Mètodes Numèrics
Pràctica 2: Zeros de funcions

Raquel Garcia, Arnau Mas

11 de Març 2018

Problema 1

Considerem l'equació polinòmica:

$$x^3 = x + 40 \tag{1}$$

utilitzant les fórmules de Cardano trobem l'arrel α que ve donada per:

$$\alpha = \left(20 + \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right)^{1/3} + \left(20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right)^{1/3} \tag{2}$$

Tot i que ens dóna l'arrel exacta, aquesta expressió no és bona des del punt de vista numèric, ja que al segon terme hi ha una resta que produeix cancelació. El programa `prob1a.c` avalua aquesta expressió en doble i en simple precisió. En precisió doble obtenim $\alpha = 3.5173935140528 52$ i en precisió simple $\alpha = 3.51738477$, mentre que el resultat exacte amb 15 decimals és $\alpha = 3.517393514052818$. Per tant en precisió doble, l'error relatiu que s'ha produït ha sigut $\varepsilon_d = 9.67 \times 10^{-15}$, i en simple $\varepsilon_s = 2.51 \times 10^{-6}$. Ara aplicarem la fórmula de propagació de l'error relatiu al segon terme de (2) (sense l'arrel cúbica) per a tractar d'estimar aquest error:

$$\varepsilon_r \left(20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right) = \frac{20 + \frac{1}{9}\sqrt{32397}}{20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397}} \epsilon_r \tag{3}$$

On ϵ_r és l'error relatiu que suposarem prové només de l'expressió en punt flotant i que és el mateix per als dos sumands, de l'ordre de 10^{-17} en precisió doble, i de 10^{-10} en precisió simple. D'aquesta manera obtenim una estimació de $\varepsilon_r(\alpha) \sim 10^{-13}$ en precisió doble i $\varepsilon_r(\alpha) \sim 10^{-6}$ en precisió simple, on també hem suposat que la resta d'operacions que es realitzen en l'avaluació d'α no modifiquen de manera significativa l'ordre d'aquests errors relatius.

A continuació utilitzarem el mètode de Newton per a resoldre (1), amb $f(x) = x^3 - x - 40$, i com a punt inicial $x_0 = 2$. El programa `prob1b_do.c` executa el mètode en precisió doble, i `prob1b_fl.c` l'executa en precisió simple. En doble obtenim $\alpha = 3.517393514052818$ després de 7 iteracions, i en simple obtenim $\alpha = 3.51739359$ després de 5 iteracions. Si considerem el mètode de Newton com un mètode del punt fix amb funció d'iteració

$$g(x) = x - \frac{x^3 - x - 40}{6x^2 - 1} \tag{4}$$

tenim que $|g'(2)| \approx 3.37 > 1$, per tant per a aquest x_0 no tenim clar si convergirà, ni podem fer una estimació a priori del nombre d'iteracions necessàries. El valor que obtenim després de fer una iteració del mètode de Newton és $x_1 \approx 5.091$, per a aquest valor $|g'(x_1)| \approx 0.45$, que és molt millor que x_0 i ens permet estimar a priori que el nombre d'iteracions necessàries serà com a màxim de

$$n \sim \left(\frac{\log(\varepsilon(1 - 0.45)/|5.091 - 2|)}{\log(0.45)}\right) + 1 \tag{5}$$

on ε és la fita de l'error que volem aconseguir. Per a tenir 15 decimals correctes, és a dir $\varepsilon < 10^{-15}$ a priori necessitem $n \sim 47$, i per a tenir 8 decimals, $\varepsilon < 10^{-8}$ a priori necessitem $n \sim 27$ iteracions. Aquestes fites són tan elevades degut a que el punt $x_0 = 2$ és un punt molt dolent on començar.

