Però essent parcial de $f(x^n)$ té límit M, per tant $f(a) = M$.

El mateix raonament el podem fer amb l'infim i el mínim. $\square$

La versió general del resultat anterior, pel cas $m \geq 1$, amb la mateixa prova, és

Proposició. *Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és una funció contínua en un compacte, la imatge $f(K)$ és un compacte de $\mathbb{R}^m$.*

Ara podem provar que totes les normes són equivalents a $\mathbb{R}^d$.

Teorema. *Si q_1, q_2 són dues normes a $\mathbb{R}^d$, hi ha dues constants $m, M > 0$ tals que*

$$m \leq \frac{q_1(x)}{q_2(x)} \leq M, x \neq 0.$$

Demostració. És suficient provar que qualsevol norma $q(x)$ és equivalent a la norma euclidea $\|x\|$. Primer provem que $q(x) \leq M\|x\|$ per a una certa constant M. Si $e_1, \cdots, e_d$ és la base canònica, $x = \sum_i x_i e_i$, aleshores utilitzant les propietats de norma

$$q(x) = q(\sum_i x_i e_i) \leq \sum_i q(x_i e_i) = \sum_i |x_i| q(e_i) \leq \|x\| \sum_i q(e_i),$$

per tant serveix $M = \sum_i q(e_i)$. Ara, novament per les propietats de norma tenim

$$|q(x) - q(y)| \leq q(x - y) \leq M\|x - y\|,$$

que demostra que q és contínua.Com que q és contínua i l'esfera unitat $\{x : \|x\| = 1\}$ és un conjunt compacte, q hi té un mínim m no nul, és a dir

$$q(x) \geq m > 0, \|x\| = 1.$$

Si $x \neq 0$, aplicant això a $x/\|x\|$ trobem que $q(x) \geq m\|x\|$. □

La mateixa demostració mostra que a la definició de norma d'una transformació lineal,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

aquest suprem s'atany i es tracta doncs d'un màxim

$$\|T\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$