# **Entrega 3:** Discriminació d'estats quàntics

Sandro Barissi, Arnau Mas

31 d'octubre de 2018

## Problema 1

Si $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ són estats ortonormals aleshores l'operador $A = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ és hermític i per tant es correspon a un observable. Aleshores, si $|\psi\rangle$ és l'estat desconegut i mesurem $A$ sobre $|\psi\rangle$ obtindrem 1 amb probabilitat 1 si $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle$ i $-1$ amb probabilitat 1 si $|\psi\rangle = |\psi_2\rangle$.

## Problema 2

Si $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ són estats no ortogonals aleshores no hi ha cap mesura que els pugui diferenciar. Si existís aquesta mesura, el corresponent operador hauria de tenir-los com a vectors propis —de manera que obtindriem amb probabilitat 1 un dels resultats si l'estat és $|\psi_1\rangle$ i amb probabilitat 1 l'altre resultat si l'estat és $|\psi_2\rangle$—. Però això no pot ser ja que els vectors propis amb valor propi diferent d'un operador hermític són ortogonals.

## Problema 3

Tenim $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ i $|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$ amb $\langle 0|1\rangle = 0$, i triem un estat d'entre els dos de manera aleatòria.

**(a)** Tenim

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|1\rangle - \frac{1}{2}\langle 0|1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

**(b)** Considerem $A = |1\rangle\langle 1|$. És clar que $|1\rangle$ és vector propi de $A$ amb valor propi 1. I com que $A|0\rangle = |1\rangle\langle 1|0\rangle = 0$, tenim que $|0\rangle$ és l'altre vector propi amb valor propi 0.

**(c)** Com que si mesurem $A$ sobre $|\psi_1\rangle$ obtenim 0 amb probabilitat 1, obtindrem 1 amb probabilitat 0. I per tant si obtenim 1 sabem segur que l'estat previ a la mesura era $|\psi_2\rangle$.

**(d)** Per determinar per quin estat hem d'apostar hem de calcular les probabilitats $p(\psi_1|0)$ i $p(\psi_2|0)$. Tenim

$$p(0|\psi_1) = |\langle 0|\psi_1\rangle|^2 = 1$$

i

$$p(1|\psi_2) = |\langle 0|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}.$$

Ara, aplicant el teorema de Bayes obtenim

$$p(\psi_1|0) = \frac{p(\psi_1)p(0|\psi_1)}{p(0)} = \frac{p(\psi_1)p(0|\psi_1)}{p(\psi_1)p(0|\psi_1) + p(\psi_2)p(0|\psi_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}.$$

I com que $p(\psi_2|0) = 1 - p(\psi_1|0) = \frac{3}{7}$ i per tant si obtenim 0 hem d'apostar per l'estat $|\psi_1\rangle$.

**(e)** La probabilitat d'encertar serà $p(1)p(\psi_2|1) + p(0)p(\psi_1|0)$. Tenim

$$p(1) = p(1|\psi_1)p(\psi_1) + p(1|\psi_2)p(\psi_2) = 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

I per tant $p(0) = 1 - p(1) = \frac{7}{8}$. I així la probabilitat d'encertar és

$$\frac{1}{8}\cdot 1 + \frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

# Problema 4

Si fixem l'eix $z$ al llarg de l'spin que correspon a $|0\rangle$ aleshores $A = |0\rangle\langle 0|$ és precisament l'operador que correspon a un Stern-Gerlach en la direcció $z$.

Fixem a l'esfera de Bloch les coordenades que corresponen a la base $|0\rangle, |1\rangle$ de manera que podem escriure

$$|\psi_2\rangle = \cos\tfrac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\pi}\sin\tfrac{\pi}{6}|1\rangle = \cos\tfrac{\pi}{6}|0\rangle - \sin\tfrac{\pi}{6}|1\rangle$$

L'operador que correspon a un Stern-Gerlach qualsevol ve donat per

$$\sigma_{\mathbf{n}} = |{+n}\rangle\langle{+n}| - |{-n}\rangle\langle{-n}|$$

amb

$$|{+n}\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\tfrac{\theta}{2}|1\rangle$$

i

$$|{-n}\rangle = \sin\tfrac{\theta}{2}|0\rangle - e^{i\phi}\cos\tfrac{\theta}{2}|1\rangle.$$

Observem que per simetria, $\phi = 0$ o $\phi = \pi$.

