College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率统计简明教程附册

学习辅导与习题全解

Gailü Tongji Jianming Jiaocheng Fuce

Xuexi Fudao yu Xiti Quanjie

第二版

同济大学数学系　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

目　　录

第一章　随机事件

一、基本要求

1. 了解随机试验的特点.
2. 会用文字或式子描述随机事件.
3. 知道事件之间的四种关系及三种运算.
4. 会用事件的关系和运算描述较为复杂的随机事件.

二、内容提要

1. 随机试验的概念

具有以下两个特点的试验称之为随机试验:

(1) 试验的所有可能结果是已知的或是可以确定的;

(2) 每次试验将要发生什么样的结果是事先无法预知的.

随机试验又依其可否在相同条件下重复进行分为:可重复试验及不可重复试验. 本书绝大部分涉及的都是可重复试验.

2. 样本空间和随机事件

试验所有可能结果的全体构成样本空间;称试验的每一个可能结果为样本点,样本空间为全体样本点的集合;随机事件是对随机试验中出现的某些现象或某种情况的陈述,它可以用试验的某些可能结果加以描述,因而是样本空间的子集. 往后也简称随机事件为事件.

3. 事件的关系

随机事件之间有如下四种关系:

(1) 包含关系:称 A 蕴含了 B,是指 A 发生必导致 B 发生,且记之为 $A \subset B$;

(2) 相等关系:称 A 与 B 相等,是指 $A \subset B$,$B \subset A$ 同时成立;

(3) 互斥关系:称 A 与 B 互斥,是指 A,B 不能在一次试验中同时发生;

(4) 互补关系:称 A 与 B 互补,是指 A,B 在一次试验中必发生一个且只能发生一个.

4. 事件的运算

随机事件之间有如下三种运算:

(1) 并的运算：A 与 B 的并产生这样一个事件，即 A,B 至少发生一个，记之为 $A\cup B$；

(2) 交的运算：A 与 B 的交产生这样一个事件，即 A,B 同时发生，记之为 $A\cap B$，或 AB；

(3) 差的运算：A 与 B 的差产生这样一个事件，即 A 发生且 B 不发生，记之为 $A-B$，或 $A\setminus B$.

三、学习要点

本章的重点是事件的概念及事件的关系和运算. 由随机试验的特点决定了事件有随机性，这是开始学习本书时必须抓住的一个要点. 其次，通过例题及习题的训练要掌握运用事件的关系和运算描述较为复杂的事件，这是本章学习的基本要求.

四、释疑解难

问 1.1 样本空间有什么性质？

答 样本空间有以下两个性质：(1) 每次试验必有属于样本空间中的某个样本点发生；(2) 样本空间中的任意两个不同的样本点不会在同一次试验中出现.

问 1.2 如何判定在一次特定试验下事件 A 是否发生？

答 事件 A 在该次试验发生当且仅当包含在 A 中的样本点在该次试验下发生. 例如掷一枚骰子的随机试验，事件 A 为出现偶数点，则当且仅当掷骰子的结果出现 2 点，4 点或 6 点之一时，事件 A 在该次试验发生. 由此可见，一事件在一次试验中是否发生，只有当做了这次试验之后才能判定，在试验之前是无法预知的（必然事件与不可能事件是少数的两个例外）.

问 1.3 并事件与交事件有何差别？

答 我们以两个事件为例，A 与 B 的并事件 $A\cup B$ 是由三部分样本点组成，即（Ⅰ）同时属于 A 及 B；（Ⅱ）只属于 A；（Ⅲ）只属于 B（见图 1.1）. 而 A 与 B 的交事件 $A\cap B$ 则仅仅由上述第（Ⅰ）部分那些的样本点组成.

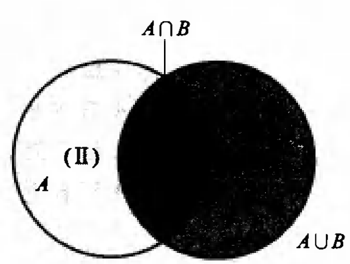
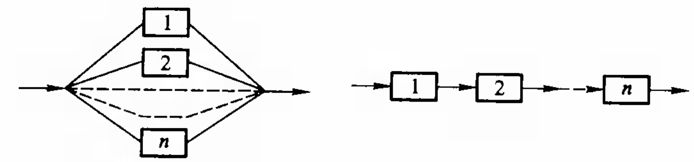


图 1.1

下面是一个实际例子：有线路甲、乙，甲是并联线路，乙是串联线路（见图1.2）.



（甲）并联线路　　（乙）串联线路

图 1.2

记 A_i 为元件 i 导通，$i=1,\cdots,n$，而事件 A 为线路导通，今要求分别对甲乙两种线路用诸 A_i 或 $\overline{A_i}$ 表示事件 $\overline{A}$.

对线路甲，只要 1 号到 n 号元件中有一个导通线路就导通. 因而欲使线路甲不通，必须从 1 号元件到 n 号元件每一个都不通，也就是说 $\overline{A_1},\cdots,\overline{A_n}$ 同时发生. 因而 $\overline{A}=\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$. 对线路乙，只有 1 号元件到 n 号元件均导通，线路乙才能导通. 因而只要 1 号到 n 号元件中有一个不通，则线路乙不通，所以，$\overline{A}=\overline{A_1}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$.

问 1.4 以下两种陈述有何差别？

(1) $A_1,\cdots,A_n$ 有一个发生；

(2) $A_1,\cdots,A_n$ 恰有一个发生.

答 在陈述(1)，(2) 中都包含了 $A_1,\cdots,A_n$ 只发生一个的情况. 但在陈述(2) 排除了 $A_1,\cdots,A_n$ 中有2个或2个以上同时发生的情况，而对陈述(1) 并未将这些情况排除在外. 事实上我们可表述如下：

$$\{A_1,\cdots,A_n\text{ 有一个发生}\}=A_1\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\{A_1,\cdots,A_n\text{ 恰有一个发生}\}=A_1\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}\cup\overline{A_1}A_2\cdots\overline{A_n}\cup\cdots\cup\overline{A_1}\cdots\overline{A_{n-1}}A_n.$$

五、例题分析及增补

例 7 有两门火炮同时向一架飞机射击，考察事件 $A=\{$击落飞机$\}$. 依常识，“击落飞机”等价于“击中驾驶员”或者“同时击中两个发动机”. 如记 $B_i=\{$击中第 i 个发动机$\}$，$i=1,2$，$C=\{$击中驾驶员$\}$.

(1) 用 B_i,C 表示事件 A；

(2) 求 $\overline{A}$.

析 (1) 依题中提示的“常识”，A 发生当且仅当或者“击中驾驶员”这一事件发生（即 C 发生），或者“同时击中两个发动机”这一事件发生.

而依事件运算的定义，后者即 B_1B_2. 因此 A 发生当且仅当 C 发生或者 B_1B_2

发生. 再由事件运算的定义,应有 $A=C\cup B_1B_2$.

(2) 对(1)得出的结果,两次运用对偶律有

$$\overline{A}=\overline{C}\cap\overline{B_1B_2}=\overline{C}\cap(\overline{B}_1\cup\overline{B}_2),$$

再使用运算规则的分配律,得到 $\overline{A}=\overline{C}\,\overline{B}_1\cup\overline{C}\,\overline{B}_2$.

例 1.1 将一枚均匀硬币相继投掷三次,观察出现的面,记 $A_i=\{$恰有 i 个正面$\}$, $i=1,2,3$, $A=\{$有一个正面$\}$, $B=\{$没有一个正面$\}$, $C=\{$至多一个正面$\}$, $D=\{$至少两个正面$\}$.

(1) 试写出该试验的样本空间;

(2) 试用 A_1,A_2,A_3 表示 A,B,C,D.

解 (1) 我们用三元有序对 (a_1,a_2,a_3) 表示一个试验结果,其中 a_i 表示第 i 次投掷出现的面, a_i 取"+"表示出现正面,取"−"表示出现反面,则一共有 $2^3=8$ 个可能试验结果,于是样本空间为

$\Omega=\{(+++),(++-),(+--),(---),(-+-),(--+),(+-+),(-++)\}$.

(2) $A=A_1\cup A_2\cup A_3$, $\quad B=\overline{A}=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$,

$C=B\cup A_1=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\cup A_1$, $\quad D=A_2\cup A_3$.

例 1.2 对某小区的住户进行抽样调查,记事件 A 为被抽到的住户有私家车, B 为被抽到的住户是白领, C 为被抽到的住户是足球迷.

(1) 试述事件 $A\cap B\cap\overline{C}$ 的含义;

(2) 考虑何时成立 $A\cap B\cap C=C$;

(3) 考虑什么条件下关系式 $A\subset B$ 成立.

解 (1) $A\cap B\cap\overline{C}$ 表示抽到的住户是有私家车的白领,但非足球迷.

(2) 欲使 $A\cap B\cap C=C$,只需 $C\subset A\cap B$. 因此只要该小区的住户凡是足球迷都是有私家车的白领,则成立 $A\cap B\cap C=C$.

(3) 当该小区的住户中,有私家车的都是白领时,包含关系 $A\subset B$ 成立.

例 1.3 设事件 $A=\{$在四件产品中至少有一件是次品$\}$, $B=\{$四件产品全为合格品$\}$, $C=\{$四件产品中次品数不少于两件$\}$. 试写出下述事件运算的结果:

(1) $\overline{A}$;(2) $\overline{C}$;(3) $A\cup B$;(4) $A\cap B$.

解 (1) $\overline{A}=B$. (2) $\overline{C}=\{$四件产品中至多有一件次品$\}$. (3) $A\cup B=\Omega$. (4) $A\cap B=\varnothing$.

例 1.4 设 $\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}=B$,求 X.

解 因 $\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}=(\overline{X}\cap\overline{A})\cup(\overline{X}\cap A)=\overline{X}\cap(\overline{A}\cup A)=\overline{X}$,

所以 $X=\overline{B}$.

六、习题解答

1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间与随机事件 A:

(1) 掷两枚均匀骰子,观察朝上面的点数,事件 A 表示"点数之和为 7";

(2) 记录某电话总机一分钟内接到的呼唤次数,事件 A 表示"一分钟内呼唤次数不超过 3 次";

(3) 从一批灯泡中随机抽取一只,测试它的寿命,事件 A 表示"寿命在 2000 到 2500 h 之间".

解 (1) $\Omega=\{$朝上的两个点数为 $(x,y)\mid x=1,2,3,4,5,6;y=1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

(2) 记 X 为一分钟内接到的呼唤次数,则

$$\Omega=\{X=k\mid k=0,1,2,\cdots\},\quad A=\{X=k\mid k=0,1,2,3\}.$$

(3) 记 X 为抽到的灯泡的寿命(单位:h),则

$$\Omega=\{X\in(0,+\infty)\},\quad A=\{X\in(2000,\ 2500)\}.$$

2. 投掷三枚大小相同的均匀硬币,观察它们出现的面.

(1) 试写出该试验的样本空间;

(2) 试写出下列事件所包含的样本点: $A=\{$至少出现一个正面$\}$, $B=\{$出现一正、二反$\}$, $C=\{$出现不多于一个正面$\}$;

(3) 如记 $A_i=\{$第 i 枚硬币出现正面$\}$, $i=1,2,3$,试用 A_1,A_2,A_3 表示事件 A,B,C.

解 (1) $\Omega=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+),(+,+,-),(+,-,+),(-,+,+),(+,+,+),(-,-,-)\}$,其中 $(+,-,-)$ 表示(正面,反面,反面),以此类推.

(2) $A=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+),(+,+,-),(+,-,+),(-,+,+),(+,+,+)\}$,

$B=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+)\}$,

$C=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,-),(-,-,+)\}$.

(3) $A=A_1\cup A_2\cup A_3$, $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,

$C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

3. 袋中有 10 个球,分别编有号码 1 ~ 10,从中任取 1 球,设 $A=\{$取得球的号码是偶数$\}$, $B=\{$取得球的号码是奇数$\}$, $C=\{$取得球的号码小于 5$\}$,问下列运算表示什么事件:

(1) $A\cup B$;(2) AB;(3) AC;(4) $\overline{AC}$;(5) $\overline{A}\,\overline{C}$;(6) $\overline{B\cup C}$;(7) $A-C$.

解 (1) $A\cup B=\Omega$ 是必然事件.

(2) $AB=\varnothing$ 是不可能事件.

(3) $AC=\{$取得球的号码是 2,4$\}$.

(4) $\overline{AC}=\{$取得球的号码是 1,3,5,6,7,8,9,10$\}$.

(5) $\overline{A}\,\overline{C}=\{$取得球的号码为奇数,且不小于 5$\}=\{$取得球的号码为 5,7,9$\}$.

(6) $\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}=\{$取得球的号码是不小于 5 的偶数$\}=\{$取得球的号码为 6,8,10$\}$.

(7) $A-C=A\overline{C}=\{$取得球的号码是不小于 5 的偶数$\}=\{$取得球的号码为 6,8,10$\}$.

4. 在区间 $[0,2]$ 上任取一数,记 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right.\right\}$, $B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right.\right\}$,求下列事件的表达式:

(1) $A\cup B$;(2) $\overline{A}B$;(3) $A\overline{B}$;(4) $A\cup\overline{B}$.

解 (1) $A\cup B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right.\right\}$.

(2) $$\overline{A}B=\left\{x\left|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\text{ 或 }1<x\leqslant 2\right.\right\}\cap B$$
$$=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}\cup\left\{x\left|1<x\leqslant\frac{3}{2}\right.\right\}.$$

(3) 因为 $A\subset B$,所以 $A\overline{B}=\varnothing$.

(4) $$A\cup\overline{B}=A\cup\left\{x\left|0\leqslant x<\frac{1}{4}\text{ 或 }\frac{3}{2}<x\leqslant 2\right.\right\}$$
$$=\left\{x\left|0\leqslant x<\frac{1}{4}\text{或}\frac{1}{2}<x\leqslant 1\text{ 或}\frac{3}{2}<x\leqslant 2\right.\right\}.$$

5. 用事件 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 出现,B,C 都不出现(记为 E_1);

(2) A,B 都出现,C 不出现(记为 E_2);

(3) 所有三个事件都出现(记为 E_3);

(4) 三个事件中至少有一个出现(记为 E_4);

(5) 三个事件都不出现(记为 E_5);

(6) 不多于一个事件出现(记为 E_6);

(7) 不多于两个事件出现(记为 E_7);

(8) 三个事件中至少有两个出现(记为 E_8).

解 (1) $E_1=A\overline{B}\,\overline{C}$. (2) $E_2=AB\overline{C}$.

(3) $E_3=ABC$. (4) $E_4=A\cup B\cup C$.

(5) $E_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. (6) $E_6=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(7) $E_7=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$. (8) $E_8=AB\cup AC\cup BC$.

6. 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三个产品,设 A_i 表示事件"第 i 次抽到废品",试用 A_i 的运算表示下列各个事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;

(2) 只有第一次抽到废品;

(3) 三次都抽到废品;

(4) 至少有一次抽到合格品;

(5) 只有两次抽到废品.

解 (1) $A_1\cup A_2$. (2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. (3) $A_1A_2A_3$.

(4) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$. (5) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

7. 接连进行三次射击,设 $A_i=\{$第 i 次射击命中$\}(i=1,2,3)$,试用 A_1,A_2,A_3 表示下述事件:

(1) $A=\{$前两次至少有一次击中目标$\}$;

(2) $B=\{$三次射击恰好命中两次$\}$;

(3) $C=\{$三次射击至少命中两次$\}$;

(4) $D=\{$三次射击都未命中$\}$.

解 (1) $A=A_1\cup A_2$. (2) $B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $C=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$. (4) $D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

8. 盒中放有 a 个白球、b 个黑球,从中有放回地抽取 r 次(每次抽一个,记录其颜色,然后放回盒中,再进行下一次抽取),记 $A_i=\{$第 i 次抽到白球$\}(i=1,2,\cdots,r)$,试用$\{A_i\}$ 表示下述事件:

(1) $A=\{$首个白球出现在第 k 次$\}$;

(2) $B=\{$抽到的 r 个球同色$\}$.

其中 $1\leqslant k\leqslant r$.

解 (1) $A=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k$.

(2) $B=A_1A_2\cdots A_r\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_r$.

***9.** 试说明什么情况下,下列事件的关系式成立:

(1) $ABC=A$;(2) $A\cup B\cup C=A$.

解 (1) 对任何事件 D 有 $AD\subset D$,故 $AD=A$ 当且仅当 $A\subset D$. 特别地令 $D=BC$,有 $ABC=A$ 当且仅当 $A\subset BC$.

(2) 对任何事件 D 有 $A\cup D\supset D$,故 $A\cup D=A$ 当且仅当 $A\supset D$. 特别地令

$D = B \cup C$,有 $A \cup B \cup C = A$ 当且仅当 $A \supset B \cup C$.

练　习　1

1.1　某品牌产品由甲、乙、丙三个厂家生产,然后由一家公司销售.今从该公司销售的该种产品中随机抽取一件,事件 A 为抽到的产品为合格品,事件 A_1, A_2, A_3 分别表示抽到的产品为甲、乙、丙厂家生产的.试解释下面事件等式的意义:$A = AA_1 \cup AA_2 \cup AA_3$.

1.2　一检验员检验某班组一天生产的 n 个产品的质量,事件 A_i 为第 i 个产品为合格品,$i = 1,2,\cdots,n$. 试用 $A_1,\cdots,A_n$ 表示下列事件:

(1) 没有一个次品;

(2) 至少有一个次品;

(3) 至多有一个次品;

(4) 至少有两个合格品.

1.3　说明 $A \subset B$ 当且仅当 $AB = A$.

答案与提示

1.2　(1) $A_1 \cap \cdots \cap A_n$;(2) $\overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$;

(3) $(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cup \overline{A}_1A_2\cdots A_n \cup A_1\overline{A}_2\cdots A_n \cup \cdots \cup A_1A_2\cdots\overline{A}_n$;

(4) $A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup \cdots \cup A_1A_n \cup A_2A_3 \cup \cdots \cup A_2A_n \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n$.

第二章　事件的概率

一、基本要求

1. 了解概率的统计定义及直观意义.

2. 学会正确使用古典概型及几何概型确定概率的公式,计算简单事件的概率.

3. 知道概率的公理化定义及概率的性质,并能运用概率的性质计算事件的概率.

二、内容提要

1. 概率的概念

概率是随机事件出现的可能性大小,因而是随机事件不确定性的度量.

概率的统计定义揭示了随机现象的统计规律,即概率是频率的稳定值.在实际应用中可用作概率的近似计算.

2. 古典概型及概率的确定

称有以下两个特点的随机试验为古典概型:

(1)(有限性)试验的可能结果只有有限个;

(2)(等可能性)各个可能结果出现是等可能的.

其事件的概率的计算公式为

$$P(A) = \frac{\text{有利于 } A \text{ 的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{k}{n}.$$

3. 几何概型及概率的确定

几何概型是古典概型的推广,即保留等可能性而去掉有限性的限制,即容许试验的可能结果有无穷多个.

其计算概率的公式为

$$P(A) = \frac{|S_A|}{|\Omega|},$$

其中 Ω 为所有可能试验结果所处的某空间区域,S_A 是 Ω 的一个子区域,为事件 A 的样本点在区域 Ω 中的相对位置.

4. 概率的公理化定义及性质

满足以下三个公理的一个集函数 $P(\cdot)$ 称之为概率：

公理 1（非负性） 对每一事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

公理 2（规范性） $P(\Omega)=1$.

公理 3（完全可加性） 对任意一列两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

概率有如下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 对任意有限个互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$；

(3) $P(\bar{A})=1-P(A)$；

(4) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$，特别地，若 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A) \leqslant P(B)$；

(5) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

三、学习要点

本章重点是：(一) 能正确使用古典概型的计算公式；(二) 了解并正确运用概率的性质. 注意这里要点是"正确"，例如要使用古典概型的求概率公式，必须判断两个前提条件，即有限性和等可能性. 下面看两个例子.

例 2.1 掷两枚均匀硬币，观察出现的面，求事件 $A=\{$一正一反$\}$ 发生的概率.

解法一 样本空间 $\Omega_1=\{$二正，二反，一正一反$\}$，包含了三个样本点，而 A 含有其中之一，因而 $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

解法二 样本空间 $\Omega_2=\{$(正，正)，(反，反)，(正，反)，(反，正)$\}$，包含了四个样本点，而 A 含有其中两个，因而 $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

以上两种解法是由于对样本空间取不同的划分，因而得到不同的解. 所谓样本空间的划分，即将样本空间 Ω 分割成一些两两不交子集，每个子集可由若干个样本点组成，有些教材也称这些子集为基本事件. 在本例 Ω_1 可看成 Ω_2 的一个划分，其中基本事件$\{$一正一反$\}$ 由两个样本点(正，反)，(反，正) 组成. 对样本空间进行划分有时会使求解变得容易. 但样本空间的划分必须满足"等可能性" 这一条件，即各个基本事件的发生是等可能的. 由此可知解法一是错误的，解法二是正确的. 事实上，在 Ω_1 中三个基本事件$\{$二正$\}$，$\{$二反$\}$，$\{$一正一反$\}$ 不是等可能的.

例 2.2 设 A,B 为两个事件，$P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.2$，求 $P(A\backslash B)$.

解法一 $P(A\backslash B)=P(A)-P(B)=0.6-0.4=0.2$.

解法二 $P(A\backslash B)=P(A\backslash AB)=P(A)-P(AB)=0.6-0.2=0.4$.

以上解法都是使用概率的性质(4)，但解法一是错的，解法二正确. 此因性质(4) 的特例要求"$B \subset A$"，但此例的 A,B 并不知道是否符合这一条件，而解法一直接使用了此性质的特例，因此是错的.

四、释疑解难

问 2.1 对于"有放回抽取"与"无放回抽取"这两种情况，在计算概率时有何差别？

答 有放回和无放回抽取这两种情形，使用的计数公式是不同的，因而概率计算是不同的. 如：从 1 到 n 个数字中有放回地连续抽取 m 个，一共有 n^m 个不同的可能结果；而如改成无放回抽取，则共有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 个可能结果. 在应用中需判明究竟是有放回还是无放回，这一点是重要的.

下面看一个例子：将 m 个球随机地放入 n 个盒子中($n-1 \geqslant m$)，分两种情况求事件 $A=\{$指定的一盒没有球$\}$ 的概率：(1) 每盒至多只能放一个球；(2) 盒子容纳的球数没有限制.

这是个球入盒的问题，等价于从编号 1 到 n 的盒子中随机抽取 m 次(每次一盒) 的抽取问题. 在情形(1) 对应无放回抽取，而情形(2) 则是有放回抽取. 因而在情形(1) $P(A)=\dfrac{(n-1)\cdots(n-1-m+1)}{n(n-1)\cdots(n-m+1)}=\dfrac{n-1-m+1}{n}=\dfrac{n-m}{n}$，而在情形(2) $P(A)=\dfrac{(n-1)^m}{n^m}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m$.

问 2.2 在古典概型的概率计算中，把握等可能性是难点之一. 现见一例：掷两枚骰子，求事件 $A=\{$点数之和等于 5$\}$ 的概率. 下面的解法是否正确？如不正确，错在哪里？解法：因试验可能结果只有两个，一是点数之和为 5，另一个是点数之和不等于 5，而事件 A 只含有其中的一种，因而 $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

答 此解法是错误的，这种解法是对样本空间进行了不正确的划分，分割出的两部分不是等可能的，因而不能据此进行计算.

正确的解法如下：掷两枚骰子的样本空间可形象地表为 $\Omega=\{(i,j):i,j=1,$

2, …, 6}, 数对 (i,j) 表示两枚骰子分别出现的点数，因而一个数对即对应着一个样本点，一共含有 $6^2=36$ 个这样的数对，每个数对出现的可能性都等于 $\frac{1}{36}$. 而事件 A 只含有 (1,4), (2,3), (4,1), (3,2) 这样四个数对. 因而 $P(A)=\frac{4}{6^2}=\frac{1}{9}$.

问 2.3 在几何概型的概率计算中，关键在于正确地刻画出事件 A 所对应的子区域 S_A. 在下例中找出 S_A 是什么.

例 （即习题二第 13 题）甲、乙两艘轮船都要在某个泊位停靠 6 h，假定它们在一昼夜的时间段中随机地到达，试求这两艘船中至少有一艘在停靠泊位时必须等待的概率.

我们记该事件为 A，甲、乙到达时间分别为 x,y（单位：h），则 $\Omega=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 24,\ 0\leqslant y\leqslant 24\}$. 为求 S_A，注意到，A 发生当且仅当甲、乙到达时间之差不超过 6 h，即 $|x-y|\leqslant 6$，因而

$$S_A=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 24,\ 0\leqslant y\leqslant 24,\ |x-y|\leqslant 6\},$$

即图 2.1 中阴影部分区域. 所以

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|\Omega|}=\frac{24^2-2\times\frac{1}{2}(24-6)^2}{24^2}=1-\frac{18^2}{24^2}=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}.$$

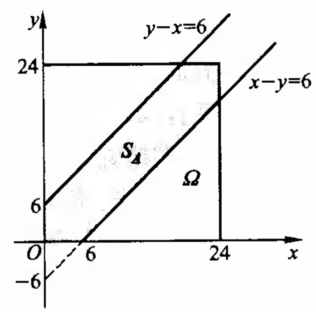


图 2.1

问 2.4 今有某超市抽奖销售，设共有 n 张券，其中只有一张有奖，问若每人只能抽一张，第 k 个人抽到有奖的概率是多少？试就有放回、无放回两种方式回答该问题.

答 在有放回情形，第 k 个人抽与第 1 个人抽情况相同，因而所求概率为 $\frac{1}{n}$；在无放回情形，样本点总数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$，而有利样本点数为 $(n-1)(n-2)\cdots[n-1-(k-1)+1]\cdot 1$，所求概率为

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

值得注意的是：两种不同的抽样方式得到的解答是一样的，而且此概率值与抽样次数 k 无关. 这表明通常抽奖设计为无放回抽取可简化抽奖活动的程序，且对每个参加活动的人来说都是机会均等的.

问 2.5 概率为 0 的事件是否必定为不可能事件？

答 不是. 反例如下：今向 (0, 1) 区间随机投点，事件 A 为"落点恰好在 $\frac{1}{2}$ 处"，显然事件 A 非不可能事件，但 $P(A)=0$.

五、例题分析及增补

例 2.1 设某电子元件依每 100 件装箱，已知指定的一箱中有 3 件次品. 今从中随机不放回抽取 m 件 $(3\leqslant m\leqslant 100)$，求事件 $A=\{$至少有一次品$\}$ 的概率.

解法一 直接计算 A 的样本点数是比较复杂的，今进行事件分解，令 $A_i=\{$恰好有 i 个次品$\}$, $i=1,2,3$. 则有

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

且 A_1,A_2,A_3 互斥. 因而复杂事件 A 的概率计算归结为较为简单的事件 A_i 的概率计算. 我们有

$$P(A_i)=\frac{\binom{3}{i}\binom{97}{m-i}}{\binom{100}{m}},\quad i=1,2,3.$$

最后使用概率的可加性，得到

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{\binom{100}{m}}\left[\binom{3}{1}\binom{97}{m-1}+\binom{3}{2}\binom{97}{m-2}+\binom{3}{3}\binom{97}{m-3}\right].$$

解法二 先求对立事件 $\bar{A}$ 的概率，注意到

$$P(\bar{A})=P(\{\text{没有次品}\})=\frac{\binom{3}{0}\binom{97}{m}}{\binom{100}{m}}.$$

再使用概率性质，可得

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{\binom{97}{m}}{\binom{100}{m}}.$$

以上两种解法，解法二明显优于解法一，且比较两种解法，还可得到以下恒等式：

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\binom{97}{m-i}=\binom{100}{m},\qquad \forall\, 3\leqslant m<100.$$

例 2.2 在 15 个新生中有 3 名外籍生，今将这 15 个新生随机地编入 3 个班

(每个班 5 人),求下述事件 A,B 的概率:

$A=\{$每班有 1 名外籍生$\}$;

$B=\{$3 名外籍生同在一个班$\}$.

