Topologia de Varietats: Resultats més rellevants

Arnau Mas

2020

1 Varietats

1.1 Definicions

Definició 1.1 (Carta)**.** Una *carta* al voltant d'un punt $x \in M$ és un entorn obert U d'x i un homeomorfisme $\phi\colon U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. △

Definició 1.2 (Varietat)**.** Un espai topològic M és una *varietat* si

(*i*) M és Hausdorff i segon numerable,

(*ii*) hi ha un conjunt de cartes (U_α, ϕ_α) tals que $\{U_\alpha\}_\alpha$ és un recobriment de M i si $U_\alpha \cup U_\beta \neq \emptyset$ aleshores l'aplicació canvi de carta

$$\phi_\alpha^\beta\colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}\circ\phi_\beta} \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

és un homeomorfisme. El conjunt d'aquestes cartes s'anomena un *atles*.

Quan totes les aplicacions de canvi de carta són de classe C^k parlem d'una varietat de classe C^k. En el cas C^∞ diem que la varietat és *llisa*. En el cas C^0 se sol parlar de varietat topològica. △

Exemple 1.1. $\mathbb{R}^k$ és una varietat de dimensió k amb l'atles $\{(\mathbb{R}^k, \mathrm{id})\}$. ▽

Exemple 1.2 (Projecció estereogràfica)**.** $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ és una varietat de dimensió n. Un atles és la projecció estereogràfica:

$$\begin{aligned}\phi_\delta\colon S^n - p_\delta &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{\delta}{\delta - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\phi_\delta^{-1}\colon \mathbb{R}^n &\to S^n - p_\delta \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y, \delta(\|y\|^2 - 1))\end{aligned}$$

on $p_\delta = (0, \dots, 0, \delta)$ per $\delta = 1$ i $\delta = -1$. ▽

Definició 1.3 (Varietat amb frontera)**.** És la mateixa definició que varietat però ara les cartes tenen imatge al semiespai $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$. El conjunt de punts tals que la seva imatge per alguna carta és a $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ és la frontera de la varietat, ∂M. △

Observació 1.1. Es pot demostrar que si la imatge per alguna carta d'algun punt és a $0 \times \mathbb{R}^{n+1}$ també ho és per qualsevol altra carta, per tant que la frontera d'una varietat està ben definida. $\triangledown$

1.2 Aplicacions llises

Definició 1.4 (Funció llisa)**.** Una aplicació $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ es diu *llisa* si per tota carta (U, ϕ) de M l'aplicació $\phi^{-1} \circ f\colon \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és de classe C^∞. $\triangle$

Definició 1.5 (Aplicació llisa)**.** Una aplicació $f\colon M \to N$ entre varietats és una *funció llisa* si per tota carta (U, ϕ) de M i carta (V, ψ) de N tal que $f(U) \subseteq V$ l'aplicació $\phi^{-1} \circ f \circ \psi\colon \phi(U) \to \psi(V)$ és de classe C^∞. El conjunt de funcions llises d'M s'escriu $C^\infty(M)$ o $\Omega^0(M)$ (és el conjunt de les 0-formes de M). $\triangle$

Exemple 1.3. (i) Les funcions constants són llises.

(ii) Les components d'una carta, és a dir $\phi_i = \pi_i \circ \phi$ són llises.

$\triangledown$

Definició 1.6 (Difeomorfisme)**.** Una aplicació llisa $f\colon M \to N$ és un *difeomorfisme* si és invertible i la inversa $f^{-1}\colon N \to M$ és llisa. El conjunt d'aplicacions llises entre M i N s'escriu $C^\infty(M, N)$. $\triangle$

Observació 1.2. (i) La composició d'aplicacions llises és llisa.

(ii) La composició de difeomorfismes és un difeomorfisme, per tant els difeomorfismes d'una varietat en ella mateixa formen un grup, $\mathrm{Diff}(M)$.

$\triangledown$

1.3 Subvarietats

Definició 1.7 (Subvarietat)**.** Donat $N \subseteq M$ ($\dim M = m$), diem que una carta (U, ϕ) d'M és una linearització local d'N si $\phi(U \cap N)$ és difeomorfa a $U' \cap (\mathbb{R}^n \times 0)$ on U' és un obert de R^n. Si N es pot recobrir amb linearitzacions locals diem que és una subvarietat de M. Aquest recobriment indueix un atles per a N: si (U_α, ϕ_α) és una de les cartes del recobriment aleshores $(U_\alpha \cap N, (\pi_1 \times \ldots \pi_n) \circ \phi_\alpha|_N)$ és una carta de N. $\triangle$

Exemple 1.4. (i) Qualsevol obert U d'una varietat M n'és una subvarietat de la mateixa subvarietat.

