

# Entrega 1: La temperatura d'un habitatge amb calefacció regulada per temporitzador

Arnau Mas

27 de novembre de 2018

## 1 Introducció

Partim de la llei de Newton del refredament,  $\dot{T} = -k(T - T_e)$  on  $T_e$  és la temperatura ambient i  $k$  un coeficient relacionat amb la conductivitat del sistema —com més petita és  $k$  més ben aïllat es troba el sistema—. Podem pensar que la temperatura ambient depèn del temps, així com introduir un terme de font,  $q$ , potencialment també dependent del temps, que representa un flux de calor que rep el sistema. Així la nostra equació fonamental serà

$$\dot{T} = q(t) - k(T - T_e(t)). \quad (1.1)$$

Al llarg de tot l'informe suposarem que la temperatura ambient pren la forma

$$T_e(t) = \frac{1}{2}(T_{\max} + T_{\min}) + \frac{1}{2}(T_{\max} - T_{\min}) \sin \omega t,$$

és a dir, que varia entre  $T_{\max}$  i  $T_{\min}$  amb un període de  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Podem posar  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_{\max} + T_{\min})$  i  $\Delta T = (T_{\max} - T_{\min})$  i per tant  $T_e(t) = \bar{T} + \frac{1}{2}\Delta T \sin \omega t$ . Així, si  $\omega = \frac{2\pi}{24}$ ,  $\bar{T}$  és la temperatura ambient mitjana i  $\Delta T$  la variació de temperatura total en un dia.

El nostre problema, doncs, és trobar un model per a la calefacció, és a dir, una forma per a  $q(t)$  que sigui òptima segons algun criteri.

## 2 Models senzills

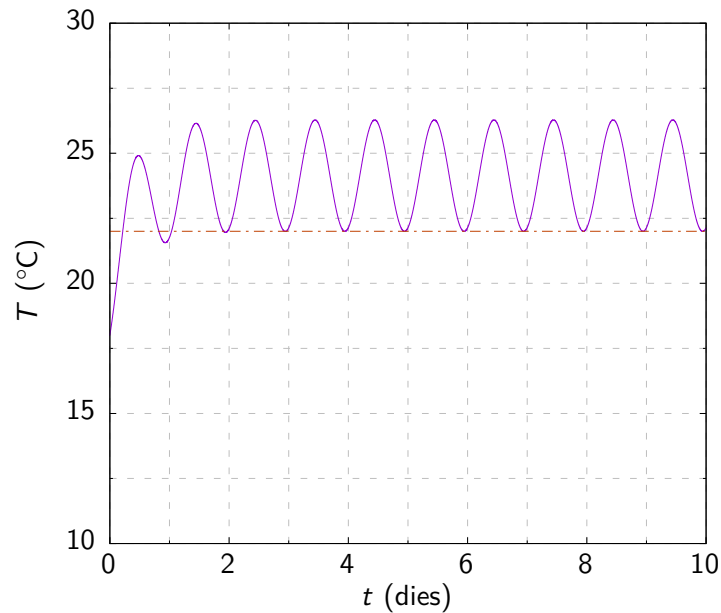
### 2.1 Calefacció constant

El model més senzill és considerar  $q_1(t)$  constant en el temps. L'equació (1.1) esdevé

$$\dot{T} - kT = q_1 + \bar{T} + \frac{k\Delta T}{2} \sin \omega t.$$

Aquesta equació es pot resoldre analíticament i resulta

$$T_1(t) = T_0 e^{-kt} + \left(1 - e^{-kt}\right) \left(\frac{q_1}{k} + \bar{T}\right) + \frac{k\Delta T}{2(k^2 + \omega^2)} \left(k \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-kt}\right), \quad (2.1)$$



**Figura 2.1:** Evolució de la temperatura de la casa amb un calefactor constantment encès de manera que la temperatura no baixi dels 22 °C

amb  $T_0$  la temperatura inicial.

