

**Navn:** Arne Magnus Tveita Løken  
**Veileder:** Tor Nordam (Førsteamanuensis II, Institutt for fysikk; Forsker, SINTEF Ocean)  
**Biveileder:** Ingve Simonsen (Professor, Institutt for fysikk)

## Introduksjon

I mars 2011 traff Tohoku-tsunamien den japanske kysten. Foruten det store antallet dødsfall medførte tsunamien, sammen med jordskjelvet som forårsaket den, en katastrofal kjernefysisk nedsmelting i Fukushima-reaktoren ([Atomic Energy Society of Japan 2015](#)). I november 2017 medførte en rekke vulkanutbrudd i den indonesiske provinsen Bali omfattende evakuering av lokalbefolkningen, i tillegg til at mange nærliggende flyplasser ble stengt. De mange kansellerte flyvningene etterlot tusenvis av passasjerer strandet på bakken ([Kapoor 2017](#)). I januar 2018 kolliderte den iranskeide oljetankeren Sanchi med et fraktskip fra Hong Kong i Øst-Kina-havet ([Obayashi og Mason 2018](#)). Tankeren havarerte, store mengder olje ble spredt over havoverflaten og enda større mengder sank til havbunnen sammen med vrakrestene, hvor oljen truer med å forurense også dypet av havet dersom beholderne gir etter for det undersjøiske trykket.

En fellesnevner for de tre ovennevnte naturkatastrofene er at materiale ble sluppet ut i naturen fra det som kan betraktes som punktkilder. Å predikere hvor de omsluttende havstrømmene eller de atmosfæriske vindsystemene fraktet forurensningene var — og er — uhyre viktig for å kunne begrense potensielle humanitære så vel som naturtragedier. Den konvensjonelle måten å gjøre dette på, er å modellere vind- eller havstrømningsmønstre for å forutse banene forurensningspartikler vil følge, ved hjelp av numeriske metoder. De resulterende prediksjonene vil dog være svært sensitive til små endringer i forurensningspartiklenes utslippstidspunkt og -sted. For å forsøke å håndtere partiklenes høye grad av sensitivitet til deres initialbetingelser kan en benytte ulike modeller for det underliggende transportsystemet, med økende romlig og temporal oppløsning — men, for komplekse transportsystemer medfører denne typen tilnærming ofte en beregningskostnad som raskt vokser utover de tilgjengelige midlene, hva gjelder beregningstid eller minne.

I mange tilfeller vil dog mikroskopiske detaljer i de underliggende transportfenomenene være uvesentlige i forhold til de overordnede tendensene i systemet. Dette betyr at en mindre ambisiøs tilnærming, med hovedfokus på å forstå de makroskopiske trendene i transportfenomenet, ofte er rimelig. Ved årtusenskiftet så konseptet om *Lagrange-koherente strukturer* dagens lys, med utspring i skjæringspunktet mellom ikkelineær dynamikk — de matematiske prinsippene som utgjør grunnlaget for kaosteori — og fluiddynamikk ([Haller og Yuan 2000](#)). Denne typen strukturer utgjør et nytt rammeverk for å forstå transportfenomener i en rekke strømmingssystem. Lagrange-koherente strukturer kan beskrives som dynamiske «landskap» i et mangedimensjonalt rom, som dikterer makroskopiske flytmønstre i dynamiske system. Mer spesifikt definerer denne typen strukturer grensesnittene i dynamisk distinkte, invariante regioner. Fra fluiddynamikken kjennetegnes invariante regioner som domener hvor alle partikkelbaner som begynner innenfor domenet forblir der inne, selv om domenet kan bevege seg og deformeres over tid. Så, kort fortalt; Lagrange-koherente strukturer muliggjør prediksjoner for fremtidige tilstander i flytsystemer.

## Bakgrunn

Det underliggende teoretiske rammeverket for Lagrange-koherente strukturer er veletablert. Ved hjelp av variasjonsteori har nødvendige og tilstrekkelige eksistensbetingelser for slike strukturer blitt identifisert, i prinsipp gjeldende for et vilkårlig (heltallig) antall dimensjoner ([Haller 2010](#)). Til dags dato (og så vidt undertegnede vet) har dog ikke en god numerisk implementasjonsmetode for flere av disse betingelsene blitt beskrevet i litteraturen.

