Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Давтян Артур Арменович

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

1. Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$
2. Найти стационарное состояние системы

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (по экспоненциальному закону), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными 4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (положение равновесия, не зависящее от времени решения). Если начальное состояние будет другим, то это приведет к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние. Стационарное состояние системы будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

2.2 Код на Python

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

a = 0.78 # коэффициент естественной смертности хищников
b = 0.81 # коэффициент естественного прироста жертв
c = 0.087 # коэффициент увеличения числа хищников
d = 0.058 # коэффициент смертности жертв

def syst2(x, t):
    dx0 = -a*x[0] + c*x[0]*x[1]
```

```
    dx1 = b*x[1] - d*x[0]*x[1]
    return dx0, dx1

x0 = [12, 36] # начальное значение x и y (популяция хищников и популяция

t = np.arange(0, 100, 0.1)

y = odeint(syst2, x0, t)

y2 = y[:,1] # массив хищников
y1 = y[:,0] # массив жертв

plt.plot(t,y1, label='хищники')
plt.plot(t,y2, label='жертвы')
plt.legend()

plt.plot(y1,y2) #построение графика зависимости изменения численности хищ
plt.plot(12,36, 'ro', label='начальное состояние')
plt.plot(b/d,a/c, 'go', label='стационарное состояние')
plt.legend()
plt.grid(axis='both')
```

2.3 Графики

Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями $x_0 = 12, y_0 = 36$ и стационарное состояние (рис. 2.1)

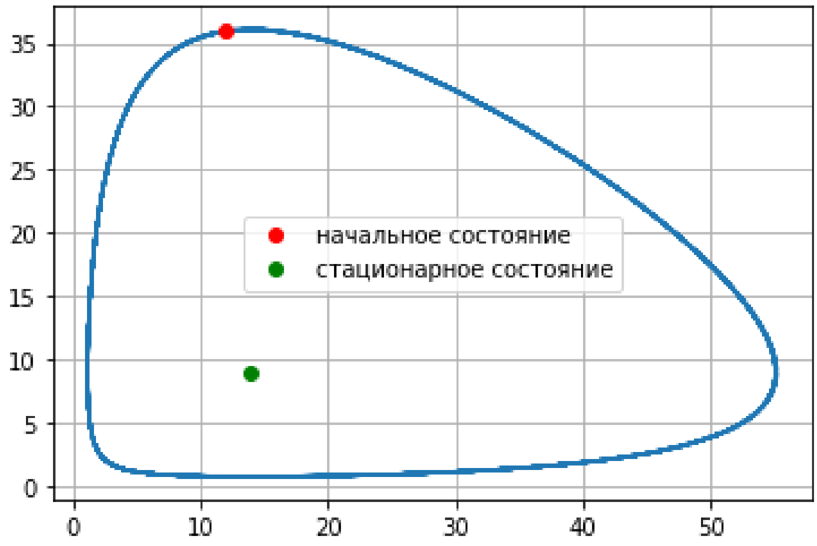

Figure 2.1: Зависимость x от y и стационарное состояние

Зависимость численности хщиников и жертв от времени с начальными данными y=12, x=36. (рис. 2.2)

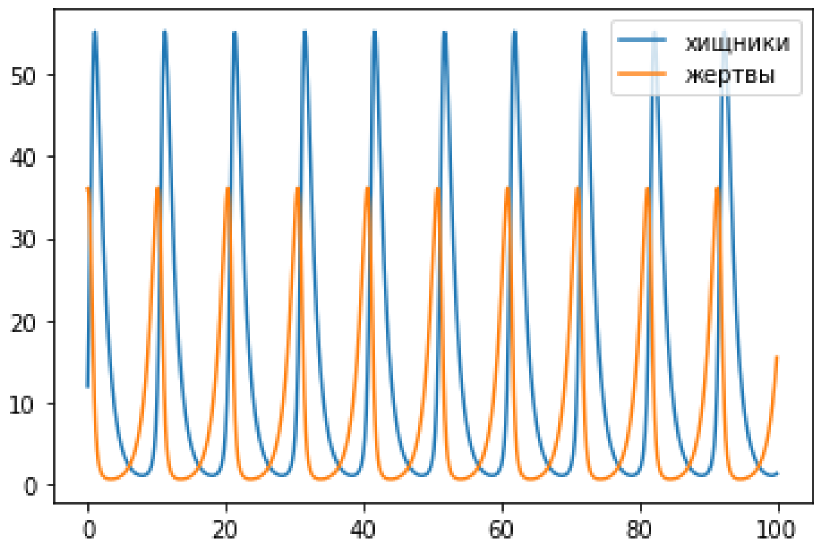

Figure 2.2: Зависимость x(t) и y(t)

3 Выводы

1. Построил график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$

2. Нашёл стационарное состояние системы