Seminari 2: Càlcul d'integrals amb el teorema dels residus

Arnau Mas — 77633181Q

17 de maig de 2019

Problema 1

Hem de calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\,dx$$

per $\lambda \in (0,1)$. Definim $f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}$, triant la branca de $z^{-\lambda}$ que ve determinada per la branca de l'argument a $(0, 2\pi)$. Aleshores f és holomorfa al pla complex menys $[0, \infty)$ i i i $-i$, on hi té dos pols d'ordre 1. Integrarem f sobre un camí γ format per un semicercle de radi $\epsilon < 1$, γ_ϵ, que està connectat per dos segments γ_1 i γ_2 a un cercle γ_R de radi R, de manera que l'origen queda a l'exterior del camí. Aleshores

$$\int_\gamma \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_1} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz.$$

Analitzem cada integral per separat. Pel cercle petit de radi ϵ tenim

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\epsilon^{-\lambda}e^{-i\lambda\theta}}{1+\epsilon^2 e^{2i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\le \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\epsilon^{1-\lambda}}{|1+\epsilon^2 e^{2i\theta}|}\,d\theta \\
&\le \frac{\pi\epsilon^{1-\lambda}}{|1-\epsilon^2|} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

De manera similar, pel cercle de radi R

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz\right| &= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R^{-\lambda}e^{-i\lambda\theta}}{1+R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\le \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R^{1-\lambda}}{|1+R^2 e^{2i\theta}|}\,d\theta \\
&\le \frac{(\theta_1-\theta_2)R^{1-\lambda}}{|1-R^2|} \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Així doncs les úniques contribucions són les dels segments. Tenim

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz = \int_0^R \frac{(x+i\epsilon)^{-\lambda}}{1+(x+i\epsilon)^2}\,dz + \int_R^0 \frac{(x-i\epsilon)^{-\lambda}}{1+(x-i\epsilon)^2}\,dz.$$

Quan prenem límit $\epsilon \to 0$ ambdós denominadors van a $1+x^2$. D'altra banda, pels numeradors tenim

$$(x+i\epsilon)^{-\lambda} = e^{-\lambda \log(x+i\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon\to 0} e^{-\lambda\log(x)} = x^{-\lambda}.$$

Però en canvi, quan ens apropem per sota de l'eix positiu tenim

$$(x-i\epsilon)^{-\lambda} = e^{-\lambda\log(x-i\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon\to 0} e^{-\lambda(\log(x)+2\pi i)} = e^{-2\pi\lambda i}x^{-\lambda},$$

degut a la determinació de l'argument que hem triat.

Així obtenim

$$\int_\gamma \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2}\,dz = (1-e^{-2\pi\lambda i})\int_0^R \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\,dx.$$

La funció f té dos pols simples a i i $-i$. Si $R>1$ estan dins de l'interior de γ. Així, prenent límit $R\to\infty$ i aplicant el teorema dels residus obtenim

$$(1-e^{-2\pi\lambda i})\int_0^R \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,-i)).$$

Calculem, doncs, els dos residus:

$$(z-i)f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{z+i} \xrightarrow{z\to i} \frac{i^{-\lambda}}{2i} = \frac{e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}}}{2i} = \operatorname{Res}(f,i)$$

i

$$(z+i)f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{z-i} \xrightarrow{z\to -i} -\frac{(-i)^{-\lambda}}{2i} = \frac{e^{-\frac{3i\pi\lambda}{2}}}{2i} = \operatorname{Res}(f,-i).$$

I finalment

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{-\lambda}}{1+x^2}\,dx &= \frac{2\pi i(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,-i))}{(1-e^{-2\pi\lambda i})} = \frac{\pi(e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}} - e^{-\frac{3i\pi\lambda}{2}})}{1-e^{-2i\lambda\pi}} \\ &= \frac{\pi(e^{\frac{i\pi\lambda}{2}} - e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}})}{e^{\pi\lambda i} - e^{-\pi\lambda i}} = \frac{\pi\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Problema 2

Hem de calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5+3\cos x}\,dx,$$

Per a $n\in\mathbb{N}$.