(ii) S^n és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\triangledown$

1.4 Construccions bàsiques

Definició 1.8 (Producte)**.** El producte de dues varietats $M \times N$ té una estructura diferenciable natural: si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ és l'atles d'M i $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ l'atles d'N aleshores l'atles d'$M \times N$ és $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{\alpha \in I, \beta \in J}$. Les projeccions $\pi_M\colon M \times N \twoheadrightarrow M$ i $\pi_N\colon M \times N \twoheadrightarrow N$ són llises. $\triangle$

Definició 1.9 (Quocient per l'acció d'un grup). Si un grup discret G actua sobre M —és a dir, hi ha un morfisme $\rho\colon G \to \mathrm{Diff}(M)$— aleshores el quocient M/G és una varietat amb la mateixa dimensió que M si l'acció és lliure (si $\phi(g)$ té punts fixos aleshores $\phi(g) = \mathrm{id}_M$) i pròpia (per tot compacte $K \subseteq M$ el conjunt $\{g \in G \mid \rho(g)(K) \cap K \neq \emptyset\}$ és finit). En aquest cas la projecció $\pi\colon M \twoheadrightarrow M/G$ és llisa. △

1.5 Classificació de varietats compactes en dimensió petita

- *Dimensió 0.* Són unions finites de punts.
- *Dimensió 1.* Unions disjuntes finites de S^1 (sense frontera) i de $[0,1]$
- *Dimensió 2.* En el cas sense frontera són sumes connexes de S^2, el torus $S^1 \times S^1$ (cas orientable) i de $\mathbb{RP}^2$ (cas no orientable).

2 Espai Tangent

2.1 Vectors tangents

Definició 2.1 (Vector tangent)**.** Un vector tangent en el punt $x \in M$ és una aplicació $X\colon \Omega^0(U) \to \mathbb{R}$ on U és un entorn de X que

(i) és lineal,

(ii) satisfà la regla de Leibniz, és a dir, per $f, g \in \Omega^0(U)$,

$$X(fg) = X(f)g(x) + f(x)X(g),$$

(iii) si $U_1 \subseteq U$ i $U_2 \subseteq U$ són entorns oberts de X tals que $f|_{U_1 \cap U_2} = g|_{U_1 \cap U_2}$ aleshores $X(f) = X(g)$, o, dit d'un altra manera, X es pot traslladar a una funció $\mathcal{O}_x \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{O}_x$ és el resultat d'identificar a $\Omega^0(M)$ les funcions que coincideixen en un entorn de x, el *germen* de funcions diferenciables en x.

△

La intució és que $X(f)$ és la derivada de f en la direcció X en el punt x.

Definició 2.2 (Espai tangent)**.** El conjunt de vectors tangents a un punt x és un espai vectorial de la mateixa dimensió que M i s'escriu T_xM. △

Definició 2.3 (Base induïda per una carta)**.** Una carta (U, ϕ) al voltant del punt x indueix una base de T_xM:

$$\begin{aligned} \partial_i^\phi\colon \Omega^0(U) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \partial_i(f \circ \phi^{-1})(0) \end{aligned}$$

Un vector tangent s'expressa en aquesta base com

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(\phi_i)\partial_i^\phi$$

on $\phi_i = \pi_i \circ \phi$. △

Definició 2.4 (Aplicació tangent)**.** Donada una aplicació llisa $f \in C^\infty(M, N)$, l'aplicació lineal tangent a f en x (diferencial d'f en x, pushforward d'f en x), T_xf és

$$\begin{aligned} T_xf\colon T_xM &\to T_{f(x)}N \\ X &\mapsto (g \mapsto X(g \circ f)). \end{aligned}$$

Escollint la carta (U,ϕ) al voltant d'x i (V,ψ) al voltant de $f(x)$ es té

$$T_x f(\partial_i^\phi) = \sum_{j=1}^m \partial_i(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x))\partial_j^\psi$$

és a dir, que en les bases induïdes per ϕ i ψ, la matriu de T_f és la matriu de de la diferencial de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$. △

2.2 El fibrat tangent

Definició 2.5 (Fibrat tangent)**.** El fibrat tangent TM és el conjunt $\bigsqcup_{x\in M} T_xM$. TM és una varietat de dimensió $2\dim M$. Donada una carta (U,ϕ) d'M, s'indueix una carta (TU,Φ) on

