Entrega 2: Addició del moment angular. Estats de barions

Arnau Mas

10 de maig de 2019

1 Spin

A continuació estudiem els possibles estats d'spin de tres quarks, tenint en compte que els quarks són partícules d'spin $\frac{1}{2}$. Els estats més senzills són els de moment angular màxim, $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$. Tenim

$$\begin{aligned}
S_z\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \frac{3\hbar}{2}\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\,, \\
S_z\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = -\frac{3\hbar}{2}\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\,.
\end{aligned}$$

Per tant aquests dos estats són propis de S_z amb valors propis $\frac{3}{2}\hbar$ i $-\frac{3}{2}\hbar$ respectivament. Fent servir que

$$S^2 = S_z^2 + \hbar S_z + S_- S_+ = S_z^2 - \hbar S_z + S_+ S_- \tag{1.1}$$

obtenim

$$\begin{aligned}
S^2\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle &= S_z^2\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \hbar S_z\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + S_- S_+\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^2 |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{3\hbar^2}{2}\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + 0 \\
&= \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right)\hbar^2\,|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
S^2\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle &= S_z^2\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - \hbar S_z\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + S_+ S_-\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^2 |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{3\hbar^2}{2}\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + 0 \\
&= \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right)\hbar^2\,|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\,.
\end{aligned}$$

Per tant aquests dos estats tenen spin total $\frac{3}{2}\hbar$. D'aquí deduïm que $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ i que $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$.

— ∗ —

Per a trobar els altres dos estats amb spin total $\frac{3}{2}\hbar$ podem fer servir que

$$S_- \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right) - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}-1\right)} \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\hbar \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle,$$

i

$$S_+ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right) + \tfrac{3}{2}\left(-\tfrac{3}{2}+1\right)} \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\hbar \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle.$$

D'altra banda

$$S_- \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle = S_- \left|\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle = \hbar\left(\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right)$$

i

$$S_+ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle = S_+ \left|\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle = \hbar\left(\left|\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle\right).$$

Per tant

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{3}} \\ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\left|\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

— ∗ —

Taula 1.1: Estats propis d'spin de tres quarks

S^2	S_z	Estat
$\frac{3}{2}\hbar$	$\frac{3}{2}\hbar$	$\left|S^1_{123}\right\rangle = \left|\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle$
$\frac{3}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$	$\left|S^2_{123}\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}\hbar$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$\left|S^3_{123}\right\rangle = \frac{\left|\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}\hbar$	$-\frac{3}{2}\hbar$	$\left|S^4_{123}\right\rangle = \left|\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle$
$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$	$\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle-\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$	$\left|S^1_{12}\right\rangle = \frac{2\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle-(\left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle)}{\sqrt{6}}$
$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$\left|A^2_{12}\right\rangle = \frac{\left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle-\left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$\left|S^2_{12}\right\rangle = \frac{2\left|\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle-(\left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle)}{\sqrt{6}}$

És clar que tots els vectors propis de S_z de valor propi $\frac{1}{2}\hbar$ són combinacions lineals de $\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle, \left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle$ i $\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle$, que generen un subespai de dimensió 3. En aquest subespai hi ha $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Aquest estat és l'únic que pot tenir aquests valors propis ja que l'obtenim aplicant S_- a l'estat $\left|\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle$, que és l'únic estat propi de S_z amb valor propi $\frac{3}{2}\hbar$. Així doncs, l'ortogonal de $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ és subespai propi de S^2 amb valor propi $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar$, de manera que tenim una degeneració pel que fa a l'estat $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Per a trencar aquesta degneració imposarem que els estats han de ser simètrics o antisimètrics respecte l'intercanvi dels quarks 1 i 2. Considerem un estat qualsevol $\alpha\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \beta\left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \gamma\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle$. L'ortogonalitat equival a $\alpha+\beta+\gamma=0$. Si requerim que sigui antisimètric aleshores $\alpha=0$ i $\beta=-\gamma$, de manera que un cop normalitzat l'estat és

$$\frac{|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Si imposem que sigui simètric aleshores $\beta=\gamma$, i per ortogonalitat, $2\beta=-\alpha$. Un cop normalitzat, l'estat és

$$\frac{2\,|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{6}}.$$

Pel que fa als estats amb $s=\frac{1}{2}$ i $m_s=-\frac{1}{2}$, podem aplicar exactament els mateixos arguments simplement intercanviant $\uparrow$ per $\downarrow$ i viceversa. A la taula 1.1 es mostren els diversos estats d'spin pels tres quarks.

