Pràctica 3: Interpolació polinòmica i integració numèrica

Arnau Mas

24 d'Abril 2018

Problema 1

L'objectiu d'aquest problema és interpolar la funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

a l'interval $[-1, 1]$ mitjançant el polinomi interpolador de Lagrange. Es faran servir dos conjunts de nodes diferents per a realitzar la interpolació. En primer lloc, n nodes equidistants dins de l'interval, és a dir, donats per

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}$$

per $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. Els altres nodes que farem servir seran nodes de Chebyshev, definits com

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right)$$

per $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. Es proposa fer la interpolació fent servir 4, 8, 16, 32 i 64 nodes.

El programa `nodes.c` genera una llista amb n nodes equidistants o de Chebyshev. Aquesta llista serveix d'entrada per al programa `prob1.c`, que implementa el mètode de diferències dividides de Newton per a calcular els coeficients del polinomi interpolador de Lagrange per als nodes donats. A més avalua aquest polinomi aplicant la regla de Horner. El fitxer `diferencies_dividides.c` conté la implementació de funcions auxiliars per aquests programes, com el càlcul de diferències dividides fent ús de l'expressió recursiva així com una implementació de la regla de Horner per avaluar un polinomi.

— ∗ —

Per a tenir una idea del màxim error que es comet en cada cas hem avaluat tant la funció com el polinomi en un nombre elevat de punts. En particular en els punts donats per $x_k = -0.989 + k \cdot 0.011$ per $k \in \{0, \cdots, 180\}$, que són 181 punts repartits de forma equidistant a l'interval on estem interpolant. Si denotem per L_n el polinomi de Lagrange de grau n obtingut a partir dels nodes $\{(x_0, f(x_0), \cdots, (x_n, f(x_n))\}$ aleshores, per tot x de l'interval $[a, b]$ on estem interpolant existeix $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

on $\omega = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$. En particular podem fitar l'error en la interpolació com

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} |\omega(x)| \,.$$

Observem que l'únic que depèn de la tria de nodes és el factor $\omega(x)$. Els nodes de Chebyshev apareixen quan intentem minimitzar $\omega(x)$. La interpolació que hem realitzat posa de manifest la importància de fer una bona tria de nodes: amb nodes equidistants, l'error màxim en $[-1, 1]$ no tendeix a zero quan $n \to \infty$. Interpolant amb nodes de Chebyshev això no passa. A la figura 1.1 hi ha representats el resultat d'interpolar f amb nodes equidistants i de Chebyshev. Quan el nombre de nodes és baix no s'aprecien grans diferències entre les dues tries, i en els dos casos el màxim error es comet a $x = 0$ —en cada gràfic hi ha representat en vermell el punt on es comet el màxim error—. Per a 16 i 32 nodes, però, fent la interpolació amb nodes equidistants, l'error als extrems de l'interval es dispara i arriba a ser superior a 600 per 32 nodes. En canvi, interpolant amb els nodes de Chebyshev el comportament és molt més estable i l'error màxim és manté sempre a $x = 0$.