(*i*) $TU := \pi^{-1}(U)$ on $\pi\colon TM \twoheadrightarrow M$ és la projecció

(*ii*) Φ es defineix com

$$\begin{aligned}\Phi\colon TU &\to \phi(U)\times\mathbb{R}^n\\ X &\mapsto (\phi(\pi(X)), X(\phi_1),\dots,X(\phi_n)).\end{aligned}$$

△

Definició 2.6 (Aplicació tangent)**.** Donada $f \in C^\infty(M,N)$ es defineix $Tf\colon TM \to TN$ com $Tf(X) := T_{\pi(X)}(X)$, que fa commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi"] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

△

Proposició 2.1. El fibrat tangent és functorial, és a dir, $T(f\circ g) = Tf \circ Tg$ i $T\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$. En particular, si f és un difeomorfisme aleshores Tf també i $T(f^{-1}) = (Tf)^{-1}$.

Proposició 2.2. Si N és una subvarietat d'M aleshores TN és una subvarietat de TM.

2.3 Immersions i submersions. Transversalitat

Definició 2.7 (Submersió i immersió)**.** Una aplicació llisa $f \in C^\infty(M,N)$ és una *immersió* si per tot $x \in M$ T_xf és injectiva. Si en canvi T_xf és exhaustiva per tot $x \in M$, f és una *submersió*. △

Observació 2.1. Un difeomorfisme local, és a dir, $f \in C^\infty(M,N)$ tal que tot punt té un entorn U de manera que $f|_U$ és un difeomorfisme entre U i $f(U)$ són submersions i immersions. Al revés també és veritat: si T_xf és invertible, aleshores hi ha un entorn U d'x tal que f és un difeomorfisme entre U i $f(U)$ (Teorema de la Funció Inversa). ▽

Definició 2.8 (Punt crític i punt regular)**.** Donada $f \in C^\infty(M,N)$, un punt $x \in M$ és *regular* si T_xf és exhaustiva, i *crític* si no és regular, és a dir, si T_xf és exhaustiva.

Un punt $y \in N$ és un *valor regular* si i només si tot element de $f^{-1}(y)$ és regular. En canvi y és un *valor crític* si no és regular, és a dir, si hi ha algun punt de $f^{-1}(y)$ crític. △

Observació 2.2. Un valor regular no ha de ser un valor, de fet, tot punt de $N - f(M)$ és un valor regular. En canvi els valors crítics sempre són valors, i de fet el conjunt de valors crítics és exactament la imatge del conjunt de punts crítics. $\triangledown$

Teorema 2.3 (Sard)**.** El conjunt de valors crítcs té mesura nul·la al codomini, o, equivalentment, el conjunt de valors regulars és dens al codomini.

Teorema 2.4 (Forma local de les immersions i les ubmersions)**.** Sigui M una varietat de dimensió m i N una varietat de dimensió n. Si $T_x f$ és injectiva (per tant $m \leq n$), hi ha una carta (U, ϕ) al voltant d'x i una carta (V, ψ) al voltant d'$f(x)$ tal que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \iota_{\text{can}}$ on ι_{can} és la immersió canònica de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$. Si $T_x f$ és exhaustiva (per tant $m \geq n$), es té $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \sigma_{\text{can}}$ on σ_{can} és la submersió canònica de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5. Si $f\colon M \to N$ és llisa i $y \in N$ és un valor regular aleshores $Z = f^{-1}(y)$ és una subvarietat de M amb

$$\dim Z = \dim M - \dim N$$

i a més $T_x Z = \ker T_x f$.

Exemple 2.1. Amb això apareixen moltes subvarietats de $M_n(\mathbb{R})$:

(*i*) $GL_n(\mathbb{R})$. $GL_n(\mathbb{R})$ és la preimatge de $\mathbb{R} - 0$ per det, per tant obert i per tant subvarietat de dimensió $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

(*ii*) $SL_n(\mathbb{R})$. $SL_n(\mathbb{R})$ és $\det^{-1}(1)$. En general, si $B \in GL_n(\mathbb{R})$ es té

$$T_B \det(A) = \det(B) \operatorname{tr}(B^{-1}A)$$

per tant és exhaustiva per tot $B \in GL_n(\mathbb{R})$. En particular ho és per $SL_n(\mathbb{R})$, de manera que $SL_n(\mathbb{R})$ és una subvarietat de dimensió $n^2 - 1$ i $T_B SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(B^{-1}A) = 0\}$.

