Entrega 2: Espais normats i de Banach

Arnau Mas

6 de desembre de 2019

Problema 2

Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai normat. Volem veure que per tot $x, y \in E$ es té la desigualtat

$$\|x\| \leq \max\{\|x-y\|, \|x+y\|\}.$$

Per a qualsevol $t \in [0,1]$ tenim

$$\begin{aligned} \|t(x-y) + (1-t)(x+y)\| &\leq t\|x-y\| + (1-t)\|x+y\| \\ &= \|x+y\| + (\|x-y\| - \|x+y\|)t. \end{aligned}$$

L'aplicació

$$\begin{aligned} f \colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|x+y\| + (\|x-y\| - \|x+y\|)t \end{aligned}$$

és afí, per tant assoleix el seu màxim a un dels extrems de $[0,1]$. Tenim que $f(0) = \|x+y\|$ i $f(1) = \|x-y\|$, per tant, per a tot $t \in [0,1]$ es té

$$\|t(x-y) + (1-t)(x+y)\| \leq f(t) \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

Fent $t = \frac{1}{2}$ arribem a la desigualtat que volíem veure

$$\|x\| = \left\|\frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

— ∗ —

Hem de veure que per tot $x, y \in E$ es té

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\max\{\|x\|, \|y\|\}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Això és equivalent a provar que

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

i

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\|y\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Demostrem la primera de les desigualtats:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|x-\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\left\|y-\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\
&= \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{\|x\|}{\|y\|}\right|\|y\| \\
&= \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\left|\|y\|-\|x\|\right| \\
&\leq \|x-y\|
\end{aligned}$$

fent servir la desigualtat triangular inversa a l'últim pas.

La segona desigualtat és immediata observant que $\|x-y\| = \|y-x\|$. Així doncs tenim el resultat que volíem.

— ∗ —

Per últim hem de veure que

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Això és una conseqüència immediata de la desigualtat anterior. En efecte, tenim

$$\|x\|+\|y\| \leq 2\max\{\|x\|+\|y\|\}$$

per tant

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &\geq \frac{1}{2}\max\{\|x\|, \|y\|\}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \\
&\geq \frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.
\end{aligned}$$

Problema 3

Volem veure que l'espai

$$C^s([a,b]) := \{f \in C^0([a,b]) \mid p_s(f) < \infty\}$$

on

$$p_s(f) := \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

és un espai de Banach amb la norma

$$\|f\|_s := |f(a)| + p_s(f).$$

És clar que $\|f\|_s \geq 0$ per tot $f \in C^s([a,b])$. Comprovem que $\|\cdot\|_s$ satisfà els tres requeriments per a ser una norma.

En primer lloc, hem de veure que si $\|f\| = 0$ aleshores $f = 0$. Si $\|f\| = 0$ aleshores $|f(a)| = p_s(f) = 0$. Com que $p_s(f) = 0$ es té, per tot $x \in (a,b]$ que

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|^s} \leq p_s(f) = 0$$

per tant

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|^s} = 0.$$

Això vol dir que $|f(x) - f(a)| = 0$, perquè $x \neq a$ i per tant $|x - a| \neq 0$. Per tant, per tot $x \in (a,b]$ es té $f(x) = f(a)$. I com que $|f(a)|$ concloem $f(x) = f(a) = 0$, és a dir, $f = 0$.

Veiem ara que la norma $\|\cdot\|_s$ satisfà la desigualtat triangular. Donades $f, g \in C^s([a,b])$ tenim

$$\begin{aligned}
p_s(f+g) &= \sup_{x\neq y} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|^s} \\
&= \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{|x-y|^s} \\
&\leq \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|}{|x-y|^s} \\
&\leq \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} + \sup_{x\neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|} \\
&= p_s(f) + p_s(g).
\end{aligned}$$

Això de fet demostra que $C^s([a,b])$ és un subespai vectorial de $C^0([a,b])$, afegint que $p_s(\lambda f) = |\lambda|\, p_s(f)$. Tenim aleshores

$$\|f+g\|_s = |(f+g)(a)| + p_s(f+g) \leq |f(a)| + |g(a)| + p_s(f) + p_s(g) = \|f\|_s + \|g\|_s$$

Finalment, per tot $\lambda \in \mathbb{R}$ tenim

$$p_s(\lambda f) = \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x-y|^s} = |\lambda| \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} = |\lambda|\, p_s(f).$$

Per tant és clar que $\|\lambda f\| = |\lambda|\, \|f\|$.

Fins aquí hem vist que $C^s([a,b])$ amb la norma $\|\cdot\|_s$ és un espai normat. Per veure que és de banach hem de demostrar que és complet, és a dir, que tota successió de Cauchy a $C^s([a,b])$ és convergent. Sigui (f_n), doncs, una successió de Cauchy a $C^s([a,b])$. Per definició, per qualsevol $\epsilon > 0$ hi ha $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ es té

$$\|f_n - f_m\|_s < \epsilon.$$

Això vol dir que $p_s(f_n - f_m) < \epsilon$ i $|(f_n - f_m)(a)| < \epsilon$. Amb això podem demostrar que a tot $x \in (a,b]$, la successió $f_n(x)$ és de Cauchy i per tant convergent:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(a) + f_m(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| \\ &= |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| + |(f_n - f_m)(a)| \\ &\leq p_s(f_n - f_m)\, |x-a|^s + |(f_n - f_m)(a)| \\ &\leq \epsilon\, |b-a|^s + \epsilon. \end{aligned}$$

I com que $|f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon$ per a n i m prou grans, $f_n(a)$ és de Cauchy i per tant també convergent. La successió f_n, doncs, té límit puntual a $[a,b]$, diguem-li f.

Per a demostrar que $C^s([a,b])$ és complet hem de comprovar que $f \in C^s([a,b])$ i que $f_n \to f$ en la norma $\|\cdot\|_s$. Com que (f_n) és de Cauchy es té, per tot $x, y \in [a,b]$ amb $x \neq y$ i m, n prou grans

$$\frac{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)|}{|x-y|^s} < \epsilon.$$

Prenent el límit puntual quan $m \to \infty$ tenim, per tot $x, y \in [a,b]$ amb $x \neq y$

$$\frac{|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(y)|}{|x-y|^s} < \epsilon,$$

per tant $p_s(f - f_n) < \epsilon$. Això vol dir que $f - f_n \in C^s([a,b])$. En efecte, si per a una funció g definida a $[a,b]$ es té $p_s(g)$ aleshores g és s-Hölder a $[a,b]$ i en particular contínua. Per tant, com que $f_n \in C^s([a,b])$ per tot n, tenim

$$f = f - f_n + f_n \in C^s([a,b]).$$

Amb el que acabem de veure és immediat comprovar que $f_n \to f$ en la norma $\|\cdot\|_s$. D'una banda, com que f és el límit puntual de les f_n, és clar que

$$|(f - f_n)(a)| \to 0$$

quan $n \to \infty$. D'altra banda, pel que hem vist prèviament, per a n prou gran $p_s(f - f_n) < \epsilon$. És a dir, $p_s(f - f_n) \to 0$ quan $n \to \infty$. I per tant

$$\|f - f_n\|_s \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

com volíem.