Per a  $t$  prou gran, tots els termes que tinguin una exponencial negativa es fan petits. Aquest límit s'anomena règim estacionari o permanent, i en aquest cas és

$$\begin{aligned} T_1^{\text{est}}(t) &= \frac{q_1}{k} + \bar{T} + \frac{k\Delta T}{2(k^2 + \omega^2)} (k \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \\ &= \frac{q_1}{k} + \bar{T} + \frac{k\Delta T}{2\sqrt{k^2 + \omega^2}} (k \sin(\omega t + \theta)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

on  $\theta$  satisfà que  $\tan \theta = \frac{\omega}{k}$ .

Un requeriment raonable és que la temperatura sempre estigui per sobre d'una temperatura llinar  $T_l$ . Podem imposar això només sobre el règim estacionari, ja que les fluctuacions de l'estat transitori, per a valors de  $k$  raonables, no duren més de 12 hores. Així hem de tenir

$$\frac{q_1}{k} + \bar{T} - \frac{k\Delta T}{2\sqrt{k^2 + \omega^2}} \geq T_l$$

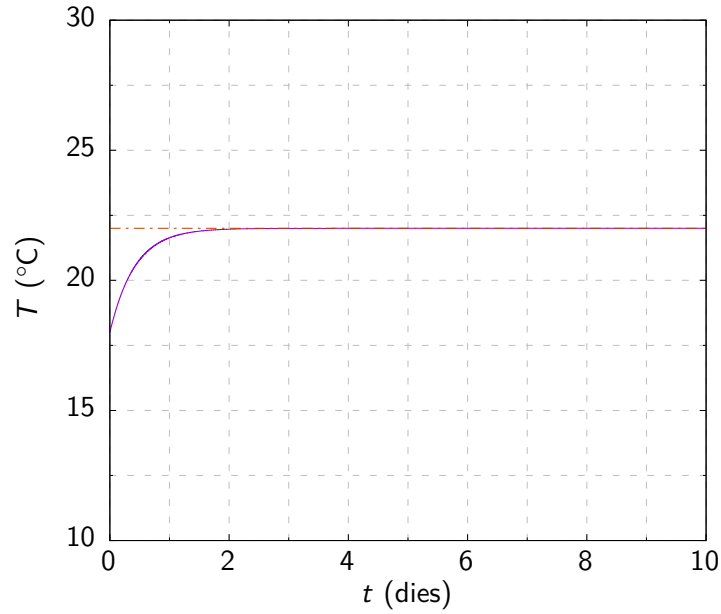
i per tant el mínim valor que satisfà això és

$$q_1 = k(T_l - \bar{T}) + \frac{k^2\Delta T}{2\sqrt{k^2 + \omega^2}}.$$

A la figura 2.1 es mostra la temperatura amb aquest model de calefacció. La temperatura inicial és de 18 °C i  $k = 0.1$  °C s<sup>-1</sup>. La temperatura ambient oscil·la entre els 8 °C i 20 °C, i per tant  $q_1 \approx 1.014$  °C s<sup>-1</sup>.

## 2.2 Model sinusoïdal

També podem requerir que el nostre calefactor anul·li les fluctuacions de la temperatura ambient tot mantenint la casa a una temperatura desitjada  $T_l$ . Per a aconseguir això



**Figura 2.2:** Evolució de la temperatura de la casa amb un calefactor encès amb un patró sinusoidal per mantenir la temperatura de la casa a 22°C de manera constant

podem posar  $q_2(t) = kT_l - kT_e(t)$ , de manera que l'equació (1.1) ara esdevé

$$\dot{T} = -k(T - T_l).$$

Aquesta solució té una solució molt senzilla,

$$T_2(t) = T_0 e^{-kt} + (1 - e^{-kt}) T_l \quad (2.3)$$

Com abans, tenim que per a valors raonables de  $k$ , el terme transitori es fa molt petit durant les primeres 12 hores, de manera que  $T_2(t) \approx T_l$  a partir de llavors.

A la figura 2.2 es representa el perfil de temperatura que dona aquest temporitzador, amb els mateixos paràmetres que a la secció anterior.