(*iii*) $O(n)$. Per definició $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = 1\}$. Considerem l'aplicació de simetrització:

$$\begin{aligned} s\colon M_n(\mathbb{R}) &\to S_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^\top A \end{aligned}$$

on $S_n(\mathbb{R}) = \{B \in M_n(R) \mid B = B^\top\} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Aleshores $T_A s(B) = A^\top B + B^\top A$, que és exhaustiu a $O(n)$:

$$T_A s\left(\frac{1}{2}AC\right) = C$$

amb $A \in O(n)$ i $C \in S_n(\mathbb{R})$. Per tant $O(n) = s^{-1}(1)$ és una subvarietat i

$$\begin{aligned} \dim O(n) &= \dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R}) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

$\triangledown$

Definició 2.9 (Transversalitat)**.** Diem que $f\colon M \to N$ és transversa a una subvarietat $Y \subseteq N$ si per tot $y \in Y$ es té

$$\operatorname{im} T_x f + T_{f(x)} Y = T_x N.$$

(Intuïtivament, que $f(M)$ i N no són tangents) $\triangle$

Teorema 2.6. Si $f\colon M \to N$ és transversa a una subvarietat $Y \subseteq N$ aleshores $f^{-1}(Y)$ és una subvarietat de M i

$$\dim f^{-1}(Y) = \dim M - \dim N + \dim Y.$$

2.4 Camps vectorials

Definició 2.10 (Camp vectorial)**.** Un camp vectorial és una secció llisa de la projecció $TM \xrightarrow{\pi} M$, és a dir, una aplicació $X\colon M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}M$.

Equivalentment, un camp vectorial és una derivació de $\Omega^0(M)$, és a dir, una aplicació $X\colon \Omega^0(M) \to \Omega^0(M)$ lineal i que satisfà la regla de Leibniz. △

Observació 2.3. (*i*) En un obert de carta U, un camp vectorial sobre una varietat de dimensió n ve donat per n funcions $X^i\colon U \to \mathbb{R}$, i definint $X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x)\partial_i^\phi$. Globalment això només es pot fer per varietats paral·lelitzables, tals que $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$, en les que hi ha n camps linealment independents en tot punt.

(*ii*) El conjunt de camps vectorials és un $\mathbb{R}$-espai vectorial, en general de dimensió finita, i un $\Omega^0(M)$-mòdul.

(*iii*) En general la composició de camps vectorials (entesos com a derivacions) no és un camp vectorial, però si que ho és el commutador $[X, Y] = XY - YX$, que dóna estructura d'àlgebra de Lie: és una operació bilineal, antisimètrica i que satisfà la identitat de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Localment es té

$$[X, Y]^i = X^j \partial_j Y^j - Y^j \partial_j X^i.$$

▽

— ∗ —

Teorema 2.7 (Flux d'un camp)**.** Donat un camp vectorial X sobre M existeix un obert $W \subseteq M \times \mathbb{R}$ i una aplicació llisa $\gamma\colon W \to M$ tal que W és un entorn de $(x, 0)$ per tot $x \in M$ i a W es té

$$\partial_t \gamma(x, t) = X(\gamma(x, t))$$

i $\gamma(x, 0)$, és a dir, γ és solució del problema de Cauchy.

Si M és compacta i sense frontera aleshores $W = M \times \mathbb{R}$ i en particular per tot $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(\cdot, t) = \gamma_t$ és un difeomorfisme d'M.

Definició 2.11 (Derivada de Lie)**.** Donat el camp vectorial X i γ el seu flux, definim la derivada de Lie de $f\Omega^0(M)$ com

$$\mathcal{L}_X(f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma_t(x)) - f(x)}{t}$$

(la intuició és que $\gamma_t(x)$ és com $x + \epsilon$: x desplaçat una mica en la direcció que marca el camp X). △

Això dóna un isomorfisme entre els camps vectorials entesos com a seccions i els camps entesos com a derivacions de $\Omega^0(M)$.

