Лабораторная работа №8

Модель конкуренции двух фирм

Давтян Артур Арменович

Содержание

# Цель работы

1. Рассмотреть модель конкуренции двух фирм в разных случаях.
2. Построить и проанализировать графики.

# Выполнение лабораторной работы

## Теоретическое введение

### Для одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы,производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

– число потребителей производимого продукта.

– доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

– оборотные средства предприятия

– длительность производственного цикла

– рыночная цена товара

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

– доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

– постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

– функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$ \tag{1} Q = q - k \frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}), $$

где – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при p = pcr (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина pcr = Sq/k. Параметр – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, при ) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$ \tag{2} \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M \delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M \delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$ \tag{3} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma (-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) $$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла . При заданном уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$ \tag{4} -\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) = 0 $$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$ \tag{5} p = p\_{cr}(1 - \frac{M \delta}{\tau \tilde{p} Nq}) $$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$ \tag{6} \frac{\partial M}{\partial t} = M \frac{\delta}{\tau}(\frac{p\_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2 (\frac{\delta}{\tau \delta{p}})^2 \frac{p\_{cr}}{Nq} - \kappa $$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию = 0:

$$ \tag{7} \tilde{M}\_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$ \tag{8} a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p\_{cr} \delta^2} $$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, ) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При стационарные значения M равны

$$ \tag{9} \tilde{M}\_+ = Nq \frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p}, \tilde{M}\_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p\_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние неустойчиво, так что при оборотные средства падают (), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр всюду входит в сочетании с . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: = 1, а параметр будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

### Для двух фирм

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$ \tag{10} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1} + N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t} = - \frac{M\_2}{\tau\_2} + N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_2 \end{cases} $$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины и – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене . Тогда

$$ \tag{11} \begin{cases} \frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} = - N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \\ \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} = - N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \end{cases} $$

где и – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$ \tag{12} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_1}) - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t} = - \frac{M\_2}{\tau\_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_2}) - \kappa\_2 \end{cases} $$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$ \tag{13} \frac{\partial p}{\partial t} = - \gamma (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} - Nq (1 - \frac{p}{p\_{cr}}) $$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$ \tag{14} p = p\_{cr} (1 - \frac{1}{Nq} (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2})) $$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$ \tag{15} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = c\_1 M\_1 - b M\_1 M\_2 - a\_1 M\_1^2 - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t} = c\_2 M\_2 - b M\_1 M\_2 - a\_2 M\_2^2 - \kappa\_2 \end{cases} $$

где

$$ \tag{16} a\_1 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2 Nq}, a\_2 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, b = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2 \tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, c\_1 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_1}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2}, c\_2 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_2}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2} $$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки () пренебрежимо малы. И введем нормировку . Получим следующую систему:

$$ \tag{17} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial \theta} = M\_1 - \frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_1}{c\_1} M\_1^2 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial \theta} = \frac{c\_2}{c\_1} M\_2 -\frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_2}{c\_1} M\_2^2 \end{cases} $$

### Cтационарная точка

Приравниваем первое уравнение из системы (17) к нулю и находим корни:

$$ \tag{18} \begin{cases} x\_1 = 0 \\ x\_2 = \frac{c\_1 - by}{a\_1} \end{cases} $$

Отбрасываем 0, потому что он не может быть стационарным состоянием, и находим вторую точку:

$$ \tag{18} \begin{cases} x = \frac{c\_1 - by}{a\_1} \\ y = \frac{a\_1 c\_2 - b c\_1}{a\_1 a\_2 - b^2} \end{cases} $$

Подставляем значение y и получаем:

$$ \tag{19} \begin{cases} x = \frac{c\_1 a\_2 - b c\_2}{a\_1 a\_2 - b^2} \\ y = \frac{a\_1 c\_2 - b c\_1}{a\_1 a\_2 - b^2} \end{cases} $$

## Задание

### Случай 1

### Случай 2

### Начальные условия и параметры

— оборотные средства фирмы 1

— оборотные средства фирмы 2

— критическая стоимость продукта

— число потребителей производимого продукта

— максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

— длительность производственного цикла фирмы 1

— длительность производственного цикла фирмы 2

— себестоимость продукта у фирмы 1

— себестоимость продукта у фирмы 2

## Код на Python

import math  
import numpy as np  
from scipy.integrate import odeint  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
p\_cr = 28 # критическая стоимость продукта  
  
tau1 = 14 # длительность производственного цикла фирмы 1  
  
p1 = 9.5 # себестоимость продукта у фирмы 1  
  
tau2 = 18 # длительность производственного цикла фирмы 2  
  
p2 = 8.3 # себестоимость продукта у фирмы 2  
  
N = 30 # число потребителей производимого продукта  
  
q = 1 # максимальная потребность   
# одного человека в продукте в единицу времени  
  
a1 = p\_cr/(tau1\*tau1\*p1\*p1\*N\*q)  
  
a2 = p\_cr/(tau2\*tau2\*p2\*p2\*N\*q)  
  
b = p\_cr/(tau1\*tau1\*tau2\*tau2\*p1\*p1\*p2\*p2\*N\*q)  
  
c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1)  
  
c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2)  
  
# Стационарные точки  
  
m1 = (a2\*c1-b\*c2)/(a1\*a2-b\*b)  
m2 = (a1\*c2-b\*c1)/(a1\*a2-b\*b)  
  
# Первый случай  
  
def syst(x, t):  
 dx1 = (c1/c1)\*x[0] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
 dx2 = (c2/c1)\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
 return dx1, dx2  
  
# Второй случай  
  
def syst2(x, t):  
 dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.00063)\*x[0]\*x[1] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0]  
 dx2 = (c2/c1)\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1]  
 return dx1, dx2  
  
t = np.arange(0, 20, 0.01)  
  
# Начальное значение объема оборотных средств x1 и х2  
  
x0=[5.9, 4.4]  
  
y = odeint(syst, x0, t)  
y2 = odeint(syst2, x0, t)  
  
# Случай 1 + стац. точки  
  
plt.plot(t, y[:,0], label='Фирма 1')  
plt.plot(t, y[:,1], label='Фирма 2')  
plt.hlines(m1, 0, 20, colors="darkgrey", linestyles='dashed', label='m1')  
plt.hlines(m2, 0, 20, colors="dimgrey", linestyles='dashed', label='m2')  
plt.legend(loc=4)  
plt.grid()  
  
# Случай 2  
  
plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')  
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')  
plt.legend()  
plt.grid()

## Графики

Первый случай. (рис. 1)

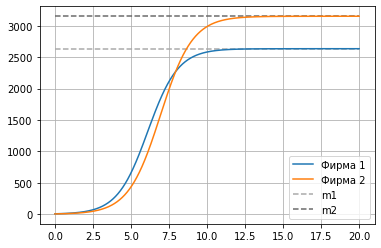


Figure 1: Первый случай

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели (17) этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом : в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях (. Это было обозначено в условиях задачи.

Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

Второй случай. (рис. 2)

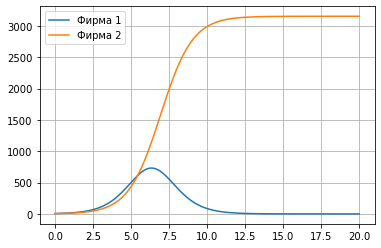


Figure 2: Второй случай

По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

# Выводы

1. Рассмотрел модель конкуренции двух фирм в разных случаях.
2. Построил и проанализировать графики.