Repetim els càlculs de l'apartat anterior. Calculem primer les probabilitats de la mesura de $\sigma_{\mathbf{n}}$ sobre els estats:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1|{+n}\rangle &= \cos\tfrac{\theta}{2} \implies p(+n|\psi_1) = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2 \\
\langle\psi_1|{-n}\rangle &= \sin\tfrac{\theta}{2} \implies p(-n|\psi_1) = \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2 \\
\langle\psi_2|{+n}\rangle &= \cos\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\theta}{2} \pm \sin\tfrac{\pi}{6}\sin\tfrac{\theta}{2} = \cos\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right) \implies p(+n|\psi_2) = \cos\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right)^2 \\
\langle\psi_2|{-n}\rangle &= \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\tfrac{\theta}{2} \pm \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\theta}{2} = \sin\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right) \implies p(-n|\psi_2) = \sin\left(\tfrac{\theta}{2} \pm \tfrac{\pi}{6}\right)^2.
\end{aligned}$$

Per calcular la probabilitat d'encertar hauriem de trobar les probabilitats $p(\psi_1|\pm n)$ i $p(\psi_2|\pm n)$ per determinar quina és la millor estratègia, és a dir, per decidir per quin estat hem d'apostar en funció del resultat de la mesura. Ara bé, sigui com sigui hi ha només dues estratègies possibles: apostar per $\psi_1$ si obtenim $+n$, o bé apostar per $\psi_2$ si obtenim $+n$. En el primer cas, la probabilitat d'encertar serà $p(+n)p(\psi_1|+n)+p(-n)p(\psi_2|-n)$. I en el segon serà $p(+n)p(\psi_2|+n)+p(-n)p(\psi_1|-n)$. Però pel teorema de Bayes tenim:

$$\begin{aligned}
p &= p(+n)p(\psi_1|+n)+p(-n)p(\psi_2|-n) = p(\psi_1)p(+n|\psi_1)+p(\psi_2)p(-n|\psi_2) \\
1-p &= p(+n)p(\psi_2|+n)+p(-n)p(\psi_1|-n) = p(\psi_2)p(+n|\psi_2)+p(\psi_1)p(-n|\psi_1).
\end{aligned}$$

Per tant la probabilitat de encertar serà $\max\{p, 1-p\}$. Tenim, amb $\phi = 0$,

$$p_0 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2 + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{\pi}{6}\right)^2\right).$$

i amb $\phi = \pi$,

$$p_\pi = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2 + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}-\tfrac{\pi}{6}\right)^2\right).$$

I per tot $\theta \in [0,\pi]$, $p_0 > p_\pi$, per tant, amb la primera estatègia tindrem probabilitat màxima amb $\phi = 0$. Si maximitzem $p_0$ respecte $\theta$, trobem que $p$ assoleix un valor màxim de $\frac{3}{4}$ per $\theta = \frac{\pi}{3}$. La representació en la base que hem triat d'aquest observable és

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim també probabilitat d'encertar $\frac{3}{4}$ seguint l'altra estratègia quan $\phi = \pi$ i $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Si representem el corresponent observable obtenim

$$\sigma_\pi = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_0.$$

Observem, però, que de fet $\sigma_\pi$ té els mateixos vectors propis amb els valors propis canviats de signe. Així que obtenir $+n$ com a resultat d'una mesura de $\sigma_0$ és el mateix que obtenir $-n$ com a resultat d'una mesura de $\sigma_\pi$. Per tant, l'estratègia que ens ha portat a $\sigma_\pi$ de fet és exactament la mateixa que seguim quan mesurem $\sigma_0$. En termes més planers, $\sigma_\pi$ no és més que capgirar $\sigma_0$.