3 Àlgebra multilineal

3.1 Producte tensorial

Definició 3.1 (Producte tensorial)**.** El producte tensorial de dos espais vectorials V i W és l'espai vectorial $V \otimes W$ amb la propietat de que per tota aplicació bilineal $\beta\colon V \times W \to Z$ hi ha una única aplicació lineal $\hat{\beta}\colon V \otimes W \to Z$ tal que $\beta = \hat{\beta} \circ \iota$, on $\iota\colon V \times W \to Z$ és la inclusió canònica (que és part de la definició). Així $V \otimes W$ realitza l'isomorfisme

$$\mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, Z)) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W, Z).$$

En termes concrets, $V \otimes W$ te dimensió $\dim V \dim W$ i donades bases $\{e_i\}_{i=1}^{\dim V}$ i $\{f_j\}_{j=1}^{\dim W}$ té com a base

$$\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,j=1}^{i=\dim V, j=\dim W}$$

amb les propietats

(*i*) $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

(*ii*) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

(*iii*) $(v_1 + v_2) \otimes v = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

$\triangle$

Observació 3.1. Els tensors (elements del producte tensorial) de la forma $v \otimes w$ amb $v \in V$ i $w \in W$ s'anomenen tensors elementals, però no tots els tensors són elementals. $\triangledown$

Observació 3.2. Es tenen els isomorfismes

(*i*) $V \otimes W \cong W \otimes V$

(*ii*) $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$

(*iii*) $\mathbb{R} \otimes V \cong V$

(*iv*) $\langle 0 \rangle \otimes V \cong \langle 0 \rangle$

(*v*) $V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V, V)$

$\triangledown$

3.2 Àlgebra tensorial

Denotem el producte tensorial de V amb ell mateix n vegades per $T^n(V)$. Aleshores tenim una aplicació bilineal

$$\otimes\colon T^n(V) \times T^m(V) \to T^{n+m}(V).$$

Agafem la "clausura" de tots aquests espais,

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$$

que és un espai vectorial amb un producte $\otimes\colon T(V) \times T(V) \to T(V)$, per tant una àlgebra, que s'anomena l'*àlgebra tensorial.*

3.3 Àlgebra alternada

Tenim una acció del grup simètric $\mathfrak{S}_n$ sobre $T^n(V)$, que sobre els tensors elementals és

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Això dóna lloc a dos subespais rellevants, el dels tensors simètrics, $S^n(V) = T^n(V)^{\mathfrak{S}_n}$ i el dels tensors antisimètrics:

$$\bigwedge^n V := \{x \in T^n(V) \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n\colon \sigma x = (-1)^\sigma x\}.$$

Podem "antisimetritzar" un tensor definint

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

i aleshores si e_i és una base de V els tensors $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ formen una base de $\bigwedge^n V$, que es demostra que té dimensió $\binom{\dim V}{n}$ quan $n \leq \dim V$ i dimensió 0 sino. Aleshores es tenen els isomorfismes

(*i*) $\bigwedge^{\dim V - n} V \cong \bigwedge^n V$

(*ii*) $\bigwedge^0 V \cong \mathbb{R}$, per tant $\bigwedge^{\dim V} V \cong V$

(*iii*) $\bigwedge^1 V \cong V$

L'operació $\wedge$ extesa a tot $\bigwedge^n V$ dóna una aplicació bilineal alternada

$$\wedge \colon \bigwedge^n V \times \bigwedge^m V \to \bigwedge^{n+m} V.$$

Aleshores, igual com amb el producte tensorial, definim l'àlgebra alternada com

$$\bigwedge V := \bigotimes_{n=0}^{\dim V} \bigwedge^n V$$

que és una subàlgebra de $T^n(V)$.

L'utilitat del producte alternat és que l'espai $\bigwedge^n V^*$ és l'espai de les formes multilineals alternades, i és el que ens permetrà definir les formes diferencials sobre una varietat.

4 Fibrats vectorials

El concepte generalitza el del fibrat tangent.

Definició 4.1 (Fibrat vectorial)**.** Un fibrat vectorial (de rang n) és un triple $E \xrightarrow{\pi} B$ on E i B són varietats (diferenciables) i π una aplicació llisa exhaustiva de manera que

(*i*) per tot $x \in B$ la fibra $\pi^{-1}(x)$ és un espai vectorial,

(*ii*) E és localment trivial, és a dir, hi ha un recobriment de B per oberts U_α amb difeomorfismes $h_\alpha \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ que fan commutar

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, two heads, "\pi"] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\
B & U_\alpha \arrow[l, hook'] &
\end{tikzcd}$$

i tal que $h_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$ és un isomorfisme entre la fibra $\pi^{-1}(x)$ i $x \times \mathbb{R}^n$.

△

És a dir, la part de fibrat fa referència a que l'espai localment és com un producte $B \times \mathbb{R}^n$ i π actua com una projecció del producte. La part vectorial és el requeriment de que les fibres siguin espais vectorials.

Exemple 4.1. (*i*) El fibrat trivial de dimensió n, $M \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_1} M$.

(*ii*) El fibrat vectorial $TM \xrightarrow{\pi} M$.

