Entrega 1: Estats coherents

Arnau Mas

18 de març de 2019

Considerem l'estat cat

$$|\psi\rangle = A\cos\alpha a^\dagger|0\rangle$$

on A és una constant de normalització i α una constant positiva.

(a) Tenim que

$$\cos\alpha a^\dagger = \frac{e^{i\alpha a^\dagger} + e^{-i\alpha a^\dagger}}{2}$$

i per tant

$$|\psi\rangle = \frac{A}{2}\left(e^{i\alpha a^\dagger}|0\rangle + e^{-i\alpha a^\dagger}|0\rangle\right) = \frac{Ae^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}\left(|i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle\right).$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\langle a\rangle_\psi = \langle\psi|a|\psi\rangle &= \frac{A^2e^{\alpha^2}}{4}\left(\langle i\alpha|a|i\alpha\rangle + \langle -i\alpha|a|-i\alpha\rangle + \langle i\alpha|a|-i\alpha\rangle + \langle -i\alpha|a|i\alpha\rangle\right)\\ &= \frac{A^2e^{\alpha^2}}{4}\left(i\alpha - i\alpha - i\alpha\langle i\alpha|-i\alpha\rangle + i\alpha\langle -i\alpha|i\alpha\rangle\right).\end{aligned}$$

En general, per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ es té

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-i\,\mathrm{Im}\,(\alpha\beta^*)}e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}.$$

En el cas que estem considerant el primer factor de fet és 1 ja que $i\alpha(-i\alpha)^*$ de fet és real. Així

$$\langle i\alpha|-i\alpha\rangle = \langle -i\alpha|i\alpha\rangle = e^{-2\alpha^2}.$$

I per tant $\langle a\rangle_\psi = \langle a^\dagger\rangle_\psi^* = 0$. Per tant, com que x i p són combinacions lineals de a i $a^\dagger$, deduïm que $\langle x\rangle_\psi = \langle p\rangle_\psi = 0$.

(b) Tenim

$$a^2|\psi\rangle = \frac{Ae^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(a^2|i\alpha\rangle + a^2|-i\alpha\rangle) = \frac{Ae^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(-\alpha^2|i\alpha\rangle - \alpha^2|-i\alpha\rangle) = -\alpha^2|\psi\rangle,$$

és a dir, $|\psi\rangle$ és propi de a^2 amb valor propi $-\alpha^2$.

(c) $|\psi\rangle$ és propi de $\cos \alpha a$ amb valor propi $\cosh \alpha^2$. En efecte

$$\begin{aligned}\cos(\alpha a)|\psi\rangle &= \frac{Ae^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(\cos(\alpha a)|i\alpha\rangle + \cos(\alpha a)|-i\alpha\rangle) = \frac{Ae^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(\cos(i\alpha^2)|i\alpha\rangle + \cos(-i\alpha^2)|-i\alpha\rangle) \\ &= \frac{Ae^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(\cos(i\alpha^2)|i\alpha\rangle + \cos(i\alpha^2)|-i\alpha\rangle) = \cos(i\alpha^2)|\psi\rangle = \cosh(\alpha^2)|\psi\rangle.\end{aligned}$$

(d) Tenim, fent servir el resultat anterior,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|A\cos(\alpha a^\dagger)|0\rangle = A\cosh\alpha^2\langle\psi|0\rangle.$$

D'altra banda

$$\langle\psi|0\rangle = \frac{A^*e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(\langle i\alpha|0\rangle + \langle -i\alpha|0\rangle) = \frac{A^*e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}} + e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right) = A^*.$$

Així doncs, si $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ ha de ser $AA^*\cosh\alpha^2 = |A|^2\cosh\alpha^2 = 1$. Com que l'estat $|\psi\rangle$ està determinat mòdul una fase, podem triar la seva constant de normalització real i positiva de manera que podem escriure'l com

$$|\psi\rangle = \frac{e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2\sqrt{\cosh\alpha^2}}(|i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle) = \frac{|i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle}{\sqrt{2\left(1+e^{-2\alpha^2}\right)}}.$$

