Entrega 2: Espais normats i de Banach

Arnau Mas

6 de desembre de 2019

Problema 1

Sigui $f(x) = x^{-1/2}\chi_{(0,1)}(x)$. Donada una enumeració de $\mathbb{Q}$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ definim

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - r_n).$$

Si definim

$$f_n(x) := \frac{1}{2^n} f(x - r_n) = \frac{\chi_{(0,1)}(x - r_n)}{2^n\sqrt{x - r_n}} = \frac{\chi_{(r_n, r_n+1)}(x)}{2^n\sqrt{x - r_n}}$$

aleshores les f_n són totes positives i mesurables. Aleshores, aplicant el Teorema de Beppo-Levi tenim

$$\int_{\mathbb{R}} |g| = \int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Calculem, doncs, la integral de f_n. f_n és no nul·l si i només si $0 < x - r_n < 1$, és a dir, si i només si $x \in (r_n, r_n + 1)$, per tant

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{(r_n, r_n+1)} f_n &= \frac{1}{2^n} \int_{(r_n, r_n+1)} \frac{1}{\sqrt{x - r_n}} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

I aleshores

$$\int_{\mathbb{R}} |g| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$$

per tant $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Per a demostrar que g és finita g.p.t. $x \in \mathbb{R}$ podem fer servir la desigualtat de Chebyshev, que ens dóna, per tot $N \in \mathbb{N}$

$$m(g^{-1}([N, \infty])) \leq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}} g = \frac{2}{N}.$$

El conjunt de punts on $g(x) = \infty$ és la intersecció

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} g^{-1}([N, \infty])$$

perquè si $g(x) > \infty$ aleshores per tot $N \in \mathbb{N}$, $g(x) > N$. Com que $g^{-1}([N+1, \infty]) \subseteq g^{-1}([N, \infty])$ i $m(g^{-1}([1, \infty])) \leq 2$ es té, per continuïtat de la mesura de Lebesgue

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} g^{-1}([N, \infty])\right) = \lim_{N\to\infty} m\left(g^{-1}([N, \infty])\right) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} < 0.$$

Per tant, el conjunt de punts on g no és finita és nul, és a dir $g(x) < \infty$ g.p.t. $x \in \mathbb{R}$.

— ∗ —

A continuació demostrem que g no està fitada en cap interval d'interior no buit. Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval amb $\mathring{I} \neq \emptyset$. Per la densitat de $\mathbb{Q}$ dins de $\mathbb{R}$ hi ha un racional dins de $\mathring{I}$, r_N. I per tant, com que $\mathring{I}$ conté una bola centrada en r_N, $(r_N - \alpha, r_N + \alpha)$, i sense pèrdua de generalitat podem suposar $\alpha < 1$. Sigui $x \in (r_N, r_N + \alpha$. Podem posar $x = r_N + \epsilon$ amb $\epsilon \in (0, \alpha)$. Aleshores

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \geq f_N(x) = \frac{\chi_{(0,1)}(x - r_N)}{2^N \sqrt{x - r_N}} = \frac{1}{2^N \sqrt{\epsilon}}.$$

El que ens diu això és que per tot $x \in (r_N, r_N + \epsilon)$ es té

$$g(x) \geq \frac{1}{2^N \sqrt{\epsilon}},$$

per tant g no pot estar fitada en un entorn de r_N perquè sempre hi ha punts prop de r_N que superen qualsevol fita. En particular g no està fitada a I, com volíem veure.

Com a conseqüència, g no pot ser contínua en un punt on és finita ja que no està fitada en cap interval que contingui aquest punt. Com que el conjunt de punts on g no pren valors finits és nul, concloem que g és discontínua gairebé a tot punt de $\mathbb{R}$.

— ∗ —

Sabem que g.p.t. $x \in \mathbb{R}$ $g(x) < \infty$, per tant $g(x)^2 < \infty$ g.p.t. $x \in \mathbb{R}$.

