Construcción modelo acoplado estructural-aeroelástico y simulación

Fermín Velázquez - VORS Control

Septiembre 2025

1 Algoritmo de construcción del sistema acoplado

Este apartado explica paso a paso cómo se obtiene un modelo reducido del sistema estructural y cómo se acopla con las fuerzas aeroelásticas. El objetivo es partir de un modelo muy grande y llegar a uno compacto que conserve la dinámica esencial y permita incorporar efectos del viento.

1.1 Punto de partida: modelo completo ($N \approx 26000$ DOFs)

Comenzamos con un modelo estructural detallado, que puede incluir diferentes configuraciones (por ejemplo, variando el ángulo θ). Este modelo está definido por sus matrices de masa y rigidez:

$$M_s, \quad K_s.$$

Estas matrices son de tamaño $N \times N$, donde N es el número total de grados de libertad (DOFs), típicamente muy grande (en nuestro caso, unos 26.000).

1.2 Reducción de orden: modelo reducido (SEREP)

Trabajar con el modelo completo es inviable para simulaciones aeroelásticas, por lo que necesitamos reducir su tamaño. El método elegido es **SEREP (System Equivalent Reduction Expansion Process)**, que permite conservar coordenadas físicas (importante para aplicar fuerzas externas en puntos concretos).

Seleccionamos n modos para representar la dinámica esencial. En nuestro caso:

$$n = 216,$$

lo que asegura que se incluyen frecuencias suficientemente altas. La matriz modal del sistema completo se denota:

$$\Psi^{(n)} \approx \begin{bmatrix} \Psi_m^{(n)} \\ \Psi_s^{(n)} \end{bmatrix}_{N\times n},$$

donde m son los gdl maestros y s los esclavos. La matriz $\Psi^{(n)}$ contiene los vectores propios del sistema estructural:

$$\left(K_s - \underline{\omega}^2 M_s\right) \Psi^{(n)} = 0,$$

Reducción SEREP

La idea es expresar las coordenadas completas x en función de las coordenadas maestras x_m:

$$x \approx T_{\text{SER}} x_m,$$

donde la matriz de transformación T_{SER} se construye como:

$$T_{\text{SER}} = \begin{bmatrix} \Psi_m^{(n)} \\ \Psi_s^{(n)} \end{bmatrix} \Psi_m^{(n)+} = \begin{bmatrix} I \\ \Psi_s^{(n)} \Psi_m^{(n)+} \end{bmatrix}_{N\times m}.$$

El símbolo $(\cdot)^+$ indica la pseudoinversa. Con esta transformación, las matrices reducidas son:

$$M_{s,red} = T_{\text{SER}}^T M_s T_{\text{SER}}, \qquad K_{s,red} = T_{\text{SER}}^T K_s T_{\text{SER}}.$$

¿Cómo elegimos los DOFs maestros?

- Se seleccionan los más linealmente independientes (usando factorización QR con pivote).
- Se incluyen DOFs en puntos donde se aplicarán fuerzas externas (un nodo por panel PV, para introducir fuerzas y para generar el sistema acoplado).

1.3 Proyección modal y reducción adicional

La motivación de la proyección modal de las matrices estructurales es que estén en las mismas coordenadas que las fuerzas aeroelásticas. Como se vé más adelante, las fuerzas aero se definen como una matriz $m \times p$, ya que tienen una componente por cada sección (una componente por grado de libertad maestro) y modo (por cada p).

El modelo reducido aún puede ser grande, así que lo proyectamos en coordenadas modales. Resolvemos el problema de autovalores:

$$\left(K_{s,red} - \underline{\omega}_{s,red}^2 M_{s,red}\right) \Phi_{s,red}^{(p)} = 0,$$

donde p es el número de modos que conservamos (por ejemplo, los primeros modos de torsión). p es un subconjunto de n (podría ser $p = n$, entonces solo proyectaríamos, no reduciríamos en este paso). Ahora nos estamos quedando con los 20 primeros de torsión.