2 Sabor

Si tenim quarks només de dos sabors, *up* i *down*, aleshores els estats $|u\rangle$ i $|d\rangle$ es comporten de la mateixa manera que els estats $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$, és a dir, són propis d'uns operadors, anomenats d'isospin, que satisfan les relacions de commutació del moment angular d'una partícula d'spin $\frac{1}{2}$. Per tant els càlculs que hauriem de fer per a trobar els estats de sabor són els mateixos que els de la secció anterior. A la taula 2.1 es mostren tots els possibles estats de sabor amb els corresponents valors d'isospin col·lectiu.

Taula 2.1: Estats propis d'isospin per a tres quarks, considerant només els sabors *up*, u, i *down*, d

I^2	I_z	Estat
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\|S^1_{123}\rangle=\|uuu\rangle$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\|S^2_{123}\rangle=\frac{\|uud\rangle+\|udu\rangle+\|duu\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\|S^3_{123}\rangle=\frac{\|ddu\rangle+\|dud\rangle+\|udd\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\|S^4_{123}\rangle=\|ddd\rangle$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\|A^1_{12}\rangle=\frac{\|udu\rangle-\|duu\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\|S^1_{12}\rangle=\frac{2\|uud\rangle-(\|udu\rangle+\|duu\rangle)}{\sqrt{6}}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\|A^2_{12}\rangle=\frac{\|dud\rangle-\|udd\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\|S^2_{12}\rangle=\frac{2\|ddu\rangle-(\|dud\rangle+\|udd\rangle)}{\sqrt{6}}$

3 Color

Els possibles estats ortogonals de color neutre de tres quarks són $|rgb\rangle$, $|rbg\rangle$, $|gbr\rangle$, $|grb\rangle$, $|brg\rangle$ i $|bgr\rangle$. Per tant, un estat de color neutre serà de la forma

$$|\Psi\rangle=\alpha_1\,|rgb\rangle+\alpha_2\,|rbg\rangle+\beta_1\,|gbr\rangle+\beta_2\,|grb\rangle+\gamma_1\,|brg\rangle+\gamma_2\,|bgr\rangle\,.$$

A la natura, però, només s'observen estats de color completament antisimètrics. Hem d'imposar $P_{12}|\Psi\rangle = P_{23}|\Psi\rangle = P_{31}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$. Quan requerim $P_{12}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$ trobem $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\beta_1 = -\beta_2$ i $\gamma_1 = -\gamma_2$. Per tant podem escriure

$$|\Psi\rangle = \alpha(|rgb\rangle - |rbg\rangle) + \beta(|gbr\rangle - |grb\rangle) + \gamma(|brg\rangle - |bgr\rangle).$$

Aleshores

$$P_{12}|\Psi\rangle = \alpha(|grb\rangle - |brg\rangle) + \beta(|bgr\rangle - |rgb\rangle) + \gamma(|rbg\rangle - |gbr\rangle),$$

de manera que quan imposem $P_{12}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$ obtenim $\alpha = \beta = \gamma$. I aleshores la condició $P_{31}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$ es compleix. Podem determinar l'últim paràmetre que queda per normalització, i per tant el singlet de color és

$$|\Psi\rangle = \frac{|rgb\rangle - |rbg\rangle + |gbr\rangle - |grb\rangle + |brg\rangle - |bgr\rangle}{\sqrt{6}}.$$

4 Estats bariònics

Els estats propis de tres quarks seran productes d'un dels possibles estats d'spin, de sabor i de color. El factor de color és únic, el singlet, que és antisimètric. Per tant el producte de l'estat d'spin i sabor ha de ser simètric. Hi ha 16 possibilitats òbvies, que són els estats de la forma $|S^n_{123}\rangle_S |S^m_{123}\rangle_I$, on n i m varient de 1 a 4, és a dir, productes d'estats amb spin total $\frac{3}{2}\hbar$ i isospin total $\frac{3}{2}$, segons les taules 1.1 i 2.1.

— ∗ —

Per a determinar els altres possibles estats és útil saber com actuen les transposicions P_{12}, P_{23} i P_{31} sobre els estats d'spin i sabor que hem trobat. Farem els càlculs sobre els estats d'spin, però és clar que els estats de sabor satisfaran les mateixes relacions. És clar que sobre els 4 estats simètrics actuen com la identitat. També és clar que $P_{12}|S^i_{12}\rangle = |S^i_{12}\rangle$ i $P_{12}|A^i_{12}\rangle = -|A^i_{12}\rangle$, per construcció.

