Entrega 2: Espais de Hilbert de dimensió finita

Arnau Mas

4 d'octubre de 2018

Considerem les matrius

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Com que A i B són matrius reals, seran hermítiques si i només si són simètriques, ja que un nombre és igual al seu conjugat si i només si és real. Així, com que tant A com B són simètriques també són hermítiques.

(b) Observem que si una matriu A té un vector propi $|u\rangle$ de valor propi λ aleshores la matriu αA té el mateix vector propi però amb valor propi $\alpha\lambda$. En efecte, tenim $A\,|u\rangle = \lambda\,|u\rangle$ i per tant $\alpha A\,|u\rangle = \alpha\lambda\,|u\rangle$. Per tant podem diagonalitzar $2A$ i $3B$ i els valors propis que obtinguem seran, respectivament, el doble i el triple dles valors propis buscats.

Busquem les arrels del polinomi característic de $2A$, que en són els valors propis:

$$\begin{aligned} p_{2A}(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 1 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = (x-4)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-4)\left((x-3)^2-1\right) = (x-4)^2(x-2). \end{aligned}$$

Per tant A té com a valors propis 2 i 1. Busquem ara els corresponents vectors propis. Pel valor propi 2 hem de trobar les solucions de $2A - 4I_3 = 0$:

$$2A - 4I - 3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, el subespai propi de valor propi 2 d'A és

$$\ker(A - 2I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Pel valor propi 1 hem de calcular $\ker(A - I_3)$:

$$2A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I per tant

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ens interessa, però, trobar una base ortonormal de vectors propis. Així posem

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i podem escriure

$$A = 2\,|u_1\rangle\,\langle u_1| + 2\,|u_2\rangle\,\langle u_2| + |u_3\rangle\,\langle u_3|\,.$$

Repetim els càlculs per a diagonalitzar B.

$$\begin{aligned} p_{3B}(x) &= \begin{vmatrix} x-5 & -1 & 1 \\ -1 & x-5 & -1 \\ 1 & -1 & x-5 \end{vmatrix} = (x-5) \begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ -1 & x-5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= (x-5)\left((x-5)^2 - 1\right) + 2(1-(x-5)) = (x-5)(x-4)(x-6) - 2(x-6) \\ &= (x-6)((x-4)(x-5)-2) = (x-6)^2(x-3). \end{aligned}$$

Per tant B té 2 i 1 per valors propis.

Calculem $\ker(B - 2I_3)$:

$$3B - 6I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I per tant

$$\ker(B - 2I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Pel valor propi 1 tenim

$$\begin{aligned} 3B - 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant
$$\ker(B - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Com abans, però, podem fer que la base de vectors propis sigui ortonormal, per exemple
$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
i per tant
$$B = 2\,|v_1\rangle\langle v_1| + 2\,|v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3|.$$

(c) Tenim que $P_1 = |u_3\rangle\langle u_3|$ és el projector al subespai propi de valor propi 1, i $P_2 = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2|$ és el projector al subespai propi de valor propi 2. Explícitament
$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
i
$$P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Per tant $A = 2P_2 + P_1$.

(d) Tenim
$$|u_3\rangle = |v_1\rangle \in \ker(A - I_3) \cap \ker(B - 2I_3).$$
i
$$|v_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle \in \ker(A - 2I_3) \cap \ker(B - I_3).$$
És a dir, hem trobat dos vectors que són vectors propis d'A i B simultàniament. I també
$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,|u_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,|v_1\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}\,|v_2\rangle \in \ker(A - 2I_3) \cap \ker(B - 2I_3).$$

Per tant tenim tres vectors propis d'A i B linealment independents; és a dir, una base que diagonalitza a A i B simultàniament.

(e) Tenim

$$AB = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & -2 & -4 \\ -2 & 14 & 4 \\ -4 & 4 & 20, \end{pmatrix}$$

i per tant $(AB)^\dagger$. Així

$$[A, B] = AB - BA = AB - (A^\dagger B^\dagger)^\dagger = AB - (AB)^\dagger = AB - AB = 0.$$