<u>MECÁNICA CLÁSICA</u>

Hoja de Problemas No. 1

Problema 1

Una masa m, inicialmente en reposo, cae verticalmente. Además de la gravedad (g constante), hay una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad y opuesta a ella $F = -\alpha m v$.

Hallad $v(t), x(t)$ y demostrad que el límite de este movimiento, cuando el rozamiento tiende a cero, es la caída libre.

Problema 2

Obtened la solución general del movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza repulsiva lineal $F = Kx$ (K constante positiva). Demostrad que corresponde al movimiento esperado para un cuerpo cerca de un punto de equilibrio inestable.

Problema 3

Hallad los puntos de equilibrio, indicando si son estables o inestables, para la energía potencial $V(x) = C(x^3 - 3a^2x)$ donde C, a son constantes positivas.

Si una masa m se encuentra en el punto de equilibrio estable, determinad :

a) las velocidades para las cuales está atrapada en el pozo de potencial,

b) el periodo de sus pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

Problema 4

Demostrad que los siguientes movimientos son armónicos simples (indicando en cada caso las aproximaciones hechas) y obtened la frecuencia de oscilación : péndulo simple, péndulo compuesto, un prisma vertical sumergido en agua y oscilando verticalmente, una masa en un túnel diametral atravesando la Tierra.

Problema 5

Un péndulo simple consiste en una masa m suspendida de un punto fijo mediante una varilla inextensible sin peso, de longitud L. Cuando $\sin\theta \simeq \theta$, la pulsación propia es ω_0 tal que ω_0^2 =g/L , donde g es la aceleración debida a la gravedad.

Analizad el movimiento en el caso de que éste tenga lugar en un medio viscoso que produzca una fuerza resistente proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad $2m\omega_0$.

Problema 6

Calculad la frecuencia de oscilación de un circuito RCL, cuando L = 0.1 H, C = 10 μF y R = 100 Ω.

Problema 7

La función energía potencial de una masa m que se mueve en una dimensión es $V(x) = Ca^2x^2 - Cx^4$ donde a, C son constantes positivas.

Mostrad que existe un punto de equilibrio estable y determinad el periodo de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.

Problema 8

Un péndulo tiene un periodo de oscilación de 1 segundo cuando no hay rozamiento. Si se le coloca en un medio que produce rozamiento, cada amplitud de oscilación es 10 veces menor que la anterior. Calculad el nuevo periodo de oscilación.

Problema 9

Una masa m en una dimensión está sometida a una fuerza $F = -mg - kx - bv + F_0 \cos \omega t$, con $\omega^2 = 2k/m$.

a) Determina la solución estacionaria.

b) Demuestra que, para amortiguamiento pequeño, la amplitud de oscilación (régimen estacionario) vale $A \simeq (F_0/k)(1 - b^2/mk + ...)$.

Problema 10

Un oscilador armónico forzado, en su régimen estacionario, se mueve según :

$x = (F_1/md)\cos(\omega_1 t - \theta_1)$.

a) Determinad la expresión de su energía cinética.

b) Teniendo en cuenta que $d^2 = (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2$, donde γ es el coeficiente de amortiguamiento, demostrad que el valor promedio (en un periodo) de la energía cinética del oscilador es máximo cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia propia, es decir cuando $\omega_1 = \omega_0$.

MECÁNICA CLÁSICA

Hoja de Problemas No. 2

Problema 1

Sea **A** un vector arbitrario y **e** un vector unitario según una cierta dirección prefijada. Demostrad que $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\ .\ \mathbf{e})\ \mathbf{e} + \mathbf{e} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{e})$. Interpretad geométricamente cada uno de los dos términos del segundo miembro.

Problema 2

Demostrad la siguiente fórmula muy útil : $\nabla f(r) = \frac{df}{dr}\ \mathbf{n}$, donde **n** es el vector unitario en la dirección radial.

Aplicadla para evaluar : ∇r^n , $\nabla(lnr)$, $\nabla^2(lnr)$.

