Entrega 2: Comparació d'estimadors

Andreu Arderiu, Arnau Mas, Alejandro Plaza

25 d'abril de 2019

1 Introducció

La funció de densitat d'una variable aleatòria X que segueix la distribució gamma és

$$f(x \mid \alpha, \nu) = \frac{\alpha^\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\alpha x}$$

on α s'anomena el paràmetre de ràtio (*rate* en anglès) i ν rep el nom de paràmetre de forma (*shape* en anglès). El nostre objectiu és produir estimadors per aquests dos paràmetres mitjançant els mètodes de màxima versemblança i dels moments i comparar-los.

1.1 Mètode dels moments

La funció generatriu de moments d'una variable aleatòria de distribució gamma, $X \sim \operatorname{Gamma}(\alpha, \nu)$ és

$$M_X(t) = \alpha^\nu (\alpha - t)^{\nu-1},$$

i les successives derivades són

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \nu\alpha^\nu(\alpha - t)^{-\nu-1} \\ M_X''(t) &= \nu(\nu+1)\alpha^\nu(\alpha - t)^{-\nu-2}, \end{aligned}$$

Per tant, per la definició de la funció generatriu tenim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= M_X'(0) = \frac{\nu}{\alpha} \\ \operatorname{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = M_X''(0) - M_X'(0)^2 = \frac{\nu(\nu+1)}{\alpha^2} - \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2 = \frac{\nu}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si invertim l'equació (1.1) obtenim

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mathbb{E}[X]}{\operatorname{Var}[X]} \\ \nu &= \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\operatorname{Var}[X]} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Per tant els estimadors per als paràmetres que obtenim amb el mètode dels moments són

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\mathrm{Mom}}(X) &= \frac{\bar{X}}{S^2} \\ \hat{\nu}_{\mathrm{Mom}}(X) &= \frac{\bar{X}^2}{S^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

on $\bar{X}$ i S^2 són la mitjana i variància mostrals.