(e) En aquest cas

$$|\phi\rangle = B\sin\alpha a^\dagger|0\rangle = -\frac{iBe^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2}(|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle).$$

Calculem $\langle\phi|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\phi\rangle &= \frac{BB^*e^{\alpha^2}}{4}(\langle i\alpha|i\alpha\rangle + \langle -i\alpha|-i\alpha\rangle - \langle -i\alpha|i\alpha\rangle - \langle i\alpha|-i\alpha\rangle) \\ &= \frac{|B|^2e^{\alpha^2}}{4}(2 - \langle -i\alpha|i\alpha\rangle - \langle i\alpha|-i\alpha\rangle).\end{aligned}$$

Aleshores

$$\langle i\alpha|-i\alpha\rangle = e^{-i\,\mathrm{Im}\,(i\alpha)(-i\alpha)^*}e^{-\frac{|i\alpha+i\alpha|^2}{2}} = e^{-2\alpha^2},$$

i per tant

$$\langle\phi|\phi\rangle = \frac{|B|^2e^{\alpha^2}}{4}(2 - 2e^{-2\alpha^2}) = |B|^2\frac{e^{\alpha^2} - e^{-\alpha^2}}{2} = |B|^2\sinh\alpha^2.$$

Aleshores, si $\langle\phi|\phi\rangle = 1$, ha de ser $|B|^2\sinh\alpha^2 = 1$. Com abans, tenim llibertat de triar la fase de B. Si fem $B = \frac{i}{\sqrt{\sinh\alpha^2}}$ podem escriure

$$|\phi\rangle = \frac{e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{2\sqrt{\sinh\alpha^2}}(|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle) = \frac{|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle}{\sqrt{2(1-e^{-2\alpha^2})}}.$$

(f) Calculem $\langle H\rangle_\psi$ on $H = \hbar\omega a^\dagger a$. Tenim

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger a\rangle_\psi = \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle &= \frac{e^{\alpha^2}}{4\cosh\alpha^2}(\langle i\alpha| + \langle -i\alpha|)a^\dagger a(|i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle) \\
&= \frac{e^{\alpha^2}}{4\cosh\alpha^2}(-i\alpha\langle i\alpha| + i\alpha\langle -i\alpha|)(i\alpha|i\alpha\rangle - i\alpha|-i\alpha\rangle) \\
&= \frac{e^{\alpha^2}}{4\cosh\alpha^2}(\langle i\alpha| - \langle -i\alpha|)(|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle) \\
&= \frac{e^{\alpha^2}}{4\cosh\alpha^2}\frac{4}{|B|^2 e^{\alpha^2}} = \alpha^2\frac{\sinh\alpha^2}{\cosh\alpha^2},
\end{aligned}$$

on hem fet servir l'apartat anterior. Per tant

$$\langle H\rangle_\psi = \hbar\omega\alpha\tanh\alpha^2.$$

(g) Aquest hamiltonià és un oscil·lador harmònic desplaçat $\frac{1}{2}$, i per tant té per estats propis els estats de la base de Fock amb energies $E_n = \hbar\omega n$. Aleshores, per un estat coherent qualsevol

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega t}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle.$$

Per tant l'evolució de l'estat $|\psi\rangle$ sota el hamiltonià H és

$$|\psi(t)\rangle = \frac{|i\alpha e^{-i\omega t}\rangle + |-i\alpha e^{-i\omega t}\rangle}{\sqrt{2(1-e^{-2\alpha^2})}}.$$

Evidentment, quan $t = \frac{2\pi}{\omega}$ se satisfà $|\psi(t)\rangle = |\psi\rangle$. Però per $t = \frac{\pi}{\omega}$ això també passa:

$$|\psi(\tfrac{\pi}{\omega})\rangle = \frac{|i\alpha e^{-i\pi}\rangle + |-i\alpha e^{-i\pi}\rangle}{\sqrt{2(1-e^{-2\alpha^2})}} = \frac{|-i\alpha\rangle + |i\alpha\rangle}{\sqrt{2(1-e^{-2\alpha^2})}} = |\psi\rangle.$$