## 2.3 Comparació

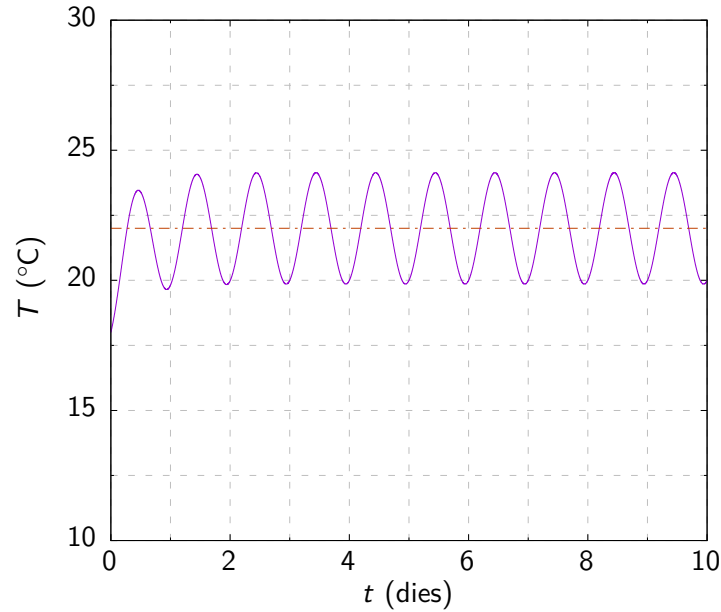
Una bona manera de comparar els diferents models és avaluar la integral

$$Q = \int_0^{2\pi\omega} q(t) dt,$$

que és proporcional a la despesa energètica d'un dia, ja que, llevat de constants,  $q$  representa un flux de calor.

Suposem que volem que la temperatura de la casa no superi una temperatura líndiar  $T_l$ . Aleshores, per a la calor constant  $q_1$  tenim

$$Q_1 = \int_0^{2\pi\omega} q_1(t) dt = 2\pi\omega k(T_l - \bar{T}) + \frac{k^2 \Delta T}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \pi\omega. \quad (2.4)$$



**Figura 2.3:** Evolució de la temperatura de la casa amb un calefactor encès constantment per mantenir la temperatura de la casa oscil·lant 22 °C de manera constant

Podem fer el mateix càlcul per al model sinusoidal que manté la temperatura constant,  $q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_0^{2\pi\omega} q_2(t) dt = 2\pi\omega k(T_l - \bar{T}) - \frac{k\Delta T}{2} \int_0^{2\pi\omega} \sin \omega t dt \\ &= 2\pi\omega k(T_l - \bar{T}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Veiem, doncs que  $Q_2 \leq Q_1$ , per tant el segon mètode és més eficaç, no només perquè consumeix menys, sino perquè manté una temperatura constant.

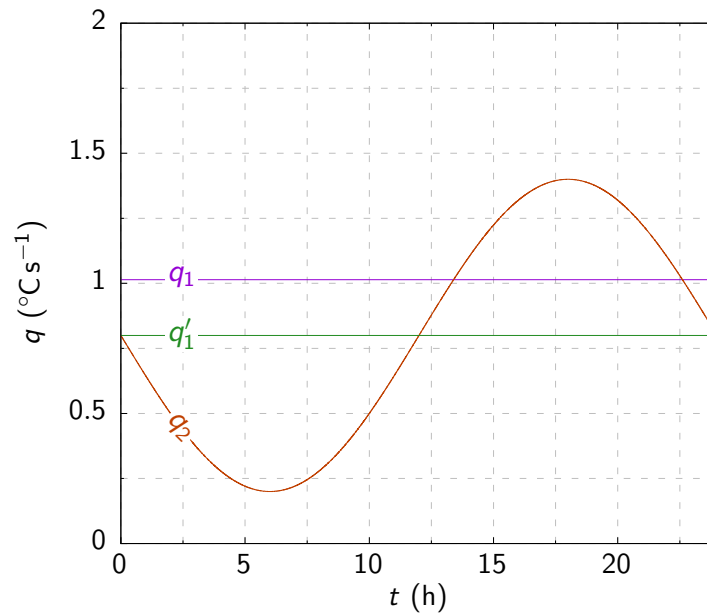
Ara bé, podem ser més permissius i demanar no que la temperatura estigui per sobre d'un llindar, sino que oscil·li al voltant d'una temperatura determinada  $T_l$ . Ja hem vist, equació (2.2), que el règim estacionari quan la calefacció és constant és una oscil·lació al voltant de  $\frac{1}{k}q_1 + \bar{T}$ . Per tant si demanem que aquesta temperatura sigui  $T_l$  obtenim

