Chapitre 1

Topologie de R et de C

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Espaces vectoriels normés

Définition 1.1. Espace vectoriel normé

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ *(séparation)*
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$ *(homogénéité)*
- $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*

Le cas échéant, le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé un **espace vectoriel normé**.

Les couples $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbf{C}, |\cdot|)$ sont des espaces vectoriels normés et ce chapitre leur est consacré.

2. Boules et sphères

Le vocabulaire des boules et des sphères évoque l'espace $\mathbf{R}^3$ plutôt que la droite $\mathbf{R}$ et le plan $\mathbf{C}$, mais l'usage de ces mots est aujourd'hui fixé en topologie et utilisé dans tout espace vectoriel normé indépendamment de la dimension. Pour tous $a \in \mathbf{K}$ et $r > 0$, on appelle :

- **boule ouverte de centre a et de rayon r** l'ensemble
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbf{K} \mid |x - a| < r\}$$
- **boule fermée de centre a et de rayon r** l'ensemble
$$\overline{\mathcal{B}}(a, r) = \{x \in \mathbf{K} \mid |x - a| \leq r\}$$
- **sphère de centre a et de rayon r** l'ensemble
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathbf{K} \mid |x - a| = r\}$$

Les boules fermées de rayon 0 sont autorisées, ce sont des **singletons** :

$$\overline{\mathcal{B}}(a, 0) = \mathcal{S}(a, 0) = \{a\}$$

⊠

On a représenté ci-dessus des boules dans $\mathbf{C}$ et on représentera souvent les objets dans $\mathbf{C}$ plutôt que dans $\mathbf{R}$ dans ce chapitre, mais les boules ne sont jamais que des **intervalles** dans $\mathbf{R}$:

$$\mathcal{B}(a,r) = \,]a-r, a+r[\quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{B}}(a,r) = [a-r, a+r]$$

3. Voisinages

Définition 3.1. Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbf{K}$. On appelle voisinage de a **toute partie de $\mathbf{K}$ contenant une boule ouverte de centre** a. On notera parfois $\mathcal{V}_{\mathbf{K}}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbf{K}$, mais la notation n'est pas universelle.

Nous n'aurons pas de voisinages de $\pm\infty$ dans R dans ce chapitre car nous nous efforçons de comprendre ce que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ ont de commun d'un point de vue topologique.

Théorème 3.2. Propriétés des voisinages

1. Pour tout $a \in \mathbf{K}$, toute intersection **FINIE** de voisinages de a est un voisinage de a ;
2. Deux points distincts de $\mathbf{K}$ possèdent des voisinages disjoints. En d'autres termes, pour tous $a, b \in K$ distincts, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et un voisinage $\mathcal{V}_b$ de b pour lesquels $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_b = \emptyset$.

Démonstration

1. Soient $a \in \mathbf{K}$ et $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k$ des voisinages de a. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il existe un réel $r_i > 0$ pour lequel $\mathcal{B}(a, r_i) \subset \mathcal{V}_i$, donc $\mathcal{B}(a, r_0) \subset \mathcal{V}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{V}_k$ pour $r_0 = \min\{r_1, \ldots, r_k\} > 0$, ainsi $\mathcal{V}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{V}_k$ est un voisinage de a.
2. Soient $a, b \in \mathbf{K}$. Pour $r = \frac{|a-b|}{3} > 0$, $\mathcal{B}(a,r)$ est un voisinage de a, $\mathcal{B}(b,r)$ est un voisinage de b, et bien sûr $\mathcal{B}(a,r) \cap \mathcal{B}(b,r) = \emptyset$.

■

3.1. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do.

Axiome 3.3. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

Lemme 3.4. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

Corollaire 3.5. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

⊠

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

⊠

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

ò

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

4. Équations homogènes du second ordre

	Racines de $X^2 + aX + b$	Forme des solutions
$\Delta > 0$	r et r'	$x \longrightarrow \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$
$\Delta = 0$	r	$x \longrightarrow (\lambda x + \mu) e^{rx}$
$\Delta < 0$	$r \pm \omega$	$x \longrightarrow e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$

Équations homogènes $y'' + ay' + by = 0$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

5. Codly

Python

```python
def fib(n):
  if n <= 1:
    return n
  else:
    return fib(n - 1) + fib(n - 2)
print(fib(25))
```

Calcul du n-ième terme F_n de la suite de Fibonacci

6. Cetz