(*iii*) Sobre S^1 tenim el fibrat tangent, TS^1 que és trivial per ser S^1 parallelitzablem i la cinta de Möbius, que es pot interpretar com un fibrat. No són isomorfs.

▽

Definició 4.2 (Morfisme de fibrats vectorials)**.** Un morfisme de fibrats vectorials $E_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$ i $E_2 \xrightarrow{\pi_2} B_2$ és una parella d'aplicacions llises $f\colon B_1 \to B_2$ i $\hat{f}\colon E_1 \to E_2$ tals que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, two heads, "\pi_1"] & E_2 \arrow[d, two heads, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

i $\hat{f}_x := \hat{f}|_{\pi_1^{-1}(x)}$ és una aplicació lineal entre les fibres $\pi_1^{-1}(x)$ i $\pi_2^{-1}(f(x))$.

Si f i $\hat{f}$ són difeomorfismes aleshores tenim un isomorfisme de fibrats. △

Teorema 4.1. Si $(f, \hat{f})$ és un morfisme entre fibrats del mateix rang, f és un difeomorfisme i $\hat{f}_x$ és un isomorfisme entre les fibres per tot x aleshores $(f, \hat{f})$ és un isomorfisme de fibrats.

5 Formes diferencials

5.1 Definició

Les construccions sobre espais vectorials es poden pujar a fibrats fibra a fibra, així podem parlar del fibrat dual o de les potències alternes d'un fibrat. En el cas del fibrat tangent tenim el *fibrat cotangent,* T^*M, i les seves potències alternades, $\bigwedge^p T^*M \cong (\bigwedge^p TM)^*$.

Definició 5.1 (Forma diferencial)**.** Una p-forma diferencial és una secció llisa del fibrat $\bigwedge^p T^*M$. El conjunt de les p-formes diferencials és $\Omega^p(M)$. Localment una forma ω ens dóna en cada punt una forma multilineal alternada sobre T_xM,

$$\omega_x(v_1, \dots, v_p).$$

També podem fer-la actuar globalment sobre camps vectorials:

$$\omega(X_1, \dots, X_p)(x) = \omega_x(X_1(x), \dots, X_p(x)).$$

△

Observació 5.1. $\Omega^p(M)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i un $C^\infty(M)$-mòdul, en els dos casos de dimensió, en general, infinita. ▽

Exemple 5.1 (Gradients)**.** Donada una funció llisa $f\colon M \to \mathbb{R}$, la seva aplicació tangent Tf és una 1-forma, que en aquest context se sol denotar df. En concret, si tenim una carta $(x^1, \dots, x^n)$ (en el context de les formes es fa servir aquesta notació), tenim, localment, les formes $dx^1, \dots, dx^n$, que són una base de T_p^*M i per tant els seus productes alternats són una base de $\bigwedge^p T^*M$, és a dir que localment una p-forma s'escriu

$$\omega = \omega_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

▽

5.2 Pullbacks i el complex de de Rham

Definició 5.2 (Pullback)**.** El pullback d'una aplicació llisa $f\colon M \to N$ és l'aplicació

$$\begin{aligned} f^*\colon \Omega^p(N) &\to \Omega^p(M) \\ \omega &\mapsto f^*\omega \end{aligned}$$

on

$$f^*\omega_x(v_1, \dots, v_n) :=$$
$$\omega_{f(x)}(T_x f(v_1) \dots, T_x f(v_n))$$

△

Proposició 5.1. Es té que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ i $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{\Omega^p(M)}$ per tant el pullback és un functor contravariant.

A partir del producte exterior tenim un producte exterior de formes diferencials,

$$\wedge \colon \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$$

que és bilineal, associatiu i semicommutatiu, és a dir, si $\alpha \in \Omega^p(M)$ i $\beta \in \Omega^q(M)$ aleshores $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$. També $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

Amb això definim una generalització del gradient: la derivada exterior

$$d \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

que localment és

$$\omega = d\omega_{i_1,\dots,i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Proposició 5.2. La derivada exterior compleix

(*i*) $d(f^*\omega) = f^* d\omega$

(*ii*) $d^2 = 0$

(*iii*) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$

(*iv*) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$

on p és el rang $d'\alpha$.