$$q'_1 = k(T_l - \bar{T}).$$

El consum diari ara és  $Q'_1 = 2\pi\omega k(T_l - \bar{T})$ , el mateix que amb el model de calefacció sinusoidal. Veiem, doncs, que amb el mateix cost energètic tenim dues opcions: o bé mantenim una temperatura de la casa constant però, per contra, tenim un temporitzador complex, o bé permetem oscil·lacions de la temperatura durant el dia a canvi de mantenir la calefacció a un valor constant. Aquest perfil es mostra a la figura 2.3.

A la figura 2.4 es mostren els diferents perfils d'encès per als models proposats.

Val a dir que aquest model és extremadament simplificat, per tant les opcions que presentem no necessàriament s'ajusten al comportament real d'un sistema de calefacció d'un habitatge.



**Figura 2.4:** Perfils dels tres diferents models de calefacció

### 3 Termòstat

Un model més realista consisteix en introduir un termòstat, és a dir, un sistema que encén el dispositiu calefactor només quan la temperatura baixa d'un cert valor llimar. Una manera de modelar això és amb la funció de Heaviside, que es defineix com  $H(x) = 1$  per  $x \geq 0$  i  $H(x) = 0$  per  $x < 0$ . Aleshores, si fem  $q_3 = qH(T_l - T)$  estem modelant un termòstat que encendrà la calefacció quan  $T \leq T_l$ . L'equació diferencial és

$$\dot{T} = -k(T - T_e(t)) + qH(T_l - T).$$

Sagemath no pot resoldre explícitament aquesta equació, però sí que ho pot fer numèricament. A la figura 3.1 es mostra el resultat de la integració numèrica.

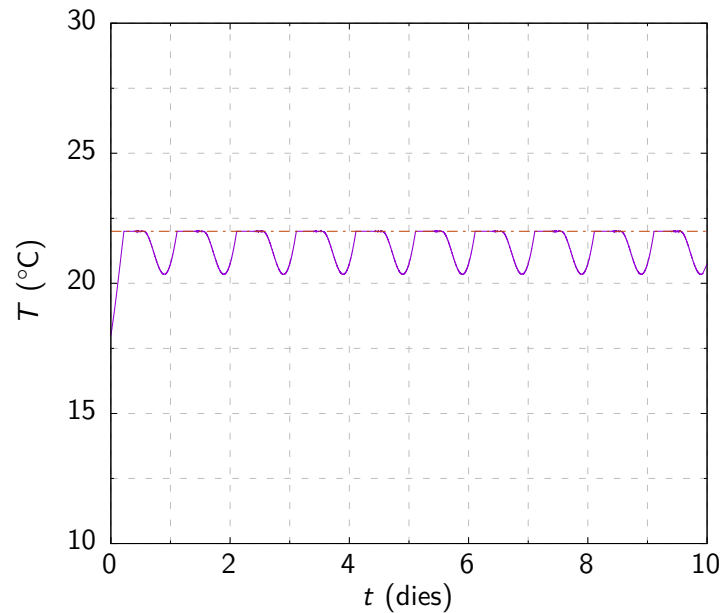
Com veiem, la temperatura no excedeix els 22°C, que és la temperatura llimar. Les baixades de temperatura periòdiques es minimitzen variant el valor del factor  $q$ , que en el cas de la figura és 1. Només amb  $q = 1.5$  la temperatura ja és manté essencialment constant a la temperatura llimar. Observem també que aquesta opció presenta molta menys oscil·lació que el model amb  $q$  constant, la temperatura només es mou entre 22°C i 20°C. El consum energètic és molt similar al de  $q_1$ , ja que  $q_3$  és o bé 0 o bé 1 i  $q_1$  és molt propera a 1, però presenta molta menys oscil·lació.

