Entrega 1: Teoria de la mesura

Arnau Mas

18 d'octubre de 2019

Problema 1

El conjunt de Cantor és un subconjunt compacte i completament desconnectat de $[0,1]$ amb mesura 0. La seva construcció estàndard consisteix en eliminar el terç central de l'interval unitat. A continuació s'elimina el terç central dels dos intervals resultants, i el terç central dels quatre intervals que apareixen. Al pas n apareixen 2^n intervals, la unió dels cuals escrivim C_n. El conjunt de Cantor és la intersecció de tots els C_n. Per a veure que té mesura nul·la, observem que C_0 és l'interval unitat, un conjunt de mesura 1. Al següent pas s'elimina un conjunt de mesura $\frac{1}{3}$ i per tant C_1 té mesura $\frac{2}{3}$. A cada iteració s'elimina un terç de la mesura restant, per tant $m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. De fet es té $C_{n+1} \subseteq C_n$. A més, tots els C_n són mesurables per ser unió d'intervals. Per tant C també és mesurable perquè és intersecció de mesurables, i per continuïtat de la mesura de Lebesgue

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

De fet, aquest procés es pot repetir treient a cada pas intervals centrats de longitud en proporció α amb la longitud dels intervals anteriors, amb $0 < \alpha < 1$ (el cas estàndard del conjunt de Cantor ternari correspon a $\alpha = \frac{1}{3}$). Al primer pas el conjunt que queda té longitud total $1-\alpha$. Al segon pas queda un conjunt de longitud $(1-\alpha)$, i al pas n-èssim la longitud restant és $(1-\alpha)^n$, per tant en el límit $n \to \infty$ el conjunt que obtenim tindrà mesura 0. Així doncs, per a obtenir un conjunt de Cantor de mesura positiva haurem de procedir de manera diferent.

Una altra manera de generalitzar la construcció del conjunt ternari de Cantor és observar que a cada pas els intervals que eliminem tenen mesura $\frac{1}{3^n}$. En efecte, després de la primera iteració queden dos intervals de longitud $\frac{1}{3}$, i de cada un n'eliminem un terç, per tant un interval de longitud $\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Això dona lloc a quatre intervals de longitud

$\frac{1}{9}$. Procedint inductivament veiem que a cada pas estem eliminant un terç d'un interval la longitud del qual és $\frac{1}{3^n}$. De fet, observant que al pas n-èssim s'eliminen 2^{n-1} intervals de longitud $\frac{1}{3^n}$ tenim una altra prova de que el conjunt de Cantor té mesura zero. En efecte, si denotem per I_n la unió dels 2^{n-1} intervals que eliminem al pas n-èssim aleshores el conjunt de Cantor també és

$$C = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Pel que acabem de veure, $m(I_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$, per tant, com que els I_n són dos a dos disjunts

$$m(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

Ara bé, si a cada iteració eliminem una mica menys, intervals de mesura $\frac{\lambda}{3^n}$ amb $0 < \lambda < 1$ el que obtenim és un conjunt C_λ de mesura

$$m(C_\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 - \lambda.$$

Comprovem ara que C_λ és un conjunt amb les propietats que volem: un subconjunt compacte i totalment disconnex de $[0,1]$. Vegem primer que la construcció dóna lloc a un conjunt no buit. A cada pas estem eliminant intervals que estan continguts dins dels intervals que eliminem en la construcció del conjunt de Cantor, per tant el conjunt que obtenim en el límit no és buit, en particular conté el conjunt de Cantor. Que és compacte és clar: a cada pas elimnem una unió d'intervals oberts d'un tancat, per tant el resultat és un tancat. Així doncs la seva intersecció C_λ també es tancada, i per ser subconjunt de $[0,1]$ és fitada i per tant compacta.

Vegem, per últim, que és totalment disconnnex. Siguin $x, y \in C_\lambda$ i $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x - y| > \frac{\lambda}{3^n}.$$

Aleshores x i y es troben a intervals diferents a partir de la generació n i per tant a components connexes de C_λ diferents. En particular, com que C_λ no conté cap interval obert té interior buit.

Problema 2

Sigui $A \subseteq R$ on R és un rectangle de $\mathbb{R}^d$ tal que per qualsevol compacte $K \subseteq R$ de mesura positiva es té que $K \cap A \neq \emptyset$. Volem veure que $m^*(A) = v(R)$.

En primer lloc, com que $A \subseteq R$ aleshores $m^*(A) \leq m^*(R) = v(R)$. Aleshores, per definició de mesura exterior hi ha un recobriment d'A per rectangles oberts, $\{R_n\}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(R_n) \leq v(R).$$

Suposem de moment que el rectangle R és tancat. Aleshores

$$K = R - \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$$

és un tancat i per tant compacte per ser fitat. Com que $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$ és clar que $A \cap K = \emptyset$. Per hipòtesi, doncs, ha de ser $m(K) = 0$. D'altra banda, es té

$$R = \left(R - \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \right) \cup \left(R \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \right) = K \cup \left(R \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \right)$$

amb unió disjunta. Per tant, com que tot el que tenim aquí és mesurable

$$m(K) = m(R) - m\left(R \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \right) \geq m(R) - m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \right) \geq v(R) - \sum_{n=0}^{\infty} v(R_n)$$

I per tant $\sum_{n=0}^{\infty} v(R_n) = v(R)$. Així doncs, qualsevol recobriment (obert) d'A no pot tenir volum total estrictament menor que $v(R)$ i per tant, per definició de mesura exterior concloem $m^*(A) = v(R)$.

A continuació demostrem el cas general, quan R no necessàriament és tancat. Podem prendre una petita contracció de l'adherència de R, $c\bar{R}$ amb $0 < c < 1$. Aleshores $A \cap c\bar{R}$ talla qualsevol compacte amb mesura positiva de $c\bar{R}$. En efecte, si $K \subseteq c\bar{R}$ és un compacte amb mesura positiva es té en particular que $K \subseteq R$, per tant $A \cap K \neq \emptyset$ i per tant $(A \cap c\bar{R}) \cap K = A \cap K \neq \emptyset$. Aleshores, pel que acabem de provar tenim

$$m^*\Big(A \cap c\bar{R}\Big) = v(c\bar{R}) = c^d v(\bar{R}) = c^d v(R).$$

I com que $m^*\Big(A \cap c\bar{R}\Big) \leq m^*(A)$ tenim $m^*(A) \geq c^d v(R)$. Prenent el límit $c \to 1$ deduïm $m^*(A) \geq v(R)$, com volíem. Per tant $m^*(A) = v(R)$.

Problema 3

Busquem un conjunt $B \subseteq \mathbb{R}$ no mesurable tal que $B \cap \mathbb{Q}^c$ sigui mesurable. És a dir, tal que el conjunt d'irracionals de B sigui mesurable. Podem escriure B com la unió disjunta entre el conjunt de racionals de B i el conjunt d'irracionals de B,

$$B = (B \cap \mathbb{Q}) \cup (B \cap \mathbb{Q}^c)$$

Sigui quin sigui el conjunt B, com que $B \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ aleshores $B \cap \mathbb{Q}$ és mesurable. Això és perquè els racionals i qualsevol subconjunt seu són numerables i per tant mesurables (de fet són de mesura 0). Així doncs, si $B \cap \mathbb{Q}^c$ és mesurable B és automàticament mesurable. En particular no pot existir qualsevol conjunt no mesurable tal que la seva intersecció amb els racionals sigui mesurable.