Considerem ara l'equació polinòmica:

$$x^3 = x + 400 \tag{6}$$

si escribim aquesta equació com a $p(x) = x^3 - x - 400 = 0$, veiem que només hi ha un canvi de signe en els seus coeficients, i per tant per la regla dels signes de Descartes tenim que aquest polinomi té una única arrel positiva. Com que $p(2) = -394 < 0$, $p(8) = 104 > 0$ i $p(x)$ és continu, pel teorema de Bolzano tenim que aquesta arrel β es troba a l'interval $[2, 8]$. La fórmula de Cardano que obtenim per a aquesta arrel és:

$$\beta = \left(200 + \frac{1}{9}\sqrt{3239997}\right)^{1/3} \left(200 - \frac{1}{9}\sqrt{3239997}\right)^{1/3} \tag{7}$$

El programa `prob1c.c` avalua β en precisió doble. Obtenim $\beta = 7.413302725859884$, però el valor veritable amb 15 xifres decimals és: $\beta = 7.413302725857898$, per tant es produeix un error absolut $\varepsilon_a(\beta) = 1.986 \times 10^{-12}$. Aquest error prové fonamentalment de la cancelació que es produeix al segón terme de (7).

En el programa `prob1c123.c` obtenim 15 decimals correctes de β, treballant amb precisió doble, aplicant el mètode de la bisecció i el mètode de la secant partint de l'interval $[2, 8]$, i el mètode de Newton amb $x_0 = 2$.

Amb el mètode de la bisecció hem necessitat 50 iteracions per a trobar β, amb el de la secant hem necessitat 8 iteracions, mentre que amb el de Newton n'hem necessitat 10. Observem que el mètode de la bisecció és molt lent comparat amb els altres dos, però el mètode de Newton i el de la secant tampoc han sigut especialment ràpids degut a que el punt $x_0 = 2$ es troba prou allunyat de l'arrel.

Problema 2

El programa `prob2a.c` conté codi que executa la iteració descrita al problema 2. Si comencem la iteració a $x_0 = 7.5$ aleshores obtenim l'arrel x^* amb 15 xifres decimals correctes després de 4 iteracions. Obtenim $x^* = 7.413\,302\,725\,857\,898$, que és coherent amb els resultats del problema anterior.

Per estudiar l'ordre de convergència aproximarem $|x_k - x^*|$ per $e_k = |x_k - x_{k+1}|$. El codi de `prob2a.c` també realitza el càlcul de e_k/e_{k-1}, e_k/e_{k-1}^2 i e_k/e_{k-1}^3. Com que després de 4 iteracions ja hem obtingut x^* amb més precisió que la que permet el format `double` e_5 és 0. Per tant el quocient e_6/e_5 dóna `nan` com a resultat. Tot i això, només amb 4 iteracions ja podem dir que l'ordre de convergència és quadràtic.

Problema 3

Considerem l'equació $f(x) = 0$, amb $f(x)$ contínuament derivable, si x^* és una arrel simple, de manera que compleix $f(x^*) = 0$ i $f'(x) \neq 0$ en un entorn de x^*, aleshores podem utilitzar el mètode de Halley que consisteix en la iteració

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)} \tag{8}$$

per a aproximar x^*.

Al programa `prob3.c` hem utilitzat aquest mètode per a calcular l'arrel de $f(x) = x^3 - x - 400$ amb 15 decimals correctes. Hem obtingut $x^* = 7.413302725857898$ en 5 iteracions, partint de $x_0 = 2$.

Per a comprobar que aquest mètode té ordre de convergència 3 considerem $e_k = |x_k - x_{k-1}|$ i estudiem els quocients $\frac{e_k}{(e_{k-1})^3}$, obtenim:

k	x_k	$\frac{e_k}{(e_{k-1})^3}$
1	3.744064386317907	–
2	6.305068367267490	0.482750477268219
3	7.392360605150256	0.064731478548905
4	7.413302612248415	0.016292188999870
5	7.413302725857898	0.012369714472980

per tant veiem que $e_k \sim (e_{k-1})^3$, de manera que el mètode de Halley té ordre de convergència cúbic.