Aquest model és més realista ja que es podria adaptar a una temperatura ambient diferent, per exemple, que variés de forma estocàstica durant el dia. Els tres models anteriors depenien fortament de com hem modelat la temperatura ambient.

## A Codis

**Programa 1:** Codi per simular el model amb  $q_1$

1 | *# Donem valor als paràmetres*



**Figura 3.1:** Evolució de la temperatura incorporant una funció de Heaviside amb temperatura llindar 22 °C

```

2  T_max = 20
3  T_min = 8
4  w = pi/12
5  k = 0.1
6
7  # Definim l'equació diferencial i la resoltem
8  var('T_0, q')
9  T_e(t) = 0.5*(T_max + T_min) + 0.5*(T_max - T_min)*sin(w*t)
10 x = function('T')(t)
11 eq1 = diff(x,t) == q - k*(x - T_e(t))
12 T_1(t) = desolve(eq1, x, ivar = t, ics = [0,T_0])
13 q1 = 22*k - k*(T_max + T_min)/2 + k**2*(T_max -
    → T_min)/(2*sqrt(k**2 + w**2))
14
15 # Fem el gràfic de la solució
16 plot(T_1.subs(q = q1, T_0 = 18), xmin = 0, xmax = 240) +
    → plot(22, xmin = 0, xmax = 240, color = 'green', linestyle
    → = '--')

```

**Programa 2:** Codi per simular el model amb  $q_2$

```

1  # Donem valor als paràmetres
2  T_max = 20
3  T_min = 8
4  w = pi/12
5  k = 0.1
6
7  # Definim l'equació diferencial i la resoltem
8  var('T_0, q')
9  T_e(t) = 0.5*(T_max + T_min) + 0.5*(T_max - T_min)*sin(w*t)

```

```

10 q2(t) = k*22 - k*T_e(t)
11 x = function('T')(t)
12 eq2 = diff(x,t) == q2(t) - k*(x - T_e(t))
13 T_2(t) = desolve(eq2, x, ivar = t, ics = [0,T_0])
14
15 # Fem el gràfic de la solució
16 plot(T_2.subs(T_0 = 18), xmin = 0, xmax = 240) + plot(22, xmin
    → = 0, xmax = 240, color = 'green', linestyle = '--')

```

Programa 3: Codi per simular el model amb  $q'_1$ 

```

1 # Donem valor als paràmetres
2 T_max = 20
3 T_min = 8
4 w = pi/12
5 k = 0.1
6
7 # Definim l'equació diferencial i la resollem
8 var('T_0, q')
9 T_e(t) = 0.5*(T_max + T_min) + 0.5*(T_max - T_min)*sin(w*t)
10 x = function('T')(t)
11 eq3 = diff(x,t) == q - k*(x - T_e(t))
12 T_3(t) = desolve(eq3, x, ivar = t, ics = [0,T_0])
13 q3 = 22*k - k*(T_max + T_min)/2
14
15 # Fem el gràfic de la solució
16 plot(T_3.subs(q = q3, T_0 = 18), xmin = 0, xmax = 240) +
    → plot(22, xmin = 0, xmax = 240, color = 'green', linestyle
    → = '--')

```

Programa 4: Codi per simular el model amb  $q_3$ 

```

1 # Donem valor als paràmetres
2 T_max = 20
3 T_min = 8
4 w = pi/12
5 k = 0.1
6
7 # Definim l'equació diferencial i la resollem
8 T_e(t) = 0.5*(T_max + T_min) + 0.5*(T_max - T_min)*sin(w*t)
9 x = function('T')(t)
10 eq4 = diff(x,t) == unit_step(22 - x) - k*(x - T_e(t))
11 punts = desolve_rk4(eq4, x, ivar = t, ics = [0,18], end_points
    → = 240, step = 0.01)
12
13 # Fem el gràfic de la solució
14 list_plot(punts)

```