# Problema 5

Considerem ara una parella d'estats qualssevol, $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$. Fixem coordenades a l'esfera de Bloch de manera que l'eix $z$ es correspongui amb l'spin $\psi_1$, i l'origen de $\phi$ estigui al semipla generat per $\psi_1$ i $\psi_2$. D'aquesta manera, si $|0\rangle$ i $|1\rangle$ són els estats propis de l'Stern-Gerlach en la direcció $z$ en les coordenades que hem triat, podem escriure

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = \cos\tfrac{\alpha}{2}|0\rangle + \sin\tfrac{\alpha}{2}|1\rangle$$

amb $\alpha \in [0,\pi]$ l'angle que separa els espins $\psi_1$ i $\psi_2$. Ens preguntem per l'Stern-Gerlach que maximitza la probabilitat de distingir entre els estats, tenint en compte que el sistema està en l'estat $|\psi_1\rangle$ amb probabilitat $p$, i per tant amb probabilitat $1-p$ en l'estat $|\psi_2\rangle$. Els càlculs són idèntics a l'apartat anterior, amb $\frac{\alpha}{2}$ en lloc de $\frac{\pi}{6}$ i $p$ i $1-p$ en lloc de $\frac{1}{2}$.

Amb $\phi = 0$, denotem per $P_0$ la probabilitat d'encertar apostant per $\psi_1$ si obtenim $+n$ i per $\psi_2$ si obtenim $-n$, i per $P_\pi$ la probabilitat d'encertar seguint la mateixa estratègia si $\phi = \pi$. Aleshores

$$P_0(\theta) = p\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2 + (1-p)\sin\left(\tfrac{\theta-\alpha}{2}\right)^2 \tag{5.1}$$

$$P_\pi(\theta) = p\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^2 + (1-p)\sin\left(\tfrac{\theta+\alpha}{2}\right)^2 \tag{5.2}$$

Les probabilitats d'encertar seguint les estratègies oposades són, naturalment, $1-P_0$ i $1-P_\pi$. Observem que $P_0(\theta) = 1-P_\pi(\pi-\theta)$, Que es correspon amb el que hem argumentat abans: capgirar l'aparell Stern-Gerlach i canviar l'estratègia ens porta al mateix resultat. Així la probabilitat d'encertar serà $P(\theta) = \max\{P_0(\theta), 1-P_0(\theta)\}$.

Les pitjors condicions per encertar es donaran pels $\alpha$ i $\theta$ tals que $P(\theta) = \frac{1}{2}$, ja que això vol dir que la millor estratègia és equivalent a triar a l'atzar. Quan $\alpha \to 0$, $P_0(\theta) \to \frac{1}{2}$, de manera que com més propers són dos espins, més díficil és de distingir-los. Evidentment si $\alpha = 0$ aleshores tenim dos estats idèntics i per tant la probabilitat d'encertar és 1.

# Problema 6

Demostrem que poder clonar estats és equivalent a poder distingir estats. Per una banda, si podem distingir dos estats qualssevol, tenim un observable que els té com a estats propis. Per tant, si anem fent mesures d'aquest observable sobre estats qualssevol, anirem obtenint còpies dels dos estats originals.

D'altra banda, suposem que volem distingir entre dos estats qualssevol $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$. Si $\psi$ és el nostre estat desconegut i podem clonar-lo, podem fer tantes mesures sobre $\psi$ sense alterar-lo (una sobre cada còpia). Si anem mesurant els observables $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ i $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ sobre $\psi$ en algun moment obtindrem 0 com a resultat d'alguna de les mesures. Si obtenim 0 com a resultat de mesurar $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, sabem segur que $|\psi\rangle = |\psi_2\rangle$ ja que si $|\psi\rangle$ fos $|\psi_1\rangle$, el resultat de mesurar $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ és 1 amb probabilitat 1. De la mateixa manera, si obtenim 0 quan mesurem $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ sabem del cert que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle$.

Així doncs, com que poder distingir entre estats qualssevol i poder clonar-los és equivalent, com que ja hem vist que no es poden distingir estats no ortogonals, tampoc podem clonar-los.