For todimensjonale strømninger forenkles flere av eksistensbetingelsene vesentlig, og denne typen systems Lagrange-koherente strukturer kan prinsipielt beskrives som kurver i et plan. I en relativt nylig publikasjon anvendes de ovennevnte variasjonsprinsippene for å identifisere Lagrange-koherente strukturer i modellstrømning så vel som eksperimentelle data ([Farazmand og Haller 2012](#)). Utfordringen med denne artikkelen er at forfatterne utelater en fullstendig beskrivelse av hvordan de tar hånd om de mest numeriske utfordrende av eksistensbetingelsene. I en nyere artikkel betraktes tredimensjonale strømningssystem, hvor de Lagrange-koherente strukturene utgjør overflater i rommet ([Oettinger og Haller 2016](#)). Ei heller her presenterer forfatterne en fullstendig beskrivelse av deres implementasjon av flere av strukturenes eksistensbetingelser. Videre presenterer de noen av utfordringene ved å utvikle tredimensjonale flater numerisk, og henviser videre til topologiske studier innenfor dette fagfeltet. Hvorvidt enkelte metoder egner seg bedre hva gjelder å identifisere Lagrange-koherente strukturer kommer ikke frem i artiklene.

Med utgangspunkt i det ovenstående, virker det å være stort rom for forskning innen utvikling av gode og effektive numeriske rutiner for å beregne Lagrange-koherente strukturer i både to og tre romlige dimensjoner, som for eksempel med utgangspunkt i modelldata for havstrømninger eller atmosfæriske vindmønstre. Lagrange-koherente strukturer kan i prinsippet anvendes for å analysere generiske strømningsfenomen, som i tillegg til de tidligere nevnte naturfenomenene kan omfatte blodtransport i hjertet, smitte av lakselus mellom oppdrettsanlegg, eller utvikling av menneskelige forsamlingsmønstre — fantasien setter grensene. Med andre ord vil mer forskning innen numeriske rutiner for å beregne Lagrange-koherente strukturer ha stort nedslagsfelt innen en rekke fagdisipliner.

## Mål

Arbeidet med Lagrange-koherente strukturer vil være en forlengelse av arbeidet jeg allerede har gjort, og planlegger å gjennomføre, hhv i forbindelse med fordypningsprosjekt og masteroppgave. Arbeidets fokus vil først og fremst være utvikling av gode numeriske metoder for generelle strømningssystem, heller enn en spesifikk anvendelse. Av den grunn må den skisserte oppgaven beskrives som en oppgave innen numerisk fysikk.

Som et konkret delmål faller det naturlig å sammenligne ulike måter å beregne Cauchy-Greens deformasjonstensor for et gitt strømningsmønster. Tensoren spiller en viktig rolle i de Lagrange-koherente strukturenes variasjonsteori; blant annet er dens egenverdier og -vektorer sentrale i flere av strukturenes eksistensbetingelser. Helt konkret vil det være av

interesse å se på bruk av endelige differansemetoder til å estimere deformasjonstensoren sammenlignet med numerisk løsning av et velkjent koblet sett med differensialligninger som stammer fra variasjonsregning hvis sluttresultat kan analyseres ved en SVD-dekomposisjon for å beregne tensorens egenverdier og -vektorer, med hensyn til presisjonen i de resulterende Lagrange-koherente strukturene.

Et håndfast mål, hvilket også kan utgjøre hovedinnholdet i en vitenskapelig publikasjon på mellomlang sikt, vil være å beregne Lagrange-koherente strukturer for norske farvann, først i to og så tre dimensjoner, basert på modelldata fra Meteorologisk institutt.

## Referanser

---

- Atomic Energy Society of Japan (2015). *The Fukushima Daiichi Nuclear Accident*. 1. utg. Springer, Japan. ISBN: 978-4-431-55160-7.
- Farazmand, M. og Haller, G. (2012). «Computing Lagrangian coherent structures from their variational theory». I: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22.1, s. 013128. ISSN: 1054-1500. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3690153>.
- Haller, G. og Yuan, G. (2000). «Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence». I: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 147.3, s. 352–370. ISSN: 0167-2789.
- Haller, G. (2010). «A variational theory of hyperbolic Lagrangian Coherent Structures». I: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 240.7, s. 547–598. ISSN: 0167-2789.
- Kapoor, K. (2. des. 2017). «More Bali flights canceled on forecast of volcanic ash». I: *Reuters*. URL: <https://www.reuters.com/article/us-indonesia-volcano/more-bali-flights-canceled-on-forecast-of-volcanic-ash-idUSKBN1DW08G> (sjekket 22.01.2018).
- Obayashi, Y. og Mason, J. (15. jan. 2018). «Stricken tanker leaves large oil slick in East China Sea». I: *Reuters*. URL: <https://www.reuters.com/article/us-china-shipping-accident/stricken-tanker-leaves-large-oil-slick-in-east-china-sea-idUSKBN1F40GV> (sjekket 22.01.2018).
- Oettinger, D. og Haller, G. (2016). «An autonomous dynamical system captures all LCSs in three-dimensional unsteady flows». I: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26.10, s. 103111.