Passejos aleatoris en grafs

Gerard Castro, Kim López, Gal·la Mora, Arnau Mas

5 de desembre de 2018

Esquema

Definició

Definició

Un *passeig aleatori* a un graf G és una seqüència de vèrtexs $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$, tal que $v_k v_{k+1}$ es tria uniformement d'entre les arestes incidents a v_k.

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t
Les probabilitats de transició

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v)$$

determinen el passeig:

Aspectes probabilístics

$V(t)$ és la variable aleatòria que representa la posició del passeig a l'instant t
Les probabilitats de transició

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v)$$

determinen el passeig:

$$\mathrm{P}(V(t) = u) = \sum_{v \in V(G)} \mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v)\, \mathrm{P}(V(t-1) = v).$$

Probabilitats de transició

Com que

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v) = \frac{a(u, v)}{\mathrm{gr}(v)},$$

Probabilitats de transició

Com que

$$\mathrm{P}(V(t) = u \mid V(t-1) = v) = \frac{a(u,v)}{\mathrm{gr}(v)},$$

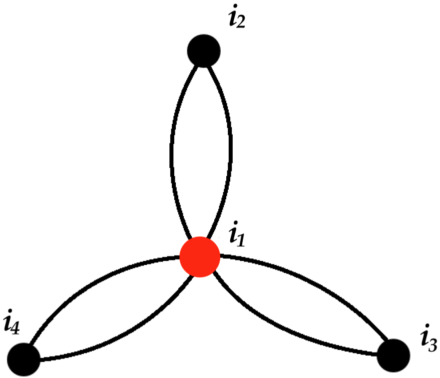
tenim

$$P(V(t) = u) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u,v)}{\mathrm{gr}(v)} P(V(t-1) = v).$$

Un exemple

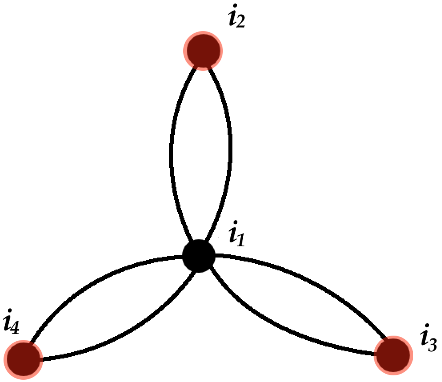
Un exemple

$P(V(0) = i_1) = 1$



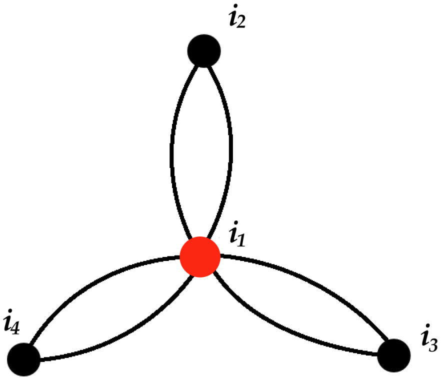
Un exemple

$$\mathrm{P}(V(1) = i_2) = \mathrm{P}(V(1) = i_3)$$
$$= \mathrm{P}(V(1) = i_4) = \frac{1}{3}$$



Un exemple

$P(V(3) = i_1) = 1$



Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$.

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$. Aleshores, en forma matricial

$$\mathbf{p}_t = AD^{-1}\mathbf{p}_{t-1}.$$

A és la matriu d'adjacència i D la matriu dels graus. $P = AD^{-1}$ és la *matriu de transició*.

Matriu de transició

Definim $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^{V(G)}$ com $\mathbf{p}_t(u) = P(V(t) = u)$. Aleshores, en forma matricial

$$\mathbf{p}_t = AD^{-1}\mathbf{p}_{t-1}.$$

A és la matriu d'adjacència i D la matriu dels graus. $P = AD^{-1}$ és la *matriu de transició*.
Per tant

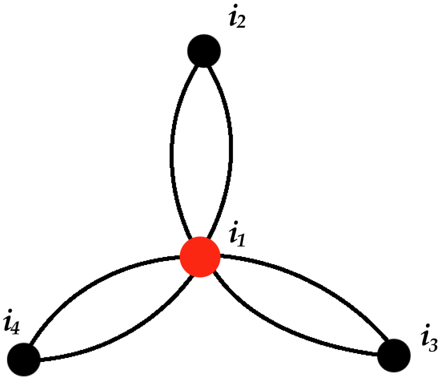
$$\mathbf{p}_t = P^t\mathbf{p}_0.$$

Un exemple

Un exemple

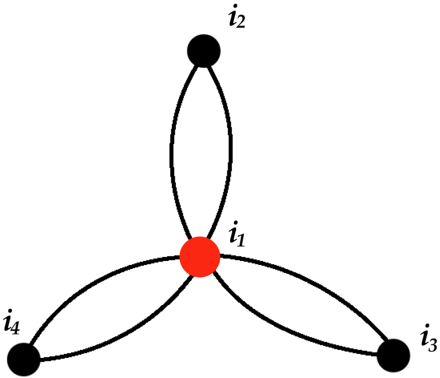
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



