Entrega 3: Espais de Hilbert

Arnau Mas

10 de gener de 2019

Problema 1

Sigui E un espai de Banach real tal que la seva norma satisfà la identitat del paral·lelogram, és a dir, per tot $x, y \in E$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 .$$

Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}. \end{aligned}$$

Veurem que és un producte escalar a E que indueix la norma $\|\cdot\|$, i per tant que E té estructura d'Espai de Hilbert.

En primer lloc, per tot $x \in E$,

$$\langle x\,, x \rangle = \frac{\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2}{4} = \frac{\|2x\|^2 + \|0\|^2}{4} = \frac{4\|x\|^2}{4} = \|x\|^2 .$$

Aleshores, si demostrem $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ és efetivament un producte escalar, la norma que indueix és $\|\cdot\|$. Com a conseqüència, $\langle x\,, x \rangle = 0$ equival a $\|x\|^2 = 0$, i això és equivalent a $x = 0$, per propietats de la norma. L'aplicació $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ és, doncs, definida positiva.

També es veu ràpidament que és simètrica:

$$\langle x\,, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \frac{\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2}{4} = \langle y\,, x \rangle .$$

Queda per comprovar que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ és bilineal. Com que hem provat que és simètrica només cal veure que és lineal en un dels arguments. Per tot $x, y, z \in E$ es té

$$\begin{aligned} 4\langle x+y\,, z \rangle - 4\langle x\,, z \rangle - 4\langle y\,, z \rangle = {}& \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ & - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 . \end{aligned}$$

Apliquem la identitat del paral·lelogram amb el primer terme i el quart:

$$\|x+y+z\|^2 + \|x-z\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|2x+y\|^2 + \|y+2z\|^2\right),$$

i amb el segon terme i el tercer:

$$-\|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 = -\frac{1}{2}\left(\|2x+y\|^2 + \|y-2z\|^2\right).$$

Aleshores queda

$$4\langle x+y\,,z\rangle - 4\langle x\,,z\rangle - 4\langle y\,,z\rangle = \frac{1}{2}\|y+2z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-2z\| - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2.$$

Una altra manera d'escriure la identitat del paral·lelogram és

$$\frac{1}{2}\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u-v\|^2,$$

que ens dóna

$$\frac{1}{2}\|y+2z\|^2 = \|y+z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2,$$

i similarment

$$\frac{1}{2}\|y-2z\|^2 = \|y-z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2.$$

Per tant

$$\frac{1}{2}\|y+2z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-2z\|^2 = \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2$$

i $4\langle x+y\,,z\rangle - 4\langle x\,,z\rangle - 4\langle y\,,z\rangle = 0$, és a dir

$$\langle x+y\,,z\rangle = \langle x\,,z\rangle + \langle y\,,z\rangle.$$

Combinant-ho amb la simetria, fins aquí tenim que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ és additiva en els dos arguments.

L'additivitat implica immediatament que $\langle nx\,,y\rangle = n\langle x\,,y\rangle$ per tot $n\in\mathbb{N}$, per inducció. A més

$$\begin{aligned}\langle -x\,,y\rangle &= \frac{\|-x+y\|^2 - \|-x-y\|^2}{4} = \frac{\|x-y\|^2 - \|x+y\|^2}{4}\\ &= -\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = -\langle x\,,y\rangle\end{aligned}$$

per tant tenim bilinealitat amb coeficients enters. I amb un petit càlcul podem demostrar que els escalars de la forma $\frac{1}{n}$ també surten fora:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{n}x\,,y\right\rangle &= \frac{1}{4}\left(\left\|\frac{1}{n}x+y\right\|^2 - \left\|\frac{1}{n}x-y\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4n^2}\left(\|x+ny\|^2 - \|x-ny\|^2\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\langle x\,,ny\rangle = \frac{1}{n^2}\langle ny\,,x\rangle\\ &= \frac{n}{n^2}\langle y\,,x\rangle = \frac{1}{n}\langle y\,,x\rangle = \frac{1}{n}\langle x\,,y\rangle.\end{aligned}$$

Tenim, doncs, bilinealitat amb coeficients racionals. Però això és suficient per a concloure bilinealitat amb coeficients reals. En efecte, per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, hi ha una successió de racionals (r_n) amb límit λ. Com que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ és contínua —com a conseqüència immediata de la continuïtat de la norma—,

$$\langle \lambda x , y \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} r_n x , y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle r_n x , y \rangle = \lim_{n\to\infty} r_n \langle x , y \rangle = \lambda \langle x , y \rangle$$

com volíem.

Problema 2

Considerem l'espai de Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$ amb el producte escalar

$$\langle f , g \rangle = \int_{[-\pi,\pi]} fg.$$

Dins d'aquest espai hi considerem les funcions donades per $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ i $x \mapsto x^2$, que denotarem simplement per 1, x i x^2 respectivament. Volem ortonormalitzar-les, és a dir, trobar una base ortonormal del subespai $\langle 1, x, x^2 \rangle$. Ho farem amb el mètode de Gram-Schmidt.