Problema 3

Encontrad el ángulo que forman las superficies $r^2 = 9$, $x + y + z^2 = 1$ en el punto (2,-2,1).

Problema 4

Tenemos el campo de temperaturas $T(x, y, z) = C(x^2+y^2+z^2)^3$, con C positivo. Queremos determinar la dirección en que un pequeño desplazamiento a partir de la posición inicial (1,1,0) lleva al lugar más fresco posible.

Repetid el ejercicio para una posición inicial (0,1,1) y luego para ambas posiciones con un nuevo campo de temperaturas $T(x, y, z) = C(x^2 + yz)^3$.

Problema 5

Calculad el trabajo que hace el campo de fuerzas $\mathbf{F}\ (x, y, z)$ con

$F_x = -2Kx\sin(y/a)/z$, $F_y = -Kx^2\cos(y/a)/az$, $F_z = Kx^2\sin(y/a)/z^2$

sobre una masa que se desplaza desde el punto (0,0,b) hasta el punto (a, a, a+b) a lo largo de la curva $x = y^2/a$, $z = y + b$. Si el campo es conservativo, calculad la función potencial.

Problema 6

Sea el campo **V** = x **i** + (y-x) **j** + z **k**. Calculad el flujo a través de una esfera de radio R así como la circulación a lo largo del ecuador de esta esfera.

Problema 7

Demostrad la siguiente identidad, cualquiera que sea el vector **A** :

rot rot **A** = grad div **A** - ∇^2 **A**

Problema 8

Demostrad que todo vector $\mathbf{A}$ cumple $(\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A}$ y que un vector $\mathbf{A}$ constante cumple $\nabla(\mathbf{A}.\mathbf{r}) = \mathbf{A}$.

Problema 9

Para calcular el campo gravitatorio producido por una corteza esférica (o sea una esfera hueca) en un punto P a distancia r del centro de la esfera O :

a) considerad la esfera como un conjunto de anillos en torno al eje OP.

(todo el anillo tiene el mismo ángulo polar θ y está a igual distancia s del punto P)

b) calculad el campo gravitatorio debido a un anillo.

c) integrando sobre todos los anillos, calculad el campo gravitatorio debido a la corteza esférica entera.

(el resultado es $g = GM/r^2$ si el punto P es exterior a la esfera)

(en cambio es $g = 0$ si se trata de un punto interior)

(M es la masa de la corteza esférica, G la constante de gravitación universal).

MECÁNICA CLÁSICA

Hoja de Problemas No. 3

Problema 1

Hallad, mediante el potencial efectivo, la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales alrededor del movimiento circular para una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y demostrad que es igual a la frecuencia de revolución.

Problema 2

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza central que tiene por potencial $V(r) = Kr^4$ (con K positiva). ¿ Para qué energía y momento angular la órbita será una circunferencia de radio a con centro en el origen ? ¿ Cuál es el periodo de este movimiento circular ? Si se perturba ligeramente este movimiento, ¿ cuál será el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales alrededor de $r = a$?

Problema 3

Estudiad, por el método del potencial efectivo, los tipos de movimientos posibles que corresponden a una fuerza central atractiva $F(r) = -K/r^3$ (con K positiva). Encontrad los intervalos de energías y momentos angulares para cada tipo de movimiento. Resolved la ecuación orbital (para $u = 1/r(\theta)$) y demostrad cuáles son las posibles soluciones.

Problema 4

Un cometa, que supondremos únicamente sometido a la fuerza de atracción del Sol, describe una cierta órbita. Supondremos asimismo que el Sol está fijo. En un instante dado, la distancia del cometa al Sol es $r = 2r_0$, siendo r_0 la distancia mínima del cometa al Sol a lo largo de su órbita. En ese instante, los vectores velocidad y posición, con respecto al Sol, del cometa forman un cierto ángulo α.

a) Demostrad que necesariamente se tiene $\sin^2 \alpha \geq 0.25$.

b) Determinad si la órbita es una elipse, una parábola o una rama de hipérbola, según el valor de α.