Per a integrals d'aquesta mena podem observar que si $z \in S^1$ aleshores $z = e^{i\theta}$ i per tant

$$\cos\theta = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

ja que $z^{-1} = \bar{z}$ per a $z \in S^1$. I per tant

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

ja que $z^n = e^{in\theta}$. Així, la integral que volem calcular és precisament

$$\frac{1}{i}\int_{S^1} \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{2}(z^n + z^{-n})}{5 + \frac{3}{2}(z + z^{-1})}\,dz$$

amb la parametrització $z = e^{ix}$. Si la desenvolupem una mica trobem

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5 + 3\cos x}\,dx = \frac{1}{i}\int_{S^1} \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{2}(z^n + z^{-n})}{5 + \frac{3}{2}(z + z^{-1})}\,dz = \frac{1}{i}\int_{S^1} \frac{z^{2n} + 1}{z^n(10z + 3z^2 + 3)}\,dz.$$

El polinomi $3z^2 + 10z + 3$ té dues arrels, -3 i $-\frac{1}{3}$. Aleshores podem escriure

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5 + 3\cos x}\,dx = \frac{1}{3i}\int_{S^1} \frac{z^{2n} + 1}{z^n(z + 3)(z + \frac{1}{3})}\,dz.$$

Per a calcular aquesta integral aplicarem el teorema dels residus. La funció

$$f(z) = \frac{z^{2n} + 1}{z^n(z + 3)(z + \frac{1}{3})}$$

té 3 pols: d'ordre 1 a -3 i $-\frac{1}{3}$ i d'ordre n a 0. Com que estem integrant al voltant del disc unitat només contribuiran els residus de f a 0 i $-\frac{1}{3}$. Així, aplicant el teorema dels residus tenim

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5 + 3\cos x}\,dx = \tfrac{2\pi}{3}(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, -\tfrac{1}{3})).$$

Hem de calcular, per tant, els residus als dos punts en qüestió.

Per $-\frac{1}{3}$, com que el pol és d'ordre 1 tenim

$$\operatorname{Res}(f, -\tfrac{1}{3}) = \lim_{z \to -\frac{1}{3}} (z - \tfrac{1}{3})f(z) = \lim_{z \to -\frac{1}{3}} \frac{z^{2n} + 1}{z^n(z + 3)} = \frac{\frac{1}{3^{2n}} + 1}{\frac{(-1)^n}{3^n}(3 - \frac{1}{3})} = \frac{(-1)^n}{8}\left(\frac{3^{2n} + 1}{3^{n-1}}\right).$$

D'altra banda, el càlcul del residu a 0 requereix més feina. Com que és un pol d'ordre n podem fer servir

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d}{dz^{n-1}}(z^n f(z))$$

Per a calcular la n-èssima derivada de $z^n f(z)$ podem fer servir la regla del producte generalitzada

$$\frac{d}{dz^n}\Big(f(z)g(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z).$$

Per tant

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz^n}\Big(z^n f(z)\Big) &= \frac{d}{dz^n}\left(\frac{z^{2n}+1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d}{dz^k}(z^{2n}+1)\,\frac{d}{dz^{n-k}}\left(\frac{1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})}\right)\\ &= (z^{2n}+1)\frac{d}{dz^n}\left(\frac{1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})}\right)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{2n!}{(2n-k)!}z^{2n-k}\,\frac{d}{dz^{n-k}}\left(\frac{1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})}\right).\end{aligned}$$

Observem, doncs, que quan prenem el límit $z \to 0$ només sobreviu el primer terme, de manera que només hem de calcular l'n-èssima derivada del denominador. Per a fer això descomposem en fraccions simples:

$$\frac{1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{(z+\frac{1}{3})} - \frac{1}{(z+3)}\right)$$

i per tant

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz^n}\left(\frac{1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})}\right) &= \frac{3}{8}\left(\frac{d}{dz^n}\frac{1}{(z+\frac{1}{3})} - \frac{d}{dz^n}\frac{1}{(z+3)}\right)\\ &= (-1)^n\frac{3}{8}\left(\frac{n!}{(z+\frac{1}{3})^{n+1}} - \frac{n!}{(z+3)^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Aleshores arribem a que

$$\operatorname{Res}(f,0) = (-1)^{n-1}\frac{3}{8}\left(3^n - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{8}\left(\frac{3^{2n}-1}{3^{n-1}}\right).$$

Un cop calculats els dos residus podem finalment calcular la integral original:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{5+3\cos x}\,dx = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{(-1)^n}{8}\left(\frac{3^{2n}+1}{3^{n-1}}\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{8}\left(\frac{3^{2n}-1}{3^{n-1}}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{2\cdot 3^n}.$$