Seminari 2: Càlcul d'integrals amb el teorema dels residus

Arnau Mas — 77633181Q

17 de maig de 2019

Hem de calcular la integral
$$\int_0^\infty \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\,dx$$
per $\lambda \in (0,1)$. Definim $f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}$, triant la branca de $z^{-\lambda}$ que ve determinada per la branca de l'argument a $(0, 2\pi)$. Aleshores f és holomorfa al pla complex menys $[0,\infty)$ i i i $-i$, on hi té dos pols d'ordre 1. Integrarem f sobre un camí γ format per un semicercle de radi $\epsilon < 1$, γ_ϵ, que està connectat per dos segments γ_1 i γ_2 a un cercle γ_R de radi R, de manera que l'origen queda a l'exterior del camí. Aleshores
$$\int_\gamma \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_1} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz.$$
Analitzem cada integral per separat. Pel cercle petit de radi ϵ tenim
$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\epsilon^{-\lambda}e^{-i\lambda\theta}}{1+\epsilon^2 e^{2i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\epsilon^{1-\lambda}}{|1+\epsilon^2 e^{2i\theta}|}\,d\theta \\ &\leq \frac{\pi\epsilon^{2-\lambda}}{1-\epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.\end{aligned}$$
De manera similar, pel cercle de radi R
$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz\right| &= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R^{-\lambda}e^{-i\lambda\theta}}{1+R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R^{1-\lambda}}{|1+R^2 e^{2i\theta}|}\,d\theta \\ &\leq \frac{2\pi R^{2-\lambda}}{1-R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.\end{aligned}$$
Així doncs les úniques contribucions són les dels segments. Tenim
$$\int_{\gamma_1} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz = \int_0^R \frac{(x+i\epsilon)^{-\lambda}}{1+(x+i\epsilon)^2}\,dz + \int_R^0 \frac{(x-i\epsilon)^{-\lambda}}{1+(x-i\epsilon)^2}\,dz.$$

Quan prenem límit $\epsilon \to 0$ ambdós denominadors van a $1 + x^2$. D'altra banda, pels numeradors tenim

$$(x + i\epsilon)^{-\lambda} = e^{-\lambda \log(x+i\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \to 0} e^{-\lambda \log(x)} = x^{-\lambda}.$$

Però en canvi, quan ens apropem per sota de l'eix positiu tenim

$$(x - i\epsilon)^{-\lambda} = e^{-\lambda \log(x-i\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \to 0} e^{-\lambda(\log(x)+2\pi i)} = e^{-2\pi\lambda i} x^{-\lambda},$$

degut a la determinació de l'argument que hem triat.

Així obtenim

$$\int_\gamma \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\, dz = (1 - e^{-2\pi\lambda i}) \int_0^R \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\, dx.$$

La funció f té dos pols simples a i i $-i$. Si $R > 1$ estan dins de l'interior de γ. Així, prenent límit $R \to \infty$ i aplicant el teorema dels residus obtenim

$$(1 - e^{-2\pi\lambda i}) \int_0^R \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, -i)).$$

Calculem, doncs, els dos residus:

$$(z - i)f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{z+i} \xrightarrow{z \to i} \frac{i^{-\lambda}}{2i} = \frac{e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}}}{2i} = \mathrm{Res}(f, i)$$

i

$$(z + i)f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{z-i} \xrightarrow{z \to -i} -\frac{(-i)^{-\lambda}}{2i} = \frac{e^{-\frac{3i\pi\lambda}{2}}}{2i} = \mathrm{Res}(f, -i).$$

I finalment

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\, dx &= \frac{2\pi i(\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, -i))}{(1 - e^{-2\pi\lambda i})} = \frac{\pi(e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}} - e^{-\frac{3i\pi\lambda}{2}})}{1 - e^{-2i\lambda\pi}} \\ &= \frac{\pi(e^{\frac{i\pi\lambda}{2}} - e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}})}{e^{\pi\lambda i} - e^{-\pi\lambda i}} = \frac{\pi \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}.\end{aligned}$$