Tenim

$$P_{23}\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Per saber com s'escriu aquest estat en termes de la base que hem trobat podem calcular el seu producte amb la resta dels estats. Aquest estat té $m_s = \frac{3}{2}\hbar$ i ortogonal a $|S^2_{123}\rangle$, de manera que els únics productes que no són nuls són

$$\left\langle A^1_{12}\right| P_{23}\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{1}{2}$$

i

$$\left\langle S^1_{12}\right| P_{23}\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

És a dir

$$P_{23}\left|A^i_{12}\right\rangle = \frac{|A^1_{12}\rangle + \sqrt{3}\,|S^1_{12}\rangle}{2}. \tag{4.1}$$

Similarment tenim

$$P_{31}\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{|{\uparrow\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\uparrow\downarrow}\rangle}{2}.$$

Els productes són

$$\left\langle A^1_{12}\right| P_{31}\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{1}{2}$$

i

$$\left\langle S^1_{12}\right| P_{31}\left|A^1_{12}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Per tant

$$P_{31}\left|A^1_{12}\right\rangle = \frac{|A^1_{12}\rangle - \sqrt{3}\,|S^1_{12}\rangle}{2}. \tag{4.2}$$

Fem els mateixos càlculs per $P_{23}\,|S^1_{12}\rangle$ i $P_{31}\,|S^1_{12}\rangle$. Com que

$$P_{23}\left|S^1_{12}\right\rangle = \frac{2\,|{\uparrow\downarrow\uparrow}\rangle - (|{\uparrow\uparrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\uparrow\uparrow}\rangle)}{\sqrt{6}}$$

aleshores

$$\left\langle A^1_{12}\right| P_{23}\left|S^1_{12}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

i

$$\left\langle S^1_{12}\right| P_{23}\left|S^1_{12}\right\rangle = \frac{-2-2+1}{6} = -\frac{1}{2},$$

de manera que

$$P_{23}\left|S^1_{12}\right\rangle = \frac{\sqrt{3}\,|A^1_{12}\rangle - |S^1_{12}\rangle}{2}. \tag{4.3}$$

L'últim càlcul que cal fer és per $P_{31}\,|S^1_{12}\rangle$. Tenim

$$P_{31}\left|S^1_{12}\right\rangle = \frac{2\,|{\downarrow\uparrow\uparrow}\rangle - (|{\uparrow\downarrow\uparrow}\rangle + |{\uparrow\uparrow\downarrow}\rangle)}{\sqrt{6}}.$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\left\langle A^1_{12}\right| P_{31}\left|S^1_{12}\right\rangle &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \left\langle S^1_{12}\right| P_{31}\left|S^1_{12}\right\rangle &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

i per tant

$$P_{31}\left|S^1_{12}\right\rangle = -\frac{\sqrt{3}\,|A^1_{12}\rangle + |S^1_{12}\rangle}{2}. \tag{4.4}$$

És clar que tots els càlculs que hem fet són vàlids si intercanviem $\uparrow$ per $\downarrow$, de manera que les equacions (4.1), (4.2), (4.3) i (4.4) continuen sent certes si canviem els superíndexs 1 per 2.

— ∗ —

Per a trobar els estats que tenen spin total $\frac{1}{2}\hbar$ i isospin total $\frac{1}{2}$ considerem una combinació lineal dels estats propis d'spin i isospin amb aquests valors i la simetritzem. Concretament, posem

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|S^n_{12}\rangle_S\,|S^m_{12}\rangle_I + \beta\,|S^n_{12}\rangle_S\,|A^m_{12}\rangle_I + \gamma\,|A^n_{12}\rangle_S\,|S^m_{12}\rangle_I + \delta\,|A^n_{12}\rangle_S\,|A^m_{12}\rangle_I$$

i aleshores requerim que $P_{12}|\Psi\rangle = P_{23}|\Psi\rangle = P_{31}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$. Si $P_{12}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ aleshores $\gamma = \delta = 0$. També tenim, fent servir els resultats que hem obtingut prèviament,

$$\begin{aligned}
P_{23}|\Psi\rangle &= \alpha\left(\frac{\sqrt{3}\,|A^n_{12}\rangle - |S^n_{12}\rangle}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\,|A^m_{12}\rangle - |S^m_{12}\rangle}{2}\right) + \delta\left(\frac{|A^n_{12}\rangle + \sqrt{3}\,|S^n_{12}\rangle}{2}\right)\left(\frac{|A^m_{12}\rangle + \sqrt{3}\,|S^m_{12}\rangle}{2}\right)\\
&= \frac{3\alpha+\delta}{2}\,|A^n_{12}\rangle\,|A^m_{12}\rangle + \frac{\alpha+3\delta}{2}\,|S^n_{12}\rangle\,|S^m_{12}\rangle + \frac{\sqrt{3}(\alpha-\delta)}{4}(|A^n_{12}\rangle\,|S^m_{12}\rangle + |S^n_{12}\rangle\,|A^m_{12}\rangle).
\end{aligned}$$