解 先求样本点总数,15 个人按 5,5,5 分成三组,共有 $\dfrac{15!}{5!\,5!\,5!}$ 种不同分法(称之为多项系数). 每种分法对应一个样本点,因而样本点总数为 $\dfrac{15!}{5!\,5!\,5!}$.

为计算有利于 A 的样本点数,注意到 3 名外籍生分到三个班,各分一名的分法有 $3\times2\times1$ 种,剩下 12 个新生平均分到三个班,有 $\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!}$ 种不同的分法. 因而依计数原理可知,有利于 A 的样本点数为 $3!\times\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!}$. 于是

$$P(A)=3!\,\frac{12!}{4!\,4!\,4!}\Big/\frac{15!}{5!\,5!\,5!}=\frac{5^3\times3!}{15\times14\times13}.$$

下面计算有利于 B 的样本点数,3 名外籍生分在同一班有 3 种不同分法,剩下 12 个新生按 5,5,2 分入三个班,共有 $\dfrac{12!}{5!\,5!\,2!}$ 种不同分法. 因而有利于 B 的样本点数为 $3\times\dfrac{12!}{5!\,5!\,2!}$. 所以

$$P(B)=\frac{3\times12!/5!\,5!\,2!}{15!/5!\,5!\,5!}=\frac{3^2\times5\times4}{15\times14\times13}.$$

例 2.3 一半径为 r 的钱币随机地落在边长为 l 的正方形桌面上 $(l>2r)$,求事件 $A=\{$钱币不与桌面的四条边相交$\}$ 的概率.

解 取钱币的圆心为 O,由于钱币总是落在桌面上,因而圆心 O 必落在正方形桌面,样本空间对应的区域为边长 l 的正方形. 注意到事件 A 发生,当且仅当钱币中心 O 距该桌面四条边不小于 r,因而事件 A 所对应的区域为距 Ω 的四条边均为 r 的小正方形 S_A(见图 2.2). 于是

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|\Omega|}=\frac{(l-2r)^2}{l^2}=\left(1-\frac{2r}{l}\right)^2.$$

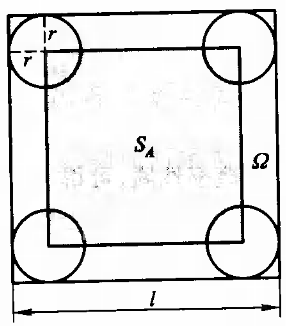


图 2.2

例 2.4 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=a$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=b$,求 A,B,C 都不发生的概率.

解 因 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$,以及

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3a-b+P(ABC)=3a-b,\end{aligned}$$

其中用到 $ABC\subset AB$,因此由 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$ 得到 $P(ABC)=0$,于是 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-3a+b$.

例 2.5 设有一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,其中常数 b 及 c 分别是甲乙两人独立掷一颗骰子的点数,求方程无实根的概率.

解 记事件 $A=\{$方程无实根$\}$,则 $A=\{b^2<4c\}$. 注意到当乙掷出 6 点时,甲掷出 1 至 4 点的任一结果都满足 $b^2<4c$,其余结果可类似推出. 今将事件 A 包含的所有可能结果,列表如下:

	c	b	样本点数
$b^2<4c$	1	1	1
	2	1,2	2
	3	1,2,3	3
	4	1,2,3	3
	5	1,2,3,4	4
	6	1,2,3,4	4

因此 $P(A)=\dfrac{1+2+3\times2+4\times2}{6^2}=\dfrac{17}{36}$.

六、习题解答

1. 从一批由 45 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件产品,求其中恰有 1 件次品的概率.

解 这是不放回抽取,样本点总数 $n=\dbinom{50}{3}$,记所求概率的事件为 A,则有利于 A 的样本点数 $k=\dbinom{45}{2}\dbinom{5}{1}$. 于是

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\dbinom{45}{2}\dbinom{5}{1}}{\dbinom{50}{3}}=\frac{45\times44\times5\times3!}{50\times49\times48\times2!}=\frac{99}{392}.$$

2. 一口袋中有 5 个红球及 2 个白球. 从这袋中任取一球,看过它的颜色后放

回袋中,然后,再从这袋中任取一球.设每次取球时口袋中各个球被取到的可能性相同.求:

(1) 第一次、第二次都取到红球的概率;

(2) 第一次取到红球、第二次取到白球的概率;

(3) 两次取得的球为红、白各一的概率;

(4) 第二次取到红球的概率.

解 本题是有放回抽取模式,样本点总数 $n=7^2$. 记(1),(2),(3),(4) 题求概率的事件分别为 A,B,C,D.

(1) 有利于 A 的样本点数 $k_A=5^2$,故 $P(A)=\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$.

(2) 有利于 B 的样本点数 $k_B=5\times 2$,故 $P(B)=\frac{5\times 2}{7^2}=\frac{10}{49}$.

(3) 有利于 C 的样本点数 $k_C=2\times 5\times 2$,故 $P(C)=\frac{20}{49}$.

(4) 有利于 D 的样本点数 $k_D=7\times 5$,故 $P(D)=\frac{7\times 5}{7^2}=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$.

3. 一个口袋中装有 6 只球,分别编上号码 1 ~ 6,随机地从这个口袋中取 2 只球,试求:

(1) 最小号码是 3 的概率;

(2) 最大号码是 3 的概率.

解 本题是无放回模式,样本点总数 $n=6\times 5$.

(1) 最小号码为 3,只能从编号为 3,4,5,6 这四个球中取 2 只,且有一次抽到 3,因而有利样本点数为 2×3,所求概率为 $\frac{2\times 3}{6\times 5}=\frac{1}{5}$.

(2) 最大号码为 3,只能从 1,2,3 号球中取,且有一次取到 3,于是有利样本点数为 2×2,所求概率为 $\frac{2\times 2}{6\times 5}=\frac{2}{15}$.

4. 一个盒子中装有 6 只晶体管,其中有 2 只是不合格品.现在作无放回抽样.接连取 2 次,每次随机地取 1 只,试求下列事件的概率:

(1) 2 只都是合格品;

(2) 1 只是合格品,1 只是不合格品;

(3) 至少有 1 只是合格品.

解 分别记题(1),(2),(3) 涉及的事件为 A,B,C,则

(1) $P(A)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{4\times 3\times 2}{6\times 5\times 2}=\dfrac{2}{5}$.

(2) $P(B)=\dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{4\times 2\times 2}{6\times 5}=\dfrac{8}{15}$.

(3) 注意到 $C=A\cup B$,且 A 与 B 互斥,因而由概率的可加性知

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{14}{15}.$$

5. 从某一装配线上生产的产品中选择 10 件产品来检查,假定选到有缺陷的和无缺陷的产品是等可能发生的,求至少观测到一件有缺陷的产品的概率,结合"实际推断原理"解释得到的上述概率结果.

解 记 $A=\{$至少有一个有缺陷$\}$,则 $\overline{A}=\{$选到的 10 个产品都没有缺陷$\}$,且 $P(\overline{A})=\frac{1}{2^{10}}$,因此 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{2^{10}}\approx 0.999$.

又按实际推断原理,$\overline{A}$ 作为一个小概率事件,在一次试验中几乎不会发生.因此可以几乎认为:选择到的 10 个产品,至少有一个有缺陷.

6. 某人去银行取钱,可是他忘记密码的最后一位是哪个数字,他尝试从 0 ~ 9 这 10 个数字中随机地选一个,求他能在 3 次尝试之中解开密码的概率.

解 记 $A=\{$在 3 次尝试中解开密码$\}$,$A_i=\{$恰好在第 i 次尝试中解开密码$\}$,$i=1,2,3$. 则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,且 A_1,A_2,A_3 互斥,因而

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

显然,$P(A_1)=\frac{1}{10}$,又 $P(A_2)=\frac{9\times 1}{10\times 9}=\frac{1}{10}$,$P(A_3)=\frac{9\times 8\times 1}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{10}$,因而 $P(A)=\frac{3}{10}$.

7. 掷两颗骰子,求下列事件的概率:

(1) 点数之和为 7;

(2) 点数之和不超过 5;

(3) 点数之和为偶数.

解 分别记题(1),(2),(3) 的事件为 A,B,C,样本点总数 $n=6^2$.

(1) A 含样本点(2,5),(5,2),(1,6),(6,1),(3,4),(4,3),所以

$$P(A)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}.$$

(2) B 含样本点(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,3),(3,2),所以

$$P(B)=\frac{10}{6^2}=\frac{5}{18}.$$

(3) C 含样本点 $(1,1),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(2,2),(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(3,3),(3,5),(5,3),(4,4),(4,6),(6,4),(5,5),(6,6)$，一共 18 个样本点. 所以

$$P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

8. 把甲、乙、丙三名学生随机地分配到 5 间空置的宿舍中去，假设每间宿舍最多可住 8 人，试求这三名学生住在不同宿舍的概率.

解 记所求概率的事件为 A，样本点总数为 5^3，而有利于 A 的样本点数为 $5\times4\times3$，所以 $P(A)=\frac{5\times4\times3}{5^3}=\frac{12}{25}$.

9. 总经理的五位秘书中有两位精通英语，今偶遇其中的三位秘书，求下列事件的概率：

(1) 事件 $A=\{$其中恰有一位精通英语$\}$；

(2) 事件 $B=\{$其中恰有两位精通英语$\}$；

(3) 事件 $C=\{$其中有人精通英语$\}$.

解 样本点总数为 $\binom{5}{3}$.

$$(1)\ P(A)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{2\times3\times3!}{5\times4\times3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

$$(2)\ P(B)=\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}}=\frac{3\times3!}{5\times4\times3}=\frac{3}{10}.$$

(3) 因 $C=A\cup B$，且 A 与 B 互斥，因而

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}.$$

10. 甲袋中有 3 只白球、7 只红球、15 只黑球，乙袋中有 10 只白球、6 只红球、9 只黑球. 现从两个袋中各取一球，求两球颜色相同的概率.

解 记 $A=\{$两球同色$\}$，$A_1=\{$两球同为白色$\}$，$A_2=\{$两球同为红色$\}$，$A_3=\{$两球同为黑色$\}$，则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1,A_2,A_3 互斥，但 $P(A_1)=\frac{3\times10}{25\times25}$，$P(A_2)=\frac{7\times6}{25\times25}$，$P(A_3)=\frac{15\times9}{25\times25}$，因而

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{25^2}(3\times10+7\times6+15\times9)=\frac{207}{625}.$$

11. 有一轮盘游戏，是在一个划分为 10 等分弧长的圆轮上旋转一个球，这些弧上依次标着 0 ~ 9 十个数字. 球停止在那段弧对应的数字就是一轮游戏的结果. 数字按下面的方式涂色：0 看作非奇非偶涂为绿色，奇数涂为红色，偶数涂为黑色. 事件 $A=\{$结果为奇数$\}$，事件 $B=\{$结果为涂黑色的数$\}$. 求以下事件的概率：

(1) $P(A)$；(2) $P(B)$；(3) $P(A\cup B)$；(4) $P(AB)$.

解 (1) $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

(2) $P(B)=P(\{$结果为非零偶数$\})=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

(3) 因 A,B 互斥，故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$.

(4) 由 $AB=\{$结果为涂黑色的奇数$\}=\varnothing$，所以 $P(AB)=0$.

12. 设一质点一定落在 xOy 平面内由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的三角形内，而落在这三角形内各点处的可能性相等，即落在这三角形内任何区域上的可能性与这区域的面积成正比，计算这质点落在直线 $x=\frac{1}{3}$ 的左边的概率.

解 记所求概率的事件为 A，则 S_A 为图 2.3 中阴影部分，而 $|\Omega|=\frac{1}{2}$，

$$|S_A|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{18}.$$

最后由几何概型的概率计算公式可得

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|\Omega|}=\frac{5/18}{1/2}=\frac{5}{9}.$$

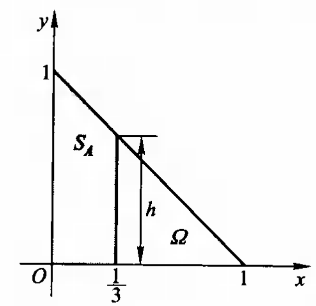


图 2.3

13. (见本章“释疑解难”问 2.3.)

14. 已知 $A\subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求：

(1) $P(\bar{A})$，$P(\bar{B})$；(2) $P(A\cup B)$；(3) $P(AB)$；(4) $P(\bar{B}A)$，$P(\bar{A}\bar{B})$；(5) $P(\bar{A}B)$.

解 (1) $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6$，$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.6=0.4$.

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)=P(B)=0.6$.

(3) $P(AB)=P(A)=0.4$.

(4) $P(\bar{B}A)=P(A-B)=P(\varnothing)=0$,

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.6 = 0.4.$$

(5) $P(\overline{A}B) = P(B - A) = 0.6 - 0.4 = 0.2.$

15. 设 A,B 是两个事件,已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.7,P(A\cup B)=0.8$,试求 $P(A-B)$ 与 $P(B-A)$.

解 注意到 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,因而

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.7-0.8=0.4.$$

于是,

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1,$$

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3.$$

***16.** 盒中装有标号为 $1\sim r$ 的 r 个球,今随机地抽取 n 个,记录其标号后放回盒中;然后再进行第二次抽取,但此时抽取 m 个,同样记录其标号. 这样得到球的标号记录的两个样本,求这两个样本中恰有 k 个标号相同的概率.

解 经过第一次抽取并放回盒子后,盒中的 r 个球中有 n 个有标号,$r-n$ 个无标号,第二次抽 m 个球正是从这样组成的盒中抽取,因此要求"恰有 k 个标号相同"等同于这个 m 个球中恰有 k 个是抽自 n 个有标号的球,而剩下 $m-k$ 个是抽自 $r-n$ 个无标号的球,于是记目标事件为 A,则有

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}\binom{r-n}{m-k}}{\binom{r}{m}},k\leqslant m,k\leqslant n.$$

练　习　2

2.1　袋中有 a 个白球和 b 个黑球,从中不放回地取 k 次(每次取一个)$(1\leqslant k\leqslant a+b)$,求最后取出的是白球的概率.

2.2　有 n 个不同的球,每一个以 $\frac{1}{N}$ 的概率随机地落入 N 个盒子中的某一个$(n\leqslant N)$,求下列事件 A,B 的概率:

$A=\{$指定的 n 个盒中各有一球$\}$,$B=\{$恰有 n 个盒子,其中各有一个球$\}$.

2.3　在 n 把钥匙中只有一把是房门钥匙,今一把一把地试开,试就(1)有放回,(2)无放回两种方式,求第 k 次试开时将房门打开的概率$(1\leqslant k\leqslant n)$.

2.4　电梯从 1 层升到 12 层,开始时有 10 名乘客,每个乘客从第 2 层到第 12 层的每一层离开电梯是等可能的,求下列事件的概率:

$A=\{$10 人在同一层离开电梯$\}$,$B=\{$10 人在不同层离开电梯$\}$,

$C=\{$恰有 2 人在同一层离开$\}$.

2.5　有 $2n$ 个运动队分成两组(每组 n 个队),求:

(1) 两个强队分在一组的概率;

(2) 两个强队分在不同组的概率.

2.6　一副扑克牌有 52 张,今随机抽取一张,求抽到的一张或是 A,K,Q 之一,或是黑桃花色的牌的概率.

答案与提示

2.1　$\frac{a}{a+b}$.

2.2　$P(A)=\frac{n!}{N^n},P(B)=\binom{N}{n}\frac{n!}{N^n}$.

2.3　(1) 有放回:$\frac{(n-1)^k}{n^k}$;　(2) 无放回:$\frac{1}{n}$.

2.4　$P(A)=\frac{11}{11^{10}}=\left(\frac{1}{11}\right)^9,P(B)=\frac{11\times10\times\cdots\times2}{11^{10}},P(C)=\frac{\binom{11}{1}\binom{10}{2}10\times9\times\cdots\times3}{11^{10}}$.

提示:为求 $P(C)$,先考虑指定 2 人在指定一层离开,其余的人在余下的不同层离开,此时剩下 8 人在余下的 10 层中从不同层离开共有 $10\times9\times\cdots\times3$ 种方法. 然后在 10 人中指定 2 人有 $\binom{10}{2}$ 种方法,在 11 层中指定一层有 $\binom{11}{1}$ 种方法. 利用计数原理可得有利样本点数.

2.5　(1) $\frac{n-1}{2n-1}$;(2) $\frac{n}{2n-1}$.

2.6　$\frac{11}{26}$.

第三章　条件概率与事件的独立性

一、基本要求

1. 了解条件概率的概念及计算公式.
2. 会运用全概率公式及贝叶斯公式计算概率.
3. 知道事件独立性的直观意义,会运用独立事件性质计算概率.
4. 掌握在伯努利概型下有关概率的计算.

二、内容提要

1. 条件概率的概念

在随机试验中,已知一事件 A 发生的条件下,另一事件 B 发生的概率,称之为 B 的条件概率,记为 $P(B\mid A)$. 其计算公式为

$$P(B\mid A)=P(AB)/P(A),$$

其中要求 $P(A)>0$.

2. 乘法定理

若 $P(A)>0$,有 $P(AB)=P(B\mid A)P(A)$;

若 $P(B)>0$,有 $P(AB)=P(A\mid B)P(B)$.

3. 全概率公式和贝叶斯公式

设若事件 B 与事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有如下关系:

$$B=\bigcup_{k=1}^{n}BA_k,$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不交,且 $P(A_k)>0,k=1,2,\cdots,n$. 则计算 B 发生的概率有如下的全概率公式:

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k).$$

此外,如再有 $P(B)>0$,则有如下的贝叶斯公式:

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

直观上,全概率公式是从"原因"A_k 导出"结果"B 发生的概率,而贝叶斯公式则已知"结果"B 发生,导出某个"原因"A_k 发生的"后验"概率.

4. 事件的独立性

如果无论 A 是否发生,都不影响事件 B 发生的概率,直观上称 A 与 B 独立. 如 A,B 独立,有

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

这是独立事件的性质,也可作为 A,B 独立的定义.

对于三个事件 A,B,C,当且仅当以下四个等式成立时相互独立:

$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

在 n 次独立重复试验中,若每次试验结果只有 A 及 $\overline{A}$,且 A 在每次试验发生概率均为 p,称此概型为伯努利试验,在伯努利试验中 A 恰好发生 k 次的概率为

$$p_k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

三、学习要点

本章有两个重要概念,即条件概率及独立性. 条件概率实际上是在原试验条件再加上某事件已发生这一限制,因而在计算古典概型的题时,有时可将条件概率转化成缩小样本空间后的无条件概率(见本章教材例1).

全概率公式是计算较为复杂事件的求概率公式,而贝叶斯公式则是已知试验结果已经发生条件下,某个"诱因"发生的条件概率公式. 这两个公式与乘法定理一起是条件概率计算的最重要而且也是最为实用的计算公式,必须熟练掌握.

当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时,计算事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 的概率有一个非常简便的方法,即

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=1-P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)=1-\prod_{k=1}^{n}P(\overline{A_k})=1-\prod_{k=1}^{n}(1-P(A_k)).$$

只需知每个 A_k 的概率 $P(A_k)$,就可得到 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个的概率.

四、释疑解难

问 3.1　对于任意事件 A,B,$P(B\mid A)>P(B)$(或者 $P(B\mid A)<P(B)$)必定成立?

答 不一定. 例如袋中有 10 张彩票,只有 2 张有奖,今从中不放回抽取(每次抽一张)2 次,记 $A=\{$第一次抽到有奖彩票$\}$,$B=\{$第二次抽到有奖彩票$\}$,则 $P(A)=P(B)=\frac{1}{5}$,而

$$P(B\mid A)=\frac{1}{9}<P(B),\qquad P(B\mid \bar{A})=\frac{2}{9}>P(B).$$

问 3.2 条件概率 $P(B\mid A)$ 与概率 $P(AB)$ 有何不同?

答 条件概率 $P(B\mid A)$ 中 A,B 地位不同,且已知 A 已发生作为条件;在概率 $P(AB)$ 中,A,B 同时发生,地位相同,没有前提条件. 在应用问题中必须区别是求 $P(B\mid A)$ 还是求 $P(AB)$. 例如从6个正品2个次品的袋中,不放回抽取2次,$A=\{$第一次为正品$\}$,$B=\{$第二次为次品$\}$,求(1) 第二次才取到次品的概率;(2) 已知第一次取到正品,B 发生的概率. 那么,第一问是求 $P(AB)$,而第二问是求 $P(B\mid A)$.

问 3.3 以下命题是否成立:若 $P(B\mid A)=P(B\mid \bar{A})$,则 A 与 B 独立?

答 成立. 事实上依定义可导出

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

因而

$$P(AB)[1-P(A)]=[P(B)-P(AB)]P(A),$$

这导致 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以 A 与 B 独立.

这一命题正是事件独立的直观意义的一种数学描述.

问 3.4 一个概率为0或概率为1的事件是一个几乎确定的事件,因而与任一随机事件独立. 这种说法是否成立?

答 成立. 我们可严格地表述为:设 $P(A)=0$ 或1,则 A 与任一事件 B 独立. 不妨设 $P(A)=0$($P(A)=1$ 同样可证),$AB\subset A$,导致 $P(AB)\leqslant P(A)=0$,于是 $P(AB)=0$,所以

$$P(AB)=0=P(A)P(B),$$

此即 A,B 独立.

问 3.5 习题三第 18 题的提示,使用全概率公式

$$P(A_k)=P(A_1)P(A_k\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_k\mid \bar{A}_1)\qquad (1)$$

有什么好处?

答 使用全概率公式解题,重要的是选取合适的待求概率事件的分解,选择得好,问题将迎刃而解,反之则于事无补. 对本例可以有两个事件分解:$A_k=A_kA_1\cup A_k\bar{A}_1$ 及 $A_k=A_kA_{k-1}\cup A_k\bar{A}_{k-1}$. 使用前者,则得到提示中的全概率公式(1);

而使用后者,则有全概率公式

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k\mid A_{k-1})+P(\bar{A}_{k-1})P(A_k\mid \bar{A}_{k-1}).\qquad (2)$$

关键在于条件概率 $P(A_k\mid\cdot)$ 能否求出. 事实上,在 A_1 已发生条件下,罐中的白球、黑球数一清二楚,使用归纳假设即可得到条件概率 $P(A_k\mid A_1)$ 及 $P(A_k\mid \bar{A}_1)$. 而在 A_{k-1} 已发生的条件下,罐中的白球、黑球各是多少是未知的. 因此,$P(A_k\mid A_{k-1})$,$P(A_k\mid \bar{A}_{k-1})$ 仍然是未知的,也就是说全概率公式(2) 无助于问题的解决,而使用公式(1) 达到将问题化繁为简的目的.

五、例题分析及增补

例 4 设某工厂有两个车间生产同型号家用电器,第 1 车间的次品率为 0.15,第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品都混合堆放在一个仓库中,假设第 1,2 车间生产的成品比例为 2 : 3,今有一客户从成品仓库中随机提一台产品,求该产品合格的概率.

析 若记

$$B=\{\text{从仓库随机提出的一台是合格品}\},$$
$$A_i=\{\text{提出的一台是第 } i \text{ 车间生产的}\},i=1,2,$$

有分解式 $B=A_1B\cup A_2B$,随后使用全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2).$$

依题意 $P(A_1)=\frac{2}{5}$,$P(A_2)=\frac{3}{5}$,问题在于 $P(B\mid A_1)$,$P(B\mid A_2)$ 是什么. 这需要从实际问题中或所给题目条件中仔细考察. 如此题“第 1 车间的次品率为0.15”,仔细展开可读成“在已知是第 1 车间的产品的条件下,其为次品的概率为0.15”,此概率当然是条件概率. 于是得到 $P(\bar{B}\mid A_1)=0.15$,因而 $P(B\mid A_1)=0.85$. 同理,$P(B\mid A_2)=0.88$. 因此此例的求解全在于将实际问题中的条件,翻译成全概率公式中指定的概率或条件概率. 最后代入得到

$$P(B)=0.4\times 0.85+0.6\times 0.88=0.868.$$

例 10 设某车间有三台车床,在一小时内机器不要求工人维护的概率分别是:第 1 台为0.9,第 2 台为0.8,第 3 台为0.85. 求一小时内三台车床至少有一台不需工人维护的概率.

析 记 A 为所求概率事件,$A_i=\{$第 i 台需工人维护$\}$,$i=1,2,3$. A 与诸 A_i 有关系

$$A=\bigcup_{i=1}^{3}\bar{A}_i.$$

然而，$\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 相互独立，并不是两两互斥(为什么？)，因此不能使用概率的可加性，而只能得到

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(\overline{A}_i)-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)-P(\overline{A}_1\overline{A}_3)-P(\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3).$$

尽管一样可以求解，但显得太繁.

我们可以考虑另外的解法，A 是至少有一台不需工人维护，其对立事件是三台都需工人维护(即 $A_1A_2A_3$). 因此 $A=\overline{A_1A_2A_3}$，于是利用独立性，

$$P(A)=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.997.$$

这一解法显然要简单得多.

例 3.1 罐中有 a 个红球，b 个黑球，今随机地从中取出一个，观察其颜色后放回，并加上同色球 c 个，再从罐中第二次抽取一球. 求第二次抽出的是黑球的概率.

解 记 $B=\{$第二次抽出的是黑球$\}$，$A=\{$第一次抽出的是黑球$\}$ 则 $B=AB\cup\overline{A}B$. 因而有全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A}).$$

注意到

$$P(A)=\frac{b}{a+b},\quad P(B\mid A)=\frac{b+c}{a+b+c},\quad P(\overline{A})=\frac{a}{a+b},\quad P(B\mid\overline{A})=\frac{b}{a+b+c}.$$

所以

$$P(B)=\frac{b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{b}{a+b}.$$

例 3.2 设某公路上经过的货车与客车的数量之比为 2∶1，货车中途停车修理的概率为 0.02，客车为 0.01，今有一辆汽车中途停车修理，求该汽车是货车的概率.

解 记 $B=\{$中途停车修理$\}$，$A_1=\{$经过的是货车$\}$，$A_2=\{$经过的是客车$\}$，则 $B=BA_1\cup BA_2$. 由贝叶斯公式有

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.02}{\frac{2}{3}\times 0.02+\frac{1}{3}\times 0.01}=0.80.$$

例 3.3 对同一目标进行3次独立重复射击，假定至少有一次命中目标的概率为$\frac{7}{8}$，求每次射击命中目标的概率 p.

解 记 $A=\{$至少有一次命中目标$\}$，$A_i=\{$第 i 次命中目标$\}$，$i=1,2,3$. 则

A_1,A_2,A_3 独立，且 $P(A_i)=p$. 又 $A=\bigcup_{i=1}^{3}A_i$，依假设

$$\frac{7}{8}=P(A)=1-P(\overline{A})=1-\prod_{i=1}^{3}P(\overline{A}_i)=1-(1-p)^3,$$

所以 $p=\frac{1}{2}$.

