

Seminari 3: Compacitat i successions

Arnau Mas

11 de desembre de 2018

Problema 1

(a) Considerem una successió (x_n) a un espai Hausdorff X convergent a dos punts x i y . Si U és un entorn de x i V un entorn de y aleshores tots dos entorns contenen una cua de la successió i per tant no poden tenir intersecció nul·la. Així x i y no són separables i per tant han de ser el mateix punt.

(b) Sigui (x_n) una successió a un espai de Hausdorff i (x_{n_k}) una parcial de la successió. Per definició de successió parcial, la successió (n_k) és estrictament creixent. Si $x_n \rightarrow x$, tenim que per tot entorn U de x , existeix un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ quan $n > N$. Com que n_k és estrictament creixent, existeix $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$, i per tant, si $k > K$, $n_k > n_K > N$ de manera que $x_{n_k} \in U$. Concloem que (x_{n_k}) també convergeix a x .

Problema 2

(a) Per veure que \mathbb{N} amb aquesta topologia no és Hausdorff és suficient veure que tots els oberts no buits tenen intersecció no buida. Si denotem $\{0, 1, \dots, n\}$ per U_n tenim que els oberts no buits de la topologia són o bé el total o bé U_n per algun $n \in \mathbb{N}$. És clar que si $n \leq m$,

$$U_n \subseteq U_m,$$

de manera que no hi ha oberts no trivialment amb intersecció no buida, i per tant l'espai no pot ser Hausdorff.

(b) La successió donada no convergeix a 0 ja que $\{0\}$ és un entorn de 0 que no conté cap punt de la successió. Tampoc convergeix a 1 ja que $\{0, 1\}$ és un entorn de 1 i si $x_n \in \{0, 1\}$ aleshores $x_n = 1$. Així $x_{n+1} = 2 \notin \{1, 2\}$, de manera que hi ha un entorn de 1 que no conté cap cua de la successió, i per tant aquesta no convergeix a 1.

Tenim que tots els termes de la successió són a U_2 i per tant a U_m per tot $m \geq 2$. És clar que qualsevol entorn d'un punt $m \in \mathbb{N}$ conté U_m , ja que U_m és l'obert més petit que conté m . Així tots els termes de la successió estan continguts a qualsevol entorn de $m \geq 2$, i per tant aquesta convergeix a tot m més gran o igual que 2.

(c) Si fem servir la notació de l'apartat anterior, tenim que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \mathbb{N},$$

de manera que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és un recobriment de \mathbb{N} . Veurem que no en podem extreure un subrecobriment finit, i per tant que \mathbb{N} no és compacte. En efecte, si $\{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}\}$ és un subrecobriment finit aleshores, si $N = \max_{1 \leq i \leq k} n_k$

$$\bigcup_{i=1}^k U_{n_i} = U_N \subset \mathbb{N}.$$

Per tant no podem recobrir \mathbb{N} amb un subrecobriment finit de $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ergo \mathbb{N} no és compacte amb aquesta topologia.

Problema 3

(a) Aquest és el teorema de Bolzano-Weierstraß que se segueix immediatament de l'apartat (d).

Per veure que $(0, 1]$ no és compacte per successions, considerem la successió $\left(\frac{1}{n}\right)$. Sabem que, mirada a \mathbb{R} , és convergent a 0. I per tant qualsevol parcial també convergeix a 0. Això vol dir que per tot $\epsilon > 0$ existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, $x_n \in B(0, \epsilon) = (-\epsilon, \epsilon)$. Si ens ho mirem amb la topologia subespai a $(0, 1]$, tenim que per tot $\epsilon > 0$ existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, $x_n \in (0, \epsilon)$. Això ens dóna que la successió ni cap de les seves parcials no poden convergir a cap punt de $(0, 1]$. Efectivament, per tot $a \in (0, 1]$, $\left(\frac{1}{2}a, 1\right]$ és un entorn d' a . Com hem vist, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, $x_n \in \left(0, \frac{1}{2}a\right)$, i per tant $x_n \notin \left(\frac{1}{2}a, 1\right]$ i per tant $\left(\frac{1}{n}\right)$ no té cap parcial convergent a $(0, 1]$.

(b) Suposem, buscant una contradicció, que S és un subconjunt infinit d'un espai topològic compacte X que no té punts d'acumulació. Això vol dir que tot $x \in X$ té un entorn N_x tal que N_x no té punts de S tret de possiblement x . Considerem U_x l'obert tal que $x \in U_x \subseteq N_x$, que existeix per la definició d'entorn. És clar que

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x,$$

i per tant $\{U_x\}_{x \in X}$ és un recobriment de X . Aquest recobriment, però, no té cap subrecobriment finit. En efecte, si $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_N}\}$ és un subrecobriment finit, aquest no pot recobrir X . Això és perquè cada U_{x_k} conté, com a màxim, un punt de S , i per tant no pot ser que la seva unió contingui S , puix que és infinit. Però X és compacte, de manera que hauria de ser possible trobar un subrecobriment finit, de manera que hem arribat a contradicció.

(c) Denotem per S el conjunt imatge d'una successió (x_n) a un espai mètric. Hem de veure que si x és un punt d'acumulació d' S aleshores (x_n) té una parcial convergent a x .