Si requerim que $P_{23}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ aleshores deduïm que $\alpha = \delta$. Finalment

$$\begin{aligned}
P_{31}|\Psi\rangle &= \alpha\left(\frac{\sqrt{3}\,|A^n_{12}\rangle + |S^n_{12}\rangle}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\,|A^m_{12}\rangle + |S^m_{12}\rangle}{2}\right) + \alpha\left(\frac{|A^n_{12}\rangle - \sqrt{3}\,|S^n_{12}\rangle}{2}\right)\left(\frac{|A^m_{12}\rangle - \sqrt{3}\,|S^m_{12}\rangle}{2}\right)\\
&= \alpha\,|A^n_{12}\rangle\,|A^m_{12}\rangle + \alpha\,|S^n_{12}\rangle\,|S^m_{12}\rangle = |\Psi\rangle\,,
\end{aligned}$$

i per tant se satisfà l'últim requeriment. Per normalització determinem que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

— ∗ —

A continuació resumim els estats de tres quarks possibles. Només donem la part d'spin i sabor, ja que la part de color és sempre el singlet. Denotarem l'spin total per j_s, l'spin en la direcció vertical per m_s, l'isospin total per j_I i el tercer component de l'isospin per m_I.

Per a $j_I = \frac{3}{2}$ tenim els quatres barions Δ, classificats en funció de m_I. Aquests estats corresponen als estats de la forma $|S^n_{123}\rangle_S\,|S^m_{123}\rangle_I$, per tant la part d'spin ha de tenir $j_s = \frac{3}{2}\hbar$.

$$\begin{aligned}
m_I &= \frac{3}{2}, & \left|\Delta^{++}\right\rangle &= |S^n_{123}\rangle_S\left|S^1_{123}\right\rangle_I = |S^n_{123}\rangle_S\,|uuu\rangle\\
m_I &= \frac{1}{2}, & \left|\Delta^{+}\right\rangle &= |S^n_{123}\rangle_S\left|S^2_{123}\right\rangle_I = |S^n_{123}\rangle\,\frac{|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle}{\sqrt{3}}\\
m_I &= -\frac{1}{2}, & \left|\Delta^{0}\right\rangle &= |S^n_{123}\rangle_S\left|S^3_{123}\right\rangle_I = |S^n_{123}\rangle\,\frac{|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle}{\sqrt{3}}\\
m_I &= -\frac{3}{2}, & \left|\Delta^{0}\right\rangle &= |S^n_{123}\rangle_S\left|S^4_{123}\right\rangle_I = |S^n_{123}\rangle_S\,|ddd\rangle\,.
\end{aligned}$$

Per a n entre 1 i 4 obtenim estats amb m_s entre $-\frac{3}{2}\hbar$ i $\frac{3}{2}\hbar$.

Per a $j_I = \frac{1}{2}$ tenim el protó i el neutró, que es corresponen amb els estats de la forma $\frac{1}{\sqrt{2}}(|S^n_{12}\rangle_S\,|S^m_{12}\rangle_I + |A^n_{12}\rangle_S\,|A^m_{12}\rangle_I)$. Veiem que $j_S = \frac{1}{2}\hbar$, per tant els protons i els neutrons són partícules d'spin $\frac{1}{2}$. El protó apareix amb $m_I = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\left|p^+\right\rangle &= \frac{|S^n_{12}\rangle_S\,|S^1_{12}\rangle_I + |A^n_{12}\rangle_S\,|A^1_{12}\rangle_I}{\sqrt{2}}\\
&= |S^n_{12}\rangle_S\,\frac{2\,|uud\rangle - (|udu\rangle + |duu\rangle)}{2\sqrt{3}} + |A^n_{12}\rangle_S\,\frac{|udu\rangle - |duu\rangle}{2}.
\end{aligned}$$

Amb $n = 1$ tenim l'estat amb spin $\frac{1}{2}\hbar$ i amb $n = 2$ l'estat amb spin $-\frac{1}{2}\hbar$. I el neutró té $m_I = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\left|n^0\right\rangle &= \frac{|S_{12}^n\rangle_S\,|S_{12}^2\rangle_I + |A_{12}^n\rangle_S\,|A_{12}^2\rangle_I}{\sqrt{2}}\\ &= |S_{12}^n\rangle_S\,\frac{2\,|ddu\rangle - (|dud\rangle + |udd\rangle)}{2\sqrt{3}} + |A_{12}^n\rangle_S\,\frac{|dud\rangle - |udd\rangle}{2}.\end{aligned}$$

Com abans, amb $n = 1$ tenim l'estat d'spin $\frac{1}{2}\hbar$ i amb $n = 2$ l'estat d'spin $-\frac{1}{2}\hbar$.