例 3.4 有 n 个罐子，每个都装有 s 个白球，t 个黑球. 先从第一个罐子中任取一球，放入第二个罐子中，然后再从第二个罐子中任取一球放入第三个罐子中，依此类推，求从最后一罐取出白球的概率.

解 记 $A=\{$从最后一罐取出白球$\}$，$A_r=\{$从第 r 个罐子取出白球$\}$，$r=1,2,\cdots,n$，显然 $A=A_n$ 且 $P(A_1)=\frac{s}{s+t}$，又

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{s}{s+t}\frac{s+1}{s+t+1}+\frac{t}{s+t}\frac{s}{s+t+1}=\frac{s}{s+t}.\end{aligned}$$

今设 $P(A_{r-1})=\frac{s}{s+t}$. 往证 $P(A_r)=\frac{s}{s+t}$. 注意到

$$\begin{aligned}P(A_r)&=P(A_{r-1})P(A_r\mid A_{r-1})+P(\overline{A}_{r-1})P(A_r\mid\overline{A}_{r-1})\\&=\frac{s}{s+t}\frac{s+1}{s+t+1}+\frac{t}{s+t}\frac{s}{s+t+1}=\frac{s}{s+t}.\end{aligned}$$

于是由数学归纳法，对任何整数 $1\leqslant r$ 都有 $P(A_r)=\frac{s}{s+t}$，特别地，$P(A_n)=\frac{s}{s+t}$ 成立.

例 3.5 有 3 只盒子，第一只盒中装有 4 个黑球，1 个红球，第二只盒中装有 5 个黑球，2 个红球，第三只盒中有 3 个黑球，4 个红球. 今随机取一只盒子，再从此盒中随机取一球，求：

(1) 此球为红球的概率；

(2) 已知取出的是黑球，此球是取自第二只盒的概率.

解 (1) 记 $A=\{$取出的为红球$\}$，$B_i=\{$此球来自于第 i 只盒$\}$，$i=1,2,3$，则 $A=\bigcup_{i=1}^{3}AB_i$，且

$$P(B_i)=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3,\quad P(A\mid B_1)=\frac{1}{5},\quad P(A\mid B_2)=\frac{2}{7},\quad P(A\mid B_3)=\frac{4}{7},$$

因此 $P(A)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right)=\frac{37}{105}$.

(2) 记 $B=\{$取出的为黑球$\}$，则 $P(B)=1-P(A)=\frac{68}{105}$，且由贝叶斯公式

$$P(B_2 \mid B)=\frac{P(B_2)P(B \mid B_2)}{P(B)},$$

已知 $P(B \mid B_2)=\frac{5}{7}$，因而 $P(B_2 \mid B)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}\Big/\frac{68}{105}=\frac{25}{68}$.

六、习题解答

1. 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B \mid A)=0.8$，试求 $P(AB)$ 及 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 $P(AB)=P(A)P(B \mid A)=0.5\times0.8=0.4$，

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=1-0.5-0.6+0.4=0.3.$$

2. 一批零件共 100 个，次品率为 10%，每次从中任取一个零件，取出的零件不再放回去，求第三次才取得正品的概率.

解 $p=\frac{10\times9\times90}{100\times99\times98}=\frac{81}{99\times98}=\frac{9}{1078}$.

3. 某人有一笔资金，他投入基金的概率为 0.58，购买股票的概率为 0.28，两项投资都做的概率为 0.19.

（1）已知他已投入基金，再购买股票的概率是多少？

（2）已知他已购买股票，再投入基金的概率是多少？

解 记 $A=\{$投入基金$\}$，$B=\{$购买股票$\}$，则

$$P(A)=0.58,\ P(B)=0.28,\ P(AB)=0.19.$$

（1）$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.19}{0.58}=0.328$.

（2）$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.19}{0.28}=0.679$.

4. 罐中有 m 个白球，n 个黑球，从中随机抽取一个. 若不是白球则放回罐中，再随机抽取下一个；若是白球，则不放回，直接进行第二次抽取. 求第二次取得黑球的概率.

解 记 $A=\{$第二次取得黑球$\}$，$B=\{$第一次取得白球$\}$，则 $A=AB\cup A\overline{B}$.

已知 $P(B)=\frac{m}{m+n}$，且依题意有 $P(A \mid B)=\frac{n}{m+n-1}$，$P(A \mid \overline{B})=\frac{n}{m+n}$，因而由全概率公式可得

$$P(A)=P(B)P(A \mid B)+P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})=\frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}+\frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

5. 一个食品处理机制造商分析了很多消费者的投诉，发现他们属于以下列出的 6 种类型：

	投诉原因		
	擦伤	凹痕	外观
保质期内	18%	13%	32%
保质期后	12%	22%	3%

如果收到一个消费者的投诉，已知投诉发生在保质期内，求投诉的原因是产品外观的概率.

解 记 $A_1=\{$擦伤$\}$，$A_2=\{$凹痕$\}$，$A_3=\{$外观$\}$，$B=\{$保质期内$\}$，则 $P(A_1B)=0.18$，$P(A_2B)=0.13$，$P(A_3B)=0.32$. 因 $B=A_1B\cup A_2B\cup A_3B$，所以

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=0.63,$$

于是所求概率为

$$P(A_3 \mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{0.32}{0.63}=0.5079.$$

6. 给定 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.15$，验证下面四个等式：

$$P(A \mid B)=P(A),\quad P(A \mid \overline{B})=P(A),\quad P(B \mid A)=P(B),\quad P(B \mid \overline{A})=P(B).$$

证 $P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.15}{0.3}=0.5=P(A)$，

$$P(A \mid \overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{0.5-0.15}{0.7}=\frac{0.35}{0.7}=0.5=P(A),$$

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.5}=0.3=P(B),$$

$$P(B \mid \overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{0.3-0.15}{0.5}=\frac{0.15}{0.5}=P(B).$$

7. 已知甲袋中有 6 只红球，4 只白球；乙袋中有 8 只红球，6 只白球. 求下列事件的概率：

（1）随机地取一只袋，再从该袋中随机地取一只球，该球是红球；

（2）合并两只口袋，从中随机地取一只球，该球是红球.

解 （1）记 $B=\{$该球是红球$\}$，$A_1=\{$取自甲袋$\}$，$A_2=\{$取自乙袋$\}$，已知 $P(B \mid A_1)=\frac{6}{10}$，$P(B \mid A_2)=\frac{8}{14}$，所以

$$P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{14}=\frac{41}{70}.$$

(2) $P(B)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$.

8. 设某一工厂有 A,B,C 三间车间,它们生产同一种螺钉,每个车间的产量分别占该厂生产螺钉总产量的 25%,35%,40%,每个车间成品中次货的螺钉占该车间出产量的百分比分别为 5%,4%,2%. 如果从全厂总产品中抽取一件产品,

(1) 求抽到的产品是次品的概率;

(2) 已知得到的是次品,求它依次是车间 A,B,C 生产的概率.

解 为方便计,记事件 A,B,C 为 A,B,C 车间生产的产品,事件 $D=\{$次品$\}$.

$$(1)\ P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)$$
$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02$$
$$=0.0125+0.014+0.008=0.0345.$$

$$(2)\ P(A\mid D)=\frac{P(A)P(D\mid A)}{P(D)}=\frac{0.25\times0.05}{0.0345}=0.362,$$

$$P(B\mid D)=\frac{P(B)P(D\mid B)}{P(D)}=\frac{0.35\times0.04}{0.0345}=0.406,$$

$$P(C\mid D)=\frac{P(C)P(D\mid C)}{P(D)}=\frac{0.4\times0.02}{0.0345}=0.232.$$

9. 某次大型体育运动会有1000名运动员参加,其中有100人服用了违禁药品. 在使用者中,假定有90人的药物检查呈阳性,而在未使用者中也有5人检验结果显示阳性. 如果一个运动员的药物检查结果是阳性,求这名运动员确实使用违禁药品的概率.

解 记 $A=\{$服用违禁药品$\}$,$B=\{$药检是阳性$\}$. 按题设,已知

$$P(A)=\frac{100}{1000}=0.1,\quad P(B\mid A)=0.9,\quad P(B\mid\bar A)=\frac{5}{900},$$

使用全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar A)P(B\mid\bar A)$$
$$=0.1\times0.9+0.9\times\frac{5}{900}=0.09+0.1\times0.05=0.095,$$

于是由贝叶斯公式,可得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.09}{0.095}=0.9474.$$

10. 发报台分别以概率0.6和0.4发出信号"*"和"-",由于通信系统受到干扰,当发出信号"*"时,收报台未必收到信号"*",而是分别以概率0.8和0.2收到信号"*"和"-";同样,当发出信号"-"时,收报台分别以概率0.9和0.1收到信号"-"和"*". 求

(1) 收报台收到信号"*"的概率;

(2) 当收报台收到信号"*"时,发报台确是发出信号"*"的概率.

解 记 $B=\{$收到信号"*"$\}$,$A=\{$发出信号"*"$\}$.

$$(1)\ P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar A)P(B\mid\bar A)$$
$$=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.48+0.04=0.52.$$

$$(2)\ P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.6\times0.8}{0.52}=\frac{12}{13}.$$

***11.** 甲袋中有4个白球、6个黑球,乙袋中有4个白球、2个黑球,先从甲袋中任取2球投入乙袋,然后再从乙袋中任取2球,求从乙袋中取到的2个都是黑球的概率.

解 记 $A_i=\{$从甲袋中取到 i 个黑球$\}$,$i=0,1,2$,$B=\{$从乙袋中取到的2个都是黑球$\}$. 则 $B=\bigcup_{i=0}^{2}A_iB$,且已知

$$P(A_0)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{15},\quad P(A_1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{8}{15},\quad P(A_2)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$P(B\mid A_0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{1}{28},\quad P(B\mid A_1)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28},\quad P(B\mid A_2)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{14},$$

所以

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{2}{15}\times\frac{1}{28}+\frac{8}{15}\times\frac{3}{28}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{14}=\frac{2}{15}.$$

12. 设事件 A,B 相互独立. 证明:$A,\bar B$ 相互独立,$\bar A,\bar B$ 相互独立.

证 因为

$$P(A\bar B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\bar B),$$

所以 $A,\bar B$ 独立.

又把 A,B 分别看成 $\bar B,A$,利用上述结论立得 $\bar B,\bar A$ 独立,即 $\bar A,\bar B$ 独立.

13. 设事件 A 与 B 相互独立,且 $P(A)=p$, $P(B)=q$. 求下列事件的概率:

$$P(A\cup B),P(A\cup\bar B),P(\bar A\cup\bar B).$$

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+q-pq$,

$P(A\cup\bar B)=P(A)+P(\bar B)-P(A)P(\bar B)=p+1-q-p(1-q)$

$$= 1 - q + pq,$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(A)P(B) = 1 - pq.$$

14. 已知事件 A 与 B 相互独立，且 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$，$P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$，求 $P(A)$，$P(B)$.

解 因 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$，由独立性有

$$P(A)P(\bar{B}) = P(\bar{A})P(B),$$

从而

$$P(A) - P(A)P(B) = P(B) - P(A)P(B),$$

因此 $P(A) = P(B)$.

再由 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$，有

$$\frac{1}{9} = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = [1 - P(A)]^2,$$

所以 $1 - P(A) = \frac{1}{3}$. 最后得到 $P(B) = P(A) = \frac{2}{3}$.

15. 三个人独立破译一密码，他们能独立译出的概率分别为 0.25，0.35，0.4. 求此密码被译出的概率.

解 记 $A = \{$译出密码$\}$，$A_i = \{$第 i 人译出$\}$，$i = 1,2,3$. 则

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - 0.75 \times 0.65 \times 0.6 = 1 - 0.2925 = 0.7075.$$

16. 设六个相同的元件，如图 3.1 所示那样安置在线路中，设每个元件不通达的概率为 p，求这个装置通达的概率. 假定各个元件通达、不通达是相互独立的.

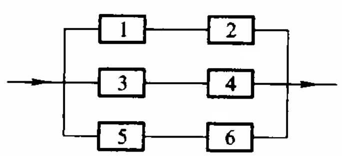


图 3.1

解 记 $A = \{$通达$\}$，$A_i = \{$元件 i 通达$\}$，$i = 1,2,3,4,5,6$，则 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4 \cup A_5A_6$，所以

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) + P(A_5A_6) - P(A_1A_2A_3A_4) - P(A_3A_4A_5A_6)$$
$$- P(A_1A_2A_5A_6) + P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$$
$$= 3(1-p)^2 - 3(1-p)^4 + (1-p)^6.$$

***17.** （配对问题）房间中有 n 个编号为 $1 \sim n$ 的座位，今有 n 个人（每人持有一张编号为 $1 \sim n$ 的票）随机入座，求至少有一人持有的票的编号与座位号一致的概率.（提示：使用概率的性质 5 的推广，即对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).)$$

解 记 $A = \{$至少有一人持有的票号与座位号一致$\}$，$A_i = \{$第 i 人持有的票号与座位号一致$\}$，$i = 1,2,\cdots,n$，则 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，且

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

一般地，对任何 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ 以及 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}.$$

使用推广的概率加法公式，有

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$= 1 - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}.$$

***18.** （波利亚（Pólya）罐子模型）罐中有 a 个白球，b 个黑球，每次从罐中随机抽取一球，观察其颜色后，连同附加的 c 个同色球一起放回罐中，再进行下一次抽取，试用数学归纳法证明：第 k 次取得白球的概率为 $\frac{a}{a+b}$（$k \geqslant 1$ 为整数）.（提示：记 $A_k = \{$第 k 次取得白球$\}$，使用全概率公式 $P(A_k) = P(A_1)P(A_k \mid A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_k \mid \bar{A}_1)$ 及归纳假设.）

证 记 $A_k = \{$第 k 次取得白球$\}$，$k \geqslant 1$，则显然有 $P(A_1) = \frac{a}{a+b}$，今设命题对 $1 \leqslant i \leqslant k-1$ 成立，即对 $1 \leqslant i \leqslant k-1$ 有 $P(A_i) = \frac{a}{a+b}$，往证对 $i = k$ 命题成立. 由全概率公式：$P(A_k) = P(A_1)P(A_k \mid A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_k \mid \bar{A}_1)$，又在 A_1 已经发

生的条件下,事件 A_k 发生等价于罐中有 $a+c$ 个白球和 b 个黑球,按题设的抽取规则抽取,第 $k-1$ 次抽得白球,因而由归纳假设 $P(A_k \mid A_1)=\frac{a+c}{(a+c)+b}$,同理

$P(A_k \mid \overline{A}_1)=\frac{a}{a+(b+c)}$,于是

$$P(A_k)=\frac{a}{a+b}\frac{a+c}{(a+c)+b}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b+c}=\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+b+c)}$$
$$=\frac{a}{a+b}.$$

因此命题对 $i=k$ 成立,由数学归纳法即知道对任何整数 $k\geqslant 1, P(A_k)=\frac{a}{a+b}$ 成立.

19. 甲乙两人各自独立地投掷一枚均匀硬币 n 次,试求:两人掷出的正面次数相等的概率.

解 记事件 $A=\{$两人掷出的正面数相等$\}$, $A_i=\{$两人各掷出 i 次正面数$\}$, $i=0,1,\cdots,n$,于是 $A=\bigcup\limits_{i=0}^{n}A_i$,且诸$\{A_i\}$ 互斥. 为求 $P(A_i)$,注意到每个人每次投掷有 2 个等可能结果. 因此样本点总数为 2^{2n}. 为确定事件 A_i 的样本点,只需确定每个人的 n 次投掷中 i 次正面所出现的次序,因而有利于 A_i 的样本点数为 $\binom{n}{i}\binom{n}{i}$,故而 $P(A_i)=\frac{\binom{n}{i}^2}{2^{2n}}$. 由概率的可加性,即知 $P(A)=\sum\limits_{i=0}^{n}P(A_i)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}^2}{2^{2n}}$. 顺便指出上述结果可以简化如下:

$$P(A)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}^2}{2^{2n}}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}}{2^{2n}}=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

20. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2,机器发生故障时全天停止工作,若一周五个工作日里每天是否发生故障相互独立,试求一周五个工作日里发生 3 次故障的概率.

解 $p=\binom{5}{3}0.2^3\,0.8^2=0.0512.$

21. 灯泡耐用时间在 1000 h 以上的概率为 0.2,求三个灯泡在使用 1000 h 以后最多只有一个坏了的概率.

解 $p=\binom{3}{3}0.2^3+\binom{3}{2}\times 0.8\times 0.2^2=0.008+0.096=0.104.$

22. 某宾馆大楼有 4 部电梯,通过调查,知道在某时刻 T,各电梯正在运行的概率均为 0.75,求:

(1) 在此时刻所有电梯都在运行的概率;

(2) 在此时刻恰好有一半电梯在运行的概率;

(3) 在此时刻至少有 1 台电梯在运行的概率.

解 (1) $0.75^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}.$

(2) $\binom{4}{2}0.75^2\,0.25^2=6\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}.$

(3) $1-(1-0.75)^4=1-0.25^4=\frac{255}{256}.$

23. 设在三次独立试验中,事件 A 在每次试验中出现的概率相同,若已知 A 至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$,求事件 A 在每次试验中出现的概率 $P(A)$.

解 记 $A_i=\{A$ 在第 i 次试验中出现$\}$, $i=1,2,3$. $p=P(A)$,依假设

$$\frac{19}{27}=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right)=1-P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)=1-(1-p)^3.$$

所以$(1-p)^3=\frac{8}{27}$,此即 $p=\frac{1}{3}$.

***24.** 设双胞胎中为两个男孩或两个女孩的概率分别为 a 及 b,今已知双胞胎中一个是男孩,求另一个也是男孩的概率.

解 记事件 $A=\{$一个是男孩$\}$, $B=\{$另一个是男孩$\}$. 由于双胞胎只有三种情况:两男、两女及一男一女,依假设可知 $P(\{$一男一女$\})=1-a-b$,而 $A=\{$两男$\}\cup\{$一男一女$\}$,因此

$$P(A)=P(\{两男\})+P(\{一男一女\})=a+(1-a-b)=1-b,$$

最后得到

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a}{1-b}.$$

25. 两射手轮流打靶,谁先进行第一次射击是等可能的. 假设他们第一次的命中率分别为 0.4 及 0.5,而以后每次射击的命中率相应递增 0.05,如在第 3 次射击首次中靶,求是第一名射手首先进行第一次射击的概率.

解 记事件 $A=\{$第一名射手第一次射击$\}$, $\overline{A}=\{$第二名射手第一次射击$\}$, $B=\{$第 3 次射击首次命中$\}$,则

$$P(B\mid A)=0.6\times 0.5\times 0.45,\quad P(B\mid \overline{A})=0.5\times 0.6\times 0.55,$$

而且

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$
$$=\frac{1}{2}(0.6\times0.5\times0.45+0.5\times0.6\times0.55)=0.15,$$

因而

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times0.6\times0.5\times0.45}{0.15}=0.45.$$

26. 袋中有 $2n-1$ 个白球和 $2n$ 个黑球，今随机（不放回）抽取 n 个，发现它们是同色的，求同为黑色的概率.

解 记事件 $A=\{同色\}$，$B=\{同为黑色\}$，则

$$P(A)=P(\{同为黑色\})+P(\{同为白色\})=\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{4n-1}{n}}+\frac{\binom{2n-1}{n}}{\binom{4n-1}{n}},$$

故而

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}+\binom{2n-1}{n}}=\frac{2}{3}.$$

***27.** 3 个外形相同但可辨别的球随机落入编号 1 ~ 4 的四个盒子.

(1) 求恰有两空盒的概率；

(2) 已知恰有两空盒，求有球的盒子的最小编号为 2 的概率.

解 设 $A=\{恰有两空盒\}$，$B=\{有球的盒子最小编号为2\}$.

(1) 由第二章例 5 知样本点总数为 4^3，为求事件 A 的有利样本点数，先确定两个空盒，共有 $\binom{4}{2}$ 种方法，然后剩下的两盒都不空，当且仅当其中一盒放 1 球，另一盒子放 2 球，一共有 $\binom{3}{1}\binom{2}{1}$ 种不同的方法，因而 A 的有利样本点数为 $\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}=\binom{4}{2}\times6$，于是 $P(A)=\binom{4}{2}\times6/4^3=\frac{9}{16}$.

(2) 注意到 $AB=\{第2,4盒都有球或第2,3盒都有球,其余盒子为空\}$，因此

$$P(AB)=\frac{1}{4^3}\times2\times\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}=\frac{3}{16},\quad P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/16}{9/16}=\frac{1}{3}.$$

练 习 3

3.1 盒中装有 m 只红色、n 只蓝色的玻璃球，从中不放回取 2 次，每次取 1 只，求：

(1) 已知第一次取到红球，第二次也取到红球的概率；

(2) 已知第一次取到蓝球，第二次取到红球的概率.

3.2 一箱乒乓球共有 6 只，其中新球有 3 只，第一次比赛时随机取出 3 只，用后放回，第二次比赛时又随机取出 2 只，求第二次比赛取出的 2 只球均为新球的概率.

3.3 有三台车床，加工零件之比为 2 : 2 : 1，第一台车床的次品率为 0.02，第二台为 0.03，第三台为 0.05，三台车床加工好的零件混合在一起，从中随机抽取 1 只，求：

(1) 所取零件为次品的概率；

(2) 已知取出的是次品，求它是第三台车床加工的概率.

3.4 设在独立重复试验中，每次成功的概率为 p，求：

(1) 首次成功出现在第 $m+1$ 次试验的概率；

(2) 第 n 次成功之前恰有 m 次失败的概率.

3.5 某品种苹果成箱出售，设每箱装 30 只，其广告称每只苹果均在 250 g 以上，而实际上每箱在 250 g 以下的苹果个数为 0,1,2 的概率分别为 0.85,0.10,0.05. 今从中随机取一箱，并从中随机取 4 只，发现都在 250 g 以上，求该箱苹果确如广告所言的概率.

*3.6 轰炸机要炸中目标，必须驾驶员使飞机到达目标区域，投弹员投中目标. 设有驾驶员甲、乙到达目标的概率各为 0.9 和 0.8，又投弹员丙、丁在飞机到达目标的条件下投中目标的概率为 0.7 及 0.6. 今有两架飞机，问将甲、乙、丙、丁如何两两搭配使得完成任务（即有一架炸中目标）有较大的概率.

3.7 袋中装有 3 枚 1 元、7 枚 5 角的硬币，今从中随机不放回抽取 2 次，每次取出一枚硬币，已知第二次取到的为 1 元硬币，求第一次取到的也是 1 元硬币的概率.

3.8 有三门高射炮同时独立地对敌机进行射击，每门炮的命中率为 0.4，敌机被一门炮命中而被击落的概率为 0.2，被两门炮命中而击落的概率为 0.6，若三门炮同时命中，敌机必定被击落. 求：

(1) 敌机被击落的概率；

(2) 已知敌机被击落，是被几门炮同时命中的可能性最大？

答案与提示

3.1 (1) $\frac{m-1}{m+n-1}$；(2) $\frac{m}{m+n-1}$.

3.2 $\frac{1}{25}$.

3.3 (1) 0.03； (2) $\frac{1}{3}$.

3.4 (1) $(1-p)^m p$； (2) $\binom{n+m-1}{m}(1-p)^m p^n$.

3.5　0.884.

3.6　甲丙和乙丁搭配的概率(0.8076)高于甲丁和乙丙搭配的概率(0.7976).

3.7　$\frac{2}{9}$.

3.8　(1) 0.3232;(2) 两门炮,其概率为0.5347.

第四章　随机变量及其分布

一、基本要求

1. 理解随机变量的概念,了解分布函数的概念和性质,会计算与随机变量相联系的事件的概率.

2. 理解离散型随机变量及其分布律的概念,掌握0－1分布、几何分布、二项分布和泊松(Poisson)分布.

3. 理解连续型随机变量及其密度函数的概念,掌握正态分布,了解均匀分布和指数分布.

二、内容提要

1. 随机变量的概念

在随机试验中,如果存在一个变量,它以试验结果的改变而取不同的实数值,那么称这个变量为一维随机变量.

概率论主要研究随机变量取值的概率规律,即随机变量的分布.

2. 随机变量的分布函数

随机变量的分布可以用分布函数来表示,分布函数的定义为:

给定随机变量 X,称函数

$$F(x)=P(X\leqslant x),\quad -\infty<x<+\infty$$

为随机变量 X 的分布函数.

分布函数有如下性质:

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$;

(2) $F(x)$ 单调不减,即当 $x_1<x_2$ 时,$F(x_1)\leqslant F(x_2)$;

(3) $F(x)$ 是一个右连续函数,即 $\lim\limits_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0)$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

由已知的分布函数可以算得概率

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1).$$

3. 一维离散型随机变量及其分布律

如果随机变量 X 仅可能取有限个或可列无限个值，那么称 X 为离散型随机变量. 离散型随机变量的分布律可以用下述表格形式表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
概率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

其中 $p_i = P(X = x_i)$ 且满足(1) $0 \leqslant p_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots$；(2) $\sum\limits_i p_i = 1$.

由已知的分布律可以算得概率

$$P(X \in I) = \sum_{i:x_i \in I} p_i,$$

其中 I 是实数轴上的一个集合.

下面给出几个常用的离散型随机变量.

(1) 0 - 1 分布，它的分布律为

X	0	1
概率	$1 - p$	p

其中 $0 < p < 1$.

(2) 几何分布，它的分布律为

$$P(X = n) = q^{n-1}p, \quad n = 1,2,\cdots, \quad q = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

(3) 二项分布 $B(n,p)$，它的分布律为

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n, \quad 其中\ 0 < p < 1.$$

当 $n = 1$ 时，二项分布即为 0 - 1 分布，因此 0 - 1 分布是二项分布的一种特殊情形.

(4) 泊松分布 $P(\lambda)$，它的分布律为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,\cdots, \quad 其中\ \lambda > 0.$$

(5) 超几何分布，它的分布律为

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0,1,\cdots,n(m < N).$$

4. 一维连续型随机变量及其密度函数

如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可以表示成

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad -\infty < x < +\infty,$$

那么称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，它满足

(1) $f(x) \geqslant 0, \ -\infty < x < +\infty$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

密度函数 $f(x)$ 刻画了连续型随机变量的分布，因为由已知的密度函数可以求得概率

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

连续型随机变量具有下列性质：

(1) 分布函数 $F(x)$ 是连续函数；

(2) 对任意一个常数 c，$P(X = c) = 0$；

(3) 在 $f(x)$ 的连续点处，$F'(x) = f(x)$.

下面给出一些常用的连续型随机变量.

(1) 均匀分布 $R(a,b)$，它的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & a < x < b, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中 $-\infty < a < b < +\infty$.

(2) 指数分布 $E(\lambda)$，它的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$.

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，它的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 > 0$. 当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时，称 $N(0,1)$ 为标准正态分布，其分布函数记作 $\Phi(x)$. 当 $x \geqslant 0$ 时，$\Phi(x)$ 的函数值可从正态分布表查得，当 $x < 0$ 时，可用公式 $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ 求得 $\Phi(x)$ 的函数值.

当 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi\left(\dfrac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - \mu}{\sigma}\right)$.

三、学习要点

本章的重点是理解随机变量的概念，理解随机变量与随机事件的区别与联系；理解离散型随机变量及其分布律，在离散型随机变量中着重掌握二项分布及其概率计算，能够将实际问题归结为二项概型，然后用二项概率计算有关事件的概率；理解连续型随机变量及其密度函数的概念，能利用密度函数计算连续型随

机变量落在某些范围内的概率,着重掌握正态分布的性质及概率计算.

