Entrega 3: Discriminació d'estats quàntics

Arnau Mas

31 d'octubre de 2018

Problema 1

Si $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ són estats ortonormals aleshores l'operador $A = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ és hermític i per tant es correspon a un observable. Aleshores, si $|\psi\rangle$ és l'estat desconegut i mesurem A sobre $|\psi\rangle$ obtindrem 1 amb probabilitat 1 si $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle$ i -1 amb probabilitat 1 si $|\psi\rangle = |\psi_2\rangle$.

Problema 2

Si $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ són estats no ortogonals aleshores no hi ha cap mesura que els pugui diferenciar. Si existís aquesta mesura, el corresponent operador hauria de tenir-los com a vectors propis —de manera que obtindriem amb probabilitat 1 un dels resultats si l'estat és $|\psi_1\rangle$ i amb probabilitat 1 l'altre resultat si l'estat és $|\psi_2\rangle$—. Però això no pot ser ja que els vectors propis amb valor propi diferent d'un operador hermític són ortogonals.

Problema 3

Tenim $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ i $|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$ amb $\langle 0|1\rangle = 0$, i triem un estat d'entre els dos de manera aleatòria.

(a) Tenim

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|1\rangle - \frac{1}{2}\langle 0|1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

(b) Considerem $A = |1\rangle\langle 1|$. És clar que $|1\rangle$ és vector propi de A amb valor propi 1. I com que $A|0\rangle = |1\rangle\langle 1|0\rangle = 0$, tenim que $|0\rangle$ és l'altre vector propi amb valor propi 0.

(c) Com que si mesurem A sobre $|\psi_1\rangle$ obtenim 0 amb probabilitat 1, obtindrem 1 amb probabilitat 0. I per tant si obtenim 1 sabem segur que l'estat previ a la mesura era $|\psi_2\rangle$.

(d) Per determinar per quin estat hem d'apostar hem de calcular les probabilitats $p(\psi_1|0)$ i $p(\psi_2|0)$. Tenim

$$p(0|\psi_1) = |\langle 0|\psi_1\rangle|^2 = 1$$

i

$$p(1|\psi_2) = |\langle 0|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}.$$

Ara, aplicant el teorema de Bayes obtenim

$$p(\psi_1|0) = \frac{p(\psi_1)p(0|\psi_1)}{p(0)} = \frac{p(\psi_1)p(0|\psi_1)}{p(\psi_1)p(0|\psi_1) + p(\psi_2)p(0|\psi_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}.$$

I com que $p(\psi_2|0) = 1 - p(\psi_1|0) = \frac{3}{7}$ i per tant si obtenim 0 hem d'apostar per l'estat $|\psi_1\rangle$.

(e) La probabilitat d'encertar serà $p(1)p(\psi_2|1) + p(0)p(\psi_1|0)$. Tenim

$$p(1) = p(1|\psi_1)p(\psi_1) + p(1|\psi_2)p(\psi_2) = 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

I per tant $p(0) = 1 - p(1) = \frac{7}{8}$. I així la probabilitat d'encertar és

$$\frac{1}{8}\cdot 1 + \frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

Problema 4

Si fixem l'eix z al llarg de l'spin que correspon a $|0\rangle$ aleshores $A = |0\rangle\langle 0|$ és precisament l'operador que correspon a un Stern-Gerlach en la direcció z.

Fixem coordenades a l'esfera de Bloch de manera que l'eix z estigui alineat amb $|\psi_1\rangle$ i l'origen de ϕ estigui al semipla generat per $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$. L'opoerador que correspon a un Stern-Gerlach qualsevol ve donat per

$$\sigma_{\mathbf{n}} = |{+n}\rangle\langle{+n}| - |{-n}\rangle\langle{-n}|$$

amb

$$|{+n}\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\tfrac{\theta}{2}|1\rangle$$

i

$$|{-n}\rangle = \sin\tfrac{\theta}{2}|0\rangle - e^{i\phi}\cos\tfrac{\theta}{2}|1\rangle.$$

Observem que per simetria, $\phi = 0$ o $\phi = \pi$.

Repetim els càlculs de l'apartat anterior, tenint en compte que $|\psi_2\rangle = \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle - \sin\frac{\pi}{6}|1\rangle$. Calculem primer les probabilitats de la mesura de $\sigma_{\mathbf{n}}$ sobre els estats:

$$\langle\psi_1|{+n}\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2} \implies p(+n|\psi_1) = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\langle\psi_1|{-n}\rangle = \sin\tfrac{\theta}{2} \implies p(-n|\psi_1) = \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\langle\psi_2|{+n}\rangle = \cos\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\theta}{2} \mp \sin\tfrac{\pi}{6}\sin\tfrac{\theta}{2} = \cos\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right) \implies p(+n|\psi_2) = \cos\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right)^2$$

$$\langle\psi_2|{-n}\rangle = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\tfrac{\theta}{2} \pm \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\theta}{2} = \sin\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right) \implies p(-n|\psi_2) = \sin\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right)^2.$$

Per calcular la probabilitat d'encertar hauriem de trobar les probabilitats $p(\psi_1| \pm n)$ i $p(\psi_2| \pm n)$ per determinar quina és la millor estratègia, és a dir, per decidir per quin estat hem d'apostar en funció del resultat de la mesura. Ara bé, sigui com sigui hi ha només dues estratègies possibles: apostar per ψ_1 si obtenim $+n$, o bé apostar per ψ_2 si obtenim $+n$. En el primer cas, la probabilitat d'encertar serà $p(+n)p(\psi_1| + n) + p(-n)p(\psi_2| - n)$. I en el segon serà $p(+n)p(\psi_2| + n) + p(-n)p(\psi_1| - n)$. Però pel teorema de Bayes tenim

$$\begin{aligned} p &= p(+n)p(\psi_1| + n) + p(-n)p(\psi_2| - n) = p(\psi_1)p(+n|\psi_1) + p(\psi_2)p(-n|\psi_2) \\ 1 - p &= p(+n)p(\psi_2| + n) + p(-n)p(\psi_1| - n) = p(\psi_2)p(+n|\psi_2) + p(\psi_1)p(-n|\psi_1). \end{aligned}$$

Tenim que per tot $\theta \in [0, \pi]$, cos