Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии

Давтян Артур Арменович

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

1. Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп по модели SIR.
2. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в разных случаях.

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы.

- $S(t)$ — восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи
- $I(t)$ — это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции
- $R(t)$ — это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \begin{cases} -\alpha S, I(t) > I^* \\ 0, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, I(t) > I^* \\ -\beta I, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности:

- α — коэффициент заболеваемости
- β — коэффициент выздоровления

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

2.2 Задание

$$N = 5217$$

$$I(0) = 74$$

$$R(0) = 14$$

$$S(0) = N - I(0) - R(0)$$

$$\alpha = 0.15$$

$$\beta = 0.07$$

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- $I(0) \leq I^*$
- $I(0) > I^*$

2.3 Код на Python

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

a = 0.15 # коэффициент заболеваемости

b = 0.07 # коэффициент выздоровления

N = 5217 # общая численность популяции

I0 = 74 # количество инфицированных особей

R0 = 14 # количество здоровых особей с иммунитетом

S0 = N - I0 - R0 # количество восприимчивых к болезни

# Случай, когда $ I(0) <= I* $

def syst(x, t):
    dx0 = 0
```

```
    dx1 = - b*x[1]
    dx2 = b*x[1]
    return dx0, dx1, dx2

x0 = [S0, I0, R0] # начальные значения

t = np.arange(0, 200, 0.01)

y = odeint(syst, x0, t)

plt.plot(t, y[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t, y[:,1], label='I(t)')
plt.plot(t, y[:,2], label='R(t)')
plt.title('I(0) <= I*', fontsize=16, fontweight=1000)
plt.legend()

# Случай, когда $ I(0) > I* $

def syst2(x, t):
    ddx0 = -a*x[0]
    ddx1 = a*x[0] - b*x[1]
    ddx2 = b*x[1]
    return ddx0, ddx1, ddx2

yy = odeint(syst2, x0, t)

plt.plot(t, yy[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t, yy[:,1], label='I(t)')
plt.plot(t, yy[:,2], label='R(t)')
```

```
plt.title('I(0) > I*', fontsize=16, fontweight=1000)
plt.legend()
```

2.4 Графики

Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(0) \leq I^*$ с начальными условиями $I(0) = 74, R(0) = 14, S(0) = 5129$. Коэффициенты $\alpha = 0.15, \beta = 0.07$. (рис. 2.1)

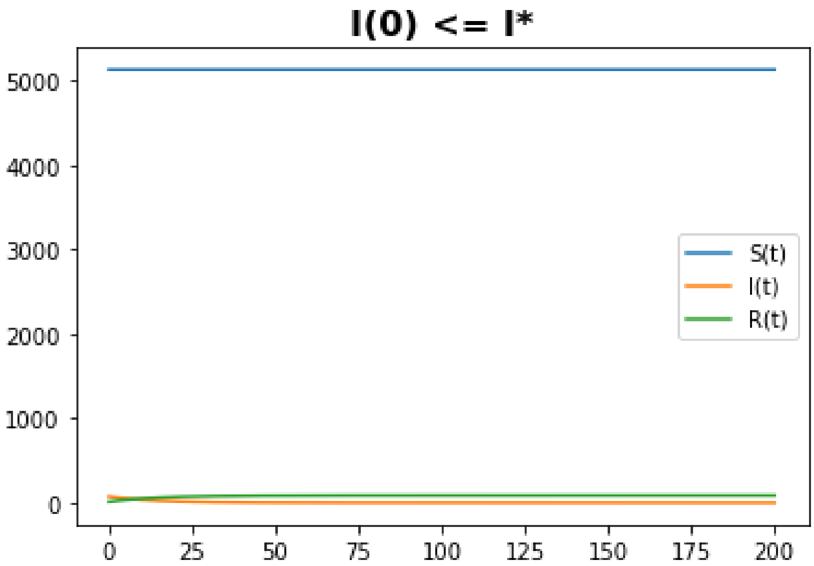

Figure 2.1: Первый случай

Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(0) > I^*$ с начальными условиями $I(0) = 74, R(0) = 14, S(0) = 5129$. Коэффициенты $\alpha = 0.15, \beta = 0.07$. (рис. 2.2)

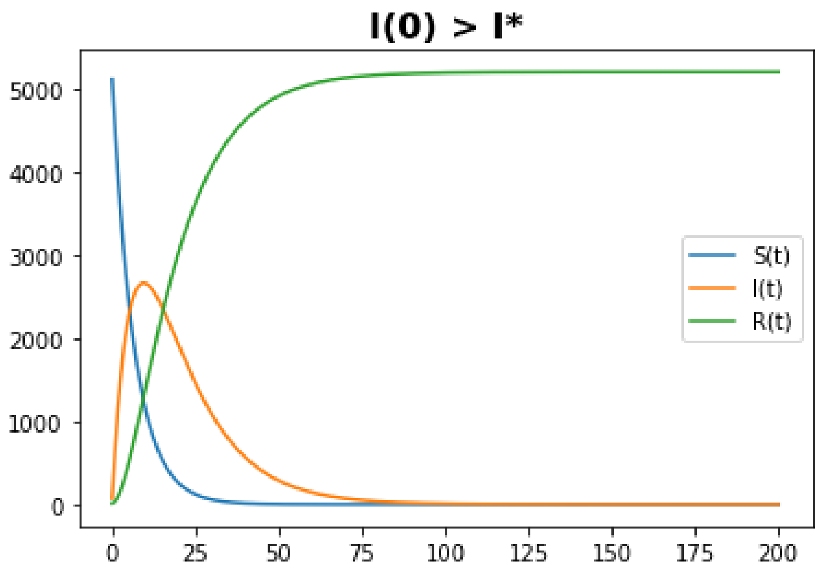

Figure 2.2: Второй случай

3 Выводы

1. Построил графики изменения числа особей в каждой из трех групп по модели SIR.

2. Рассмотрел, как будет протекать эпидемия в разных случаях.