Samenvatting [G0Q57A] - Modellering en simulatie

Arne Van Den Kerchove

20 januari 2019

Inhoudsopgave

1 Modellen en simulaties

2 Numerieke lineaire algebra en toepassingen

2.1 QR-factorisatie

Definitie 1 *De volle QR-factorisatie van de matrix A wordt gegeven door*

$$A = QR$$

met q een $m \times m$ orthogonale matrix en R een $m \times n$ bovendriehoeksmatrix.

2.1.1 Gram-Schmidt orthogonalisatie

Algorithm 1 Gram-Schmidt-algoritme

```
procedure QRGramSchmidt
    for j = 1 to n do
        v_j = a_j
        for i = 1 to j − 1 do
            r_ij = q_i^T a_j
            v_j = v_j − r_ij q_i
        r_jj = ‖v_j‖_2
        q_j = v_j / r_jj
```

Complexiteit: $\mathcal{O}(2mn^2)$
Stabiliteit: niet stabiel

2.1.2 QR-factorisatie met Givens-rotaties

Definitie 2 *Een Givens-rotatie is een $m \times m$ orthogonale matrix van de vorm*

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

met

$$c^2 + s^2 = 1$$

Om een Givens-rotatie op te stellen die plaats (j, k) 0 maakt in matrix A, kies dan een element in dezelfde kolom (bv. het element boven (j, k)) op oplaats (i, k) en maak G_{ij} met

$$c = \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ik}^2 + a_{jk}^2}} \text{ en } s = \frac{a_{jk}}{\sqrt{a_{ik}^2 + a_{jk}^2}}$$

Algorithm 2 Givens-rotatie-algoritme

procedure QRGIVENS
  $Q = \mathbb{1}$
  $R = A$
  for $j = 1$ to n **do**
    for $i = m$ to $j + 1$ **do**
      $c = \frac{r_{i-1,j}}{\sqrt{r_{i-1,j}^2 + r_{i,j}^2}}$
      $s = \frac{r_{i,j}}{\sqrt{r_{i-1,j}^2 + r_{i,j}^2}}$
      $r_{i,j} = 0$
      $r_{i-1,j} = \sqrt{r_{i-1,j}^2 + r_{i,j}^2}$
      for $k = j + 1$ to n **do**

$$\begin{bmatrix} r_{i-1,k} \\ r_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i-1,k} \\ r_{i,k} \end{bmatrix}$$

      for $k = 1$ to m **do**

$$\begin{bmatrix} q_{k,i-1} & q_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{k,i-1} & q_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & s \end{bmatrix}$$

2.1.3 QR-factorisatie met kolompivotering