Definició 5.3 (Complex de de Rham)**.** El complex de de Rham és la successió

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{\dim M}(M) \to 0$$

△

Definició 5.4 (Formes exactes i tancades)**.** Una forma $\omega \in \Omega^p(M)$ és *tancada* si $d\omega = 0$ i és *exacta* si hi ha $\theta \in \Omega^{p-1}(M)$ tal que $d\theta = \omega$. Tota forma exacta és tancada, però al revés no. El conjunt de formes tancades és $Z^p(M) \subseteq \Omega^p(M)$ i el de les formes exactes és $B^p(M) = d\Omega^{p-1}(M) \subseteq \Omega^p(M)$. Tots dos són subespais vectorials. △

Definició 5.5 (Grups de cohomologia de de Rham)**.** El p-èssim grup de cohomologia de de Rham és el quocient

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M).$$

△

5.3 Formes amb suport compacte

Definició 5.6 (Suport)**.** El *suport* d'una forma és

$$\operatorname{supp}\omega := \overline{\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}}$$

els punts on ω no és la forma nul·la. △

Observació 5.2. Es té

(*i*) $\operatorname{supp}(\alpha + \beta) \subset \operatorname{supp}(\beta) \cup \operatorname{supp}(\alpha)$

(*ii*) $\operatorname{supp}(\alpha \wedge \beta) = \operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta)$

▽

Definició 5.7. El conjunt de formes de suport compacte és $\Omega_c(M)$. Els grups de cohomologia d'aquest complex s'escriuen $H_c^p(M)$. △

Observació 5.3. Śi M és compacta no hi ha diferència entre les formes amb suport compacte i les que no, perquè totes tenen suport compacte. ▽

6 Àlgebra homològica

6.1 Successions exactes

Definició 6.1 (Successió exacta)**.** La successió $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ és exacta en B si $\operatorname{im} f = \ker g$. △

Observació 6.1 (Successió exacta curta)**.** Dir que la successió

$$0 \xrightarrow{f_0} A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \xrightarrow{f_3} 0$$

és exacta equival a dir que f_1 és injectiva, que f_2 és exhaustiva i que $\operatorname{im} f_1 = \ker f_2$. ▽

6.2 Complexos de cocadenes

Definició 6.2 (Complex de cocadenes)**.** Una successió $\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} X^n \xrightarrow{d_n} X^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$ és un *complex de cocadenes* si $d_{n+1} \circ d_n = 0$, per tant si $\operatorname{im} d_n \subseteq d_{n+1}$. S'escriu $(X^\bullet, d)$ △

Definició 6.3 (Morfisme de complexos)**.** Un morfisme entre els complexos $(X^\bullet, d_X)$ i $Y^\bullet, d_Y)$ és una família de morfismes $f_n \colon X^n \to Y^n$ tals que $f^{n+1} \circ d_X = d_Y \circ f^n$. △

Definició 6.4 (Homotopia de complexos)**.** Dos morfismes de complexos f, g entre $(X^\bullet, d)$ i $(Y^\bullet, d)$ són homòtops si hi ha un morfisme $K \colon X^\bullet \to Y^{\bullet-1}$ tal que $f^n - g^n = K^n \circ d_Y + d_X \circ K^{n+1}$. △

Proposició 6.1. Si f i g són dos operadors entre complexos homòtops aleshores són iguals en cohomologia.

6.3 Axiomes de la cohomologia

Una teoria de cohomologia és una successió de functors contravariants $H^n \colon \mathsf{Top}^2 \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ i un morfisme de connexió $\delta_{(X,A)} \colon H^n(A) \to H^{n+1}(X, A)$ $(H^n(A) := H^n(A, \emptyset))$ tals que

(i) *invariància homotòpica:* si f i g són homòtopes aleshores $H^n(f) = H^n(g)$„

(ii) hi ha una successió exacta

$$0 \longrightarrow H^0(X, A) \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(A) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A) \longrightarrow \cdots$$

(iii) *successió de Mayer-Vietoris:* si $X = U \cup V$ amb U i V oberts aleshores hi ha una successió exacta

$$0 \to H^0(X) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow \cdots$$

(iv) *axioma de Milnor:*

$$H^n\left(\bigsqcup_k (X_k, A_k)\right) = \bigoplus_k H^n(X_k, A_k)$$

(v) *axioma de la dimensió:* $H^0(*) \cong \mathbb{R}$ i $H^n(*) \cong 0$ per $n \geq 1$.

7 Orientabilitat i integració

Definició 7.1 (Orientabilitat)**.** Una varietat és *orientable* si té un atles compatible amb la seva estructura diferenciable pel qual la diferencial de cada aplicació de canvi de carta té determinant positiut. Una varietat amb un atles així és una varietat *orientada*. △

Proposició 7.1. Una varietat és orientable si i només si té una forma volum, és a dir, una forma de $\Omega^{\dim M}(M)$ que no s'anul·la en cap punt.