La proyección se define como:

$$x_m \approx \Phi_{s,red}^{(p)} q',$$

donde $\Phi_{s,red}^{(p)}$ contiene los modos seleccionados. Antes de proyectar, normalizamos respecto a la masa:

$$\Phi_{\text{norm}}^{(p)} = \Phi_{s,red}^{(p)} D^{-1/2}, \qquad D = \operatorname{diag}\left(\Phi_{s,red}^{(p)}{}^T M_{s,red} \Phi_{s,red}^{(p)}\right),$$

de modo que:

$$\Phi_{\text{norm}}^{(p)}{}^T M_{s,red} \Phi_{\text{norm}}^{(p)} = I.$$

Finalmente:

$$x_m \approx \Phi_{\text{norm}}^{(p)} q.$$

1.4 Sistema modal y amortiguamiento estructural

En coordenadas modales, las matrices quedan:

$$\begin{aligned} [M_{s,red}^*]_{p\times p} &= I_{p\times p}, \\ [K_{s,red}^*]_{p\times p} &= \Phi_{\text{norm}}^{(p)}{}^T\, K_{s,red}\, \Phi_{\text{norm}}^{(p)}, \\ [C_{s,red}^*]_{p\times p} &= \operatorname{diag}\left(2\,\zeta_i\,\underline{\omega}_s\right). \end{aligned}$$

El sistema amortiguado se formula como:

$$(M_{s,red}^*\ \underline{\lambda}_s^2 + C_{s,red}^*\ \underline{\lambda}_s + K_{s,red}^*)\ [\Xi_s] = \underline{0}.$$

1.5 Incorporación de las fuerzas aeroelásticas

Las fuerzas aeroelásticas se expresan para cada sección j como:

$$F_{j,aero} = \sum_{i=1}^{m} (m^*_{aero,ij}\ddot{\theta}_{ij} + c^*_{aero,ij}\dot{\theta}_{ij} + k^*_{aero,ij}\theta_{ij}).$$

A partir de ellas se construyen las matrices aeroelásticas C_{aero} y K_{aero}:

$$[C_{aero}]_{m\times p} = \frac{1}{2}\rho\, L\, B^3_{\text{cord}}\, V \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a^{*\,(1)}_{2,1} & -a^{*\,(2)}_{2,1} & \cdots & -a^{*\,(p)}_{2,1} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a^{*\,(1)}_{2,1} & -a^{*\,(2)}_{2,1} & \cdots & -a^{*\,(p)}_{2,1} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a^{*\,(1)}_{2,j} & -a^{*\,(2)}_{2,j} & \cdots & -a^{*\,(p)}_{2,j} \\ \hdashline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}_{m_{pivoting}\times p}} \end{array}\right]_{m\times p}$$

$$[K_{aero}]_{m\times p} = \frac{1}{2}\rho\, L\, B^2_{\text{cord}}\, V^2 \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^{*\,(1)}_{3,1} & a^{*\,(2)}_{3,1} & \cdots & a^{*\,(p)}_{3,1} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^{*\,(1)}_{3,1} & a^{*\,(2)}_{3,1} & \cdots & a^{*\,(p)}_{3,1} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^{*\,(1)}_{3,j} & a^{*\,(2)}_{3,j} & \cdots & a^{*\,(p)}_{3,j} \\ \hdashline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}_{m_{pivoting}\times p}} \end{array}\right]_{m\times p}$$

que se transforman a coordenadas modales:

$$[K^*_{aero}]_{p\times p} = {\Phi^{(p)}_{\text{norm}}}^T\ [K_{aero}]_{m\times p},$$
$$[C^*_{aero}]_{p\times p} = {\Phi^{(p)}_{\text{norm}}}^T\ [C_{aero}]_{m\times p}.$$

El sistema acoplado queda:

$$[M^*_{s,red}]\ \underline{\ddot{q}} + [C^*_{s,red}]\ \underline{\dot{q}} + [K^*_{s,red}]\ \underline{q} = -[C^*_{\text{aero}}]\ \underline{\dot{q}} - [K^*_{\text{aero}}]\ \underline{q}.$$

Agrupando (en torsión, las fuerzas aero no modifican la masa):

$$[M^*_{s+aero}]\ \underline{\ddot{q}} + [C^*_{s+aero}]\ \underline{\dot{q}} + [K^*_{s+aero}]\ \underline{q} = 0.$$

