

Passejos aleatoris en grafs

Gerard Castro, Kim López, Gal·la Mora, Arnau Mas

5 de desembre de 2018

Esquema

Introducció

Resultats principals

Definició

Definició

Un *passeig aleatori* a un graf G és una seqüència de vèrtexs $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$, tal que $v_k v_{k+1}$ es tria uniformement d'entre les arestes incidents a v_k .

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t
Les probabilitats de transició

$$P(V(t) = u \mid V(t-1) = v)$$

determinen el passeig:

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t
Les probabilitats de transició

$$P(V(t) = u \mid V(t-1) = v)$$

determinen el passeig:

$$P(V(t) = u) = \sum_{v \in V(G)} P(V(t) = u \mid V(t-1) = v) P(V(t-1) = v).$$

Probabilitats de transició

Com que

$$P(V(t) = u \mid V(t-1) = v) = \frac{a(u, v)}{\text{gr}(v)},$$

Probabilitats de transició

Com que

$$P(V(t) = u \mid V(t-1) = v) = \frac{a(u, v)}{\text{gr}(v)},$$

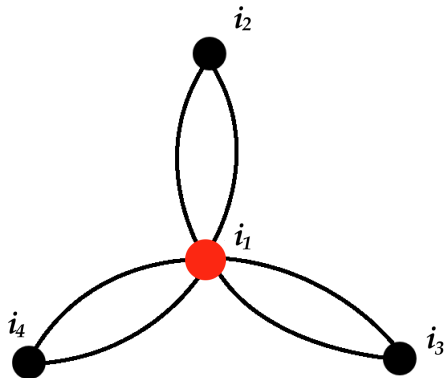
tenim

$$P(V(t) = u) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u, v)}{\text{gr}(v)} P(V(t-1) = v).$$

Un exemple

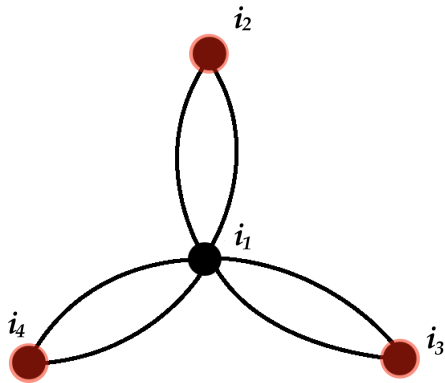
Un exemple

$$P(V(0) = i_1) = 1$$



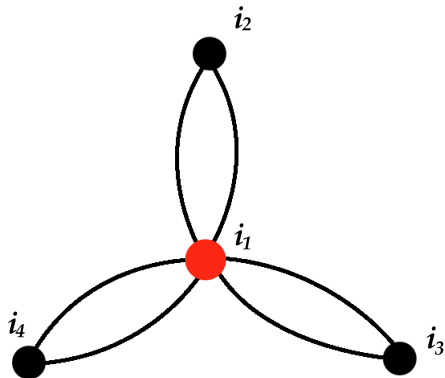
Un exemple

$$\begin{aligned} P(V(1) = i_2) &= P(V(1) = i_3) \\ &= P(V(1) = i_4) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Un exemple

$$P(V(3) = i_1) = 1$$



Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$.

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$. Aleshores, en forma matricial

$$\mathbf{p}_t = AD^{-1}\mathbf{p}_{t-1}.$$

A és la matriu d'adjacència i D la matriu dels graus. $P = AD^{-1}$ és la *matriu de transició*.

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$. Aleshores, en forma matricial

$$\mathbf{p}_t = AD^{-1}\mathbf{p}_{t-1}.$$

A és la matriu d'adjacència i D la matriu dels graus. $P = AD^{-1}$ és la *matriu de transició*.