7.1 Integració de formes

Definició 7.2 (Partició de la unitat)**.** Una partició de la unitat subjecte a un recobriment $\{U_\alpha\}_\alpha$ de M és una família $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to [0, \infty)$ tals que $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subseteq U_\alpha$ i $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$ i tal que cada punt té un entorn que només interseca un nombre finit de $\operatorname{supp} \rho_\alpha$. △

Definició 7.3 (Integral d'una forma)**.** La integral d'una forma $\omega \in \Omega_c^n(M)$ on M és una varietat orientada amb un atles $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ és

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha^*(\rho_\alpha \omega)$$

on ρ és una partició de la unitat subjecte a l'atles. o localment en un obert de carta:

$$\int_{U_\alpha} \omega = \int_{\phi(U_\alpha)} \omega_{\phi_\alpha^{-1}(x)}(\partial_1^{\phi_\alpha} \wedge \cdots \wedge \partial_n^{\phi_\alpha})\, dx$$

△

Teorema 7.2 (Fórmula d'Stokes)**.** En una varietat orientada de dimensió n es té, per tot $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Teorema 7.3. Una forma $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ és tancada si i només si per tota subvarietat de M difeomorfa a $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^k$, D,

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

7.2 Dualitat de Poincaré

Teorema 7.4 (Dualitat de Poincaré)**.** Si M és compacta i orientada, l'aplicació

$$\begin{aligned} \Phi \colon H^{n-k}(M) \times H^n(M) &\to \mathbb{R} \\ \alpha, \beta &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

és una dualitat perfecta (és una forma bilineal no degenerada).

Proposició 7.5. Si M és compacta i orientada, $H^k(M)^* \cong H^{n-k}(M)^* \cong H^{n-k}(M)$.

Observació 7.1. Si M és connexa, orientada i compacta $H^0(M) \cong H^n(M) \cong \mathbb{R}$. ▽

Observació 7.2. Si M és compacta i orientada i de dimensió parella $2n$ aleshores $H^n(M) \cong H^n(M)^*$ per tant hi ha una forma bilineal no degenerada $H^n(M) \times H^n(M) \to \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$. Com que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{n^2} \alpha \wedge \beta$, per n parell és simètrica i per n senar antisimètrica.

(i) n *parell*: pel teorema de Sylvester, hi ha n possibles formes, una per cada signatura $(l, n-l)$.

(ii) n *senar*: la forma és antisimètrica i és un resultat general que només n'hi ha una, la forma simplèctica, i que només pot existir en espais de dimensió parella, és a dir, $\dim H^n(M)$ és parell.

$\triangledown$

Observació 7.3 (Cohomologia de les superfícies compactes orientables)**.** Si la superfície és conexa aleshores $H^0(M) \cong H^2(M) \cong \mathbb{R}$. A més $H^1(M)$ té dimensió parella, és a dir $\dim H^1(M) = 2g$ on g és el gènere de la superfície. $\triangledown$

Teorema 7.6 (Dualitat de Poincaré no compacta)**.** Si M és una varietat sense frontera i orientada la forma bilineal

$$\begin{aligned} \Phi \colon H_c^k(M) \times H^{n-k}(M) &\to \mathbb{R} \\ \alpha, \beta &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

és no degenerada. Per tant $H^{n-k}(M)^* \cong H^{n-k}(M) \cong H_c^k(M)$.

Proposició 7.7. Si la característica d'Euler-Poincaré d'una varietat,

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \dim H^k(M)$$

és diferent de zero aleshores tot camp vectorial de la varietat té almenys un zero.

8 Cohomologies

8.1 $\mathbb{R}^n$ (i qualsevol espai contràctil)

$$H^p(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ si } p \geq 1 \end{cases}$$

En el cas compacte, tots els grups són zero. Però la cohomologia amb suport compacte d'un punt és la mateixa que en el cas general, per tant la cohomologia amb suport compacte *no* és invariant per homotopia.

8.2 Esferes

$$H^p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } p = 0 \text{ o } p = n \\ 0 \text{ si } 1 \leq p < n \text{ o } p > n \end{cases}$$

Per $n = 0$, $H^0(S^0) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

8.3 Espais projectius

$H^p(\mathbb{PR}^n) \cong H^p(S^n)$ per $p < n$ i $H^n(\mathbb{PR}^n) \cong \mathbb{R}$ quan n és senar i $H^n(\mathbb{PR}^n) \cong 0$ quan n és parell.