Laboratori d'Electromagnetisme

Sandro Barissi, Adrià Marín, Arnau Mas, Robert Prat

2018

Índex

Informe 1

Circuits RLC en sèrie

abstract

1.1 Introducció

En general, la intensitat que circula per un circuit RLC sotmès a una tensió $V(t)$ està governada per la següent equació diferencial

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{dV}{dt}, \tag{1.1}$$

on R és la resistència, L és la inductància de la bobina i C la capacitat del condensador. Podem reescriure l'equació (1.1) per trobar la llei que obeeix la tensió que cau a la resistència, V_R:

$$\frac{d^2V_R}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_R}{dt} + \frac{1}{LC}V_R = \frac{R}{L}\frac{dV}{dt}. \tag{1.2}$$

Similarment també podem obtenir la llei que governa la caiguda de tensió en la bobina

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V. \tag{1.3}$$

Observem que totes aquestes equacions són les d'un oscil·lador forçat. la solució general és la suma d'una solució particular, que rep el nom de terme estacionari, i una solució del sistema homogeni, que rep el nom de terme transitori. La forma del terme transitori depèn dels paràmetres del circuit. En concret depèn del valor del discriminant

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}.$$

Si $\Delta < 0$ el circuit està infraamortit i tenim oscil·lacions a freqüència

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \tag{1.4}$$

Si $\Delta > 0$ aleshores diem que el circuit es troba sobreamortit i no tenim oscil·lacions, només una caiguda exponencial. En el cas que $\Delta = 0$ parlem d'amortiment crític. La resistència que dóna lloca a amortiment crític rep el nom de resistència crítica i es pot calcular imposant $\Delta = 0$ i resulta

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{1.5}$$

En tots tres casos, el terme transitori va multiplicat per un factor $e^{-\lambda t}$ on $\lambda = \frac{R}{2L}$ rep el nom de constant d'amortiment. Per tant decaurà de forma exponencial, raó per la qual rep el nom de transitori. A la primera part de la pràctica analitzem un circuit en el règim transitori —i.e. abans de que el terme transitori pugui decaure significativament— i comprovarem com varia l'amortiment del circuit en funció de R.

Un cas particularment rellevant és el d'un circuit forçat amb una tensió s'entrada sinusoidal. En aquestes condicions podem observar el fenòment de ressonància, que té lloc quan la tensió d'entrada oscil·la a la freqüència característica del circuit,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1.6}$$

En aquestes condicions —i en general quan la tensió subministrada oscil·la sinusoidalment en el temps—, en el règim estacionari totes les magnituds del circuit oscil·len a la freqüència subministrada ω. L'amplitud i la diferència de fase d'aquestes oscil·lacions, però, depenen de ω. Concretament, per al cas de V_R es té que el desfasament ϕ amb V compleix

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} \tag{1.7}$$

i

$$|T_R(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \tag{1.8}$$

on $|T_R(\omega)|$ s'anomena el guany —$T_R(\omega)$ és una quantitat complexa que també conté informació sobre el desfasament, però el seu mòdul és precisament el quocient de les amplituds—.

A la segona part de la pràctica analitzarem aquest fenomen en el cas particular de la tensió de la resistència, V_R.

1.2 Mètode experimental

1.2.1 Règim transitori

En aquesta part de la pràctica s'analitzarà el comportament d'un circuit RLC en el règim transitori. Sobre un circuit amb una bobina d'inductància $L = 33\,\mathrm{mH}$, una resistència de $R = 180\,\Omega$ i un condensador de capacitat $C = 330\,\mathrm{pF}$ s'aplicarà una senyal rectangular periòdica. Amb aquests paràmetres podem determinar la resistència crítica R_C del circuit amb l'equació (1.5). El valor de R_C és $2 \times 10^4\,\Omega$, de manera que estem en condicions d'infraamortiment. Per a mesurar el període de les oscil·lacions ajustarem la freqüència de la senyal rectangular de manera que un període d'aquesta coincideixi amb 10 oscil·lacions de la tensió al condensador, que s'està mesurant amb un oscil·loscopi. D'aquesta manera, el període de la senyal és 10 vegades el període de les oscil·lacions

Per a mesurar la resistència crítica del sistema substituïm la resistència fixa per una de variable. Per a diferents valors de resistència observem comportament infraamortit i sobreamortit. La resistència que es troba a la frontera entre els dos comportaments és R_C.

1.2.2 Règim estacionari

Per aquesta segona part realitzem mesures sobre un circuit RLC amb capacitat $C = 15\,\mathrm{mF}$, inductància $L = 22\,\mathrm{mH}$ i resistència $R = 2700\,\Omega$. Després repetirem el procediment amb una resistència de $270\,\Omega$. El circuit estarà sotmès a un voltatge d'entrada V de freqüència ω, que es pot controlar a través d'una font. Es mesuraran V i V_r amb un oscil·loscopi.

En primer lloc es determinarà per a quina freqüència d'entrada el circuit es troba en ressonància —és a dir, per a quina freqüència el desfasament entre V_R i V és nul— i el valor obtingut es compararà amb el valor calculat per a ω_0 segons l'equació (1.6).

També es determinaran les freqüències de tall, que són les que compleixen $|T_R(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les freqüències de tall, ω_1 i ω_2 es poden calcular a priori segons les equacions

$$\begin{aligned} \omega_1\omega_2 &= \omega_0^2 \\ \omega_2 - \omega_1 &= \frac{R}{L}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

i els resultats es compararan amb les mesures preses.

1.3 Resultats

1.3.1 Règim transitori

El valor obtingut per a la freqüència del circuit a partir dels valors coneguts de L, C i R i de l'equació (1.4) és $3.03 \times 10^5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Això dóna un valor per al període de $2.07 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$. El valor mesurat del període és $(2.3 \pm 0.1) \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$.

Per la resistència crítica, el valor obtingut experimentalment és $(1.28 \pm 0.01) \times 10^4\,\Omega$, i el valor obtingut amb l'equació (1.5) és $2 \times 10^4\,\Omega$.

1.3.2 Règim estacionari

Per al circuit amb $R = 2700\,\Omega$ la freqüència de ressonància obtinguda experimentalment és $(8.8 \pm 1.0)\,\mathrm{kHz}$. El valor obtingut amb l'equació (1.6) és $8.76\,\mathrm{kHz}$.