四、释疑解难

问 4.1 引入随机变量有何意义?

答 随机变量的引入是概率论发展走向成熟的一个标志,它弥补了随机试验下的随机事件种类繁多,不易一一总结它们发生的可能性大小的规律的缺陷.因为如果知道随机变量的分布,随机试验下任一随机事件的概率也随之可以得到;再者引入随机变量后,可以使用数学中的微积分工具讨论随机变量的分布.

问 4.2 随机变量的分布函数、分布律、密度函数有何联系与区别?

答 随机变量的分布函数刻画了随机变量的取值规律,不管是连续型还是离散型,或既不是连续型又不是离散型的随机变量都可用分布函数来描述其取值规律,而分布律只能描述离散型随机变量的取值规律,密度函数只能描述连续型随机变量的取值规律.

它们的联系在于对离散型随机变量 X,当知道了 X 的分布律时,可通过求概率 $P(X\leqslant x)$(x 取任意的值)求得 X 的分布函数 $F(x)$;反之也一样. 对连续型随机变量 X,当知道了 X 的密度函数 $f(x)$ 时,可通过积分 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\ (-\infty<x<+\infty)$ 求得分布函数 $F(x)$;反之,当知道了分布函数 $F(x)$,可通过对 $F(x)$ 求导,即 $F'(x)=f(x)$(对 $f(x)$ 的一切连续点处)求得密度函数 $f(x)$.

问 4.3 二项分布的背景是什么?

答 做 n 次重复独立的试验,在每次试验中事件 A 发生的概率为 p,如果记随机变量 X 为 n 次试验中事件 A 发生的次数,则称随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$. 在实际生活中有很多问题都可归结为二项分布. 例如有一张试卷印有十道题目,每个题目都为四个选项的选择题,四个选项中只有一项是正确的. 某位学生在做每道题时都是随机地选择,X 表示该学生十道题中答对的题数,则 X 服从 $n=10,p=\frac{1}{4}$(每道题答对的概率)的二项分布. 概率 $P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0.056$ 为该学生得零分的概率.

问 4.4 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

所求的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{4}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

问这样的求法正确吗? 错在哪里?

答 这样的求法不正确,首先该弄清楚分布函数的定义,即 $F(x)=P(X\leqslant x)$,$F(x)$ 表示事件$\{X\leqslant x\}$的概率. 因此当 $0\leqslant x<1$ 时,概率

$$P(X\leqslant x)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$$

当 $x\geqslant 1$ 时,事件$\{X\leqslant x\}$为必然事件,因此 $P(X\leqslant x)=1$,它也可用

$$P(X\leqslant x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

求得. 综合后正确的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{3}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

问 4.5 正态分布有哪些特点? 什么是"3σ"原则?

答 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,即密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$f(x)$ 的图像见图 4.1,从 $f(x)$ 的图中可看到 $f(x)$ 关于 μ 对称. 当 $x=\mu$ 时,$f(x)$ 取最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$,而这个值随 σ 增大而减小. 事实上在数字特征这一章中可知 μ 为 X 的均值,σ 为 X 的标准差,因此正态分布描述这样一种随机变量,它取的值关于 μ 对称,且取在均值 μ 附近范围的可能性较大,取在远离 μ 的范围内的可能性较小. 服从正态分布的随机变量的取值可能性大小直观上可用"两头小,中间大"来形容. 自然界中很多随机现象都有这一特点,因此正态分布在概率论中占有很重要的地位.

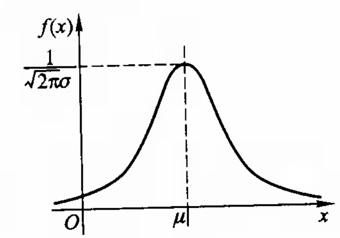


图 4.1

所谓"3σ"原则具体为

$$P(|X-\mu|\leqslant 3\sigma)=P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1$$

$$= 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974.$$

从以上计算中可看到服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X 取在 $\mu \pm 3\sigma$ 的范围内的概率几乎达到 1. 这就是“3σ”原则.

问 4.6 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x 2t\mathrm{d}t, & 0 \leqslant x < 1, \\ \int_0^x 0\mathrm{d}x & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

这样的计算是否正确? 并说明原因.

答 这样的计算是错误的, 这是因为 $f(x)$ 是一个分段函数, 分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ 中的被积函数的形式依赖于变上限 x. 具体表现为当 $x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0\mathrm{d}t = 0$; 当 $0 \leqslant x < 1$ 时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2;$$

当 $x \geqslant 1$ 时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^0 0\mathrm{d}t + \int_0^1 2t\mathrm{d}t + \int_1^x 0\mathrm{d}t = 1.$$

综合有

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

五、例题分析及增补

例 8 设某保险公司的某人寿保险险种有 1000 人投保, 每个人在一年内死亡的概率为 0.005, 且每个人在一年内是否死亡是相互独立的, 试求在未来一年中这 1000 个投保人中死亡人数不超过 10 人的概率.

析 本问题可归结为二项概型, 但由于 $n = 1000$ 较大, $p = 0.005$ 较小, 在计算概率

$$P(X = k) = \binom{1000}{k} 0.005^k\, 0.995^{1000-k}$$

时, 相当麻烦, 解决办法是作近似计算. 并由下面的理论作保证:

设 $X \sim B(n,p)$, 当 n 很大, p 很小时, X 近似服从 $\lambda = np$ 的泊松分布, 即 $X \sim P(np)$, 具体为 $P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, k = 0,1,\cdots$.

利用上面的性质, 该题 1000 人中的死亡人数 $X \sim P(5)$, 即得概率 $P(X = k) \approx \frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}$. 易见此时的计算量要小得多.

例 18 设随机变量 Y 服从 $N(1.5,4)$, 计算

(1) $P(Y \leqslant 3.5)$; (2) $P(Y \leqslant -4)$; (3) $P(Y > 2)$; (4) $P(|Y| < 3)$.

析 这是一个求解正态分布随机变量 Y 取某些范围内的概率问题, 按一般连续型随机变量的性质有

$$P(Y \leqslant 3.5) = \int_{-\infty}^{3.5} f(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{3.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-1.5)^2}{8}}\mathrm{d}y,$$

但发现被积函数无法直接积出, 解决该问题的方法是利用附于书末的标准正态分布函数值表. 若记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 此时概率

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

可通过查书末附表得到. 此外, 借助于标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 可求得非标准正态分布 $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的概率

$$P(x_1 \leqslant Y \leqslant x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

通过该公式可完成该题的求解任务, 但特别要注意的是在计算 $P(|Y| < 3)$ 时很容易犯如下错误:

$$P(|Y| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3 - 1.5}{2}\right) - 1 = 2\Phi(0.75) - 1.$$

正确的解法为

$$P(|Y|<3)=P(-3<Y<3)=\Phi\left(\frac{3-1.5}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-3-1.5}{2}\right)$$
$$=\Phi(0.75)-\Phi(-2.25)=\Phi(0.75)-1+\Phi(2.25).$$

例 4.1 已知甲、乙两箱装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有3件合格品.从甲箱中任取3件产品放入乙箱后,求乙箱中次品件数的分布律.

解 从甲箱中取3件产品,这取出的3件产品中可能的次品数为0,1,2,3中的一个,这3件产品放入乙箱后,乙箱中可能的次品数X也为0,1,2,3中的一个,由古典概率可求得

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20},\quad P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{9}{20},\quad P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20},$$

即 X 的分布律为

X	0	1	2	3
概率	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

例 4.2 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & 若\ x<0,\\ A\sin x, & 若\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & 若\ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

试求:

(1) 常数 A;

(2) $P\left(|X|<\frac{\pi}{6}\right)$;

(3) X 的密度函数 $f(x)$.

解 (1) 首先注意这里给出的是分布函数 $F(x)$,因此决定A取何值要从分布函数 $F(x)$ 的性质着手,不要与密度函数 $f(x)$ 的性质混淆.分布函数 $F(x)$ 的

性质之一为 $F(x)$ 必须是右连续函数,利用此点有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$,依题意有 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\sin\frac{\pi}{2}=A$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}F(x)=1$,因此可得 $A=1$.然后还需考虑当 $A=1$ 时,$F(x)$ 另外三条性质是否满足,易见 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$, $F(x)$ 单调不减$(x\in(-\infty,+\infty))$.因此当 $A=1$ 时,$F(x)$ 确为 X 的分布函数.

(2) $$P\left(|X|<\frac{\pi}{6}\right)=P\left(-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}-0=\frac{1}{2},$$

注意 $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)\neq\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

(3) $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 4.3 某工厂有 600 台车床,已知每台车床发生故障的概率为 0.005.

(1) 如果该厂安排 4 名维修工人,求车床发生故障后都能得到及时维修的概率(假定每一台车床只需一名维修工人);

(2) 该厂至少应配备多少名维修工人,才能使车床发生故障后都能得到及时维修的概率不小于 0.96?

解 设 X 表示 600 台车床中发生故障的台数,则 $X\sim B(600,0.005)$.由于 $n=600$ 较大,$p=0.005$ 较小,因此,X 可以近似认为服从参数为3的泊松分布,即 $X\stackrel{\cdot}{\sim}P(3)$.

(1) 如果只安排4名维修工人,则对车床发生故障数不超过4台的情况能及时维修,因此,所求概率为 $P(X\leqslant 4)\approx\sum\limits_{x=0}^{4}\frac{3^x}{x!}e^{-3}=0.815$.

(2) 设至少需配备 n 名工人,则 n 需满足 $P(X\leqslant n-1)<0.96$,$P(X\leqslant n)\geqslant 0.96$,即

$$\begin{cases}P(X\leqslant n-1)\approx\sum\limits_{x=0}^{n-1}\frac{3^x}{x!}e^{-3}<0.96,\\ P(X\leqslant n)\approx\sum\limits_{x=0}^{n}\frac{3^x}{x!}e^{-3}\geqslant 0.96.\end{cases}$$

查泊松分布表得 $n\geqslant 6$,即至少应配备 6 名工人,才能使车床发生故障后能得到及时维修的概率不小于 0.96.

例 4.4 某人从家到工厂去上班,路上所需时间 X(单位:min) 的密度函数

为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-50)^2}{32}}, & x>50,\\ 0, & x\leqslant 50.\end{cases}$$

他每天早晨八点上班，七点离家，求此人每天迟到的概率.

解 依题意此人路上所花时间超过 60 min 就迟到了，因此所求概率为

$$P(X>60)=\int_{60}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{60}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-50)^2}{32}}\mathrm{d}x.$$

对积分变量 x 作变换，令$\dfrac{x-50}{4}=t$，则

$$P(X>60)=\int_{2.5}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=2[1-\Phi(2.5)]=0.0124.$$

注意：本题中的随机变量 X 并非服从正态分布，但在计算过程中借助了标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$，否则，直接积分无法算出结果. 请读者仔细体会这一点.

六、习题解答

1. 下列给出的数列，哪些可作为随机变量的分布律，并说明理由.

(1) $p_i=\dfrac{i}{15}, i=0,1,2,3,4,5$；

(2) $p_i=\dfrac{5-i^2}{6}, i=0,1,2,3$；

(3) $p_i=\dfrac{i+1}{25}, i=1,2,3,4,5$.

解 要说明题中给出的数列，是否是随机变量的分布律，只要验证 p_i 是否满足下列两个条件：其一条件为 $p_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$，其二条件为 $\sum\limits_i p_i=1$.

依据上面的说明可得(1)中的数列为随机变量的分布律. (2)中的数列不是随机变量的分布律，因为 $p_3=\dfrac{5-9}{6}=-\dfrac{4}{6}<0$. (3)中的数列不是随机变量的分布律，这是因为 $\sum\limits_{i=1}^{5}p_i=\dfrac{20}{25}\neq 1$.

2. 试确定常数 C，使 $P(X=i)=\dfrac{C}{2^i}(i=0,1,2,3,4)$ 成为某个随机变量 X 的分布律，并求：

(1) $P(X>2)$；

(2) $P\left(\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right)$；

(3) $F(3)$（其中 $F(\cdot)$ 为 X 的分布函数）.

解 要使$\dfrac{C}{2^i}$成为某个随机变量的分布律，必须有 $\sum\limits_{i=0}^{4}\dfrac{C}{2^i}=1$，由此解得 $C=\dfrac{16}{31}$.

(1) $P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=\dfrac{16}{31}\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{3}{31}$.

(2) $P\left(\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right)=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{16}{31}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{12}{31}$.

(3) $F(3)=P(X\leqslant 3)=1-P(X>3)=1-P(X=4)=1-\dfrac{16}{31}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{30}{31}$.

3. 一口袋中有 6 个球，在这 6 个球上分别标有 $-3,-3,1,1,1,2$ 这样的数字. 从这口袋中任取一球，设各个球被取到的可能性相同，求取得的球上标明的数字 X 的分布律与分布函数.

解 X 可能取的值为 $-3,1,2$，且 $P(X=-3)=\dfrac{1}{3}$，$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2)=\dfrac{1}{6}$，即 X 的分布律为

X	-3	1	2
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

X 的分布函数

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{1}{3}, & -3\leqslant x<1,\\ \dfrac{5}{6}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

4. 一袋中有 5 个乒乓球，编号分别为 1,2,3,4,5，从中随机地取 3 个，以 X 表示取出的 3 个球中最大号码，写出 X 的分布律和分布函数.

解 依题意 X 可能取到的值为 3,4,5，事件$\{X=3\}$表示随机取出的 3 个球的最大号码为 3，则另两个球的号码只能为 1 号，2 号，即 $P(X=3)=\dfrac{1}{\binom{5}{3}}=\dfrac{1}{10}$；事

件$\{X=4\}$表示随机取出的3个球的最大号码为4,因此另外两个球可在1,2,3号球中任选,此时$P(X=4)=\dfrac{1\times\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\dfrac{3}{10}$;同理可得$P(X=5)=\dfrac{1\times\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}=\dfrac{6}{10}$.

X的分布律为

X	3	4	5
概率	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ \dfrac{1}{10}, & 3\leqslant x<4,\\ \dfrac{4}{10}, & 4\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$$

5. 在相同条件下独立地进行5次射击,每次射击时击中目标的概率为0.6,求击中目标的次数X的分布律.

解 依题意X服从参数$n=5,p=0.6$的二项分布,因此,其分布律

$$P(X=k)=\binom{5}{k}0.6^k0.4^{5-k},\quad k=0,1,\cdots,5,$$

具体计算后可得

X	0	1	2	3	4	5
概率	$\frac{32}{3125}$	$\frac{48}{625}$	$\frac{144}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{162}{625}$	$\frac{243}{3125}$

6. 从一批含有10件正品及3件次品的产品中一件一件地抽取产品.设每次抽取时,各件产品被抽到的可能性相等.在下列三种情形下,分别求出直到取得正品为止所需次数X的分布律:

(1) 每次取出的产品立即放回这批产品中再取下一件产品;

(2) 每次取出的产品都不放回这批产品中;

(3) 每次取出一件产品后总以一件正品放回这批产品中.

解 (1) 设事件$A_i,i=1,2,\cdots$表示第i次抽到的产品为正品,依题意,$A_1,\cdots,A_n,\cdots$相互独立,且$P(A_i)=\dfrac{10}{13},i=1,2,\cdots$,而

$$P(X=k)=P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\frac{10}{13},k=1,2,\cdots,$$

即X服从参数$p=\dfrac{10}{13}$的几何分布.

(2) 由于每次取出的产品不再放回,因此,X可能取到的值为1,2,3,4,

$$P(X=1)=\frac{10}{13},\quad P(X=2)=\frac{3\times10}{13\times12}=\frac{5}{26},$$

$$P(X=3)=\frac{3\times2\times10}{13\times12\times11}=\frac{5}{143},\quad P(X=4)=\frac{3\times2\times1\times10}{13\times12\times11\times10}=\frac{1}{286}.$$

X的分布律为

X	1	2	3	4
概率	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

(3) X可能取到的值为1,2,3,4,

$$P(X=1)=\frac{10}{13},\quad P(X=2)=\frac{3\times11}{13\times13}=\frac{33}{169},$$

$$P(X=3)=\frac{3\times2\times12}{13\times13\times13}=\frac{72}{2197},\quad P(X=4)=\frac{3\times2\times1}{13\times13\times13}=\frac{6}{2197}.$$

所求X的分布律为

X	1	2	3	4
概率	$\frac{10}{13}$	$\frac{33}{169}$	$\frac{72}{2197}$	$\frac{6}{2197}$

由于三种抽样方式不同,导致X的分布律也不一样,请仔细体会它们的不同处.

7. 设随机变量$X\sim B(6,p)$,已知$P(X=1)=P(X=5)$,求p与$P(X=2)$的值.

解 由于$X\sim B(6,p)$,因此

$$P(X=k)=\binom{6}{k}p^k(1-p)^{6-k},\quad k=0,1,\cdots,6.$$

由此可算得

$$P(X=1)=6p(1-p)^5,\quad P(X=5)=6p^5(1-p),$$

即$6p(1-p)^5=6p^5(1-p)$,解得$p=\dfrac{1}{2}$.此时,

$$P(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}=\frac{6\times5}{2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}.$$

8. 一张试卷印有十道题目,每个题目都为四个选项的选择题,四个选项中只有一项是正确的. 假设某位学生在做每道题时都是随机地选择,求该位学生未能答对一道题的概率以及答对9道以上(包括9道)题的概率.

解 记 $A=\{$未能答对一道题$\}$, $B=\{$答对9道以上$\}$.

解法一 每道题有4个选项,因此样本点总数为 4^{10},有利事件 A 的样本点数为 3^{10},因而 $P(A)=\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$. 又记 $B_1=\{$答对9题$\}$, $B_2=\{$答对10题$\}$,则 $B=B_1\cup B_2$,且 $P(B_1)=\frac{1}{4^{10}}\binom{10}{9}\times 3$, $P(B_2)=\frac{1}{4^{10}}$,所以

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{1}{4^{10}}\left(\binom{10}{9}\times 3+1\right)=\frac{31}{4^{10}}.$$

解法二 可看成 $n=10$,成功概率 $p=\frac{1}{4}$ 的伯努利试验. 因此

$$P(A)=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=\left(\frac{3}{4}\right)^{10},$$

$$P(B)=\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)+\binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{31}{4^{10}}.$$

9. 市120接听中心在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $0.5t$ 的泊松分布,而与时间间隔的起点无关(时间以小时计算),求:

(1) 某天中午12点至下午3点没有收到紧急呼救的概率.

(2) 某天中午12点至下午5点至少收到1次紧急呼救的概率.

解 记 $A=\{$中午12点到下午3点没有收到紧急呼救$\}$, $B=\{$中午12点到下午5点至少收到1次紧急呼救$\}$,则

(1) $P(A)=\frac{(0.5\times 3)^0}{0!}e^{-0.5\times 3}=e^{-1.5}$.

(2) $P(B)=1-\frac{(0.5\times 5)^0}{0!}e^{-0.5\times 5}=1-e^{-2.5}$.

10. 某商店出售某种物品,根据以往的经验,每月销售量 X 服从参数 $\lambda=4$ 的泊松分布,问在月初进货时,要进多少才能以99%的概率充分满足顾客的需要?

解 设至少要进 n 件物品,由题意 n 应满足

$$P(X\leqslant n-1)<0.99,\quad P(X\leqslant n)\geqslant 0.99,$$

即

$$P(X\leqslant n-1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4^k}{k!}e^{-4}<0.99,$$

$$P(X\leqslant n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}e^{-4}\geqslant 0.99.$$

查泊松分布表可求得 $n=9$.

11. 有一汽车站有大量汽车通过,每辆汽车在一天某段时间出事故的概率为0.0001,在某天该段时间内有1000辆汽车通过,求事故次数不少于2的概率.

解 设 X 为1000辆汽车中出事故的次数,依题意,X 服从 $n=1000$, $p=0.0001$ 的二项分布,即 $X\sim B(1000,0.0001)$. 由于 n 较大,p 较小,因此也可以近似地认为 X 服从 $\lambda=np=1000\times 0.0001=0.1$ 的泊松分布,即 $X\sim P(0.1)$,所求概率为

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 2)&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&\approx 1-\frac{0.1^0}{0!}e^{-0.1}-\frac{0.1^1}{1!}e^{-0.1}\\&=1-0.904837-0.090484=0.004679.\end{aligned}$$

12. 设鸡下蛋数 X 服从参数为 λ 的泊松分布,但由于鸡舍是封闭的,我们只能观察到从鸡舍输出的鸡蛋,记 Y 为观察到的鸡蛋数,即 Y 的分布与给定 $X>0$ 的条件下 X 的条件分布相同,今求 Y 的分布律.

(提示: $P(Y=k)=P(X=k\mid X>0)$,对于 $k=1,2,\cdots$.)

解 对于 $k=1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=P(X=k\mid X>0)=\frac{P(X=k)}{P(X>0)}\\&=\frac{P(X=k)}{1-P(X=0)}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\Big/(1-e^{-\lambda})\\&=\frac{\lambda^k}{k!\ (e^{\lambda}-1)}.\end{aligned}$$

13. 袋中有 n 把钥匙,其中只有一把能把门打开,每次抽取一把钥匙去试着开门. 试在(1)有放回抽取,(2)无放回抽取两种情况下,求首次打开门时试用钥匙次数的分布律.

解 记 $X=$试开次数.

(1) 在有放回情形下,为独立重复试验,因而

$$P(X=k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots.$$

(2) 在无放回情形下,

$$P(X=k)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots.$$

14. 袋中有 a 个白球、b 个黑球,有放回地随机抽取,每次取1个,直到取到白球停止抽取,X 为抽取次数,求 $P(X\geqslant n)$.

解 这是独立重复试验概型,每次抽到白球的概率 $p=\dfrac{a}{a+b}$.

解法一 因 $P(X=k)=\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{k-1}\dfrac{a}{a+b},k\geqslant 1$,所以

$$P(X\geqslant n)=\sum_{k=n}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1}\frac{a}{a+b}=\sum_{k'=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k'+n-1}\frac{a}{a+b}$$

$$=\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-1}\times\sum_{k'=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k'}\times\frac{a}{a+b}=\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-1}.$$

解法二 因为$\{X\geqslant n\}=\{$第 n 次抽取以前未抽到白球$\}$,所以

$$P(X\geqslant n)=\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-1}.$$

15. 据统计,某高校在2010年上海世博会上的学生志愿者有6000名,其中女生3500名.现从中随机抽取100名学生前往各世博地铁站作引导员,求这些学生中女生数 X 的分布律.

解 $$P(X=k)=\frac{\dbinom{3500}{k}\dbinom{2500}{100-k}}{\dbinom{6000}{100}},\quad k=0,1,2,\cdots,100.$$

16. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<A,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求:(1) 常数 A;(2) $P(0<X<0.5)$.

解 (1) 因为 $1=\int_0^A 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^A=A^2$,所以 $A=1$.

(2) $P(0<X<0.5)=\int_0^{0.5}2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^{0.5}=0.25$.

17. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty$,求:

(1) 系数 A;

(2) $P(0<X<1)$;

(3) X 的分布函数.

解 (1) 系数 A 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=1$,由于 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数,所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1,$$

解得 $A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $P(0<X<1)=\int_0^1\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$.

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t, & x<0,\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t, & x<0,\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-x}), & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & x\geqslant 0.\end{cases}$$

18. 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{c}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2c}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}\quad (c\ \text{为正的常数})$$

可作为某个随机变量 X 的密度函数.

证 由于 $f(x)\geqslant 0$,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x}{c}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2c}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2c}}\mathrm{d}\left(-\frac{x^2}{2c}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2c}}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

因此 $f(x)$ 满足密度函数的两个条件,由此可得 $f(x)$ 为某个随机变量的密度函数.

19. 经常往来于某两地的火车晚点的时间 X(单位:min)是一个连续型随机变量,其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{500}(25-x^2), & -5<x<5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

X 的负值表示火车早到了.求火车至少晚点2 min的概率.

解 $$P(X\geqslant 2)=\frac{3}{500}\int_2^5(25-x^2)\mathrm{d}x=\frac{3}{500}\left(25\times 3-\frac{1}{3}x^3\Big|_2^5\right)$$

$$=\frac{9}{20}-\frac{117}{500}=\frac{108}{500}=\frac{27}{125}=0.216.$$

20. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1-(1+x)e^{-x}, & x>0,\end{cases}$$

求 X 的密度函数,并计算 $P(X\leqslant 1)$ 和 $P(X>2)$.

解 由分布函数 $F(x)$ 与密度函数 $f(x)$ 的关系,可得在 $f(x)$ 的一切连续点处有 $f(x)=F'(x)$,因此

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

所求概率

$$P(X\leqslant 1)=F(1)=1-(1+1)e^{-1}=1-2e^{-1},$$

$$P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)=1-F(2)=1-[1-(1+2)e^{-2}]=3e^{-2}.$$

21. 设随机变量 X 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布,求方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的概率.

解 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 1<x<6,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的充分必要条件为 $X^2-4\geqslant 0$,即 $X^2\geqslant 4$,因此所求的概率为

$$P(X^2\geqslant 4)=P(X\leqslant -2 或 X\geqslant 2)=P(X\leqslant -2)+P(X\geqslant 2)$$

$$=0+\int_2^6\frac{1}{5}dx=\frac{4}{5}.$$

22. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布,证明:对于 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b\leqslant 1,P(a\leqslant X\leqslant b)=b-a$,并解释这个结果.

证 因概率是非负的,所以必须 $b\geqslant a$,又 $a\geqslant 0,a+b\leqslant 1$,故 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$,有

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b 1dx=b-a.$$

此结果表明 $(0,1)$ 上的均匀分布变量落在 $(0,1)$ 中任一区间的概率即为该区间的长度,而且与区间的相对位置无关.

23. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(单位:min)是一随机变量,它服从 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的指数分布,其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 某顾客在窗口等待服务,若超过 10 min,他就离开.

(1) 该顾客某天去银行,求他未等到服务就离开的概率;

(2) 设该顾客一个月要去银行五次,求他五次中至多有一次未等到服务而离开的概率.

解 (1) 依题意 X 服从 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的指数分布,且顾客等待时间超过 10 min 就离开,因此,顾客未等到服务就离开的概率为

$$P(X\geqslant 10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}.$$

(2) 设 Y 表示该顾客五次去银行未等到服务的次数,则 Y 服从 $n=5,p=e^{-2}$ 的二项分布,所求概率为

$$P(Y\leqslant 1)=P(Y=0)+P(Y=1)$$

$$=\binom{5}{0}(e^{-2})^0(1-e^{-2})^5+\binom{5}{1}e^{-2}(1-e^{-2})^4$$

$$=(1+4e^{-2})(1-e^{-2})^4.$$

24. 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间(单位:min),X 的分布函数是 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求:

(1) X 的密度函数;

(2) P(至多等待 2 min);

(3) P(至少等待 4 min);

(4) P(等待 2 min 至 4 min 之间);

(5) P(等待至多 2 min 或至少 4 min).

解 (1) 当 $x>0$,$F'(x)=0.2e^{-0.2x}$,因而 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0.2e^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) P(至多等待 2 min) $=P(X\leqslant 2)=F(2)=1-e^{-0.4}$.

(3) P(至少等待 4 min) $=P(X\geqslant 4)=1-F(4)=e^{-0.8}$.

(4) P(等待 2 min 至 4 min 之间) $=P(2\leqslant X\leqslant 4)=F(4)-F(2)=e^{-0.4}-e^{-0.8}$

(5) P(等待至多 2 min 或至少 4 min) $=P(X\leqslant 2)+P(X\geqslant 4)=1-e^{-0.4}+e^{-0.8}$.

25. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x,\ -\infty<x<+\infty$,求:

(1) 常数 A,B;

(2) $P(|X|<1)$;

(3) 随机变量 X 的密度函数.

解 (1) 要使 $F(x)$ 成为随机变量 X 的分布函数,必须满足 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,即

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(A + B\arctan x) = 0,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(A + B\arctan x) = 1.\end{cases}$$

计算后得

$$\begin{cases}A - \dfrac{\pi}{2}B = 0,\\ A + \dfrac{\pi}{2}B = 1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A = \dfrac{1}{2},\\ B = \dfrac{1}{\pi}.\end{cases}$$

另外,可验证当 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$ 时, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$ 也满足分布函数其余的几条性质.

(2) $P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

(3) X 的密度函数

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

26. 设随机变量 X 服从 $N(0,1)$,借助于标准正态分布的分布函数表计算:

(1) $P(X < 2.2)$;

(2) $P(X > 1.76)$;

(3) $P(X < -0.78)$;

(4) $P(|X| < 1.55)$;

(5) $P(|X| > 2.5)$;

(6) 确定 a,使得 $P(X < a) = 0.99$.

解 查正态分布表可得:

(1) $P(X < 2.2) = \Phi(2.2) = 0.9861$;

(2) $P(X > 1.76) = 1 - P(X \leqslant 1.76) = 1 - \Phi(1.76) = 1 - 0.9608 = 0.0392$;

(3) $P(X < -0.78) = \Phi(-0.78) = 1 - \Phi(0.78) = 1 - 0.7823 = 0.2177$;

(4) $P(|X| < 1.55) = P(-1.55 < X < 1.55) = \Phi(1.55) - \Phi(-1.55)$

$$= \Phi(1.55) - [1 - \Phi(1.55)] = 2\Phi(1.55) - 1$$

$$= 2 \times 0.9394 - 1 = 0.8788;$$

(5) $P(|X| > 2.5) = 1 - P(|X| \leqslant 2.5) = 1 - [2\Phi(2.5) - 1]$

$$= 2 - 2\Phi(2.5) = 2(1 - 0.9938) = 0.0124;$$

(6) 由 $\Phi(a) = 0.99$,可知 $a = 2.326$.

27. 设随机变量 X 服从 $N(-1,16)$,借助于标准正态分布的分布函数表计算:

(1) $P(X < 2.44)$;

(2) $P(X > -1.5)$;

(3) $P(X < -2.8)$;

(4) $P(|X| < 4)$;

(5) $P(-5 < X < 2)$;

(6) $P(|X - 1| > 1)$;

(7) 确定 a,使得 $P(X > a) = P(X < a)$.

解 当 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 时, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$,借助于该性质,再查标准正态分布函数表可求得:

(1) $P(X < 2.44) = \Phi\left(\frac{2.44+1}{4}\right) = \Phi(0.86) = 0.8051$;

(2) $P(X > -1.5) = 1 - \Phi\left(\frac{-1.5+1}{4}\right) = 1 - \Phi(-0.125)$

$$= 1 - [1 - \Phi(0.125)] = \Phi(0.125) = 0.5498;$$

(3) $P(X < -2.8) = \Phi\left(\frac{-2.8+1}{4}\right) = \Phi(-0.45) = 1 - \Phi(0.45)$

$$= 1 - 0.6736 = 0.3264;$$

(4) $P(|X| < 4) = \Phi\left(\frac{4+1}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-4+1}{4}\right) = \Phi(1.25) - \Phi(-0.75)$

$$= \Phi(1.25) - 1 + \Phi(0.75) = 0.8944 - 1 + 0.7734$$

$$= 0.6678;$$

(5) $P(-5 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2+1}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-5+1}{4}\right) = \Phi(0.75) - \Phi(-1)$

$$= \Phi(0.75) + \Phi(1) - 1 = 0.7734 + 0.8413 - 1$$

$$= 0.6147;$$

(6) $P(|X - 1| > 1) = 1 - P(|X - 1| \leqslant 1) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{2+1}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0+1}{4}\right)\right]$$

$$= 1 - \Phi(0.75) + \Phi(0.25) = 1 - 0.7734 + 0.5987$$
$$= 0.8253;$$

(7) 由 $P(X > a) = P(X < a)$ 可得 $1 - \Phi\left(\frac{a+1}{4}\right) = \Phi\left(\frac{a+1}{4}\right)$，因而 $\Phi\left(\frac{a+1}{4}\right) = \frac{1}{2}$，即得 $\frac{a+1}{4} = 0, a = -1$.

28. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,25)$，且二次方程 $t^2 + 4t + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，求 μ 的值.

解 依假设

$$\frac{1}{2} = P(\text{方程 } t^2 + 4t + X = 0 \text{ 无实根}) = P(16 - 4X < 0)$$
$$= P(X > 4) = P\left(\frac{X-\mu}{5} > \frac{4-\mu}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4-\mu}{5}\right),$$

所以 $\frac{4-\mu}{5} = 0$，即 $\mu = 4$.

29. 某厂生产的滚珠直径 X 服从正态分布 $N(2.05,0.01)$，合格品的规格规定直径为 2 ± 0.2，求该厂滚珠的合格率.

解 所求的概率为

$$P(2 - 0.2 \leqslant X \leqslant 2 + 0.2) = \Phi\left(\frac{2.2 - 2.05}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{1.8 - 2.05}{0.1}\right)$$
$$= \Phi(1.5) - \Phi(-2.5)$$
$$= \Phi(1.5) - 1 + \Phi(2.5)$$
$$= 0.9332 - 1 + 0.9938 = 0.927.$$

30. 某人上班路上所需的时间 $X \sim N(30,100)$（单位：min），已知上班时间是 8:30，他每天 7:50 出门，求：

(1) 某天迟到的概率；

(2) 一周（以 5 天计）最多迟到一次的概率.

解 (1) 由题意知某人路上所花时间超过 40 min，他就迟到了，因此所求概率为

$$P(X > 40) = 1 - \Phi\left(\frac{40-30}{10}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

(2) 记 Y 为 5 天中某人迟到的次数，则 Y 服从 $n = 5, p = 0.1587$ 的二项分布，5 天中最多迟到一次的概率为

$$P(Y \leqslant 1) = \binom{5}{0} 0.1587^0 \times 0.8413^5 + \binom{5}{1} 0.1587 \times 0.8413^4 = 0.819.$$

练　习　4

4.1　假设有十只同种电器元件，其中有两只废品，装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只；如仍是废品，则扔掉再取一只. 试求在取到正品之前，已取出的废品只数 X 的分布律及分布函数.

4.2　设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.4，当 A 发生不少于三次时，指示灯发出信号.

(1) 进行了五次独立试验，求指示灯发出信号的概率；

(2) 进行了七次独立试验，求指示灯发出信号的概率.

4.3　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

求：

(1) 常数 c；

(2) $P(|X| \leqslant 0.5)$；

(3) 分布函数 $F(x)$.

4.4　在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，把这个试验独立地重复做两次，在下列两种情形下分别求 p 的值：

(1) 已知事件 A 至多发生一次的概率与事件 A 至少发生一次的概率相等；

(2) 已知事件 A 至多发生一次的条件下事件 A 发生一次的概率为 $\frac{1}{2}$.

4.5　根据历史资料分析，某地连续两次强地震之间相隔的年数 X 是一个随机变量，X 服从参数 $\lambda = 0.1$ 的指数分布. 现在该地刚发生了一次强地震，试求今后 3 年至 5 年内再次发生强地震的概率.

4.6　设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X \sim N(\mu,4^2)$，$Y \sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1 = P(X \leqslant \mu - 4)$，$p_2 = P(Y \geqslant \mu + 5)$，试证明：对任何实数 μ，都有 $p_1 = p_2$.

答案与提示

4.1

X	0	1	2
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{4}{5}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{44}{45}, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

4.2 (1) 0.32;(2) 0.58.

4.3 (1) $c = 1$;(2) 0.75;

(3) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

4.4 (1) $\frac{1}{2}$;(2) $\frac{1}{3}$.

4.5 $e^{-0.3} - e^{-0.5}$.

4.6 提示:利用正态分布的性质计算 p_1, p_2,发现 p_1 与 p_2 相等,且它们的值不依赖于 μ.

第五章 二维随机变量及其分布

一、基本要求

1. 了解二维随机变量的概念,以及二维随机变量的联合分布函数.
2. 了解二维离散型随机变量的联合分布律的概念,理解二维连续型随机变量的联合密度函数的概念.
3. 理解二维随机变量的边缘分布.
4. 理解随机变量的独立性概念.

二、内容提要

1. 二维随机变量的概念

在随机试验中,如果存在二维变量(X,Y),它依试验结果的改变而取不同的向量值,那么称(X,Y)为二维随机变量.类似地有 n 维随机变量$(X_1,\cdots,X_n)$.本章主要讨论二维随机变量的概率规律,即二维随机变量的分布.

2. 联合分布函数与边缘分布函数

二维随机变量的分布可以用联合分布函数表示,联合分布函数的定义为:

给定二维随机变量,称二元函数

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y), \quad -\infty < x,y < +\infty$$

为随机变量(X,Y)的联合分布函数.

联合分布函数具有以下性质:

(1) $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$;

(3) 对 $F(x,y)$ 固定一个自变量时关于另一个自变量单调非减;

(4) 固定一个自变量时对应于另一个自变量 $F(x,y)$ 为右连续函数;

(5) $P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$.

设(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$,分别称

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = F(x, +\infty), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=F(+\infty,y),\ -\infty<y<+\infty$$
为 X,Y 的边缘分布函数.

3. 二维离散型随机变量及其分布律、边缘分布律

如果随机变量 (X,Y) 仅可能取有限个或可列无限个值,那么称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布可以用下列矩形表格表示:

X \ Y	y_1	y_2	…	y_n	…
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}	…
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}	…
⋮	⋮	⋮		⋮	
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}	…
⋮	⋮	⋮		⋮	

其中 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)\geq 0,i,j=1,2,\cdots$,且 $\sum\limits_{i=1}\sum\limits_{j=1}p_{ij}=1$,称这个矩形表格为 (X,Y) 的联合分布律.

由已知的联合分布律可以算得概率

$$P((X,Y)\in D)=\sum_{(i,j):(x_i,y_j)\in D}p_{ij},$$

其中 D 是二维平面上的一个集合.

X 的边缘分布律是

X	x_1	x_2	…	x_m	…
概率	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	…	$p_{m\cdot}$	…

其中 $p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}p_{ij},i=1,2,\cdots$.

Y 的边缘分布律是

Y	y_1	y_2	…	y_n	…
概率	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	…	$p_{\cdot n}$	…

其中 $p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}p_{ij},j=1,2,\cdots$.

4. 二维连续型随机变量及密度函数、边缘密度函数

如果二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 可以表示成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ -\infty<x,y<+\infty,$$

那么称 (X,Y) 为二维连续型随机变量,其中二元函数 $f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的联合密度函数,它满足(1) $f(x,y)\geq 0,\ -\infty<x,y<+\infty$;(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

由已知的联合密度函数 $f(x,y)$ 可以算得概率

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是二维平面上的一个区域.

二维连续型随机变量具有下列性质:

(1) 对任意一条平面曲线 l, $P((X,Y)\in l)=0$;

(2) 在 $f(x,y)$ 的连续点处, $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\ -\infty<x<+\infty;$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,\ -\infty<y<+\infty.$$

下面给出两个常用的二维连续型随机变量

(1) 均匀分布. 如果 (X,Y) 在二维平面上某个区域 G 中服从均匀分布,那么它的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{G\text{ 的面积}}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 它的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},\ -\infty<x,y<+\infty,$$

其中 $-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,\sigma_1^2,\sigma_2^2>0,|\rho|<1$.

二维正态分布的边缘分布还是正态分布,即如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

5. 随机变量的相互独立性

如果 X 与 Y 的联合分布函数等于 X,Y 的边缘分布函数之积,即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

对一切 $-\infty<x,y<+\infty$ 均成立,那么称随机变量 X 与 Y 相互独立.

X 与 Y 独立的直观意义是 X 的取值与 Y 的取值互不影响.

当(X,Y)为二维离散型随机变量时,X与Y的独立性也可通过联合分布律与两个边缘分布律的联系来判断,具体为X与Y独立的充分必要条件为等式

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j},$$

对一切$i,j=1,2,\cdots$均成立.

当(X,Y)为二维连续型随机变量时,X与Y相互独立的充分必要条件为等式

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

在$f(x,y)$的一切连续点处成立.

对于二维正态分布,有如下性质:

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则$X$与$Y$相互独立的充分必要条件为$\rho=0$.

*6. 条件分布

设(X,Y)是二维随机变量.当已知X取x值时,Y仍是随机变量,由于X与Y之间具有某种联系,因此Y的分布会受到$X=x$的影响,Y在$X=x$的条件下的分布称为Y的条件分布.类似有X在$Y=y$的条件下的条件分布.下面分别就离散型、连续型两种情形给出相应的条件分布.

(1) 离散型

设离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X在给定$Y=y_j,j=1,2,\cdots$的条件下的条件分布律为

$X\mid Y=y_j$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
概率	$\dfrac{p_{1j}}{p_{\cdot j}}$	$\dfrac{p_{2j}}{p_{\cdot j}}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$	$\cdots$

Y在给定$X=x_i,i=1,2,\cdots$的条件下的条件分布律为

$Y\mid X=x_i$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
概率	$\dfrac{p_{i1}}{p_{i\cdot}}$	$\dfrac{p_{i2}}{p_{i\cdot}}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$	$\cdots$

(2) 连续型

设二维连续型随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$,X在给定$Y=y$的条件下密度函数为

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中$f_Y(y)>0$.

Y在给定$X=x$的条件下密度函数为

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad -\infty<y<+\infty,$$

其中$f_X(x)>0$.

三、学习要点

本章的重点是掌握二维随机变量及其分布,并通过边缘分布的概念搞清二维随机变量与相应的两个一维随机变量之间的关系,由此了解引入二维随机变量的必要性.本章另一个重点是两个随机变量的独立性的概念及其独立性在实际中的应用.要注意的是如果二维连续型随机变量的密度函数$f(x,y)$为一个分段函数时,在求解概率$P((X,Y)\in D)$(其中区域D是一个平面上的区域),边缘密度函数$f_X(x)$,$f_Y(y)$,分布函数$F(x,y)$等时要特别小心,通过练习,掌握计算要领.

四、释疑解难

问 5.1 为什么要引入二维随机变量概念?

答 有时对随机试验的结果可相应地建立两个随机变量,如考察学生的数学课程成绩X与物理课程成绩Y,那么就必须建立二维随机变量(X,Y),并进一步讨论它们的分布以及两个变量之间的联系.当然可能还有这样的疑问:能否分别通过讨论X与Y的分布来寻找它们的联系?这个问题的答案将在下一个题中给出.

问 5.2 由两个一维随机变量X,Y的分布能否确定一个二维随机变量的分布?

答 不一定.当X与Y独立时,由X,Y的两个一维分布可定出(X,Y)的联合分布.当X与Y不相互独立时,一般不能得出上面的结论.下面通过一个例子说明.

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则由性质知$X$的边缘分布$\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y$的边缘分布$\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,我们发现对于不同的$\rho$有共同的边缘分布,因而也说明两个一维正态分布一般不能唯一确定一个二维分布.但当知道了(X,Y)的联合分布,可以确定两个边缘分布,这也说明了(X,Y)的联合分布不仅包含了两个一维随机变量的信息,还包含了它们之间联系的信息.

问 5.3 在计算二维随机变量落在区域D内的概率$P((X,Y)\in D)$时,为什么很少直接通过联合分布函数$F(x,y)$来求得?

答 那是因为联合分布函数只能直接求得类似随机事件$\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$的概率，即

$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$.

对计算(X,Y)落在不是矩形形状区域D内的概率时不易找到一个直接用联合分布函数来表示的显式. 一般，在计算二维离散型随机变量(X,Y)落在区域D内的概率时，通常通过其联合分布律来完成；在计算二维连续型随机变量落在区域D内的概率时，通常用其联合密度函数$f(x,y)$来完成，即可用$P((X,Y) \in D) = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$来完成.

五、例题分析及增补

例 3 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-(2x+4y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数c；(2) $P(X \geq Y)$.

析 该题主要用二维连续型随机变量(X,Y)的密度函数$f(x,y)$该满足的条件及其它们的性质来解决，具体为$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$及$P((X,Y) \in G) = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 该性质适用于一切二维连续型随机变量$(X,Y)$. 具有普遍性，对每一个具体的$f(x,y)$只是在二重积分计算时有差别. 另外

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} ce^{-(2x+4y)}\mathrm{d}y = c\int_0^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-4y}\mathrm{d}y$$

$$= c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

即求得$c = 8$.

注意该题在计算二重积分时可拆成两个反常积分的乘积，而积分$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x$可利用$\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}\mathrm{d}x = 1$很快求得为$\frac{1}{2}$.

例 8 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，它的联合密度函数为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}.$$

求关于X及关于Y的边缘密度函数.

析 比较二维正态分布的联合密度函数$f(x,y)$的一般形式，可知，

$(X,Y) \sim N(0,0,1,1,\rho)$. 在求解积分

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}\mathrm{d}y$$

时不能直接积出，但可化为

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y.$$

对积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y$中的被积函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$可看成某个服从正态分布$N(\rho x, 1-\rho^2)$的随机变量的密度函数，因此，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y = 1.$$

这样易得$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，同理可得$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. 这样的计算技巧在求解正态分布的问题时经常要用到.

例 5.1 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80，10和10件，现在随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad i = 1,2,3.$$

试求(1) (X_1,X_2)的联合分布律；(2) X_1与X_2是否独立？

解 (1) 设事件A_i = "抽到i等品" $(i = 1,2,3)$. 由题意知A_1,A_2,A_3两两互不相容，且$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.1, P(A_3) = 0.1$. 由于事件$\{X_1 = 0, X_2 = 0\}$表示没有取到一等品同时也没有取到二等品，那只能是取到三等品，因此

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1.$$

同理可得

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.1,$$
$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.8,$$
$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(\varnothing) = 0,$$

即

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

(2) X_1的边缘分布律为

X_1	0	1
概率	0.2	0.8

X_2 的边缘分布律为

X_2	0	1
概率	0.9	0.1

易见 $P(X_1=0,X_2=0)=0.1\neq P(X_1=0)P(X_2=0)=0.18$,因此 X_1 与 X_2 不独立.

例 5.2 设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将相应数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

解 记 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$,则由 $p_{11}+p_{21}=p_{\cdot 1}$ 推出

$$p_{11}=p_{\cdot 1}-p_{21}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}.$$

由 X 与 Y 相互独立的定义,可知 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$,$i=1,2$,$j=1,2,3$,则由 $p_{11}=p_{1\cdot}p_{\cdot 1}$ 推出

$$p_{1\cdot}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{1}{24}\Big/\frac{1}{6}=\frac{1}{4},$$

由 $p_{11}+p_{12}+p_{13}=p_{1\cdot}$ 推出

$$p_{13}=p_{1\cdot}-p_{11}-p_{12}=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12},$$

由 $p_{1\cdot}+p_{2\cdot}=1$ 推出

$$p_{2\cdot}=1-p_{1\cdot}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

由 $p_{12}=p_{1\cdot}p_{\cdot 2}$ 推出

$$p_{\cdot 2}=\frac{p_{12}}{p_{1\cdot}}=\frac{1}{8}\Big/\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

由 $p_{12}+p_{22}=p_{\cdot 2}$ 推出

$$p_{22}=p_{\cdot 2}-p_{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8},$$

由 $p_{21}+p_{22}+p_{23}=p_{2\cdot}$ 推出

$$p_{23}=p_{2\cdot}-p_{21}-p_{22}=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4},$$

由 $p_{23}=p_{2\cdot}p_{\cdot 3}$ 推出

$$p_{\cdot 3}=\frac{1}{4}\Big/\frac{3}{4}=\frac{1}{3}.$$

综合有 (X,Y) 的分布律及关于 X 与 Y 的边缘分布律为

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

例 5.3 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=e^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,试求

(1) (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$;

(2) 关于 X,关于 Y 的边缘密度函数.

解 (1) 区域 D(见图 5.1)的面积为

$$A=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_1^{e^2}=2,$$

因此 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

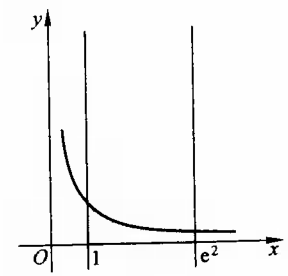


图 5.1

(2) X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_1^{e^2}\frac{1}{2}dx, & 0<y<\frac{1}{e^2},\\ \int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}dx, & \frac{1}{e^2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^2-1), & 0<y<\frac{1}{e^2},\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right), & \frac{1}{e^2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

例 5.4 设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，当已知 $X=x$ 时，Y 服从区间 $(0,x)$ 上的均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$；

(2) X 与 Y 是否独立；

(3) 求概率 $P(X+Y>1)$.

解 由题意知

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\qquad f(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) $f(x,y)=f_X(x)f(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_y^1\frac{1}{x}dx, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

因为

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=2,\quad f_X\left(\frac{1}{2}\right)=1,\quad f_Y\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln\frac{1}{4}=2\ln 2,$$

易见 $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\neq f_X\left(\frac{1}{2}\right)f_Y\left(\frac{1}{4}\right)$，所以 X 与 Y 不独立.

(3) $P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\,dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^1dx\int_{1-x}^x\frac{1}{x}dy$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x}(x-1+x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=1-\ln 2.$$

六、习题解答

1. 二维随机变量 (X,Y) 只能取下列数组中的值：$(0,0)$，$(-1,1)$，$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，$(2,0)$，且取这些组值的概率依次为 $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{5}{12}$. 求这二维随机变量的分布律，并写出关于 X 及关于 Y 的边缘分布律.

解 由题意可得 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	$\frac{1}{3}$	1
-1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{5}{12}$	0	0

联合分布按行相加得到 X 的边缘分布律为

X	-1	0	2
概率	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

联合分布按列相加得到 Y 的边缘分布律为

Y	0	$\frac{1}{3}$	1
概率	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

2. 一口袋中有四个球,它们依次标有数字 1,2,2,3. 从这袋中任取一球后,不放回袋中,再从袋中任取一球. 设每次取球时,袋中每个球被取到的可能性相同. 以 X,Y 分别记第一、二次取得的球上标有的数字,求 (X,Y) 的分布律及 $P(X=Y)$.

解 X 可能的取值为 1,2,3,Y 可能的取值为 1,2,3,相应地,其概率为

$$P(X=1,Y=1)=0,\quad P(X=1,Y=2)=\frac{1\times 2}{4\times 3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=1,Y=3)=\frac{1\times 1}{4\times 3}=\frac{1}{12},$$

$$P(X=2,Y=1)=\frac{2\times 1}{4\times 3}=\frac{1}{6},\quad P(X=2,Y=2)=\frac{2\times 1}{4\times 3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2,Y=3)=\frac{2\times 1}{4\times 3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=3,Y=1)=\frac{1\times 1}{4\times 3}=\frac{1}{12},\quad P(X=3,Y=2)=\frac{1\times 2}{4\times 3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=3,Y=3)=0.$$

或写成

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

$$P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)=\frac{1}{6}.$$

*3. 从 3 名数据处理经理、2 名高级系统分析师和 2 名质量控制工程师中随机挑选 4 人组成一个委员会,研究某项目的可行性. 设 X 表示从委员会选出来的数据处理经理的人数,Y 表示选出来的高级系统分析师的人数,求:

(1) X 与 Y 的联合分布律;

(2) $P(X\geqslant Y)$.

解 (1) $$P(X=i,Y=j)=\begin{cases}\dfrac{\binom{3}{i}\binom{2}{j}\binom{2}{4-i-j}}{\binom{7}{4}}, & 0\leqslant i\leqslant 3,0\leqslant j\leqslant 2,2\leqslant i+j\leqslant 4,\\ 0, & \text{其余 } i,j,\end{cases}$$

即有分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
3	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0

(2) $P(X\geqslant Y)=1-P(X<Y)=1-\frac{1}{35}-\frac{6}{35}=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}=0.8.$

*4. 盒中有 4 个红球、4 个黑球,不放回抽取 4 次,每次取 1 个,$X=$前 2 次抽中红球数,$Y=4$ 次共抽中红球数,求:

(1) 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 给定 $X=1$,Y 的条件分布律.

解 (1)

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)=\frac{\binom{4}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{8}{2}}\frac{\binom{4-i}{j-i}\binom{4-2+i}{2-j+i}}{\binom{6}{2}}$$

$$=\frac{\binom{4}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{8}{2}}\frac{\binom{4-i}{4-j}\binom{2+i}{j}}{\binom{6}{2}},\quad 0\leqslant i\leqslant 2,i\leqslant j\leqslant 2+i,$$

因此有联合分布律:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{35}$	0	0
1	0	$\frac{4}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	0
2	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{70}$

(2) 由(1)知

$$P(Y=j\mid X=i)=\frac{\binom{4-i}{j-i}\binom{4-2+i}{2-j+i}}{\binom{6}{2}},\quad i\leqslant j\leqslant i+2,$$

所以

$$P(Y=j\mid X=1)=\frac{\binom{3}{j-1}\binom{3}{j}}{\binom{6}{2}},\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

于是给定 $X=1$，Y 有条件分布律：

$Y\mid X=1$	1	2	3
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

5. 箱子中装有 10 件产品，其中 2 件是次品，每次从箱子中任取一件产品，共取 2 次，定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出正品},\\ 1, & \text{若第一次取出次品},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出正品},\\ 1, & \text{若第二次取出次品},\end{cases}$$

分别就下面两种情况(i)放回抽样，(ii)无放回抽样求：

(1) 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律；

(2) 关于 X 及关于 Y 的边缘分布律；

(3) X 与 Y 是否独立，为什么？

解 (1) 在放回抽样时，X 可能取的值为 0，1，Y 可能取的值也为 0，1，且

$$P(X=0,Y=0)=\frac{8\times 8}{10\times 10}=\frac{16}{25},\quad P(X=0,Y=1)=\frac{8\times 2}{10\times 10}=\frac{4}{25},$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{2\times 8}{10\times 10}=\frac{4}{25},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{2\times 2}{10\times 10}=\frac{1}{25},$$

或写成

X \ Y	0	1
0	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{25}$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

在无放回情形下，X,Y 可能取的值也为 0 或 1，但取相应值的概率与有放回情形下不一样，具体为

$$P(X=0,Y=0)=\frac{8\times 7}{10\times 9}=\frac{28}{45},\quad P(X=0,Y=1)=\frac{8\times 2}{10\times 9}=\frac{8}{45},$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{2\times 8}{10\times 9}=\frac{8}{45},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{2\times 1}{10\times 9}=\frac{1}{45},$$

或写成

X \ Y	0	1
0	$\frac{28}{45}$	$\frac{8}{45}$
1	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

(2) 在有放回情形下 X 的边缘分布律为

X	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y 的边缘分布律为

Y	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

在无放回情形下 X 的边缘分布律为

X	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y 的边缘分布律为

Y	0	1
概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

(3) 在有放回情形, X 与 Y 独立;在无放回情形, X 与 Y 不独立. 例如

$$P(X=0,Y=0)=\frac{28}{45}\neq\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=P(X=0)P(Y=0).$$

6. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{xy}}, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:

(1) 关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数;

(2) $P\left(0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

解 (1) 当 $0<x<1$,

$$f_X(x)=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{xy}}\mathrm{d}y=\frac{1}{4\sqrt{x}}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{4\sqrt{x}}2y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

所以 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 由对称性可知 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $P\left(0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{xy}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\times\left(2y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)\times\left(2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

7. 设二维随机变量 (X,Y) 服从在区域 D 上的均匀分布,其中区域 D 为 x 轴、y 轴及直线 $y=2x+1$ 围成的三角形区域(见图 5.2). 求:

(1) (X,Y) 的联合密度函数;

(2) $P\left(-\frac{1}{4}<X<0,0<Y<\frac{1}{4}\right)$;

(3) 关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数;

(4) X 与 Y 是否独立,为什么?

