Entrega 2: Addició del moment angular. Estats de barions

Arnau Mas

10 de maig de 2019

1 Spin

A continuació estudiem els possibles estats d'spin de tres quarks, tenint en compte que els quarks són partícules d'spin $\frac{1}{2}$. Els estats més senzills són els de moment angular màxim, $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$. Tenim

$$S_z |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar}{2} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar}{2} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \frac{3\hbar}{2} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle ,$$
$$S_z |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\hbar}{2} |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\hbar}{2} |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = -\frac{3\hbar}{2} |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle .$$

Per tant aquests dos estats són propis de S_z amb valors propis $\frac{3}{2}\hbar$ i $-\frac{3}{2}\hbar$ respectivament. Fent servir que

$$S^2 = S_z^2 + \hbar S_z + S_- S_+ = S_z^2 - \hbar S_z + S_+ S_- \tag{1.1}$$

obtenim

$$\begin{aligned} S^2 |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle &= S_z^2 |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \hbar S_z |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + S_- S_+ |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^2 |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{3\hbar^2}{2} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + 0 \\ &= \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right)\hbar^2 |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} S^2 |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle &= S_z^2 |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - \hbar S_z |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + S_+ S_- |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^2 |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{3\hbar^2}{2} |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + 0 \\ &= \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right)\hbar^2 |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle . \end{aligned}$$

Per tant aquests dos estats tenen spin total $\frac{3}{2}\hbar$. D'aquí deduïm que $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$ i que $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$.

— ∗ —

Per a trobar els altres dos estats amb spin total $\frac{3}{2}\hbar$ podem fer servir que

$$S_- \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right) - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}-1\right)}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\hbar\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle,$$

i

$$S_+ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right) + \tfrac{3}{2}\left(-\tfrac{3}{2}+1\right)}\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\hbar\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle.$$

D'altra banda

$$S_- \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle = S_- \left|\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle = \hbar\left(\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle\right)$$

i

$$S_+ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle = S_+ \left|\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle = \hbar\left(\left|\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle\right).$$

Per tant

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{3}}\\ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\left|\downarrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\downarrow\right\rangle}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

— ∗ —

Taula 1.1: Estats propis d'spin de tres quarks

S^2	S_z	Estat
$\frac{3}{2}\hbar$	$\frac{3}{2}\hbar$	$\left\lvert S^1_{123}\right\rangle = \left\lvert\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle$
$\frac{3}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$	$\left\lvert S^2_{123}\right\rangle = \frac{\lvert\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+\lvert\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+\lvert\downarrow\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}\hbar$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$\left\lvert S^3_{123}\right\rangle = \frac{\lvert\downarrow\downarrow\uparrow\rangle+\lvert\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+\lvert\uparrow\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}\hbar$	$-\frac{3}{2}\hbar$	$\left\lvert S^4_{123}\right\rangle = \left\lvert\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle$
$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$	$\left\lvert A^1_{12}\right\rangle = \frac{\lvert\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-\lvert\downarrow\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$	$\left\lvert S^1_{12}\right\rangle = \frac{2\lvert\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-(\lvert\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+\lvert\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{6}}$
$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$\left\lvert A^2_{12}\right\rangle = \frac{\lvert\downarrow\uparrow\downarrow\rangle-\lvert\uparrow\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$\left\lvert S^2_{12}\right\rangle = \frac{2\lvert\downarrow\downarrow\uparrow\rangle-(\lvert\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+\lvert\uparrow\downarrow\downarrow\rangle)}{\sqrt{6}}$