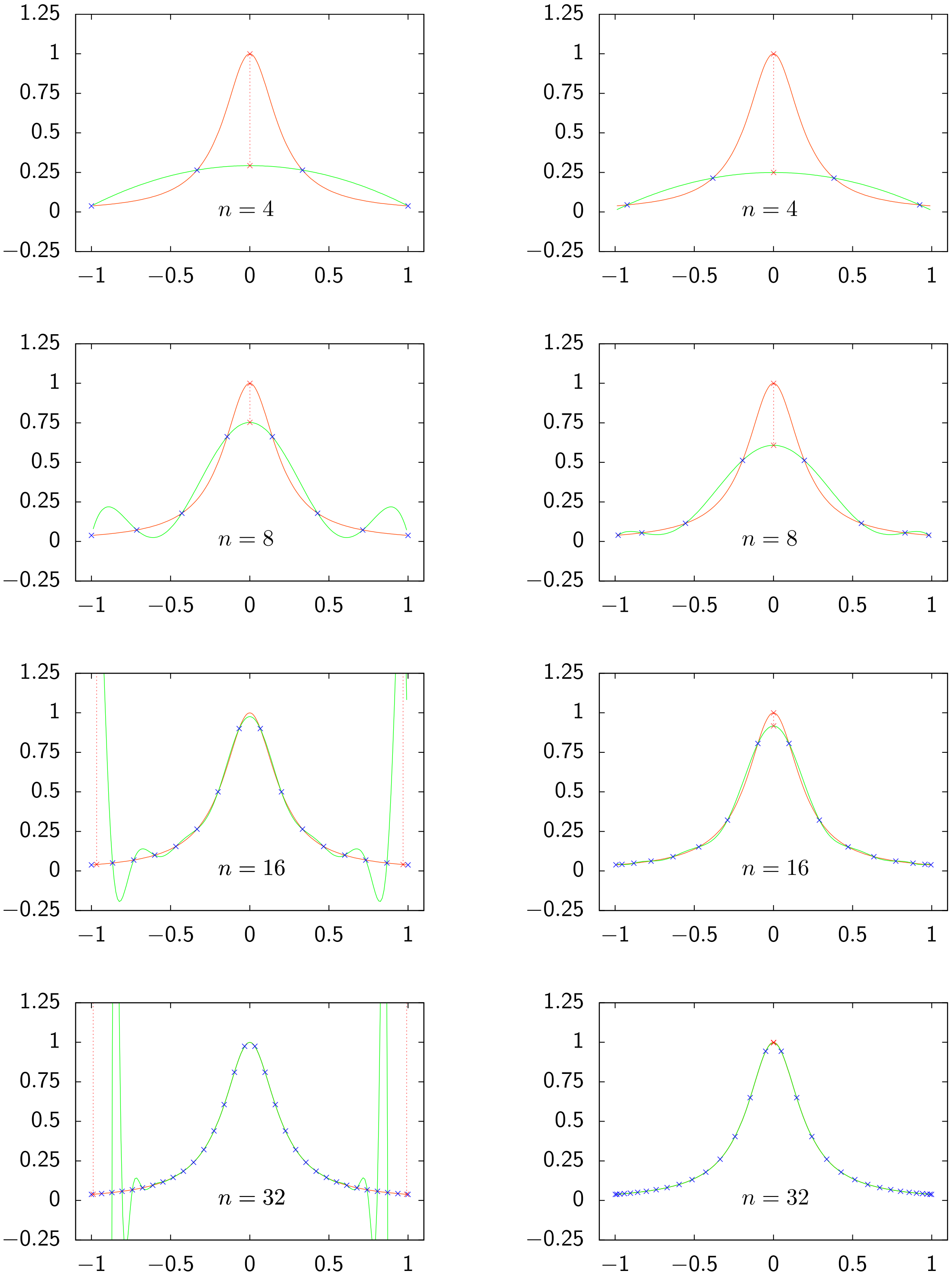

Figura 1.1: Resultat d'interpolar f fent servir n nodes equidistants (esquerra) i n nodes de Chebyshev (dreta)

Problema 2

Considerem la funció de Bessel de primera espècie d'ordre zero, $J_0(x)$. Volem estimar els valors de les arrels de J_0, és a dir, de les x^* tals que $J_0(x^*) = 0$. Una manera de fer-ho és interpolar la inversa de J_0 a l'interval $(1.9, 3)$. En aquest interval J_0 és localment invertible ja que és estrictament decreixent i derivable. Concretament construirem el polinomi interpolador que té per nodes $(J_0(x_n), x_n)$. D'aquesta manera, si p és el polinomi que obtenim, $p(0)$ és una aproximació de x^*.

El programa `prob2.c` calcula el polinomi interpolador de Lagrange amb el mètode de les diferències dividides de Newton a partir d'un conjunt de nodes donats. Seguidament l'avalua al punt zero fent servir la regla de Horner. La interpolació s'ha fet de grau 1, 3 i 5 i els resultats es mostren a

Taula 2.1: Interpolant valors positius de $J_0(x)$ més pròxims al canvi de signe de la funció.