El problema de autovalores acoplado:

$$([M^*_{s+aero}]\ \underline{\lambda}^2 + [C^*_{s+aero}]\ \underline{\lambda} + [K^*_{s+aero}])\ [\Xi] = \underline{0}.$$

Una vez resuelto el problema de autovalores para el sistema acoplado, se comparan los nuevos autovalores con los obtenidos en la iteración anterior (en la primera iteración, se comparan con los autovalores estructurales). El proceso iterativo continúa hasta que la diferencia máxima en uno de los modos sea menor que una tolerancia predefinida:

$$\max_i \left| \lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon,$$

donde:

- $\lambda_i^{(k)}$: autovalor del modo i en la iteración k,
- ε: tolerancia establecida (10^{-6}).

Tras el barrido en velocidad U y ángulo de ataque β, obtenemos:

$$\boldsymbol{M}^*_{s+aero}(\boldsymbol{U}, \beta), \quad \boldsymbol{C}^*_{s+aero}(\boldsymbol{U}, \beta), \quad \boldsymbol{K}^*_{s+aero}(\boldsymbol{U}, \beta).$$

2 Simulación

A continuación se detalla la formulación empleada para la simulación temporal del sistema acoplado reducido.

2.1 Vectores de estado

Los vectores de estado cartesiano y modal truncado se definen como:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_m(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p},$$

donde $x_m(t)$ son las coordenadas cartesianas maestras y $q(t)$ las modales.

2.2 Proyección al espacio físico

La transformación entre espacios se realiza mediante:

$$x \approx T_{\text{SER}} x_m, \qquad x_m \approx \Phi_{\text{norm}}^{(p)} q.$$

2.3 Resolución dinámica

Pasos para la resolución de la dinámica

1. **Condiciones iniciales:**

$$q(0) = {\Phi_{\text{norm}}^{(p)}}^T T_{\text{SER}}^T x(0), \qquad \dot{q}(0) = {\Phi_{\text{norm}}^{(p)}}^T T_{\text{SER}}^T \dot{x}(0).$$

2. **Proyección de fuerzas:**
Se proyectan de coordenadas de maestros a modales:

$$F^*(t) = {\Phi_{\text{norm}}^{(p)}}^T F(t).$$

3. **Dinámica en el espacio modal:**

$$M_{s+aero}^* \, \ddot{q}(t) + C_{s+aero}^* \, \dot{q}(t) + K_{s+aero}^* \, q(t) = F^*(t).$$

En forma de ecuación de estado:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}F^*(t)$$

Aquí, en cada paso de simulación se interpola el sistema acoplado para que represente el correspondiente para el viento y ángulo de ataque dados en ese instante.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -{M_{s+aero}^*}^{-1} K_{s+aero}^* & -{M_{s+aero}^*}^{-1} C_{s+aero}^* \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {M_{s+aero}^*}^{-1} \end{bmatrix} F^*(t)$$

Se resuelve z_{k+1} (de momento con RK45, muy rápido).

Con fuerza puntual y con LTI, con T = 0.1 s, 12.5 s de ejecución para 1 h de simulación (x288 respecto a la realidad).
Con LPV (interpolación en viento) y con fuerza puntual constante (sin fuerza viento distribuida en cada instante), para simular 20 minutos tarda 0.23 minutos (14 s). x87 veces más rápido que realidad.
Con LPV (interpolación en viento) y fuerza viento distribuida en cada instante -sin optimizar-, para simular 1 hora tarda 11.7 minutos (702 s). x5 veces más rápido que realidad.

4. Transformación al espacio cartesiano:

$$
\begin{aligned}
x_m(t) &\approx \Phi^{(p)}_{\mathrm{norm}} q(t), \quad & x(t) &\approx T_{\textsc{ser}} x_m(t),\\
\dot{x}_m(t) &\approx \Phi^{(p)}_{\mathrm{norm}} \dot{q}(t), \quad & \dot{x}(t) &\approx T_{\textsc{ser}} \dot{x}_m(t),\\
\ddot{x}_m(t) &\approx \Phi^{(p)}_{\mathrm{norm}} \ddot{q}(t), \quad & \ddot{x}(t) &\approx T_{\textsc{ser}} \ddot{x}_m(t).
\end{aligned}
$$