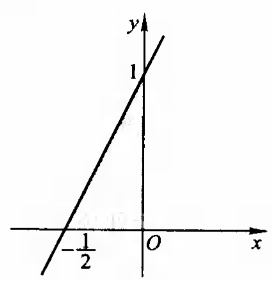


图 5.2

解 (1) (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P\left(-\frac{1}{4}<X<0,0<Y<\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$

(3) 关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=4\int_0^{2x+1}\mathrm{d}y=4(2x+1),\ -\frac{1}{2}<x<0,$$

$$f_Y(y)=4\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}\mathrm{d}x=2(1-y),0<y<1.$$

(4) 不独立. 因为 $f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=4$,而

$$f_X\left(-\frac{1}{4}\right)=4\left(-2\times\frac{1}{4}+1\right)=2,\ f_Y\left(\frac{1}{4}\right)=2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2},$$

所以

$$f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=4\neq2\times\frac{3}{2}=f_X\left(-\frac{1}{4}\right)f_Y\left(\frac{1}{4}\right).$$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从在区域 D 上的均匀分布,其中 D 为由直线 $x+y=1,x+y=-1,x-y=1,x-y=-1$ 围成的区域. 求:

(1) 关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数;

(2) $P(|X|<Y)$;

(3) X 与 Y 是否独立,为什么?

解 由题意知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 当 $0<x<1$ 时,

$$f_X(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{1-x}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times2(1-x)=1-x,$$

当 $-1<x<0$ 时,

$$f_X(x)=\frac{1}{2}\int_{-1-x}^{x+1}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times2(x+1)=x+1.$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由对称性,即知

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P(|X|<Y)=P((X,Y)\in G)=\frac{1}{4}$,其中区域 G 见图 5.3 中的阴影部分.

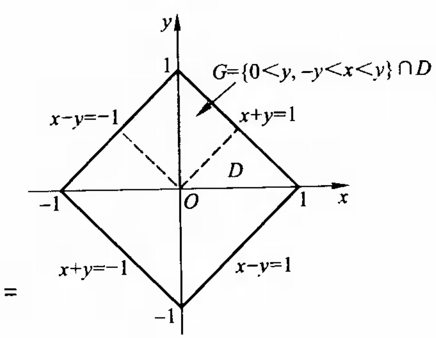


图 5.3

（3）不独立,因为 $f(0,0)=\frac{1}{2}\neq 1\times 1=f_X(0)f_Y(0)$.

9. 设随机变量 X,Y 相互独立且分别具有下列分布律:

X	-2	-1	0	0.5
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Y	-0.5	1	3
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

写出表示 (X,Y) 的联合分布律.

解 由于 X 与 Y 相互独立,因此

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\quad i=1,2,3,4,j=1,2,3,$$

例如 $P(X=-2,Y=-0.5)=P(X=-2)P(Y=-0.5)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

其余的联合概率可同样算得,具体结果为

X \ Y	-0.5	1	3
-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$
0.5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

10. 设进入邮局的人数服从参数为 λ 的泊松分布,每一个进入邮局的人是男性的概率为 $p(0<p<1)$,X 为进入邮局的男性人数,Y 为女性人数,求:

（1）关于 X 及关于 Y 的边缘分布律;

（2）X 与 Y 是否独立,为什么?

解 记 $Z=X+Y=$ 进入邮局的人数,则依假设 $Z\sim P(\lambda)$.

（1）$P(X=i)=\sum_{n=i}^{\infty}P(X=i\mid Z=n)P(Z=n)$

$$=\sum_{n=i}^{\infty}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\frac{p^i}{i!}e^{-\lambda}\lambda^i\sum_{n=i}^{\infty}\frac{\lambda^{n-i}}{(n-i)!}q^{n-i}$$

$$=\frac{p^i}{i!}e^{-\lambda}\lambda^ie^{\lambda q}=\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}(q=1-p,i=0,1,2,\cdots),$$

即 $X\sim P(\lambda p)$,同理可推出 $Y\sim P(\lambda q)$.

（2）$P(X=i,Y=j)=P(X=i,Z=i+j)=P(Z=i+j)P(X=i\mid Z=i+j)$

$$=\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}e^{-\lambda}\binom{i+j}{i}p^iq^j=\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}\frac{(\lambda q)^j}{j!}e^{-\lambda q},$$

$$i,j=0,1,2,\cdots,$$

因而 $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j),i,j=0,1,2,\cdots$,所以 X,Y 独立.

11. 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量,X 服从 $[0,0.2]$ 上的均匀分布,Y 服从参数为 5 的指数分布,求 (X,Y) 的联合密度函数及 $P(X\geqslant Y)$.

解 由均匀分布的定义知

$$f_X(x)=\begin{cases}5, & 0<x<0.2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由指数分布的定义知

$$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 X 与 Y 独立,易得 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}25e^{-5y}, & 0<x<0.2,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

概率

$$P(X\geqslant Y)=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy,$$

其中区域 $G=\{(x,y)\mid x\geqslant y\}$ 见图 5.4,经计算有

$$P(X\geqslant Y)=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy$$

$$=\int_0^{0.2}5(1-e^{-5x})dx=e^{-1}.$$

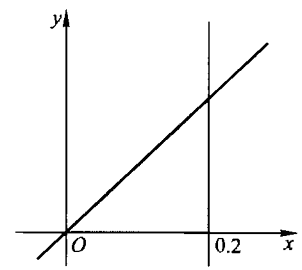


图 5.4

12. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:

（1）系数 k;

（2）$P(0\leqslant X\leqslant 1,0\leqslant Y\leqslant 2)$;

(3) 证明 X 与 Y 相互独立.

解 (1) k 必须满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,即$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x=1$,经计算得 $k=12$.

(2) $P(0\leqslant X\leqslant 1,0\leqslant Y\leqslant 2)=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^1 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x=(1-\mathrm{e}^{-3})(1-\mathrm{e}^{-8})$.

(3) 关于 X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理可求得 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

易见 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$,因此 X 与 Y 相互独立.

13. 已知二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(1-x)y, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 k;

(2) 分别求关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数;

(3) X 与 Y 是否独立,为什么?

解 (1) k 满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,即$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x k(1-x)y\mathrm{d}y=1$,解得 $k=24$.

(2) X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)y\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)y\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=24\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=3$,而

$$f_X\left(\frac{1}{2}\right)=12\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad f_Y\left(\frac{1}{4}\right)=12\times\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}=\frac{27}{16},$$

易见$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\neq f_X\left(\frac{1}{2}\right)f_Y\left(\frac{1}{4}\right)$,因此 X 与 Y 不相互独立.

14. 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{25}$	b
1	a	$\frac{3}{25}$
2	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$

且 $P(Y=1\mid X=0)=\frac{3}{5}$.

(1) 求常数 a,b 的值;

(2) 当 a,b 取(1)中的值时,X 与 Y 是否独立,为什么?

解 (1) a,b 必须满足$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}p_{ij}=1$,即$\frac{2}{25}+b+a+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{2}{25}=1$,可推出 $a+b=\frac{17}{25}$. 另外由条件概率定义及已知的条件得

$$P(Y=1\mid X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{b}{\frac{2}{25}+b}=\frac{3}{5},$$

由此解得 $b=\frac{3}{25}$,结合 $a+b=\frac{17}{25}$ 可得到 $a=\frac{14}{25}$. 即

$$\begin{cases}a=\frac{14}{25},\\ b=\frac{3}{25}.\end{cases}$$

(2) 当 $a=\frac{14}{25},b=\frac{3}{25}$ 时,可求得 $P(X=0)=\frac{5}{25}$,$P(Y=0)=\frac{17}{25}$,易见

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{25}\neq P(X=0)P(Y=0),$$

因此,X 与 Y 不独立.

*15. 对于第2题中的二维随机变量(X,Y)的分布,求当 $Y=2$ 时 X 的条件分布律.

解 易知 $p_{\cdot 2}=P(Y=2)=\dfrac{1}{2}$,因此 $Y=2$ 时 X 的条件分布律为

$X \mid Y=2$	1	2	3
概率	$\dfrac{p_{12}}{p_{\cdot 2}}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{p_{22}}{p_{\cdot 2}}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{p_{32}}{p_{\cdot 2}}=\dfrac{1}{3}$

*16. 对于第7题中的二维随机变量(X,Y)的分布,求:

(1) $P\left(-\dfrac{1}{4}<X<0\,\middle|\,\dfrac{1}{4}<Y<\dfrac{1}{2}\right)$;

(2) 当 $X=x\left(-\dfrac{1}{2}<x<0\right)$ 时 Y 的条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 (1) $P\left(\dfrac{1}{4}<Y<\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}f_Y(y)\,\mathrm{d}y=2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(1-y)\,\mathrm{d}y=\dfrac{5}{16}$,

$$P\left(-\frac{1}{4}<X<0,\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_G\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

其中区域 G 见图5.5. 因此

$$P\left(-\frac{1}{4}<X<0\,\middle|\,\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2}\right)$$
$$=P\left(-\frac{1}{4}<X<0,\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2}\right)\Big/$$
$$P\left(\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\Big/\frac{5}{16}=\frac{4}{5}.$$

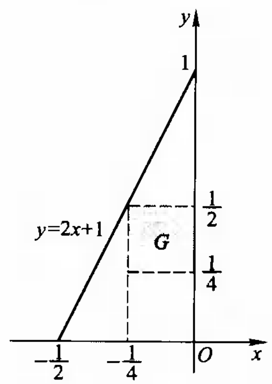


图5.5

(2) 由7题知

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4(2x+1), & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{4}{4(2x+1)}, & 0<y<2x+1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+1}, & 0<y<2x+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

*17. 设二维连续型随机变量(X,Y),证明:对任何 x,有

$$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X\leqslant x\mid Y=y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f_Y(\cdot)$ 为 Y 的边缘密度函数.

证 对任何 x,

$$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(t\mid y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(t\mid y)\,\mathrm{d}t\right]f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X\leqslant x\mid Y=y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

练 习 5

5.1 甲、乙两位水平相当的棋手弈棋三盘. 设 X 表示甲棋手弈胜的盘数,Y 表示甲棋手输赢盘数之差的绝对值. 假定没有和棋,且每盘结果是相互独立的,试求:

(1) (X,Y) 的联合分布律;

(2) 关于 X,关于 Y 的边缘分布律.

5.2 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	α	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{4}$
1	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{8}$	β

试问 α,β 取何值时,X 与 Y 相互独立?

5.3 设随机变量(X,Y)的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy^2, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) 证明 X 与 Y 相互独立;

(3) 求 $P(X\geqslant Y)$.

5.4 在区间$(0,1)$中随机地取两个数,试求两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$ 的概率.

5.5 设(X,Y)服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是第一象限中由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所围

成的区域.

(1) 试求(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$;

(2) 试求$P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right)$;

(3) 试问X与Y是否独立?

答案与提示

5.1 (1)

X \ Y	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

(2)

X	0	1	2	3
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	1	3
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

5.2 $\alpha=\frac{1}{8},\beta=\frac{1}{4}$.

5.3 (1) $c=6$;(2) 略;(3) $\frac{2}{5}$.

5.4 $\frac{17}{25}$.

5.5 (1) $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) $\frac{1}{2}$;(3) X与Y不独立.

第六章 随机变量的函数及其分布

一、基本要求

1. 了解随机变量的函数的概念;
2. 会根据一维随机变量的概率分布求该随机变量函数的概率分布;
3. 会求两个独立随机变量简单函数的分布.

二、内容提要

1. 一维随机变量函数的分布

设X是随机变量,$g(x)$是一个已知函数,那么$Y=g(X)$是随机变量X的函数,它也是一个随机变量.

(1) X为离散型

X的分布律为

X	x_1	…	x_i	…
概率	p_1	…	p_i	…

则$Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	…	$g(x_i)$	…
概率	p_1	…	p_i	…

但要注意,与$g(x_i)$取相同值对应的那些概率应合并相加.

(2) X为连续型

设X有密度函数$f(x)$,要求$Y=g(X)$的密度函数,可以先求其分布函数.设Y的分布函数为$F_Y(y)$,则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)=P(X\in I_y)=\int_{I_y}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中$I_y=\{x:g(x)\leqslant y\}$.

给出$F_Y(y)$后,再通过$f_Y(y)=F'(y)$求出Y的密度函数.

下面给出连续型随机变量的函数的两个性质：

(i) 如果 $y=g(x)$ 是单调函数，且具有一阶连续导数，$y=g(x)$ 的反函数为 $x=h(y)$，那么，当 X 的密度函数为 $f(x)$ 时，$Y=g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=f[h(y)]\,|h'(y)|.$$

(ii) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则当 $k\neq 0$ 时，$Y=kX+b\sim N(k\mu+b,k^2\sigma^2)$. 特别地，$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

2. 二维随机变量函数的分布

设 (X,Y) 是二维随机变量，$g(x,y)$ 是一个已知函数，则 $Z=g(X,Y)$ 是随机变量 (X,Y) 的函数，它也是一个随机变量.

(1) 离散型

如果随机变量 (X,Y) 有联合分布律

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

则 $Z=g(X,Y)$ 的分布律为

$Z=g(X,Y)$	$g(x_1,y_1)$	$\cdots$	$g(x_i,y_j)$	$\cdots$
概率	p_{11}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$

但要注意，与取相同 $g(x_i,y_j)$ 值对应的那些概率应合并相加.

(2) 连续型

设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其联合密度函数为 $f(x,y)$. 如果 $g(x,y)$ 为一个二元连续函数，则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(g(X,Y)\leqslant z)\\&=P((X,Y)\in D_z)=\iint_{D_z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $D_z=\{(x,y):g(x,y)\leqslant z\}$.

二维随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=X+Y$ 的分布具有如下性质：

(i)（卷积公式）设 X 与 Y 相互独立，且分别有密度函数 f_X,f_Y. 则 $Z=X+Y$ 的密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

(ii)（分布的可加性）设 X 服从二项分布 $B(m,p)$，Y 服从二项分布 $B(n,p)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y\sim B(m+n,p)$.

设 X 服从泊松分布 $P(\lambda_1)$，Y 服从泊松分布 $P(\lambda_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

设 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，更一般地有 $aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$.

3. 多元随机变量的极大、极小分布

设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，有公共分布函数 $F(\cdot)$ 和密度函数 $f(x)$，则极小、极大变量 $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$，$Z=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 分别有分布函数及密度函数

$$F_Y(y)=1-[1-F(y)]^n,\ -\infty<y<+\infty,$$

$$f_Y(y)=n[1-F(y)]^{n-1}f(y),\ -\infty<y<+\infty,$$

$$F_Z(z)=[F(z)]^n,\ -\infty<z<+\infty,$$

$$f_Z(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z),\ -\infty<z<+\infty.$$

三、学习要点

本章主要学习如何从已知一维随机变量 X 的分布求一维随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布及已知二维随机变量 (X,Y) 的分布求二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布. 当 (X,Y) 为连续型随机变量时，求随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布不是一件容易的事情，重点掌握当 X 与 Y 独立时，$Z=X+Y$ 的分布，及 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$ 的分布. 在求解过程中尤其要注意分段函数的积分问题.

四、释疑解难

问 6.1 对于连续型随机变量 $X\sim f_X(x)$，$Y=g(X)$ 的密度函数为什么是 $f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|$？这里 $y=g(x)$ 是一单调可导函数，$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数.

答 为了说明这个结果，我们先给出 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y).$$

当 $g(x)$ 为单调增加函数时，可得 $h'(y)>0$，且

$$F_Y(y)=P(g(X)\leqslant y)=P(X\leqslant h(y))=\int_{-\infty}^{h(y)}f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

此时 $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(h(y))h'(y)$.

当 $g(x)$ 为单调递减函数时，可得 $h'(y)<0$，且

$$F_Y(y)=P(g(X)\leqslant y)=P(X\geqslant h(y))=\int_{h(y)}^{+\infty}f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

此时 $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(h(y))(-h'(y))$，即 $f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|$.

在使用这条性质时，一定要注意 $y=g(x)$ 为单调函数且可导.

问 6.2 什么是卷积公式？在使用卷积公式中要注意些什么？

答 随机变量 X 与 Y 独立，且 $X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$，称随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数的表达式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$ 为卷积公式. 此公式给出了 $X+Y$ 这种简单随机变量函数的分布.

在卷积公式中，往往 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 是分段函数，因此，须分段求积分，且分段积分的上、下限可能会与 z 有关，必须小心处理.

五、例题分析及增补

例 2 设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，求 X^2 的密度函数.

析 本例的求解可以先通过求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，然后再通过 $F_Y'(y)=f_Y(y)$ 得到 Y 的密度函数. 但由于 X 只在区间 $(0,1)$ 中取值，所以此时 $y=x^2$ 是单调递增函数，因此，也可利用前面所介绍过的性质直接求得 $f_Y(y)$. 具体为：

由题意知

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而 $x=\sqrt{y}$，因此 $h(y)=\sqrt{y}$，$h'(y)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{y}}$，此时

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\begin{cases}1\times\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<h(y)<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<\sqrt{y}<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 8 设随机变量 X,Y 相互独立且它们的密度函数依次为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

求 $X+Y$ 的密度函数.

析 当我们有了卷积公式后，该题可以直接通过卷积公式来完成. 令 $Z=X+Y$，则

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2x^2-2xz+z^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{4}z^2}{2\times\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\times2}}.\end{aligned}$$

这里积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x=1$ 是因为正态分布 $N\left(\dfrac{z}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 的密度函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上积分为 1.

易见 $Z=X+Y\sim N(0,2)$.

例 6.1 设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P(X\geqslant0,Y\geqslant0)=\dfrac{3}{7}$，$P(X\geqslant0)=P(Y\geqslant0)=\dfrac{4}{7}$，试求 $P(\max(X,Y)\geqslant0)$.

解

$$\begin{aligned}P(\max(X,Y)\geqslant0)&=P(X\geqslant0\text{ 或 }Y\geqslant0)\\&=P(X\geqslant0)+P(Y\geqslant0)-P(X\geqslant0,Y\geqslant0)\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

例 6.2 设 X 与 Y 独立同分布，且 $X\sim N(0,1)$，试求 $Z=(X+Y)^2$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 该问题的求解可分解成两步来做. 设 $W=X+Y$，则由正态分布可加性知 $W\sim N(0,2)$. 再由 $Z=W^2$ 求得 $f_Z(z)$，具体为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(W^2\leqslant z)=\begin{cases}P(-\sqrt{z}\leqslant W\leqslant\sqrt{z}), & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而 $P(-\sqrt{z} \leqslant W \leqslant \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_W(w)\mathrm{d}w = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4}} \mathrm{d}w.$

对 $F_Z(z)$ 求导得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} \mathrm{e}^{-\frac{z}{4}}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 6.3 假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leqslant Y, \\ 1, & \text{若 } X > Y, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leqslant 2Y, \\ 1, & \text{若 } X > 2Y. \end{cases}$$

试求 U 与 V 的联合分布.

解 由题设可得 (X,Y) 的密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由此可求得

$$P(X \leqslant Y) = \frac{1}{4}, \quad P(X > 2Y) = \frac{1}{2}, \quad P(Y < X \leqslant 2Y) = \frac{1}{4}.$$

(U,V) 有四个可能值：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，

$P(U=0,V=0) = P(X \leqslant Y, X \leqslant 2Y) = P(X \leqslant Y) = \frac{1}{4}$，

$P(U=0,V=1) = P(X \leqslant Y, X > 2Y) = P(\varnothing) = 0$，

$P(U=1,V=0) = P(X > Y, X \leqslant 2Y) = P(Y < X \leqslant 2Y) = \frac{1}{4}$，

$P(U=1,V=1) = P(X > Y, X > 2Y) = P(X > 2Y) = \frac{1}{2}$.

综合有

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

例 6.4 设 X 与 Y 独立同分布，且 X 服从参数为 1 的指数分布，记 $U = \max(X,Y), V = \min(X,Y)$.

(1) 试求 U 的密度函数 $f_U(u)$；

(2) 试证 V 服从参数为 2 的指数分布.

解 由于 X 与 Y 独立同分布且 $\sim E(1)$，所以

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

利用 X 与 Y 的独立性，有

(1) U 的分布函数

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leqslant u) = P(\max(X,Y) \leqslant u) \\ &= P(X \leqslant u, Y \leqslant u) = P(X \leqslant u)P(Y \leqslant u) \\ &= F_X(u)F_Y(u) \\ &= \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-u})^2, & u \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

对 $F_U(u)$ 求导得

$$f_U(u) = \begin{cases} 2(1 - \mathrm{e}^{-u})\mathrm{e}^{-u}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2)\ F_V(v) &= P(V \leqslant v) = P(\min(X,Y) \leqslant v) \\ &= 1 - P(\min(X,Y) > v) = 1 - P(X > v, Y > v) \\ &= 1 - P(X > v)P(Y > v) \\ &= 1 - [1 - F_X(v)][1 - F_Y(v)] \\ &= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

对 $F_V(v)$ 求导得

$$f_V(v) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

易见 V 服从参数为 2 的指数分布.

例 6.5 设 X 与 Y 相互独立同分布，都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，试求 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

由卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x)\mathrm{d}x,$$

当 $f_X(x)f_Y(z-x)=1\times1$ 时必须有 $0<x<1$ 且 $0<z-x<1$，此区域见图6.1. 从图中发现不同的 z 对应了不同的积分上、下限，具体为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z 1\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 1\mathrm{d}x, & 1<z<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$
$$=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ 2-z, & 1<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

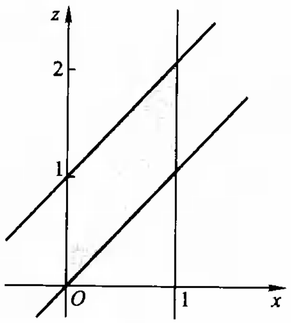


图 6.1

六、习题解答

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	4
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求出下列随机变量的分布律：(1) $X+2$；(2) $-X+1$；(3) X^2.

解 由 X 的分布律可列出下表

概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
X	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	4
$X+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
$-X+1$	3	$\frac{3}{2}$	1	-1	-3
X^2	4	$\frac{1}{4}$	0	4	16

由此表可定出

(1) $X+2$ 的分布律为

$X+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(2) $-X+1$ 的分布律为

$-X+1$	-3	-1	1	$\frac{3}{2}$	3
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(3) X^2 的分布律为

X^2	0	$\frac{1}{4}$	4	16
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$

其中 $P(X^2=4)=P(X=2)+P(X=-2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$.

2. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布，记随机变量

$$Y=\begin{cases}0, & 若 X\leqslant 1,\\ 1, & 若 X>1,\end{cases}$$

试求随机变量 Y 的分布律.

解 由于 X 服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布，因此

$$P(X=k)=\frac{1^k}{k!}\mathrm{e}^{-1}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

而

$$P(Y=0)=P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{0!}+\frac{\mathrm{e}^{-1}}{1!}=2\mathrm{e}^{-1},$$
$$P(Y=1)=P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-2\mathrm{e}^{-1},$$

即 Y 的分布律为

Y	0	1
概率	$2\mathrm{e}^{-1}$	$1-2\mathrm{e}^{-1}$

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 求出以下随机变量的密度函数：(1) $2X$；(2) $-X+1$；(3) X^2.

解 求连续型随机变量的函数的密度函数可通过先求其分布函数，然后再求密度函数. 如果 $y=g(x)$ 为单调可导函数，则也可利用密度变换公式求得.

(1) **解法一** 设 $Y=2X$，则 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X\leqslant y)=P\left(X\leqslant\frac{y}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0, & \frac{y}{2}<0,\\ \int_0^{\frac{y}{2}} 2x\mathrm{d}x, & 0\leqslant \frac{y}{2}<1,\\ \int_0^1 2x\mathrm{d}x, & \frac{y}{2}\geqslant 1\end{cases} = \begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{y^2}{4}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

解法二 $y=2x, x=\frac{y}{2}=h(y)$，而 $h'(y)=\frac{1}{2}$，则

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|$$

$$=\begin{cases}2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}, & 0<\frac{y}{2}<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) 设 $Y=-X+1$，则 $x=1-y=h(y), h'(y)=-1$，Y 的密度函数

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\begin{cases}2(1-y)\times|-1|, & 0<1-y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) 设 $Y=X^2$，由于 X 只取 $(0,1)$ 中的值，所以 $y=x^2$ 也为单调函数，其反函数 $h(y)=\sqrt{y}, h'(y)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$，因此 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\begin{cases}2\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}, & 0<\sqrt{y}<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

4. 对圆片直径进行测量，测量值 X 服从 $(5,6)$ 上的均匀分布，求圆片面积 Y 的密度函数.

解 圆片面积 $Y=\frac{1}{4}\pi X^2$，由于 X 均匀取 $(5,6)$ 中的值，所以 X 的密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 5<x<6,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

且 $y=\frac{1}{4}\pi x^2$ 为单调增加函数 $(x\in(5,6))$，其反函数

$$h(y)=\sqrt{\frac{4y}{\pi}}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}},\quad h'(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{\pi y}}.$$

因此 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 5<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}<6,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

5. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，试求随机变量函数 $Y=X^2$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

解 $X\sim N(0,1)$，所以 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$. 此时 $y=x^2$ 不为单调函数，不能直接利用性质求出 $f_Y(y)$. 须先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}), & y\geqslant 0,\end{cases}$$

$$P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

6. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，求随机变量函数 $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

解
$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$y=\mathrm{e}^x$ 的反函数 $h(y)=\ln y, h'(y)=\frac{1}{y}$，因此所求的 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\begin{cases}e^{-\ln y}\dfrac{1}{y}, & \ln y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

7. 设随机变量 X 服从 $N(0,1)$，证明：$\sigma X+a$ 服从 $N(a,\sigma^2)$，其中 a,σ 为两个常数且 $\sigma>0$.

证 由于 $X\sim N(0,1)$，所以 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$. 记 $Y=\sigma X+a$，则当 $\sigma>0$ 时，$y=\sigma x+a$ 为单增函数，其反函数 $h(y)=\dfrac{y-a}{\sigma}$，$h'(y)=\dfrac{1}{\sigma}$，因此 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<y<+\infty,$$

即证明了 $\sigma X+a\sim N(a,\sigma^2)$.

8. 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若 } X>0,\\ 0, & \text{若 } X=0,\\ -1, & \text{若 } X<0,\end{cases}$$

试求随机变量函数 Y 的分布律.

解 $X\sim R[-1,2]$，则

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而

$$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3},$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=0,$$

$$P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{2}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}.$$

因此所求分布律为

Y	-1	1
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

求以下随机变量的分布律：(1) $X+Y$；(2) $X-Y$；(3) $2X$；(4) XY.