Grau	x^*	$J_0(x^*)$
1	2.404 728 613 882 804	$5.032\,915\,224\,793\,92 \times 10^{-5}$
3	2.404 822 718 113 948	$1.474\,162\,667\,958\,62 \times 10^{-6}$
5	2.404 825 294 785 460	$1.364\,892\,383\,294\,46 \times 10^{-7}$

Taula 2.2: Interpolant valors negatius de $J_0(x)$ més pròxims al canvi de signe de la funció.

Grau	x^*	$J_0(x^*)$
1	2.400 077 241 947 102	$2.467\,503\,813\,402\,49 \times 10^{-3}$
3	2.404 149 375 353 531	$3.510\,877\,051\,945\,27 \times 10^{-4}$
5	2.404 216 734 868 258	$3.161\,088\,435\,468\,27 \times 10^{-4}$

Taula 2.3: Interpolant valors de $J_0(x)$ simètrics al canvi de signe de la funció.

Grau	x^*	$J_0(x^*)$
1	2.404 927 513 002 775	$-5.292\,872\,039\,523\,10 \times 10^{-5}$
3	2.404 824 021 911 155	$7.972\,989\,952\,971\,00 \times 10^{-8}$
5	2.404 825 653 043 717	$-4.949\,964\,568\,641\,48 \times 10^{-8}$

Observem que el millor resultat l'obtenim amb la interpolació de grau 5 de valors simètrics al voltant del canvi de signe de $J_0(x)$. En general les millors són les interpolacions amb els valors positius i amb els simètrics, i la interpolació amb valors negatius és prou dolenta en comparació.

De fet ja podíem esperar des del principi que la millor interpolació fos la simètrica, ja que és l'única que en l'interval de punts interpoladors conté al x^*, i en general si tenim els punts interpoladors en un interval $[a, b]$ i volem avaluar el polinomi interpolador $p(x)$ en un punt fora d'aquest interval, l'error obtingut pot ser molt gran.

Problema 3

El nostre objectiu és obtenir un valor aproximat de la integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{1}{4}\pi \approx 0.785\,398\,163\,397\,448 \tag{3.1}$$

pel mètode dels trapezis i pel mètode de Simpson dividint l'interval $[0, 1]$ en quatre parts iguals.

El programa `prob3.c` calcula aquestes aproximacions i l'error que es comet amb cadascuna. Amb el mètode dels trapezis hem obtingut $I \approx 0.782\,794\,117\,647\,059$, que comparat amb el valor exacte amb 15 decimals de l'equació (3.1) ens dóna un error aproximat de $2.604\,045\,750\,389 \times 10^{-3}$.

Amb el mètode de Simpson obtenim $I \approx 0.785\,392\,156\,862\,745$, que comparat amb l'equació (3.1) té un error aproximat de $6.006\,534\,703 \times 10^{-6}$.

Per tant veiem que amb la regla de Simpson hem obtingut una millor aproximació.

Problema 4

El nostre objectiu és obtenir un valor aproximat de la integral

$$I = \int_1^5 \frac{e^x}{x}\,dx$$

pel mètode dels trapezis dividint l'interval $[1,5]$ en $n = 4, 8, 16, 32, 64$ parts iguals.

El programa `prob4.c` calcula aquestes aproximacions i una estimació de l'error comés. Els resultats obtinguts per a cada n es mostren a la taula 4.1.

Taula 4.1: Resultat i estimació de l'error obtingut per a cada n.

n	Aproximació de I	Estimació de l'error
4	40.239 701 356 634 455	10
8	38.782 928 156 314 796	2.5
16	38.413 711 363 539 406	0.625
32	38.321 069 162 332 130	0.156 25
64	38.297 886 904 128 802	0.039 062 5

L'estimació de l'error l'hem calculat segons la fórmula:

$$\left|\frac{(b-a)F}{12}h^2\right|,$$

on b i a són els extrems del interval —en el nostre cas $b = 5$ i $a = 1$—, F és una fita superior de la segona derivada de la funció que volem integrar a l'interval, i $h = (b-a)/n$. Tenim, per tot $x \geq 1$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4} \leq \frac{e^x}{x},$$

per tant podem triar $F = e^5/5 \approx 30$. De manera que per a cada n ens queda l'estimació de l'error $160 \cdot n^{-2}$. Observem que per a un major nombre de divisions del interval esperem millorar l'aproximació de I.