Problema 5

La distancia mínima de un cometa al Sol es la mitad del radio de la órbita terrestre (supuesta circular) y su velocidad en ese punto es doble que la velocidad de la Tierra.

a) Demostrad que la órbita del cometa es una parábola.

b) Calculad su velocidad y determinad su dirección cuando cruza la órbita terrestre.

c) Demostrad que el cometa cruza la órbita terrestre por los extremos opuestos de un diámetro y hallad el tiempo que permanece dentro de ella.

MECÁNICA CLÁSICA

Hoja de Problemas No. 3 (continuación)

Problema 6

Un cohete recorre una órbita elíptica, de perigeo R_1 y apogeo R_2 , medidos desde el centro de la Tierra. En un cierto instante, el cohete recibe un incremento de velocidad Δv y se escapa de la acción de la Tierra con una velocidad final v_0 con respecto a ésta.

Despreciando los efectos del Sol y la Luna, demostrad que Δv es mínimo si el impulso se aplica en el perigeo, paralelamente a la velocidad orbital.

Encontrad Δv en este caso, en función de los parámetros e y a de la órbita elíptica, de la aceleración g a una distancia r_1 del centro de la Tierra y de la velocidad final v_0.

Razonad la dependencia de Δv en e.

Problema 7

Un satélite artificial está describiendo una órbita circular alrededor de la Tierra, con velocidad v_0 , a una altura $2R$ sobre la superficie de la Tierra (R es el radio terrestre). Su velocidad cambia repentinamente de v_0 a v, en la misma dirección y sentido. Determinad los valores de v (en función de v_0 ; sin cálculo numérico) para los cuales :

(a) el satélite escapa de la atracción terrestre (indicad su nueva trayectoria),

(b) el satélite sigue en órbita alrededor de la Tierra (caracterizad su nueva órbita),

(c) el satélite cae sobre la superficie de la Tierra.

Problema 8

Suponiendo que las órbitas de la Tierra y de Marte son circulares, de radios R_1 , $R_2 = 1.5R_1$, calculad la velocidad mínima de salida de un cohete que va de la Tierra a Marte en órbita elíptica, el tiempo que dura el viaje y mostrad que para ir en línea recta haría falta una velocidad de salida muy superior.

Problema 9

Un cohete se mueve con velocidad inicial v_0. Encontrad la sección eficaz σ para chocar contra la Luna (de masa M y radio R_L). Suponed que la Luna está en reposo y prescindid del resto de cuerpos celestes.

Problema 10

Desde una gran distancia, se dispara un proyectil cargado de masa m , carga ze y velocidad inicial v_0 con un cierto parámetro de impacto b respecto de otra partícula de gran masa $M \gg m$ y carga Ze que está en reposo.

Calculad la distancia mínima a la cual se acercará el proyectil del blanco.

MECÁNICA CLÁSICA

Hoja de Problemas No. 4

Problema 1

Se produce un choque elástico de dos masas idénticas, una de las cuales estaba inicialmente en reposo.

a) Demostrad que después del choque las dos masas tienen direcciones perpendiculares.

b) Siendo Φ el ángulo de desviación de la masa que ya estaba en movimiento antes del choque, expresad en función de Φ la fracción de energía cinética que mantiene dicha masa después del choque.

c) Determinad el intervalo de valores posibles del ángulo Φ.

d) Explicad las situaciones correspondientes a los valores $\Phi = 0$, $\Phi = \pi/4$, $\Phi = \pi/2$.