解

概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$X+Y$	2	3	4	3	4	5	4	5	6
$X-Y$	0	-1	-2	1	0	-1	2	1	0
XY	1	2	3	2	4	6	3	6	9

从而得到

(1)

$X+Y$	2	3	4	5
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(2)

$X-Y$	-2	-1	0	1	2
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(3) 从联合分布律可求得 X 的边缘分布律为

X	1	2	3
概率	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

由此得 $2X$ 的分布律为

$2X$	2	4	6
概率	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(4)

XY	1	2	3	6
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

10. 设随机变量 X,Y 相互独立,$X\sim B\left(1,\frac{1}{4}\right)$,$Y\sim B\left(1,\frac{1}{4}\right)$.

(1) 记随机变量 $Z=X+Y$,求 Z 的分布律;

(2) 记随机变量 $U=2X$,求 U 的分布律.

从而证实:即使 X,Y 服从同样的分布,$X+Y$ 与 $2X$ 的分布并不一定相同,直观地解释这一结论.

解 (1) 由于 $X\sim B\left(1,\frac{1}{4}\right)$,$Y\sim B\left(1,\frac{1}{4}\right)$,且 X 与 Y 独立,由二项分布可加性知 $X+Y\sim B\left(2,\frac{1}{4}\right)$,即 $P(Z=k)=P(X+Y=k)=\binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2-k}$,$k=0,1,2$,经计算有

Z	0	1	2
概率	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2) 由于

X	0	1
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

因此

$U=2X$	0	2
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

易见 $X+Y$ 与 $2X$ 的分布并不相同. 直观的解释是 $X+Y$ 与 $2X$ 的取值并不相同,这是因为 X 与 Y 并不一定同时取同一值,因而导致它们的分布也不同.

***11.** 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,给定 $X=k$,Y 的条件分布是参数为 k,p 的二项分布($0<p<1$,k 为非负整数).

(1) 求 Y 的分布律;

(2) 求 $X-Y$ 的分布律;

(3) 证明:Y 与 $X-Y$ 相互独立.

(提示:$P(Y=y)=\sum\limits_{k=y}^{+\infty}P(Y=y\mid X=k)P(X=k)$,$y=0,1,\cdots$.)

解 (1)
$$\begin{aligned}P(Y=n)&=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=n\mid X=k)P(X=k)\\&=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}p^nq^{k-n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-n)!}q^{k-n}\frac{p^n}{n!}e^{-\lambda}\\&=\sum_{k'=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k'}}{k'!}q^{k'}\frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{\lambda q}e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^n}{n!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^n}{n!},\end{aligned}$$
$n=0,1,2,\cdots$,所以 $Y\sim P(\lambda p)$.

(2)
$$\begin{aligned}P(X-Y=n)&=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i+n,Y=i)\\&=\sum_{i=0}^{+\infty}P(Y=i\mid X=i+n)P(X=i+n)\\&=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{i+n}{i}p^iq^n\frac{\lambda^{i+n}}{(i+n)!}e^{-\lambda}\\&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{p^i\lambda^{i+n}}{i!\ n!}q^ne^{-\lambda}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^i}{i!}(\lambda q)^n\frac{e^{-\lambda}}{n!}\\&=\frac{(\lambda q)^n}{n!}e^{-\lambda q},\quad n=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$
所以 $X-Y\sim P(\lambda q)$.

(3)
$$\begin{aligned}P(Y=i,X-Y=j)&=P(X=i+j,Y=i)\\&=P(Y=i\mid X=i+j)P(X=i+j)\\&=\binom{i+j}{i}p^iq^j\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}e^{-\lambda}=\left(\frac{p^i\lambda^i}{i!}e^{-\lambda p}\right)\left(\frac{q^j\lambda^j}{j!}e^{-\lambda q}\right)\\&=P(Y=i)P(X-Y=j),\end{aligned}$$
对任何 $i,j=0,1,2,\cdots$,因而 Y 与 $X-Y$ 独立.

12. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(1) 求 $U=\max(X,Y)$ 的分布律;

(2) 求 $V=\min(X,Y)$ 的分布律;

(3) 求(U,V) 的联合分布律.

解 (1) 随机变量 U 可能取到的值为 1,2,3 中的一个,且

$$P(U=1)=P(\max(X,Y)=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9},$$

$$\begin{aligned}P(U=2)&=P(\max(X,Y)=2)\\&=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)\\&=0+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(U=3)&=P(\max(X,Y)=3)\\&=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=1)+\\&\quad P(X=3,Y=2)+P(X=3,Y=3)\\&=0+0+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9},\end{aligned}$$

综合有

U	1	2	3
概率	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

(2) 随机变量 V 可能取到的值为 1,2,3 中的一个,且

$$\begin{aligned}P(V=1)&=P(\min(X,Y)=1)\\&=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)\\&\quad+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)\\&=\frac{1}{9}+0+0+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9},\end{aligned}$$

同理可求得 $P(V=2)=\frac{1}{3}$,$P(V=3)=\frac{1}{9}$,综合有

V	1	2	3
概率	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

(3) $P(U=1,V=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9}$,

$$P(U=2,V=1)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{2}{9},$$

$$P(U=2,V=2)=P(X=2,Y=2)=\frac{1}{9},$$

$$P(U=3,V=1)=P(X=1,Y=3)+P(X=3,Y=1)=\frac{2}{9},$$

$$P(U=3,V=2)=P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=2)=\frac{2}{9},$$

$$P(U=3,V=3)=P(X=3,Y=3)=\frac{1}{9},$$

所以(U,V) 的分布律为

U \ V	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

13. 设二维随机变量(X,Y) 服从在 D 上的均匀分布,其中 D 为直线 $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=2$ 所围成的区域,求 $X-Y$ 的分布函数及密度函数.

解 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x<2,0<y<2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $Z=X-Y$,则 Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)\\&=P(X-Y\leqslant z)\\&=\iint_{D_z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中区域 $D_z=\{(x,y):x-y\leqslant z\}$.

当 $z<-2$ 时,积分区域 D_z 见图 6.2,此时

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

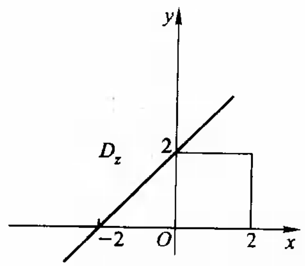


图 6.2

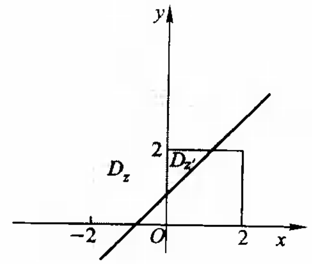


图 6.3

当 $-2\leqslant z<0$ 时,积分区域 D_z 见图 6.3,此时

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{z'}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\times\text{区域 }D_{z'}\text{ 的面积}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(2+z)^2=\frac{1}{8}(2+z)^2,$$

其中 $D_{z'}$ 是区域 D_z 限制在 $0<x<2,0<y<2$ 中的那部分.

当 $0\leqslant z<2$ 时,积分区域 D_z 见图 6.4,此时

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{z'}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\times\text{区域 }D_{z'}\text{ 的面积}$$

$$=\frac{1}{4}\times\left[4-\frac{1}{2}\times(2-z)^2\right]$$

$$=1-\frac{1}{8}(2-z)^2,$$

其中 $D_{z'}$ 是区域 D_z 限制在 $0<x<2,0<y<2$ 中的那部分.

当 $z\geqslant 2$ 时,积分区域 D_z 见图 6.5,此时

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

综合有

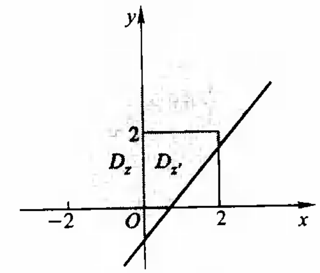


图 6.4

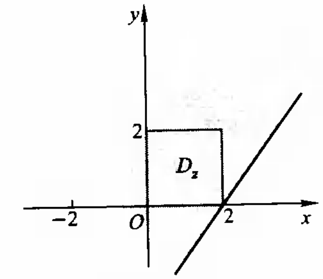


图 6.5

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-2,\\ \dfrac{1}{8}(2+z)^2, & -2\leqslant z<0,\\ 1-\dfrac{1}{8}(2-z)^2, & 0\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2,\end{cases}$$

Z 的密度函数

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(2+z), & -2<z\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{4}(2-z), & 0\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

***14.** 设随机变量 X,Y 相互独立,且有相同的分布 $N(0,1)$,$U=X-Y$,$V=|X-Y|$,求:(1) U 的密度函数;(2) V 的密度函数.

解 (1) $F_U(u)=P(X-Y\leqslant u)=\iint\limits_{x-y\leqslant u}\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y+u}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X\leqslant y+u)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_X(y+u)f_Y(y)\mathrm{d}y,$$

其中,$f_Y(\cdot)$,$F_X(\cdot)$ 分别是 Y 的密度函数和 X 的分布函数. 因而 U 有密度函数

$$f_U(u)=F'_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y+u)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{(y+u)^2+y^2}{2}\right\}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\left(y + \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{u^2}{4} \right\} dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\left(y + \frac{u}{2}\right)^2 \right\} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}},$$

$$-\infty < u < +\infty,$$

即 $U \sim N(0,2)$.

(2) $v > 0$,因为 $F_V(v) = P(|U| \leqslant v) = P(-v \leqslant U \leqslant v) = 2P(0 \leqslant U \leqslant v)$,所以,

$$f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}}, & v > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

15. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布密度为 $f(x,y)$,用函数 f 表达随机变量 $X+Y$ 的密度函数.

解 设 $Z = X + Y$,则 Z 的分布函数

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) = \iint_{x+y \leqslant z} f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy.$$

对积分变量 y 作变换 $u = x + y$,得到

$$\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{z} f(x, u - x) du.$$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z} f(x, u - x) du \right\} dx,$$

交换积分变量 x,u 的次序得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u - x) dx \right\} du.$$

从而,Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx.$$

把 X 与 Y 的地位对换,同样可得到 Z 的密度函数的另一种形式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy.$$

16. 设随机变量 $X \sim N(a,\sigma^2)$,$Y \sim N(b,\tau^2)$,且 X,Y 相互独立,$Z = X + Y$,求 $Z|X = x$的条件分布密度函数.

解 由 X 与 Y 独立,可知 $P(Z \leqslant z | X = x) = P(Y \leqslant z - x | X = x) = P(Y \leqslant z - x)$,对任何 $-\infty < z < +\infty$,因而

$$f_{Z|X}(z|x) = (P(Z \leqslant z | X = x))' = (P(Y \leqslant z - x))'$$

$$= f_Y(z - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left\{ -\frac{1}{2\tau^2}(z - x - b)^2 \right\}, \quad -\infty < z < +\infty,$$

其中 $f_Y(\cdot)$ 为 Y 的密度函数,此即 $Z|X = x \sim N(x + b, \tau^2)$.

17. 用于计算机接线柱上的保险丝寿命服从参数 $\lambda = 0.2$ 的指数分布. 每个接线柱要求两个这样的保险丝,这两个保险丝有独立的寿命 X 与 Y.

(1) 其中一个充当备用件,仅当第一个保险丝失效时投入使用,求总的有效寿命 $Z = X + Y$ 的密度函数;

(2) 若这两个保险丝同时独立使用,则求有效寿命 $U = \max(X,Y)$ 的密度函数.

解 (1) 依假设 X,Y 有公共密度

$$f = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由题 15 知 $Z = X + Y$ 有密度函数

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z - x) dx = \begin{cases} 0.04 \int_0^z e^{-0.2x} e^{-0.2(z-x)} dx, & z > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.04 z e^{-0.2z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $F_U(u) = P(\max(X,Y) \leqslant u) = P(X \leqslant u, Y \leqslant u) = (P(X \leqslant u))^2$,

$$f_U(u) = (F_U(u))' = 2P(X \leqslant u) f(u) = \begin{cases} 2(1 - e^{-0.2u}) 0.2e^{-0.2u}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.4e^{-0.2u} - 0.4e^{-0.4u}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

18. 设随机变量 X,Y 相互独立,且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布,记 Z 是以 X,Y 为边长的矩形的面积,求 Z 的密度函数.

解 $F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(XY \leqslant z) = \int P(XY \leqslant z | Y = y) f_Y(y) dy$

$$= \int_0^1 P\left(X \leqslant \frac{z}{y}\right) dy = \int_z^1 \frac{z}{y} dy + \int_0^z dy$$

$$= z(\ln y)\Big|_z^1 + z = -z\ln z + z, \quad 1 > z > 0,$$

$$f_Z(z) = [F_Z(z)]' = -1 - \ln z + 1 = -\ln z, \quad 0 < z < 1.$$

因此 Z 有密度函数

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\ln z, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

*19. 设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的密度函数.

（提示：使用 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=\int P(Z\leqslant z\mid Y=y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 P(X\leqslant yz)\mathrm{d}y$，其中用到 X 与 Y 的独立性.）

解　当 $z\geqslant 1$,

$$F_Z(z)=P\left(\frac{X}{Y}\leqslant z\right)=\int P\left(\frac{X}{Y}\leqslant z\mid Y=y\right)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 P(X\leqslant yz)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{z}}yz\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{z}}^1\mathrm{d}y=\frac{1}{2z}+1-\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2z};$$

当 $0<z<1$,

$$F_Z(z)=\int_0^1 P(X\leqslant yz)\mathrm{d}y=\int_0^1 yz\mathrm{d}y=\frac{z}{2}.$$

因此，Z 有密度函数

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2z^2}, & z\geqslant 1,\\ \frac{1}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

练　习　6

6.1　设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布律为

X	0	1
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

试求随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律.

6.2　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1\leqslant x\leqslant 8,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $Y=\sqrt[3]{X}-1$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

6.3　设随机变量 X 与 Y 独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的密度函数.

6.4　假设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & \text{若 } U\leqslant -1,\\ 1, & \text{若 } U>-1,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & \text{若 } U\leqslant 1,\\ 1, & \text{若 } U>1.\end{cases}$$

试求 (X,Y) 的联合分布律.

6.5　设 X 与 Y 相互独立，X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，试求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

6.6　设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从参数为 1 的指数分布，Y 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，试求 $Z=\max(X,Y)$ 的密度函数.

答案与提示

6.1

Z	0	1
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

6.2　$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6.3　$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$，$-\infty<z<+\infty$.

6.4

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

6.5　$f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6.6　$f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}+z\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ \mathrm{e}^{-z}, & z>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

第七章　随机变量的数字特征

一、基本要求

1. 理解随机变量的数字特征(包括数学期望、中位数、方差、标准差、协方差、相关系数)的概念.
2. 会用数字特征的基本性质计算数字特征.
3. 掌握常用随机变量分布的数字特征.
4. 会求一维随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望 $E[g(X)]$.
5. 会求二维随机变量函数 $g(X,Y)$ 的数学期望 $E[g(X,Y)]$.
6. 了解切比雪夫不等式的条件和结论.
7. 了解常用大数定律的条件和结论.
8. 了解中心极限定理的条件和结论,并会利用相关定理近似计算有关随机事件的概率.

二、内容提要

1. 随机变量的数学期望

(1) 一维离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 有分布律

X	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

其中 $p_i=P(X=x_i)$,当 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i<+\infty$ 时,称 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_ip_i$ 为随机变量 X 的数学期望,简称期望或均值,记为 $E(X)$.

设 Y 为随机变量 X 的函数:$Y=g(X)$,$g(\cdot)$ 是实值函数,当 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|g(x_i)|p_i<+\infty$ 时,称 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}g(x_i)p_i$ 为随机变量 Y 的数学期望,记为 $E(Y)=E[g(x)]$

$=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}g(x_i)p_i$.

(2) 一维连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 有概率密度 $f(x)$,当 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x<+\infty$ 时,称 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$.

设 Y 是随机变量 X 的函数:$Y=g(X)$,$g(\cdot)$ 是实值函数,$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)\mathrm{d}x<+\infty$ 时,称 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 为随机变量 Y 的数学期望,记为 $E(Y)=E[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 二维随机变量 (X,Y) 的函数的期望

设 (X,Y) 为离散型随机变量,有联合分布律

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)\ (i,j=1,2,\cdots),$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij}<+\infty$ 时,称 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$ 为 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望,记为 $E[g(X,Y)]$.

设 (X,Y) 为连续型随机变量,有联合密度 $f(x,y)$,当

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x,y)|f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x<+\infty$$

时,称 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 为 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望,记为 $E[g(X,Y)]$.

(4) 数学期望的性质

(i) $E(c)=c$,c 为常数.

(ii) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$,a,b 为常数.

(iii) 如 X,Y 独立,则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

2. 随机变量的中位数

设 X 是一连续型随机变量,称满足 $P(X\leqslant\mu_{0.5})=\frac{1}{2}=P(X\geqslant\mu_{0.5})$ 的实数 $\mu_{0.5}$ 为 X 的中位数. 中位数是描述随机变量分布的中心位置的数字特征.

3. 随机变量的方差和标准差

(1) 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若 $E[X-E(X)]^2$ 存在,则称 $E[X-E(X)]^2$ 为 X 的方差,记为 $D(X)$. $\sqrt{D(X)}$ 称为 X 的标准差,记为 σ_X.

常用的计算方差的公式：

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

（2）方差的性质

（i）$D(c)=0$，c 为常数.

（ii）$D(aX)=a^2D(X)$，a 为常数.

（iii）若 X 与 Y 独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$. 一般地，若随机变量 X_1，X_2，…，X_n 相互独立，则 $D\left(\sum_{i=1}^{n}k_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2D(X_i)$，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数.

4. 协方差和相关系数

（1）协方差的定义

设二维随机变量 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)=(X-E(X))(Y-E(Y))$ 的数学期望存在，则称 $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 $\mathrm{cov}(X,Y)$.

常用的计算协方差的公式：

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

（2）协方差的性质

（i）$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$.

（ii）$\mathrm{cov}(X,X)=D(X)$.

（iii）$\mathrm{cov}(aX+b,cY+d)=ac\,\mathrm{cov}(X,Y)$，$a,b,c,d$ 为常数.

（3）相关系数的定义

设二维随机变量 X,Y 的方差和协方差存在，称 $\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 和 Y 的相关系数，记为 $\rho_{X,Y}$.

（4）相关系数的性质

（i）$|\rho_{X,Y}|\leqslant 1$.

（ii）$\rho_{X,Y}=0$，称之为 X 与 Y 不相关.

（iii）$|\rho_{X,Y}|=1$，称之为 X 与 Y 完全相关，其充要条件为：存在常数 a,b 使得 $P(Y=aX+b)=1$.

5. 常用随机变量的数字特征

（1）二项分布

当 $X\sim B(n,p)$ 时，$E(X)=np$，$D(X)=npq$，其中 $q=1-p$.

（2）泊松分布

当 $X\sim P(\lambda)$ 时，$E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$.

（3）均匀分布

当 $X\sim R(a,b)$ 时，$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，$D(X)=\dfrac{1}{12}(b-a)^2$.

（4）指数分布

当 $X\sim E(\lambda)$ 时，$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

（5）正态分布

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.

（6）二维正态分布

当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 时，$E(X)=\mu_1$，$D(X)=\sigma_1^2$，$E(Y)=\mu_2$，$D(Y)=\sigma_2^2$，$\mathrm{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$，$\rho_{X,Y}=\rho$.

6. 大数律

（1）切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$ 存在，则对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-\mu|>\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

（2）切比雪夫大数律

设 $X_1,X_2,\cdots$ 是相互独立的随机变量序列，其期望与方差都存在，且存在常数 c，使 $D(X_i)\leqslant c\ (i=1,2,\cdots)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1.$$

（3）伯努利大数律

设 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布，且 $\mu=E(X_i)$，$\sigma^2=D(X_i)\ (i=1,2,\cdots)$ 存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|\leqslant\varepsilon)=1,$$

其中 $\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

7. 中心极限定理

（1）棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理

设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一个独立同分布的随机变量序列，且 $X_i\sim B(1,p)(i=1,2,\cdots)$，$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则对任意 x，$-\infty<x<+\infty$，总有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

（2）独立同分布的中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一个独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots)$，则对任意 $x, -\infty<x<+\infty$，总有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right)=\Phi(x).$$

三、学习要点

本章的重点是随机变量的数学期望，而随机变量的方差、协方差和相关系数都可看成随机变量(或随机向量)的某些函数的数学期望. 通过例题及习题的训练，掌握随机变量的基本数字特征的计算. 关键是随机变量及随机变量函数的数学期望的计算.

关于中心极限定理，了解它的本质即是在客观实际中，若随机变量是由大量的相互独立的随机因素共同作用所形成的，而其中每一个随机因素所起的作用都很小，则这种随机变量往往近似地服从正态分布. 要求掌握用中心极限定理计算概率的近似值，特别是服从二项分布的随机变量的有关的概率的近似值.

四、释疑解难

问 7.1 数学期望、方差及协方差、相关系数的实际意义是什么?

答 数学期望又称为均值，它反映了随机变量平均取值的大小，它是一个数，而不再有随机性.

方差表达了 X 的取值与其数学期望的偏离程度. 若 X 取值比较集中，则 $D(X)$ 较小，反之，若 X 取值比较分散，则 $D(X)$ 较大. 因此 $D(X)$ 刻画了 X 取值的分散程度.

协方差和相关系数都是 X 与 Y 之间相互关系的一种度量. 两者的区别是协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$ 的单位是 X 和 Y 的单位的乘积，当 X,Y 使用不同的量纲时，其意义不是很明确. 而根据相关系数 $\rho_{X,Y}=\operatorname{cov}\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right)$ 的定义，消除了方差的影响，是一个无量纲的纯量，相关系数的大小直接反映了 X 与 Y 的相关程度.

问 7.2 数学期望定义中的条件：级数绝对收敛或积分绝对收敛的作用是什么?

答 以级数为例，在求数学期望 $E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ 时，加项的次序变换应不影响求和结果. 但当级数为无穷级数时，只有当 $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_i$ 收敛时，才能保证求和与

加项次序无关，所以这一条件是不可少的，但对于通常随机变量而言，该条件一般都是满足的. 也存在一些随机变量，它的数学期望并不存在，如 X 服从柯西分布，即密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty)$，由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=+\infty$，因此 $E(X)$ 不存在.

问 7.3 不相关与独立有什么区别?

答 若随机变量 X 与 Y 独立，则 X 与 Y 不相关. 反之，若 X 与 Y 不相关，则 X 与 Y 却不一定独立. 不相关与独立是两个不同的概念，其含义是不同的，不相关只是就线性关系而言的，不相关反映 X 与 Y 没有线性关系，但不排除有其他联系. 而若 X 与 Y 独立，则在概率意义下，X 与 Y 之间没有关联关系. 只有当 (X,Y) 服从二维正态分布时，X 与 Y 不相关等价于 X 与 Y 独立.

五、例题分析及增补

例 7.1 设随机变量 X 有分布律

X	-2	-1	0	1
P	0.2	0.3	0.4	0.1

求 $E(X), E(X+1), E(X^2), E(2X^2+3)$.

解 由随机变量 X 的分布律，得

X	-2	-1	0	1
$X+1$	-1	0	1	2
X^2	4	1	0	1
$2X^2+3$	11	5	3	5
P	0.2	0.3	0.4	0.1

所以

$$E(X)=-2\times0.2+(-1)\times0.3+0\times0.4+1\times0.1=-0.6,$$
$$E(X+1)=-1\times0.2+0\times0.3+1\times0.4+2\times0.1=0.4,$$
$$E(X^2)=4\times0.2+1\times0.3+0\times0.4+1\times0.1=1.2,$$
$$E(2X^2+3)=11\times0.2+5\times0.3+3\times0.4+5\times0.1=5.4.$$

另外，根据数学期望的性质可得

$$E(X+1)=E(X)+1=0.4,$$
$$E(2X^2+3)=2E(X^2)+3=5.4.$$

例 7.2 一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率

相应为 0.1,0.2 和 0.3. 假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数. 试求 X 的数学期望和方差.

解法一 设 $A_i=\{第\ i\ 个部件需要调整\}(i=1,2,3)$,$P(A_1)=0.1$,$P(A_2)=0.2$,$P(A_3)=0.3$. 所以

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504,$$

$$\begin{aligned}P(X=1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3\\&=0.398,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)\\&=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3\\&=0.092,\end{aligned}$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006.$$

所以

$$E(X)=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6,$$

$$\begin{aligned}D(X)&=E(X^2)-(E(X))^2\\&=0\times0.504+1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006-0.6^2\\&=0.46.\end{aligned}$$

解法二 设

$$X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 个部件需要调整,\\0, & 第\ i\ 个部件不需要调整,\end{cases}\quad i=1,2,3,$$

显然 X_1,X_2,X_3 相互独立,且

$$X=X_1+X_2+X_3.$$

由于

$$P(X_1=1)=0.1,\quad P(X_1=0)=0.9,$$
$$P(X_2=1)=0.2,\quad P(X_2=0)=0.8,$$
$$P(X_3=1)=0.3,\quad P(X_3=0)=0.7,$$

所以

$$E(X_1)=0.1,\quad E(X_2)=0.2,\quad E(X_3)=0.3,$$
$$D(X_1)=0.09,\quad D(X_2)=0.16,\quad D(X_3)=0.21,$$

故

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=0.6,$$
$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)=0.46.$$

例 7.3 设从含 M 件次品,$N-M$ 件正品的同型号产品中,不放回抽取 n 件,

X 为抽到 n 件产品中的次品数,求 $E(X)$,$D(X)$.

解法一 见本章习题解答的习题 11.

解法二 不放回抽取 n 件,可看成不放回抽取 n 次,每次抽取 1 件,记

$$X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 次抽到次品,\\0, & 第\ i\ 次抽到正品,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

因 $E(X_i)=P(X_i=1)=\dfrac{M}{N}$,$i=1,2,\cdots,n$,所以

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{nM}{N}.$$

又 $E(X_i^2)=E(X_i)=\dfrac{M}{N}$,

$$D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=\frac{M}{N}-\left(\frac{M}{N}\right)^2=\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right).$$

对于任意 $i\neq j$,有

$$E(X_iX_j)=P(X_i=1,X_j=1)=\frac{M(M-1)}{N(N-1)}$$

及

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{M(M-1)}{N(N-1)}-\left(\frac{M}{N}\right)^2=\frac{M}{N}\frac{M-N}{N(N-1)}.$$

所以

$$\begin{aligned}D(X)&=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)+n(n-1)\frac{M}{N}\frac{M-N}{N(N-1)}\\&=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).\end{aligned}$$

注 (1) 当抽样为有放回时,可令 $p=\dfrac{M}{N}$,即抽到次品的概率,则 $X\sim B(n,p)$. 因而 $E(X)=np=\dfrac{nM}{N}$,$D(X)=npq=n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)$. 因此在这两种不同的抽样方案下,有相同的均值和不同的方差,且因 $0<1-\dfrac{n-1}{N-1}<1$,可知无放回抽取的方差小于有放回时的方差.

(2) 若批量 N 很大,相比之下抽样个数 n 很小,从而 $\dfrac{n}{N}\approx0$,此时 $1-\dfrac{n-1}{N-1}\approx1$,两种抽样方案的方差相接近,也即不放回抽样可看成有放回抽样.

例 7.4 设 X,Y 相互独立,且都服从参数 p 的几何分布,令 $Z=X+Y$,求

$E(Y\mid Z=z),z\geqslant 2$ 为给定的整数.