És clar que tots els vectors propis de S_z de valor propi $\frac{1}{2}\hbar$ són combinacions lineals de $\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle, \left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle$ i $\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle$, que generen un subespai de dimensió 3. En aquest subespai hi ha $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Aquest estat és l'únic que pot tenir aquests valors propis ja que l'obtenim aplicant S_- a l'estat $\left|\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle$, que és l'únic estat propi de S_z amb valor propi $\frac{3}{2}\hbar$. Així doncs, l'ortogonal de $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ és subespai propi de S^2 amb valor propi $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar$, de manera que tenim una degeneració pel que fa a l'estat $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Per a trencar aquesta degneració imposarem que els estats han de ser simètrics o antisimètrics respecte l'intercanvi dels quarks 1 i 2. Considerem un estat qualsevol $\alpha\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle + \beta\left|\uparrow\downarrow\uparrow\right\rangle + \gamma\left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle$. L'ortogonalitat equival a $\alpha+\beta+\gamma=0$. Si requerim que sigui antisimètric aleshores $\alpha=0$ i $\beta=-\gamma$, de manera que un cop normalitzat l'estat és

$$\frac{|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Si imposem que sigui simètric aleshores $\beta=\gamma$, i per ortogonalitat, $2\beta=-\alpha$. Un cop normalitzat, l'estat és

$$\frac{2\,|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{6}}.$$

Pel que fa als estats amb $s=\frac{1}{2}$ i $m_s=-\frac{1}{2}$, podem aplicar exactament els mateixos arguments simplement intercanviant $\uparrow$ per $\downarrow$ i viceversa. A la taula 1.1 es mostren els diversos estats d'spin pels tres quarks.

2 Sabor

Si tenim quarks només de dos sabors, *up* i *down*, aleshores els estats $|u\rangle$ i $|d\rangle$ es comporten de la mateixa manera que els estats $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$, és a dir, són propis d'uns operadors, anomenats d'isospin, que satisfan les relacions de commutació del moment angular d'una partícula d'spin $\frac{1}{2}$. Per tant els càlculs que hauriem de fer per a trobar els estats de sabor són els mateixos que els de la secció anterior. A la taula 2.1 es mostren tots els possibles estats de sabor amb els corresponents valors d'isospin col·lectiu.

Taula 2.1: Estats propis d'isospin per a tres quarks, considerant només els sabors *up*, u, i *down*, d

I^2	I_z	Estat
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\lvert S^1_{123}\rangle=\lvert uuu\rangle$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\lvert S^2_{123}\rangle=\frac{\lvert uud\rangle+\lvert udu\rangle+\lvert duu\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\lvert S^3_{123}\rangle=\frac{\lvert ddu\rangle+\lvert dud\rangle+\lvert udd\rangle}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\lvert S^4_{123}\rangle=\lvert ddd\rangle$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\lvert A^1_{12}\rangle=\frac{\lvert udu\rangle-\lvert duu\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\lvert S^1_{12}\rangle=\frac{2\lvert uud\rangle-(\lvert udu\rangle+\lvert duu\rangle)}{\sqrt{6}}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\lvert A^2_{12}\rangle=\frac{\lvert dud\rangle-\lvert udd\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\lvert S^2_{12}\rangle=\frac{2\lvert ddu\rangle-(\lvert dud\rangle+\lvert udd\rangle)}{\sqrt{6}}$

3 Color

Els possibles estats ortogonals de color neutre de tres quarks són $|rgb\rangle$, $|rbg\rangle$, $|gbr\rangle$, $|grb\rangle$, $|brg\rangle$ i $|bgr\rangle$. Per tant, un estat de color neutre serà de la forma

$$|\Psi\rangle=\alpha_1\,|rgb\rangle+\alpha_2\,|rbg\rangle+\beta_1\,|gbr\rangle+\beta_2\,|grb\rangle+\gamma_1\,|brg\rangle+\gamma_2\,|bgr\rangle\,.$$

A la natura, però, només s'observen estats de color completament antisimètrics. Hem d'imposar $P_{12}\left|\Psi\right\rangle = P_{23}\left|\Psi\right\rangle = P_{31}\left|\Psi\right\rangle = -\left|\Psi\right\rangle$. Quan requerim $P_{12}\left|\Psi\right\rangle = -\left|\Psi\right\rangle$ trobem $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\beta_1 = -\beta_2$ i $\gamma_1 = -\gamma_2$. Per tant podem escriure

$$\left|\Psi\right\rangle = \alpha(\left|rgb\right\rangle - \left|rbg\right\rangle) + \beta(\left|gbr\right\rangle - \left|grb\right\rangle) + \gamma(\left|brg\right\rangle - \left|bgr\right\rangle).$$