Problema 5

Volem calcular amb un error menor que 10^{-2} el valor de la integral

$$I = \int_1^2 \log(x)\, dx$$

utilitzant la regla composta de Simpson.

Una fita de l'error amb aquest mètode ve donada per:

$$\varepsilon = \left| \frac{(b-a)F}{180} h^4 \right|$$

on b, a són els extrems del interval, F és una fita superior al interval del valor absolut de la quarta derivada de la funció que volem integrar, i $h = (b-a)/n$ on n és el nombre de divisions del interval que utilitzem. En el nostre cas $a = 1$, $b = 2$, $|f^{(4)}(x)| = |-6/x^4| \leq 6$ per a $x \in [1, 2]$, de manera que volem

$$10^{-2} \geq \left| \frac{6}{180} \frac{1}{n^4} \right|.$$

Per tant necessitarem fer com a mínim $n = 2$ divisions del interval $[1, 2]$ per a obtenir la precisió demanada.

El programa `prob5.c` calcula aquesta integral amb diversos valors per a n, els resultats obtinguts són els següents:

Taula 5.1: Resultats per a diversos n parells

n	Aproximació de I
2	0.385 834 602 165 434
4	0.386 259 562 814 567
6	0.386 287 163 278 802
8	0.386 292 043 466 313

Observem que amb $n = 2$ iteracions ja hem obtingut dues xifres decimals correctes, per tant la nostra estimació de l'error ha sigut adequada.

Problema 6

En aquest problema se'ns dóna una sèrie de valors de temps i velocitat, i se'ns demana calcular l'espai recorregut. Volem doncs aproximar la integral:

$$L = \int_0^{84} v(t)dt,$$

per a la qual tenim valors discrets de $v(t)$ en intervals de temps de 6 s. Per tant estem dividint l'interval $[0, 84]$ en $n = 14$ parts iguals. Per a trobar L utilitzarem la regla de Simpson composta, ja que en general dóna un millor resultat que la regla composta dels trapezis.

El programa `prob6.c` calcula aquesta aproximació. El resultat que obtenim és $L = 2909.400\,000\,000\,000\,091$ m, per tant la pista mesura aproximadament 2909 km.

Problema 7

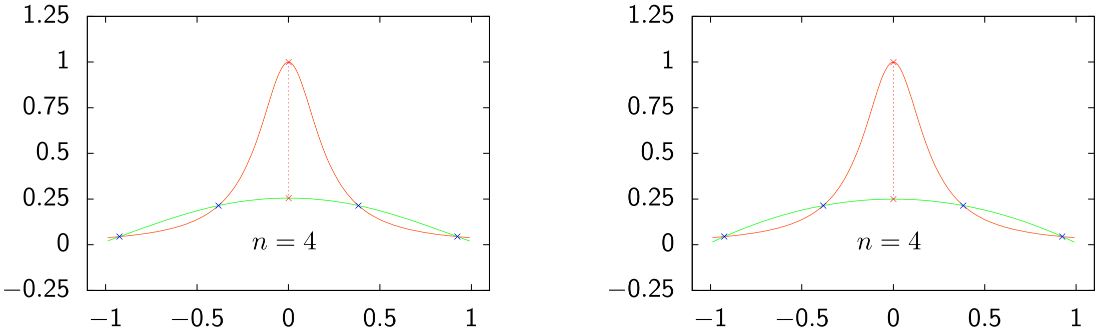

Figura 7.1: Resultat d'interpolar f fent servir interpolació per splines cúbics amb quatre nodes (esquerra) i 4 nodes de Chebyshev (dreta)