Volem veure que g^2 no és integrable en cap interval I amb interior no buit. Tenim

$$\int_I \left|g^2\right| = \int_I g^2 = \int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^2 \geq \int_I \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n^2$$

fent servir Beppo-Levi a l'última igualtat. Calculem, doncs, la integral de f_n^2 a un interval I. Com que

$$f_n(x)^2 = \left(\frac{\chi_{(r_n, r_n+1)}(x)}{2^n \sqrt{x - r_n}}\right)^2 = \frac{\chi_{(r_n, r_n+1)}(x)}{2^{2n}(x - r_n)}$$

es té
$$\int_I f_n^2 = \int_I \frac{\chi_{(r_n,r_n+1)}(x)}{2^{2n}(x-r_n)}\,\mathrm{d}x = \int_{I\cap(r_n,r_n+1)} \frac{1}{2^{2n}(x-r_n)}\,\mathrm{d}x.$$
Per a molts n aquesta integral serà nul·la perquè I i (r_n, r_n+1) seran disjunts. Ara bé, per la densitat de $\mathbb{Q}$ dins de $\mathbb{R}$, sempre trobarem $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_N \in \mathring{I}$. Aleshores $I \cap (r_N, r_N+1) = (r_N, \alpha)$ amb $\alpha > r_N$, i per tant
$$\int_I f_N^2 = \int_{(r_N,\alpha)} \frac{1}{2^{2N}(x-r_N)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2N}} \int_{(0,\alpha-r_N)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$
Amb això ens és suficient per a provar que la integral de g^2 sobre I divergeix:
$$\int_I g^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n^2 \geq \int_I f_N^2 = \infty.$$
Per tant $g^2 \notin L^1(I)$ per a qualsevol interval I de $\mathbb{R}$.

Problema 2

Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai normat. Volem veure que per tot $x, y \in E$ es té la desigualtat
$$\|x\| \leq \max\{\|x-y\|, \|x+y\|\}.$$
Per a qualsevol $t \in [0,1]$ tenim
$$\begin{aligned} \|t(x-y) + (1-t)(x+y)\| &\leq t\,\|x-y\| + (1-t)\,\|x+y\| \\ &= \|x+y\| + (\|x-y\| - \|x+y\|)t. \end{aligned}$$
L'aplicació
$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|x+y\| + (\|x-y\| - \|x+y\|)t \end{aligned}$$
és afí, per tant assoleix el seu màxim a un dels extrems de $[0,1]$. Tenim que $f(0) = \|x+y\|$ i $f(1) = \|x-y\|$, per tant, per a tot $t \in [0,1]$ es té
$$\|t(x-y) + (1-t)(x+y)\| \leq f(t) \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$
Fent $t = \frac{1}{2}$ arribem a la desigualtat que volíem veure
$$\|x\| = \left\|\frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

— ∗ —

Hem de veure que per tot $x, y \in E$ es té

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\max\{\|x\|, \|y\|\}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Això és equivalent a provar que

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

i

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\|y\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Demostrem la primera de les desigualtats:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|x-\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\left\|y-\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\
&= \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{\|x\|}{\|y\|}\right|\|y\| \\
&= \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\left|\|y\|-\|x\|\right| \\
&\leq \|x-y\|
\end{aligned}$$

fent servir la desigualtat triangular inversa a l'últim pas.

La segona desigualtat és immediata observant que $\|x-y\| = \|y-x\|$. Així doncs tenim el resultat que volíem.

— ∗ —

Per últim hem de veure que

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Això és una conseqüència immediata de la desigualtat anterior. En efecte, tenim

$$\|x\|+\|y\| \leq 2\max\{\|x\|, \|y\|\}$$

per tant

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &\geq \frac{1}{2}\max\{\|x\|, \|y\|\}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \\
&\geq \frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.
\end{aligned}$$

Problema 3

Volem veure que l'espai

$$C^s([a,b]) := \{f \in C^0([a,b]) \mid p_s(f) < \infty\}$$

on

$$p_s(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

és un espai de Banach amb la norma

$$\|f\|_s := |f(a)| + p_s(f).$$

És clar que $\|f\|_s \geq 0$ per tot $f \in C^s([a,b])$. Comprovem que $\|\cdot\|_s$ satisfà els tres requeriments per a ser una norma.

