Passejos aleatoris en grafs

Gerard Castro, Kim López, Gal·la Mora, Arnau Mas

5 de desembre de 2018

Esquema

Introducció

Resultats principals

Motivació

Motivació

Definició

Definició

Un *passeig aleatori* a un graf G és una seqüència de vèrtexs $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$, tal que $v_k v_{k+1}$ es tria uniformement d'entre les arestes incidents a v_k.

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t
Les probabilitats de transició

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v)$$

determinen el passeig:

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t
Les probabilitats de transició

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v)$$

determinen el passeig:

$$\mathrm{P}(V(t) = u) = \sum_{v \in V(G)} \mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v)\, \mathrm{P}(V(t-1) = v).$$

Matriu de transició

Com que

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v) = \frac{a(u, v)}{\mathrm{gr}(v)},$$

Matriu de transició

Com que

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v) = \frac{a(u,v)}{\mathrm{gr}(v)},$$

tenim

$$P(V(t) = u) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u,v)}{\mathrm{gr}(v)} P(V(t-1) = v).$$

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$.

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$. Aleshores, en forma matricial

$$\mathbf{p}_t = AD^{-1}\mathbf{p}_{t-1}.$$

A és la matriu d'adjacència i D la matriu dels graus. $P = AD^{-1}$ és la *matriu de transició*.

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$. Aleshores, en forma matricial

$$\mathbf{p}_t = AD^{-1}\mathbf{p}_{t-1}.$$

A és la matriu d'adjacència i D la matriu dels graus. $P = AD^{-1}$ és la *matriu de transició*.
Per tant

$$\mathbf{p}_t = P^t\mathbf{p}_0.$$

Matriu de transició

Si comencem a un vèrtex u, $\mathbf{p}_0(u) = 1$ i $\mathbf{p}_0(v) = 0$ per la resta.

Matriu de transició

Si comencem a un vèrtex u, $\mathbf{p}_0(u) = 1$ i $\mathbf{p}_0(v) = 0$ per la resta. Però podríem triar el vèrtex inicial d'una distribució, que serà $\mathbf{p}_0$.

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $\mathrm{P}(V(t)=u)=\mathrm{P}(V(t-1)=u)$ per tot $u\in V(G)$.

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $\mathrm{P}(V(t) = u) = \mathrm{P}(V(t-1) = u)$ per tot $u \in V(G)$.

En termes de la matriu de transició,

$$P\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\operatorname{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v)$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\operatorname{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v) \leq \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v)$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \mathrm{gr}\, u$. Sigui u^* tal que $\frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\mathrm{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v) \leq \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) = \boldsymbol{\pi}(u^*)$$

Per tant $\frac{\boldsymbol{\pi}(v)}{\mathrm{gr}(v)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)}$ per tot v adjacent a u^*. $\square$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.
Per v no adjacents, com que G és connex, per n prou gran,

$$\mathrm{P}(V(t+n) = u^* \mid V(t) = v) > 0$$

per tot $v \in V(G)$, i podem reproduir l'argument ja que $\boldsymbol{\pi} = P^n \boldsymbol{\pi}$ per tot n.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.
Per v no adjacents, com que G és connex, per n prou gran,

$$\mathrm{P}(V(t+n) = u^* \mid V(t) = v) > 0$$

per tot $v \in V(G)$, i podem reproduir l'argument ja que $\boldsymbol{\pi} = P^n \boldsymbol{\pi}$ per tot n.
Com que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \mathrm{gr}(u)$, normalitzant

$$\boldsymbol{\pi}(u) = \frac{\mathrm{gr}(u)}{\sum_{v \in V(G)} \mathrm{gr}(v)}$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Per v no adjacents, com que G és connex, per n prou gran,

$$\mathrm{P}(V(t+n) = u^* \mid V(t) = v) > 0$$

per tot $v \in V(G)$, i podem reproduir l'argument ja que $\boldsymbol{\pi} = P^n \boldsymbol{\pi}$ per tot n.
Com que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \mathrm{gr}(u)$, normalitzant

$$\boldsymbol{\pi}(u) = \frac{\mathrm{gr}(u)}{\sum_{v \in V(G)} \mathrm{gr}(v)} = \frac{\mathrm{gr}(u)}{2\,|E(G)|}$$

$\square$