Per tant

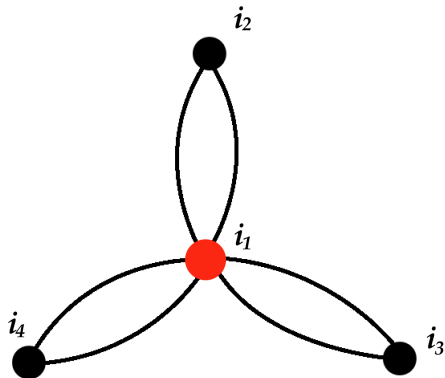
$$\mathbf{p}_t = P^t \mathbf{p}_0.$$

Un exemple

Un exemple

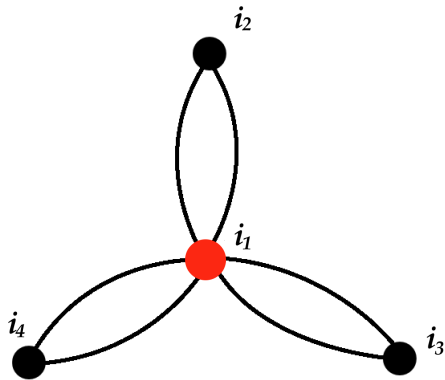
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



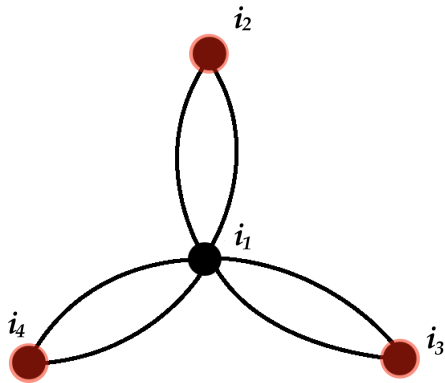
Un exemple

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0, 0, 0)$$



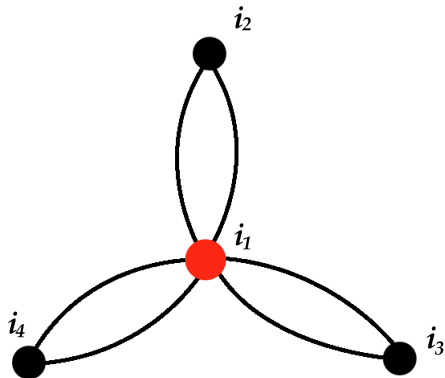
Un exemple

$$\mathbf{p}_1 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = P\mathbf{p}_0$$



Un exemple

$$\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0, 0) = P\mathbf{p}_1 = P^2\mathbf{p}_0$$



Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $P(V(t) = u) = P(V(t - 1) = u)$ per tot $u \in V(G)$.

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $P(V(t) = u) = P(V(t - 1) = u)$ per tot $u \in V(G)$.

En termes de la matriu de transició,

$$P\pi = \pi.$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

π estacionària. Veurem que $\pi(u) \propto \text{gr } u$.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

π estacionària. Veurem que $\pi(u) \propto \text{gr } u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)}$ és màxim:

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

π estacionària. Veurem que $\pi(u) \propto \text{gr } u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\pi(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\text{gr}(v)} \pi(v)$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

π estacionària. Veurem que $\pi(u) \propto \text{gr } u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\pi(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\text{gr}(v)} \pi(v) \leq \frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v)$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

π estacionària. Veurem que $\pi(u) \propto \text{gr } u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\pi(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\text{gr}(v)} \pi(v) \leq \frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) = \pi(u^*)$$

Per tant $\frac{\pi(v)}{\text{gr}(v)} = \frac{\pi(u^*)}{\text{gr}(u^*)}$ per tot v adjacent a u^* .



Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Per v no adjacents, com que G és connex, per n prou gran,

$$P(V(t+n) = u^* \mid V(t) = v) > 0$$

per tot $v \in V(G)$, i podem reproduir l'argument ja que $\pi = P^n \pi$ per tot n .

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Per v no adjacents, com que G és connex, per n prou gran,

$$P(V(t+n) = u^* \mid V(t) = v) > 0$$

per tot $v \in V(G)$, i podem reproduir l'argument ja que $\pi = P^n \pi$ per tot n .

Com que $\pi(u) \propto \text{gr}(u)$, normalitzant

$$\pi(u) = \frac{\text{gr}(u)}{\sum_{v \in V(G)} \text{gr}(v)}$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Per v no adjacents, com que G és connex, per n prou gran,

$$P(V(t+n) = u^* \mid V(t) = v) > 0$$

per tot $v \in V(G)$, i podem reproduir l'argument ja que $\pi = P^n \pi$ per tot n .

Com que $\pi(u) \propto \text{gr}(u)$, normalitzant

$$\pi(u) = \frac{\text{gr}(u)}{\sum_{v \in V(G)} \text{gr}(v)} = \frac{\text{gr}(u)}{2|E(G)|}$$