Problema 2

Una masa m_1 con momento lineal $\vec{p}$ choca elásticamente con una masa m_2 inicialmente en reposo. Después del choque las masas m_1, m_2 tienen momentos lineales $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ respectivamente.

a) Mostrad que la conservación de la energía cinética puede expresarse $m_2(p^2 - p_1^2) = m_1 p_2^2$ **(1)** y que la conservación del momento lineal implica $p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1 cos\Phi$ **(2)** dond Φ es el ángulo de desviación de m_1 en el choque.

b) Combinando las relaciones **(1)** y **(2)**, mostrad que si $m_1 \geq m_2$, se tiene $cos\phi \geq 0$.

c) Introduciendo el valor de p_2 de **(2)** en **(1)**, obtened una relación que nos da p_1 para cada valor de Φ.

d) Como esta relación es una ecuación de segundo grado en p_1, sólo serán posibles las situaciones en las que el discriminante de esta ecuación sea positivo. Deducid de ello los valores posibles del ángulo Φ distinguiendo tres casos, según que la masa m_1 sea mayor, igual o menor que la masa m_2.

e) Comprobad que los resultados de este problema confirman los del problema anterior.

Problema 3

Un cohete se eleva (puede tomarse la aceleración de la gravedad g como constante) expulsando combustible a velocidad u con respecto al propio cohete (principio de la propulsión a chorro).

Utilizando la cantidad de movimiento total del sistema cohete + combustible, mostrad que, una vez utilizado todo el combustible, se alcanza una velocidad final :

$$V_f = V_i + u\ln(M_i/M_f) - gt$$

donde V_i es la velocidad inicial, M_i es la masa inicial (cohete + todo el combustible), M_f es la masa final (cohete completamente vacío de combustible), t es el tiempo entre el instante inicial y el final.

Problema 4

En un sistema de dos masas, M es la masa total, μ es la masa reducida, $\mathbf{R}$ es el vector posición del centro de masas, $\mathbf{r}$ es el vector posición relativa, $\mathbf{V}$ es el vector velocidad del centro de masas y $\mathbf{v}$ es el vector velocidad relativa.

a) Demostrad que la energía cinética total del sistema es $\mathrm{T} = \mathrm{M}\ \mathbf{V}^2/2 + \mu\ \mathbf{v}^2/2$.

b) Demostrad que el momento angular total del sistema es $\mathbf{L} = \mathrm{M}\ \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mu\ \mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

Problemas adicionales

Problema 5

Un proyectil se lanza con velocidad $v_0^2 = \mathrm{GM/R}$ desde la superficie de la Tierra a ángulo β respecto a la vertical. Siendo G la constante de gravitación universal, M, R la masa y el radio de la Tierra, calculad :

a) la altura que alcanza.

b) la distancia a la que cae.

c) el tiempo que tarda en caer.

MECÁNICA CLÁSICA

Hoja de Problemas No. 5

Problema 1

Escribid la energía total de dos osciladores acoplados idénticos, primero en las coordenadas x_1, x_2 y luego en coordenadas normales. Mostrad que en este segundo caso la conservación de la energía nos da directamente las frecuencias normales de vibración.

Problema 2

Para tres osciladores idénticos como los de la figura, determinad :
a) las frecuencias de los modos normales de vibración.
b) las amplitudes (relativas) en cada uno de los modos.

Problema 3

Se deja caer un cuerpo sin velocidad inicial desde una altura h.

Expresad la fuerza de Coriolis en función del tiempo, indicando las simplificaciones que es razonable efectuar.

Expresad el desplazamiento (magnitud y dirección) del punto de impacto debido a la fuerza de Coriolis previamente calculada.

Aplicación numérica : Calculad el desplazamiento si h = 400 m y si estamos a 45 grados de latitud norte donde la gravedad efectiva vale 9,8 m / s^2.

Problema 4

Demostrad que el plano de oscilación del péndulo de Foucault gira con velocidad angular (en la dirección vertical) $\omega' = -\omega\cos\theta$, donde ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra y θ la colatitud del punto en que se encuentra el péndulo.

Problemas adicionales

Problema 5

Un avión sobrevuela el Ecuador terrestre a velocidad constante v. Explicad si la aceleración de Coriolis le produce una desviación lateral, vertical, ambas o ninguna.

Indicad si existe un valor de v para el cual la aceleración de Coriolis contrarresta exactamente la aceleración centrífuga.