Observem primer que per tot $\epsilon > 0$ la bola $B(x, \epsilon)$ conté infinits termes de la successió. Com que $B(x, \epsilon)$ és un entorn de x , ha de contenir almenys un terme de la successió diferent de x . Posem que $B(x, \epsilon)$ conté un conjunt finit d'aquests punts, $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$. Aleshores

$$d = \max_{1 \leq i \leq k} d(x, x_{n_i}) > 0$$

de manera que $B(x, d)$ és un entorn de x . Així ha de contenir almenys un terme de la successió diferent de x , posem $x_{n_{k+1}}$, tal que $d(x, x_{n_{k+1}}) < d$, i que per tant és diferent dels altres x_{n_i} —observem que els x_{n_i} poden ser iguals, però $x_{n_{k+1}}$ ha de ser diferent de tots ells—. Així, si $B(x, \epsilon)$ conté un nombre finit de termes de la successió, sempre en podem trobar un altre de diferent i concloem que en conté infinits.

Amb aquest resultat previ podem construir una parcial de (x_n) convergent a x iterativament. Com que $B(x, 1)$ és un entorn de x conté un terme de la successió diferent de x , posem x_{n_1} . Aleshores $d_1 = d(x_{n_1}, x) > 0$. Així $B(x, d_1)$ és un entorn de x que per tant conté infinits termes de la successió diferents de x , i per tant infinits termes x_n amb $n \geq n_1$. Sigui n_2 el primer $n \geq n_1$ tal que $x_n \in B(x, d_1)$. Aleshores $0 < d_2 = d(x, x_{n_2}) < d_1$. Ja veiem, doncs, quin és el procés iteratiu que genera aquesta parcial: donat el terme x_{n_k} , construïm el terme $x_{n_{k+1}}$ considerant el primer n tal que $n \geq n_k$ tal que $x_{n_{k+1}} \in B(x, d_k)$, on $d_k = d(x, x_{n_k})$, que sempre existeix pel que hem argumentat abans.

Només queda veure que aquesta successió efectivament convergeix a x . Per veure això n'hi ha prou amb veure la convergència pels oberts bàsics, que en aquest cas són les boles ja que estem en un espai mètric. Considerem la successió $d_k = d(x, x_{n_k})$, que és decreixent. Veiem que no està fitada inferiorment per cap real positiu: si existeix $a > 0$ tal que $d_k \geq a$ per tot $k \in \mathbb{N}$ aleshores $x_{n_k} \notin B(x, a)$. Com que $a > 0$, $B(x, a)$ és obert i per tant conté algun terme de la successió diferent de x , x_l . Però això no pot ser ja que, com que (x_{n_k}) és una parcial, (n_k) és creixent, i per tant excedeix l en algun punt i per tant hi hauria algun x_{n_i} a $B(x, a)$, una contradicció. Això vol dir que per tot $\epsilon > 0$, existeix $K \in \mathbb{N}$ tal que $d_K < \epsilon$. Per tant, si $k > K$, $d(x_{n_k}, x) < d_K < \epsilon$ i per tant $x_{n_k} \in B(x, \epsilon)$, i concloem que (x_{n_k}) convergeix a x .

(d) Sigui K un espai mètric compacte. Si K és finit és immediat que és compacte. Efectivament, si $K = \{y_1, \dots, y_n\}$ i (x_n) és una successió a K , pel principi del colomar, existeix $1 \leq i \leq N$ tal que $x_n = y_i$ per infinits n . És clar que la parcial formada per aquests termes convergeix a y_i .

Si K és infinit, per l'apartat **(b)** té un punt d'acumulació. Si (x_n) és una successió a K té, per l'apartat **(c)**, una parcial convergent al punt d'acumulació, i per tant K és compacte per successions.

Problema 4

Considerem l'espai $X = \{0, 1\}^{[0,1]}$. Aquest espai és un producte de $\{0, 1\}$ indexat a $[0, 1]$, o, equivalentment, el conjunt de funcions de $[0, 1]$ a $\{0, 1\}$. La topologia a X és la topologia producte, que té per oberts bàsics productes infinits d'oberts de $\{0, 1\}$ —considerant la topologia discreta, només n'hi ha dos de no trivials: $\{0\}$ i $\{1\}$ — on només un nombre

finit dels factors pot diferir del total. Equivalentment, els oberts bàsics són conjunts de funcions que coincideixen en un nombre finit de punts, és a dir, conjunts de la forma

$$\{f: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\} \mid f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0 \text{ i } f(b_1) = \dots = f(b_m) = 1\}.$$

X és compacte pel teorema de Tychonoff, ja que és el producte de compactes — $\{0, 1\}$ és trivialment compacte amb qualsevol topologia per ser finit—.

Per veure que X no és seqüencialment compacte hem de produir una successió de X que no tingui cap parcial convergent. Considerem la successió d'elements de X , (f_n) , definida per $f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 1$ per tot $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$ i $f_n(x) = 0$ per tota la resta de x a $[0, 1]$. Veurem que aquesta successió no té cap parcial convergent, de manera que X no és compacte per successions tot i ser compacte.

Sigui U un obert bàsic de X . Veurem que U no conté cap cua de (f_n) .

Sigui $g \in X$ i N un entorn de g . N conté un obert que conté g , que en particular conté un obert bàsic que conté g , diguem-li U . Els elements d' U són aquelles funcions que coincideixen amb g en un nombre finit de punts. Posem que han de satisfer que prenen el valor 1 als punts a_1, \dots, a_n i el valor 0 als punts b_1, \dots, b_m .