En primer lloc, hem de veure que si $\|f\| = 0$ aleshores $f = 0$. Si $\|f\| = 0$ aleshores $|f(a)| = p_s(f) = 0$. Com que $p_s(f) = 0$ es té, per tot $x \in (a,b]$ que

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|^s} \leq p_s(f) = 0$$

per tant

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|^s} = 0.$$

Això vol dir que $|f(x) - f(a)| = 0$, perquè $x \neq a$ i per tant $|x-a| \neq 0$. Per tant, per tot $x \in (a,b]$ es té $f(x) = f(a)$. I com que $|f(a)|$ concloem $f(x) = f(a) = 0$, és a dir, $f = 0$.

Veiem ara que la norma $\|\cdot\|_s$ satisfà la desigualtat triangular. Donades $f, g \in C^s([a,b])$ tenim

$$\begin{aligned} p_s(f+g) &= \sup_{x \neq y} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|^s} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{|x-y|^s} \\ &\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|}{|x-y|^s} \\ &\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} + \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|} \\ &= p_s(f) + p_s(g). \end{aligned}$$

Això de fet demostra que $C^s([a,b])$ és un subespai vectorial de $C^0([a,b])$, afegint que $p_s(\lambda f) = |\lambda| \, p_s(f)$. Tenim aleshores

$$\|f+g\|_s = |(f+g)(a)| + p_s(f+g) \leq |f(a)| + |g(a)| + p_s(f) + p_s(g) = \|f\|_s + \|g\|_s$$

Finalment, per tot $\lambda \in \mathbb{R}$ tenim

$$p_s(\lambda f) = \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x-y|^s} = |\lambda| \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} = |\lambda|\, p_s(f).$$

Per tant és clar que $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$.

Fins aquí hem vist que $C^s([a,b])$ amb la norma $\|\cdot\|_s$ és un espai normat. Per veure que és de banach hem de demostrar que és complet, és a dir, que tota successió de Cauchy a $C^s([a,b])$ és convergent. Sigui (f_n), doncs, una successió de Cauchy a $C^s([a,b])$. Per definició, per qualsevol $\epsilon > 0$ hi ha $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ es té

$$\|f_n - f_m\|_s < \epsilon.$$

Això vol dir que $p_s(f_n - f_m) < \epsilon$ i $|(f_n - f_m)(a)| < \epsilon$. Amb això podem demostrar que a tot $x \in (a,b]$, la successió $f_n(x)$ és de Cauchy i per tant convergent:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(a) + f_m(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| \\
&= |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| + |(f_n - f_m)(a)| \\
&\leq p_s(f_n - f_m)\, |x-a|^s + |(f_n - f_m)(a)| \\
&\leq \epsilon\, |b-a|^s + \epsilon.
\end{aligned}$$

I com que $|f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon$ per a n i m prou grans, $f_n(a)$ és de Cauchy i per tant també convergent. La successió f_n, doncs, té límit puntual a $[a,b]$, diguem-li f.

Per a demostrar que $C^s([a,b])$ és complet hem de comprovar que $f \in C^s([a,b])$ i que $f_n \to f$ en la norma $\|\cdot\|_s$. Com que (f_n) és de Cauchy es té, per tot $x, y \in [a,b]$ amb $x \neq y$ i m, n prou grans

$$\frac{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)|}{|x-y|^s} < \epsilon.$$

Prenent el límit puntual quan $m \to \infty$ tenim, per tot $x, y \in [a,b]$ amb $x \neq y$

$$\frac{|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(y)|}{|x-y|^s} < \epsilon,$$

per tant $p_s(f - f_n) < \epsilon$. Això vol dir que $f - f_n \in C^s([a,b])$. En efecte, si per a una funció g definida a $[a,b]$ es té $p_s(g)$ aleshores g és s-Hölder a $[a,b]$ i en particular contínua. Per tant, com que $f_n \in C^s([a,b])$ per tot n, tenim

$$f = f - f_n + f_n \in C^s([a,b]).$$

Amb el que acabem de veure és immediat comprovar que $f_n \to f$ en la norma $\|\cdot\|_s$. D'una banda, com que f és el límit puntual de les f_n, és clar que

$$|(f - f_n)(a)| \to 0$$

quan $n \to \infty$. D'altra banda, pel que hem vist prèviament, per a n prou gran $p_s(f - f_n) < \epsilon$. És a dir, $p_s(f - f_n) \to 0$ quan $n \to \infty$. I per tant

$$\|f - f_n\|_s \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

com volíem.