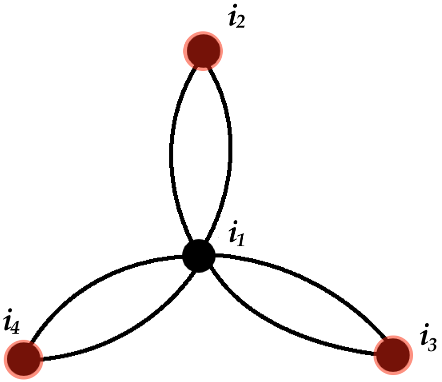
Un exemple

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0, 0, 0)$$



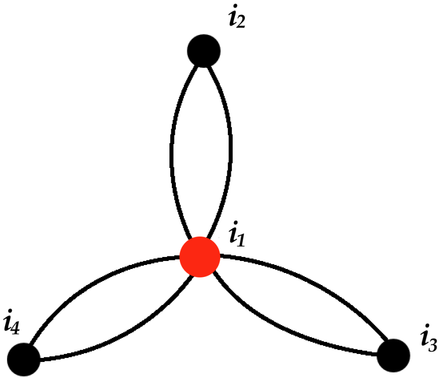
Un exemple

$$\mathbf{p}_1 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = P\mathbf{p}_0$$



Un exemple

$$\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0, 0) = P\mathbf{p}_1 = P^2\mathbf{p}_0$$



Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $\mathrm{P}(V(t) = u) = \mathrm{P}(V(t-1) = u)$ per tot $u \in V(G)$.

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $\mathrm{P}(V(t) = u) = \mathrm{P}(V(t-1) = u)$ per tot $u \in V(G)$.

En termes de la matriu de transició,

$$P\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.$$

Distribució estacionària

Com és el passeig per a temps grans?

Definició

Una distribució és *estacionària* si $\mathrm{P}(V(t) = u) = \mathrm{P}(V(t-1) = u)$ per tot $u \in V(G)$.

En termes de la matriu de transició,

$$P\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.$$

Per tant

$$\boldsymbol{\pi}(u) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u,v)}{\mathrm{gr}(v)}$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\operatorname{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v)$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\operatorname{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v) \leq \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v)$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr} u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\operatorname{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v) \leq \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) = \boldsymbol{\pi}(u^*)$$

Aleshores

$$\sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) \frac{\boldsymbol{\pi}(v)}{\operatorname{gr}(v)} = \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\operatorname{gr}(u^*)}.$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Teorema

Tot graf connex admet una única distribució estacionària.

Demostració.

$\boldsymbol{\pi}$ estacionària. Veurem que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \mathrm{gr}\, u$. Sigui u^* tal que $\frac{\pi(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)}$ és màxim:

$$\boldsymbol{\pi}(u^*) = \sum_{v \in V(G)} \frac{a(u^*, v)}{\mathrm{gr}(v)} \boldsymbol{\pi}(v) \leq \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)} \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) = \boldsymbol{\pi}(u^*)$$

Aleshores

$$\sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) \frac{\boldsymbol{\pi}(v)}{\mathrm{gr}(v)} = \sum_{v \in V(G)} a(u^*, v) \frac{\boldsymbol{\pi}(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)}.$$

Per tant $\frac{\pi(v)}{\mathrm{gr}(v)} = \frac{\pi(u^*)}{\mathrm{gr}(u^*)}$ per tot v adjacent a u^*. $\square$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Podem extendre l'argument a tots els vèrtexs de G fent servir que és connex.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Podem extendre l'argument a tots els vèrtexs de G fent servir que és connex.
Com que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \mathrm{gr}(u)$ aleshores $\boldsymbol{\pi}(u) = C\,\mathrm{gr}(u)$.

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Podem extendre l'argument a tots els vèrtexs de G fent servir que és connex.
Com que $\boldsymbol{\pi}(u) \propto \operatorname{gr}(u)$ aleshores $\boldsymbol{\pi}(u) = C \operatorname{gr}(u)$.
Si imposem que $\sum_{u \in V(G)} \boldsymbol{\pi}(u) = 1$ podem determinar C i

$$\boldsymbol{\pi}(u) = \frac{\operatorname{gr}(u)}{\sum_{v \in V(G)} \operatorname{gr}(v)}$$

Existència i unicitat de distribucions estacionàries

Demostració.