Considerem les funcions

$$f_1 = x - \frac{\langle 1 , x \rangle}{\langle 1 , 1 \rangle} 1$$
$$g_1 = x^2 - \frac{\langle 1 , x^2 \rangle}{\langle 1 , 1 \rangle} 1.$$

Tenim

$$\langle 1 , f_1 \rangle = \langle x , 1 \rangle - \left\langle 1 , \frac{\langle 1 , x \rangle}{\langle 1 , 1 \rangle} 1 \right\rangle = \langle x , 1 \rangle - \langle 1 , x \rangle = 0$$

i pel mateix argument $\langle 1 , g_1 \rangle = 0$. Calculem exactament f_1 i g_1. Ens fan falta els productes $\langle 1 , x \rangle$ i $\langle 1 , x^2 \rangle$:

$$\langle 1 , x \rangle = \int_{[-\pi,\pi]} x = 0$$
$$\left\langle 1 , x^2 \right\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} x^2 = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Per tant, com que $\langle 1 , 1 \rangle = m([-\pi, \pi]) = 2\pi$

$$f_1 = x$$
$$g_1 = x^2 - \frac{2\pi^3}{6\pi} = x^2 - \frac{\pi^2}{3}.$$

Ara hem de buscar una base ortogonal de l'espai $\langle f_1, g_1\rangle$. Podríem tornar a aplicar Gram-Schmidt, però no cal perquè

$$\langle f_1\,, g_1\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} x^3 - \frac{\pi^2}{3}x = 0$$

per tant f_1 i g_1 ja són ortogonals.

Tenim, doncs, que 1, f_1 i g_1 són una base ortogonal de $\langle 1, x, x^2\rangle$. Per a que siguin una base ortonormal les hem de normalitzar. Com que $\langle 1\,, 1\rangle = \|1\|^2 = \frac{1}{2\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$[1] té norma 1. De la mateixa manera, com que

$$\|f_1\|^2 = \langle f_1\,, f_1\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} f_1^2 = \int_{[-\pi,\pi]} x^2 = \frac{2\pi^3}{3}$$

la funció

$$\tilde{f}_1 = \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}}x$$

té norma 1.

De la mateixa manera, com que

$$\|g_1\|^2 = \langle g_1\,, g_1\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} g_1^2 = \int_{[-\pi,\pi]} x^4 - \frac{2\pi^2}{3}x^2 + \frac{\pi^4}{9} = \frac{2\pi^5}{5} - \frac{4\pi^5}{9} + \frac{2\pi^5}{9} = \frac{8\pi^5}{45}$$

la funció

$$\tilde{g}_1 = \sqrt{\frac{45}{8\pi^5}}g_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2\pi^5}}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)$$

té norma 1.

Així doncs, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\tilde{f}_1$ i $\tilde{g}_1$ són una base ortonormal de $\langle 1, x, x^2\rangle$.

— ∗ —

El subespai $F := \langle 1, x, x^2\rangle \subseteq L^2([-\pi,\pi])$ és tancat per ser de dimensió finita, per tant la projecció sobre seu està ben definida. Volem calcular la projecció de $x \mapsto \sin 2x$, que denotarem simplement per $\sin 2x$, sobre F, que és el polinomi p de grau 2 o menys que és més a prop de $\sin 2x$. És a dir, $p = P_F \sin 2x$. Sabem que això és equivalent a dir $p - \sin 2x \in F^\perp$. Per bilinealitat, és suficient requerir que $p - \sin 2x$ sigui ortogonal als elements d'una base de F. A l'apartat anterior hem calculat una base ortonormal de F, la qual cosa simplifica molt els càlculs. Denotem

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$e_1 = \tilde{f}_1$$
$$e_2 = \tilde{g}_1$$

[1] Amb això el que volem dir és la funció 1 multiplicada per $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Les condicions que ha de satisfer p són

$$\langle p - \sin 2x \,, e_0 \rangle = \langle p - \sin 2x \,, e_1 \rangle = \langle p - \sin 2x \,, e_2 \rangle = 0.$$

Si $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ aleshores, per l'ortonormalitat de la base que hem triat,

$$\langle e_i \,, p \rangle = a_i$$

per $i = 0, 1, 2$. Aleshores les equacions que ha de satisfer p són

$$\langle p - \sin 2x \,, e_i \rangle = \langle p \,, e_i \rangle - \langle \sin 2x \,, e_i \rangle = 0$$

per a $i = 0, 1, 2$. Per tant només hem de calcular els tres productes $\langle \sin 2x \,, e_i \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \sin 2x \,, e_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-\pi,\pi]} \sin 2x = 0 \\
\langle \sin 2x \,, e_1 \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}} \int_{[-\pi,\pi]} x \sin 2x \\
&= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}} \left(\frac{-\pi \cos 2\pi - \pi \cos(-2\pi)}{2} + \frac{1}{2} \int_{[-\pi,\pi]} \cos 2x \right) \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \\
\langle \sin 2x \,, e_2 \rangle &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2\pi^5}} \left(\int_{[-\pi,\pi]} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \sin 2x \right) \\
&= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2\pi^5}} \int_{[-\pi,\pi]} x^2 \sin 2x \\
&= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2\pi^5}} \\
&= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2\pi^5}} \left(\frac{-\pi^2 \cos 2\pi + (-\pi)^2 \cos(-2\pi)}{2} + \int_{[-\pi,\pi]} x \cos 2x \right) \\
&= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2\pi^5}} \left(\frac{\pi \sin 2\pi + \pi \sin(-2\pi)}{2} - \frac{1}{2} \int_{[-\pi,\pi]} \sin 2x \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Per tant el polinomi que busquem és

$$p = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} x.$$