Seminari 3: EDPs quasilineals

Arnau Mas

6 de juny de 2019

Problema 1

Una equació en derivades parcials lineal es pot escriure com

$$A(x,y)\partial_x z + B(x,y)\partial_y z = C(x,y)z.$$

El corresponent sistema característic és

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A(x,y) \\ \dot{y} &= B(x,y) \\ \dot{z} &= C(x,y)z \end{aligned}\right\}$$

Suposem que existeix una integral primera $H_1(x,y)$ tal que podem aïllar y de l'equació $H_1(x,y) = h$ de la forma $y = g(x,h)$. Aleshores, si substituïm a la primera i tercera equacions obtenim el sistema

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A(x,g(x,h)) \\ \dot{z} &= C(x,g(x,h))z \end{aligned}\right\}$$

Podem intentar buscar una integral primera d'aquest sistema. Si dividim les dues equacions trobem

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C(x,g(x,h))}{A(x,g(x,h))}z,$$

que és una equació separable. Si $D(x,h)$ és una primitiva de $\frac{C(x,h)}{A(x,h)}$ respecte x aleshores la solució és $z(x) = Ke^{D(x,h)}$ per alguna constant K i per tant una integral primera del sistema és, en termes de z, x i h

$$V(x,h,z) = ze^{-D(x,h)}.$$

Si ara substituïm $h = H_1(x,y)$ trobem que la segona integral primera del sistema característic és

$$H_2(x,y,z) = ze^{-D(x,H(x,y))}.$$

Comprovem que H_2 és efectivament una integral primera del sistema. Calculem les parcials de H_2 i trobem

$$\partial_z H_2(x,y,z) = e^{-D(x,H_1(x,y))}$$

i

$$\partial_y H_2(x,y,z) = -ze^{-D(x,H_1(x,y))}\Big(\partial_h D(x,H_1(x,y))\partial_y H_1(x,y)\Big).$$

I finalment, com que $g(x, H_1(x,y)) = y$, tenim

$$\begin{aligned}\partial_x H_2(x,y,z) &= -ze^{-D(x,H_1(x,y))}\Big(\partial_x D(x,H_1(x,y)) + \partial_h D(x,H_1(x,y))\partial_x H_1(x,y)\Big)\\ &= -ze^{-D(x,H_1(x,y))}\left(\frac{C(x,y)}{A(x,y)} + \partial_h D(x,H_1(x,y))\partial_x H_1(x,y)\right).\end{aligned}$$

Així doncs

$$\begin{aligned}\dot{H}_2(x,y,z) &= A(x,y)\partial_x H_2(x,y,z) + B(x,y)\partial_y H_2(x,y,z) + C(x,y)z\partial_z H_2(x,y,z)\\ &= -zC(x,y)e^{-D(x,H_1(x,y))}\\ &\quad - ze^{-D(x,H_1(x,y))}\partial_h D(x,H_1(x,y))\Big(A(x,y)\partial_x H_1(x,y) + B(x,y)\partial_y H_1(x,y)\Big)\\ &\quad + zC(x,y)e^{-D(x,H_1(x,y))} = 0,\end{aligned}$$

on hem fet servir que H_1 és integral primera i per tant $A\partial_x H_1 + B\partial_y H_1 = 0$. Veiem, doncs, que H_2 és efectivament integral primera.

Finalment hem de comprovar que H_1 i H_2 són funcionalment independents. Però això és clar ja que $\partial_z H_2$ mai no s'anul·la i en canvi $\partial_z H_1$ és 0 a tot arreu. Els gradients de H_1 i H_2, per tant, són linealment independents i en conseqüència H_1 i H_2 són funcionalment independents.

— ∗ —

Anem a resoldre fent servir els resultats que acabem de desenvolupar l'equació

$$x\partial_x z + 2y\partial_y z = 4yx^2z,$$

que és lineal. El sistema característic és

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x\\ \dot{y} &= 2y\\ \dot{z} &= 4yx^2z\end{aligned}\right\}$$

Busquem en primer lloc una integral primera per a les dues primeres equacions. Tenim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

que és una equació separable. Si la resolem trobem

$$\tfrac{1}{2}\log y = K + \log x$$

i per tant

$$e^{2K} = \frac{y}{x^2}.$$

Deduïm d'aquí que $H_1(x,y) = \frac{y}{x^2}$ és una integral primera. De l'equació $H_1(x,y) = h$ podem aïllar-ne y com $y = hx^2$. Si ara substituïm això a la primera i tercera equacions arribem al sistema

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x\\ \dot{z} &= 4hx^4z\end{aligned}\right\}$$

Problema 2