Podem extendre l'argument a tots els vèrtexs de G fent servir que és connex.
Com que $\pi(u) \propto \mathrm{gr}(u)$ aleshores $\pi(u) = C\,\mathrm{gr}(u)$.
Si imposem que $\sum_{u \in V(G)} \pi(u) = 1$ podem determinar C i

$$\pi(u) = \frac{\mathrm{gr}(u)}{\sum_{v \in V(G)} \mathrm{gr}(v)} = \frac{\mathrm{gr}(u)}{2\,|E(G)|}$$

$\square$

Convergència a la distribució estacionària

Teorema

Tota distribució de probabilitats en un graf connex no bipartit convergeix a la distribució estacionària.

Convergència a la distribució estacionària

Teorema

Tota distribució de probabilitats en un graf connex no bipartit convergeix a la distribució estacionària.

Demostració.

P és similar a una matriu simètrica:

$$D^{-1/2} P D^{1/2} = D^{-1/2} A D^{-1/2}.$$

Convergència a la distribució estacionària

Teorema

Tota distribució de probabilitats en un graf connex no bipartit convergeix a la distribució estacionària.

Demostració.

P és similar a una matriu simètrica:

$$D^{-1/2}PD^{1/2} = D^{-1/2}AD^{-1/2}.$$

Per tant diagonalitza.

Convergència a la distribució estacionària

Teorema

Tota distribució de probabilitats en un graf connex no bipartit convergeix a la distribució estacionària.

Demostració.

P és similar a una matriu simètrica:

$$D^{-1/2}PD^{1/2} = D^{-1/2}AD^{-1/2}.$$

Per tant diagonalitza. $\boldsymbol{\pi}$ és l'únic vector propi de valor propi 1. Posem

$$\mathbf{p}_0 = \alpha_1\boldsymbol{\pi} + \sum_k \alpha_k \mathbf{v}_k$$

$\square$

Convergència a la distribució estacionària

Demostració.

Es pot demostrar que $\alpha_1 = 1$.

Convergència a la distribució estacionària

Demostració.

Es pot demostrar que $\alpha_1 = 1$. Aleshores

$$P^t \mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\pi} + \sum_k \lambda_k^t \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Convergència a la distribució estacionària

Demostració.

Es pot demostrar que $\alpha_1 = 1$. Aleshores

$$P^t \mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\pi} + \sum_k \lambda_k^t \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Per qualsevol graf, $|\lambda_k| \leq 1$ i per un graf no bipartit $\lambda_k > -1$.

Convergència a la distribució estacionària

Demostració.

Es pot demostrar que $\alpha_1 = 1$. Aleshores

$$P^t \mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\pi} + \sum_k \lambda_k^t \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Per qualsevol graf, $|\lambda_k| \leq 1$ i per un graf no bipartit $\lambda_k > -1$. Per tant

$$P^t \mathbf{p}_0 \xrightarrow{t\to\infty} \boldsymbol{\pi}.$$

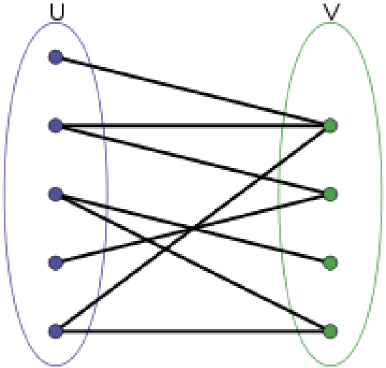
$\square$

Grafs bipartits

Pels grafs bipartits la convergència no es dóna, tal i com hem vist a l'exemple al principi.

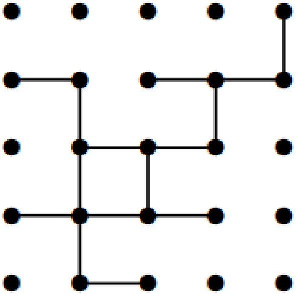
Grafs bipartits

Pels grafs bipartits la convergència no es dóna, tal i com hem vist a l'exemple al principi.



Grafs infinits

Podem considerar passejos a grafs infinits. L'exemple més senzill són passejos aleatoris a $\mathbb{Z}^d$



Passejos recurrents i transitoris

Definició

Anomenarem *probabilitat d'escapament*, p_{esc}, a la probabilitat que el passeig aleatori mai retorni a l'origen.

Passejos recurrents i transitoris

Definició

Anomenarem *probabilitat d'escapament*, p_{esc}, a la probabilitat que el passeig aleatori mai retorni a l'origen.

Definició

Un passeig aleatori és *recurrent* si i només si $p_{\text{esc}} = 0$. Un passeig aleatori és *transitori* si i només si $p_{\text{esc}} > 0$.

Teorema de Pólya

Teorema

Un passeig aleatori simple en una xarxa d-dimensional $\mathbb{Z}^d$ *és recurrent si* $d = 1$ *o* $d = 2$, *i transitori si* $d \geq 3$.

Teorema de Pólya

Teorema

Un passeig aleatori simple en una xarxa d-dimensional $\mathbb{Z}^d$ *és recurrent si* $d = 1$ *o* $d = 2$*, i transitori si* $d \geq 3$*.*

"A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever."
Shizuo Kakutani