Aleshores

$$P_{12}\left|\Psi\right\rangle = \alpha(\left|grb\right\rangle - \left|brg\right\rangle) + \beta(\left|bgr\right\rangle - \left|rgb\right\rangle) + \gamma(\left|rbg\right\rangle - \left|gbr\right\rangle),$$

de manera que quan imposem $P_{12}\left|\Psi\right\rangle = -\left|\Psi\right\rangle$ obtenim $\alpha = \beta = \gamma$. I aleshores la condició $P_{31}\left|\Psi\right\rangle = -\left|\Psi\right\rangle$ es compleix. Podem determinar l'últim paràmetre que queda per normalització, i per tant el singlet de color és

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{\left|rgb\right\rangle - \left|rbg\right\rangle + \left|gbr\right\rangle - \left|grb\right\rangle + \left|brg\right\rangle - \left|bgr\right\rangle}{\sqrt{6}}.$$

4 Estats bariònics

Els estats propis de tres quarks seran productes d'un dels possibles estats d'spin, de sabor i de color. El factor de color és únic, el singlet, que és antisimètric. Per tant el producte de l'estat d'spin i sabor ha de ser simètric. Hi ha 16 possibilitats òbvies, que són els estats de la forma $\left|S_{123}^n\right\rangle_S \left|S_{123}^m\right\rangle_I$, on n i m varient de 1 a 4, és a dir, productes d'estats amb spin total $\frac{3}{2}\hbar$ i isospin total $\frac{3}{2}$, segons les taules 1.1 i 2.1.

— ∗ —

Per a determinar els altres possibles estats és útil saber com actuen les transposicions P_{12}, P_{23} i P_{31} sobre els estats d'spin i sabor que hem trobat. Farem els càlculs sobre els estats d'spin, però és clar que els estats de sabor satisfaran les mateixes relacions. És clar que sobre els 4 estats simètrics actuen com la identitat. També és clar que $P_{12}\left|S_{12}^i\right\rangle = \left|S_{12}^i\right\rangle$ i $P_{12}\left|A_{12}^i\right\rangle = -\left|A_{12}^i\right\rangle$, per construcció.

Tenim

$$P_{23}\left|A_{12}^1\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Per saber com s'escriu aquest estat en termes de la base que hem trobat podem calcular el seu producte amb la resta dels estats. Aquest estat té $m_s = \frac{3}{2}\hbar$ i ortogonal a $\left|S_{123}^2\right\rangle$, de manera que els únics productes que no són nuls són

$$\left\langle A_{12}^1\right| P_{23}\left|A_{12}^1\right\rangle = \frac{1}{2}$$

i

$$\left\langle S_{12}^1\right| P_{23}\left|A_{12}^1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

És a dir

$$P_{23}\left|A_{12}^i\right\rangle = \frac{\left|A_{12}^1\right\rangle + \sqrt{3}\left|S_{12}^1\right\rangle}{2}. \tag{4.1}$$

Similarment tenim

$$P_{31}\left|A_{12}^1\right\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle}{2}.$$

Els productes són

$$\left\langle A_{12}^1\right| P_{31}\left|A_{12}^1\right\rangle = \frac{1}{2}$$

i

$$\left\langle S_{12}^1\right| P_{31}\left|A_{12}^1\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Per tant

$$P_{31}\left|A_{12}^1\right\rangle = \frac{|A_{12}^1\rangle - \sqrt{3}\,|S_{12}^1\rangle}{2}. \tag{4.2}$$

Fem els mateixos càlculs per $P_{23}\,|S_{12}^1\rangle$ i $P_{31}\,|S_{12}^1\rangle$. Com que

$$P_{23}\left|S_{12j}^1\right\rangle = \frac{2\,|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{6}}$$

aleshores

$$\left\langle A_{12}^1\right| P_{23}\left|S_{12}^1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

i

$$\left\langle S_{12}^1\right| P_{23}\left|S_{12}^1\right\rangle =$$