解 $P(Z=z)=P(X+Y=z)=\sum\limits_{i=1}^{z-1}P(X=i,Y=z-i)$

$$=\sum_{i=1}^{z-1}P(X=i)P(Y=z-i)=\sum_{i=1}^{z-1}pq^{i-1}pq^{z-i-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{z-1}p^2q^{z-2}=p^2q^{z-2}(z-1),$$

$$P(Y=k\mid Z=z)=\frac{P(X=z-k,Y=k)}{P(Z=z)}$$

$$=\frac{P(X=z-k)P(Y=k)}{P(Z=z)}$$

$$=\frac{pq^{z-k-1}pq^{k-1}}{p^2q^{z-2}(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1},\quad k=1,2,\cdots,z-1,$$

所以

$$E(Y\mid Z=z)=\sum_{k=1}^{z-1}kP(Y=k\mid Z=z)=\sum_{k=1}^{z-1}\frac{k}{z-1}=\frac{z}{2}.$$

例 7.5 $E(X)$ 不存在的一个例子:

设 X 有分布律

$$p_k=P(X=k)=\frac{1}{k(k+1)},\quad k=1,2,\cdots,$$

易知

$$\sum_{k=1}^{+\infty}p_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots=1,$$

因此$\{p_k\}$是分布律. 但 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|k|p_k=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k+1}=+\infty$,因此 $E(X)$ 不存在.

例 7.6 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布,试求:

(1) $E(3X)$ 与 $D(3X)$;

(2) $E(e^{-3X})$ 与 $D(e^{-3X})$.

解 由已知,X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

(1) $E(3X)=3E(X)=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,

$$D(3X)=9D(X)=9\times\frac{1}{2^2}=\frac{9}{4}.$$

(2) $E(e^{-3X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3x}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}2e^{-2x}\,dx$

$$=\int_0^{+\infty}2e^{-5x}\,dx=\frac{2}{5},$$

$$D(e^{-3X})=E(e^{-6X})-(E(e^{-3X}))^2=\int_0^{+\infty}e^{-6x}2e^{-2x}\,dx-\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$=\int_0^{+\infty}2e^{-8x}\,dx-\frac{4}{25}=\frac{1}{4}-\frac{4}{25}=\frac{9}{100}.$$

例 7.7 设(X,Y)有联合密度$f(x,y)=\begin{cases}k(k-1)(y-x)^{k-2}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$($k\geqslant 2$ 为整数),求:

(1) $E(X)$;

(2) $E(X\mid Y=y)$;

(3) 说明 $E(E(X\mid Y))=E(X)$,其中 $E(X\mid Y)=E(X\mid Y=y)\Big|_{y=Y}$.

解 (1) 先求 $f_X(x)$:

$$f_X(x)=\int_x^1 f(x,y)\,dy=k(k-1)\int_x^1(y-x)^{k-2}\,dy$$

$$=k(y-x)^{k-1}\Big|_{y=x}^{y=1}=k(1-x)^{k-1},\quad 0<x<1,$$

因此

$$f_X(x)=\begin{cases}k(1-x)^{k-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx=k\int_0^1 x(1-x)^{k-1}\,dx=kB(2,k)$$

$$=k\frac{\Gamma(2)\Gamma(k)}{\Gamma(k+2)}=k\frac{(k-1)!}{(k+1)!}=\frac{1}{k+1}.$$

(2) 先求 $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=k(k-1)\int_0^y(y-x)^{k-2}\,dx$$

$$=-k(y-x)^{k-1}\Big|_{x=0}^{x=y}=ky^{k-1},\quad 0<y<1,$$

因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}ky^{k-1}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}(k-1)(y-x)^{-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{k-1}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以当 $0<y<1$ 时,

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x=(k-1)\int_0^y x(y-x)^{-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{k-1}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令 t=\frac{x}{y}}(k-1)y\int_0^1 t(1-t)^{k-2}\mathrm{d}t=(k-1)y\frac{\Gamma(2)\Gamma(k-1)}{\Gamma(k+1)}$$

$$=(k-1)y\frac{(k-2)!}{k!}=\frac{y}{k}.$$

(3) 由(2)知 $E(X\mid Y)=E(X\mid Y=y)\mid_{y=Y}=\frac{Y}{k}$ 是随机变量 Y 的函数,因而有期望值

$$E(E(X\mid Y))=E\left(\frac{Y}{k}\right)=\frac{1}{k}k\int_0^1 yy^{k-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{k+1}y^{k+1}\Big|_0^1=\frac{1}{k+1},$$

结合(1)即得 $E(E(X\mid Y))=E(X)$.

例 7.8 设随机变量 $X\sim N(0,1)$,求 $E(X^k)$.

解 $X\sim N(0,1)$,则

$$E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

当 k 为奇数时,显然 $E(X^k)=0$;

当 k 为偶数时,

$$E(X^k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-x^{k-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+(k-1)\int_{-\infty}^{+\infty}x^{k-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right]$$

$$=(k-1)E(X^{k-2})=\cdots=(k-1)!!.$$

综上所述

$$E(X^k)=\begin{cases}(k-1)!!, & k\text{ 为偶数},\\ 0, & k\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

例 7.9 一工厂生产的某种设备的寿命 X(以年计)服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的指数分布. 工厂规定,出售的设备在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备盈利 100 元,调换一台设备厂方需花费 300 元,求厂方出售一台设备净盈利的期望.

解 设一台设备的净利润为 Y,

$$P(Y=100)=P(X\geqslant 1)=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}},$$

$$P(Y=-200)=P(X<1)=\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

所以

$$E(Y)=100\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}+(-200)\times(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})\approx 33.64(\text{元}).$$

例 7.10 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y\backslash X$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.2
1	0.3	0.1	0.1

求 $\rho_{X,Y}$.

解 X 与 Y 的边缘分布律分别为

X	0	1	2
$p_{i\cdot}$	0.4	0.3	0.3

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5

所以

$E(X)=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.3=0.9$,

$E(Y)=0\times0.5+1\times0.5=0.5$,

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0^2\times0.4+1^2\times0.3+2^2\times0.3-(0.9)^2=0.69$,

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0^2\times0.5+1^2\times0.5-(0.5)^2=0.25$,

$E(XY)=0\times0\times0.1+1\times0\times0.2+2\times0\times0.2+0\times1\times0.3+1\times1\times0.1+2\times1\times0.1$

$=0.3$,

从而

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{0.3-0.9\times0.5}{\sqrt{0.69}\sqrt{0.25}}=-0.36.$$

例 7.11 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2>1,\end{cases}$$

试证随机变量 X 与 Y 不相关,但不相互独立.

证 由 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\pi}\mathrm{d}y=0$,同理 $E(Y)=0$.

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{\pi}\,dx\,dy=0.$$

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，即随机变量 X 与 Y 是不相关的.

另外，X 与 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以当 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y),$$

即随机变量 X 与 Y 不是相互独立的.

例 7.12 一个系统由两个子系统并联而成，若只有一个子系统发生故障，则系统还能正常工作. 设两个子系统的工作寿命分别为 X 与 Y 且相互独立，并服从相同的指数分布：

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

求系统工作寿命 T 的数学期望.

解法一 由于 X 与 Y 相互独立，所以联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 $T=\max(X,Y)$ 得

$$t=\max(x,y)=\begin{cases}x, & x\geqslant y,\\ y, & x<y.\end{cases}$$

所以系统工作寿命 T 的期望

$$\begin{aligned}E(T)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)f(x,y)\,dx\,dy\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{x}x\lambda^2e^{-\lambda(x+y)}\,dy\,dx+\int_0^{+\infty}\int_0^{y}y\lambda^2e^{-\lambda(x+y)}\,dx\,dy\\&=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda}.\end{aligned}$$

解法二 X 与 Y 独立同分布于 $E(\lambda)$，$\lambda>0$，所以 $T=\max(X,Y)$ 有概率密度函数

$$f_T(t)=2F_X(t)f_X(t)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t}), & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

故

$$E(T)=\int_0^{+\infty}t2\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})\,dt=\frac{3}{2\lambda}.$$

例 7.13 已知生男婴的概率为 0.515，求在 10000 个婴儿中男孩不多于女孩的概率.

解 设 10000 个婴儿中男婴个数为 X，则 $X\sim B(10000,0.515)$，故

$$np=5150,\quad np(1-p)=2497.75.$$

利用棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理得

$$P(X\leqslant 5000)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{5000-5150}{\sqrt{2497.75}}\right)=\Phi(-3)=0.0013.$$

例 7.14 设供电站供应某地区 1000 户居民用电，各户用电情况相互独立. 已知每户每日用电量(单位：度)在[0,20]上均匀分布，求：

(1) 这 1000 户居民每日用电量超过 10100 度的概率；

(2) 要以 0.99 的概率保证该地区居民供应电量的需要，问供电站每天至少需向该地区供应多少度电？

解 设随机变量 X_i 表示第 i 户居民每日的用电量，则 $X_i\sim R(0,20)$. 故

$$E(X_i)=10,\quad D(X_i)=\frac{100}{3}.$$

由 $X=\sum\limits_{i=1}^{1000}X_i$，$X_i$ 相互独立，故

$$E(X)=10000,\quad D(X)=\frac{100000}{3}.$$

由独立同分布的中心极限定理得

(1)
$$\begin{aligned}P(X\geqslant 10100)&=1-P(X<10100)\\&=1-P\left(\frac{X-10000}{\sqrt{100000/3}}<\frac{10100-10000}{\sqrt{100000/3}}\right)\\&=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)=0.2912.\end{aligned}$$

(2) 设供电站每天至少供应 n 度电，则

$$\begin{aligned}P(X\leqslant n)&=P\left(\frac{X-10000}{\sqrt{100000/3}}<\frac{n-10000}{\sqrt{100000/3}}\right)\\&=\Phi\left(\frac{n-10000}{182.6}\right)\geqslant 0.99,\end{aligned}$$

即 $\dfrac{n-10000}{182.6}\geqslant 2.33$，$n\geqslant 10425.5$. 所以供电站每天至少供应 10426 度电.

六、习题解答

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

求:(1) $E(X)$;(2) $E(-X+1)$;(3) $E(X^2)$;(4) $D(X)$.

解 由随机变量 X 的分布律,得

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$-X+1$	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1
X^2	1	0	$\frac{1}{4}$	1	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

所以

(1) $E(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$.

(2) $E(-X+1)=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{12}+(-1)\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.

(3) $E(X^2)=1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{4}=\frac{35}{24}$.

(4) $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{35}{24}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{97}{72}$.

另外,也可根据数学期望的性质得

$$E(-X+1)=-E(X)+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}.$$

2. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布($\lambda>0$),且已知

$$E[(X-2)(X-3)]=2,$$

求 λ 的值.

解 因为

$$E[(X-2)(X-3)]=E(X^2-5X+6)=E(X^2)-5E(X)+6=2,$$

即

$$[D(X)+(E(X))^2]-5E(X)+6=2,$$

所以

$$\lambda+\lambda^2-5\lambda+4=0,$$

解得 $\lambda=2$.

3. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,试求 X^2 的数学期望 $E(X^2)$.

解 因为 $X\sim B(10,0.4)$,所以

$$E(X)=10\times0.4=4,\quad D(X)=10\times0.4\times0.6=2.4,$$

故

$$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=2.4+4^2=18.4.$$

4. 国际市场每年对我国某种出口商品的需求量 X 是一个随机变量,它在 $[2000,4000]$(单位:t)上服从均匀分布.若每售出一吨,可得外汇3万美元,若销售不出而积压,则每吨需保养费1万美元.问应组织多少货源,才能使平均收益最大?

解 设随机变量 Y 表示平均收益(单位:万美元),进货量为 a t,

$$Y=\begin{cases}3X-(a-X), & X<a,\\ 3a, & X\geqslant a,\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_{2000}^{a}(4x-a)\frac{1}{2000}\mathrm{d}x+\int_{a}^{4000}3a\frac{1}{2000}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2000}(-2a^2+14000a-8000000).$$

要使得平均收益 $E(Y)$ 最大,所以令

$$(-2a^2+14000a-8000000)'=0,$$

得 $a=3500$ t.

5. 一台设备由三大部件构成,在设备运转过程中各部件需要调整的概率相应为 0.1,0.2,0.3.假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,试求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

此题的解法参见例 7.2.

6. 设随机变量 X 有分布律

$$p_k=P(X=k)=pq^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1,q=1-p$,称 X 服从具有参数 p 的几何分布,求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

(提示:由幂级数逐项求导的性质可知 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}q^k\right)'=\left(\frac{1}{1-q}\right)^2$,

$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = 2\left(\frac{1}{1-q}\right)^3$.)

解 $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = p\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \frac{1}{p}$,

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \frac{1}{p}$$

$$= pq\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)'' + \frac{1}{p} = pq\left(\frac{1}{1-q}\right)'' + \frac{1}{p} = 2pq\left(\frac{1}{1-q}\right)^3 + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p},$$

所以

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$,求:(1) $E(X)$;(2) $E(X^2)$.

解 (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0$.

(2) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^2e^{-x}dx = 2$.

注 求解(1)时利用被积函数是奇函数的性质,求解(2)时化简为 $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ 可以看成服从参数为 1 的指数分布随机变量的二阶原点矩.

8. 某商店经销商品的利润率 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

求 $E(X), D(X)$.

解 (1) $E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx = \frac{1}{3}$.

(2) 因为 $E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)dx = \frac{1}{6}$,故

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

9. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,求 $E[(X+1)^{-1}]$.

解 $E[(X+1)^{-1}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\right)\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}$

$$= (e^{\lambda} - 1)\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

10. 设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布,$M > 0$ 为整数,$Y = \max(X, M)$,求 $E(Y)$.

解 $E(Y) = E[\max(X,M)] = \sum_{k=1}^{+\infty} \max(k,M)pq^{k-1}$

$$= M\sum_{k=1}^{M} pq^{k-1} + \sum_{k=M+1}^{+\infty} kpq^{k-1} = M(1-q^M) + p\left(\sum_{k=M+1}^{+\infty} q^k\right)',$$

其中

$$\left(\sum_{k=M+1}^{+\infty} q^k\right)' = \left(q^{M+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)' = \left(\frac{q^{M+1}}{1-q}\right)' = \frac{q^M(Mp+1)}{p^2},$$

所以

$$E(Y) = M - Mq^M + \frac{q^M(Mp+1)}{p} = M + \frac{q^M}{p} = M + \frac{(1-p)^M}{p}.$$

***11.** 设随机变量 X 有分布律

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n \wedge M,$$

其中 $n \wedge M = \min(n,M)$. 求 $E(X), D(X)$.

(提示:使用 $\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)}\binom{n-2}{m-2}$.)

解 $E(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}$

$$= \frac{Mn}{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$= \frac{Mn}{N}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{M-1}{k}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-k}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{Mn}{N},$$

其中用到

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)}\binom{n-2}{m-2}$$

及

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{M-1}{k}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-k}}{\binom{N-1}{n-1}}=1.$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}+E(X)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}M(M-1)\frac{\binom{M-2}{k-2}\binom{N-2-(M-2)}{n-2-(k-2)}}{\frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}}+\frac{Mn}{N}$$

$$=\frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{M-2}{k}\frac{\binom{N-2-(M-2)}{n-2-k}}{\binom{N-2}{n-2}}+\frac{Mn}{N}$$

$$=\frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)}+\frac{Mn}{N},$$

所以

$$D(X)=\frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)}+\frac{Mn}{N}-\left(\frac{Mn}{N}\right)^2=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

***12.** 将已写好的 n 封信的信纸随机地装入已写好的 n 个收信人的对应地址的信封，若有一封信的信纸的收信人与信封一致时，称之为有一个配对. 令 X 为 n 封已随机装好的信的配对数，求 $E(X)$，$D(X)$.

（提示：记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 封信配对},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$，有 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；先求 $E(X_i)$，$E(X_iX_j)$ 及 $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$，使用公式 $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$.）

解 记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 封信配对},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$，于是有 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 由于

$$E(X_i)=1\times\frac{1}{n},\quad E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)},$$

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\left(\frac{1}{n}\right)^2, i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j,$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=1,$$

$$D(X)=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

$$=n\times\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+n(n-1)\times\frac{1}{n^2(n-1)}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=1.$$

13. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(2X)$，$E(X+e^{-2X})$，$D(X)$.

解 $E(X)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$,

$E(2X)=2E(X)=2$,

$$E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx$$

$$=1+\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$,

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1.$

14. 设随机向量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(X-2Y)$，$E(3XY)$，$D(X)$，$D(Y)$，$\operatorname{cov}(X,Y)$，$\rho_{X,Y}$.

解 关于 X 与 Y 的边缘分布律分别为

X	0	1
P	0.5	0.5

Y	0	1
P	0.7	0.3

$E(X)=0\times0.5+1\times0.5=0.5$,

$E(X^2)=0^2\times0.5+1^2\times0.5=0.5$,

$D(X)=0.5-(0.5)^2=0.25$,

$E(Y)=0\times0.7+1\times0.3=0.3$,

$E(Y^2)=0^2\times 0.7+1^2\times 0.3=0.3$,

$D(Y)=0.3-(0.3)^2=0.21$,

$E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=0.5-2\times 0.3=-0.1$,

$$E(3XY)=3E(XY)=3(0\times 0\times 0.3+0\times 1\times 0.2+1\times 0\times 0.4+1\times 1\times 0.1)$$
$$=3\times 0.1=0.3,$$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.1-0.5\times 0.3=-0.05$,

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.05}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.21}}=-\frac{\sqrt{21}}{21}.$$

15. 盒中有3个白球和2个黑球，从中随机抽取2个，X,Y分别是抽到的2个球中的白球数和黑球数，求X与Y之间的相关系数$\rho_{X,Y}$.

解 $P(X=i)=\dfrac{\binom{3}{i}\binom{2}{2-i}}{\binom{5}{2}}$，$i=0,1,2$，即

$$P(X=0)=\frac{1}{10},\quad P(X=1)=\frac{3}{5},\quad P(X=2)=\frac{3}{10},$$

因此，

$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5},$$

$$E(X^2)=0\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5},$$

$$D(X)=\frac{9}{5}-\frac{36}{25}=\frac{9}{25}.$$

又显然$Y=2-X$，因而$E(Y)=2-E(X)=\dfrac{4}{5}$，

$$E(XY)=2E(X)-E(X^2)=\frac{12}{5}-\frac{9}{5}=\frac{3}{5},$$

$$D(Y)=D(X),\quad \operatorname{cov}(X,Y)=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{9}{25},$$

$$\rho_{X,Y}=-\frac{9}{25}\Big/\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\right)=-1.$$

16. 设随机变量X,Y相互独立，它们的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求$D(X+Y)$.

解 $X\sim E(2)$，所以$D(X)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$. $Y\sim E(4)$，所以$D(Y)=\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{16}$.

X,Y相互独立，所以

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{5}{16}.$$

***17.** 设随机变量$X_1,\cdots,X_n$独立，具有公共的$(0,1)$上的均匀分布，令$Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$，求$E(Y)$，$D(Y)$.

解 Y有密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}n(1-y)^{n-1}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$E(Y)=n\int_0^1 y(1-y)^{n-1}dy=n\times B(2,n)$$
$$=n\frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(2+n)}=n\times\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

又

$$E(Y^2)=n\int_0^1 y^2(1-y)^{n-1}dy=n\times B(3,n)$$
$$=n\frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{\Gamma(3+n)}=n\times\frac{2!\,(n-1)!}{(n+2)!}=\frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

因此

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

***18.** 设随机变量X有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(\lambda>0,\alpha>0\text{为常数}),$$

则称X服从具有参数(α,λ)的伽马分布，记为$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，其中$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}e^{-y}dy$. 伽马函数有性质：对任意实数$x$有$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，特别对正整数$n$有$\Gamma(n+1)=n!$. 今设$Y\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda)$，$Z\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$，且$Y$与$Z$相互独立，$W=\dfrac{Z}{Y}$，求$E(W)$.

（提示：使用独立性，有$E(W)=E\left(\dfrac{Z}{Y}\right)=E(Z)E\left(\dfrac{1}{Y}\right)$.）

解 注意Y与Z独立，有$E(W)=E\left(\dfrac{Z}{Y}\right)=E(Z)E\left(\dfrac{1}{Y}\right)$，今

$$E(Z)=\frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha_2}e^{-\lambda x}dx\xlongequal{令\ y=\lambda x}\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha_2)}\times\int_0^{+\infty}y^{\alpha_2}e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha_2)}\Gamma(\alpha_2+1)=\frac{\alpha_2}{\lambda},$$

$$E\left(\frac{1}{Y}\right)=\frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha_1-2}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^2}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{\alpha_1-2}e^{-\lambda x}dx$$

$$\xlongequal{令\ y=\lambda x}\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{+\infty}y^{\alpha_1-2}e^{-y}dy=\frac{\lambda\Gamma(\alpha_1-1)}{\Gamma(\alpha_1)}=\frac{\lambda}{\alpha_1-1},$$

因而 $E(W)=E(Z)E\left(\frac{1}{Y}\right)=\frac{\alpha_2}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\alpha_1-1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1-1}$.

*19. 设随机变量 X 服从参数为 (a,b) 的贝塔分布,即有密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $E(X),D(X)$.

(提示:已知贝塔函数 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$,有关系式 $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.)

解 $E(X)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}B(a+1,b)$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}=\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+1)}=\frac{a}{a+b},$$

又

$$E(X^2)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)}$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+2)}=\frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)},$$

所以

$$D(X)=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\frac{a^2}{(a+b)^2}=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

20. 验证:当 (X,Y) 为二维连续型随机变量时,按公式 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dydx$ 及按公式 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 算得的 $E(X)$ 值相等.这里,$f(x,y)$,$f(x)$ 依次表示 (X,Y),X 的分布密度,即证明:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$$

证 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$

21. 设二维随机变量 (X,Y) 服从在 A 上的均匀分布,其中 A 为 x 轴、y 轴及直线 $x+y+1=0$ 所围成的区域,求:(1) $E(X)$;(2) $E(-3X+2Y)$;(3) $E(XY)$ 的值.

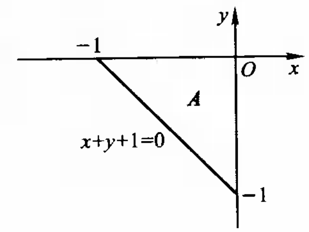


图 7.1

解 先画出 A 区域的图(图 7.1).

由题意知

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in A,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x-1}^{0}2dy=2(1+x), & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-1-y}^{0}2dx=2(1+y), & -1\leqslant y\leqslant 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此

(1) $E(X)=\int_{-1}^{0}x\cdot 2(1+x)dx=-\frac{1}{3}$.

(2) $E(Y)=\int_{-1}^{0}y\cdot 2(1+y)dy=-\frac{1}{3}$,

$$E(-3X+2Y)=-3E(X)+2E(Y)=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

(3) $E(XY)=\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{0}xy2dydx=\int_{-1}^{0}-x(1+x)^2dx=\frac{1}{12}$.

22. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2),D(X),D(Y)$.

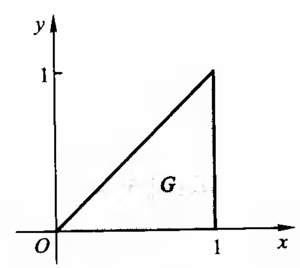


图 7.2

解 先画出区域 $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$ 的图(图 7.2).

因此

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 12y^2dy=4x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 4x^3dx=\frac{4}{5},$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 12y^2(1-y)dy=\frac{3}{5},$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 12y^2dydx=\frac{1}{2},$$

$$E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx+\int_0^1 y^2\cdot 12y^2(1-y)dy=\frac{16}{15},$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{4}{6}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{6}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{25}.$$

23. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $E(X)=E(Y)=1,D(X)=2,D(Y)=3$，求：(1) $E(X^2),E(Y^2)$；(2) $D(XY)$.

解 (1) $E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=2+1=3$,

$E(Y^2)=D(Y)+(E(Y))^2=3+1=4$.

(2)
$$\begin{aligned}D(XY)&=E(X^2Y^2)-(E(XY))^2\\&=E(X^2)E(Y^2)-(E(X)\cdot E(Y))^2\\&=[D(X)+(E(X))^2][D(Y)+(E(Y))^2]-[E(X)]^2[E(Y)]^2\\&=3\times4-1\times1=11.\end{aligned}$$

24. 袋中有 2^n 个外形完全相同的球，其中 $\binom{n}{k}$ 个标有数字 $k(k=0,1,\cdots,n)$，从中不放回抽取 m 次（每次取 1 个），以 X 表示取到的 m 个球上的数字之和，求 $E(X)$.

（提示：记 X_i = 第 i 次抽到的球上的数字，则 $X=\sum_{i=1}^m X_i,E(X)=\sum_{i=1}^m E(X_i)$.）

解 记 X_i = 第 i 次取到的球上的数字，$i=1,2,\cdots,m$，则 $X=\sum_{i=1}^m X_i$,

$$E(X_i)=\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}\Big/2^n=n\sum_{k=1}^n\binom{n-1}{k-1}\Big/2^n=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\Big/2^n=\frac{n2^{n-1}}{2^n}=\frac{n}{2},$$

因而 $E(X)=\sum_{i=1}^m E(X_i)=\frac{nm}{2}$.

25. 设 $D(X)=25,D(Y)=36,\rho_{X,Y}=0.4$，求：(1) $D(X+Y)$；(2) $D(X-Y)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=25+36+2\times0.4\times\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=85.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}D(X-Y)&=D(X)+D(Y)-2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=25+36-2\times0.4\times\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=37.\end{aligned}$$

26. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1),Y\sim N(-2,1)$，求 $E(2X+Y),D(2X+Y)$.

解 $E(X)=1,D(X)=1;E(Y)=-2,D(Y)=1$.

因此

$$E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=2\times1+(-2)=0,$$

$$D(2X+Y)=2^2D(X)+D(Y)=4\times1+1=5.$$

27. 设随机变量 X 的方差为 2.5，利用切比雪夫不等式估计 $P(|X-E(X)|\geqslant7.5)$ 的值.

解 $P(|X-E(X)|\geqslant7.5)\leqslant\frac{D(X)}{7.5^2}=\frac{2.5}{7.5^2}=\frac{1}{22.5}=\frac{2}{45}$.

28. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，根据切比雪夫不等式估计 $P(|X+Y|\geqslant6)$ 的值.

解
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0,$$
$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=1+4+2\times(-0.5)\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}=3,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(|X+Y|\geqslant6)&=P(|X+Y-0|\geqslant6)\\&=P(|X+Y-E(X+Y)|\geqslant6)\\&\leqslant\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

29. 在次品率为 $\frac{1}{6}$ 的一大批产品中，任意抽取 300 件产品，利用中心极限定理计算抽取的产品中次品件数在 40 与 60 之间的概率.

解 设 X 为 300 件产品中次品的件数. 由题意知 $X\sim B\left(300,\frac{1}{6}\right)$,

$$E(X)=50,\quad D(X)=\frac{250}{6}.$$

由棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理得

$$P(40<X<60)=P\left(\frac{40-50}{\sqrt{250/6}}<\frac{X-50}{\sqrt{250/6}}<\frac{60-50}{\sqrt{250/6}}\right)$$

$$\approx \Phi(1.55) - \Phi(-1.55) = 2\Phi(1.55) - 1 = 0.8788.$$

30. 有一批钢材，其中80% 的长度不小于3 m，现从钢材中随机取出100根，试用中心极限定理求小于3 m的钢材不超过30根的概率.

解 设 X 为100根钢材中小于3 m的钢材数. 由题意知 $X \sim B(100,0.2)$，

$$E(X) = 20, \quad D(X) = 16.$$

由棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理得

$$P(X < 30) = P\left(\frac{X-20}{4} < \frac{30-20}{4}\right) \approx \Phi(2.5) = 0.9938.$$

31. 有3000个同龄的人参加某保险公司的人寿保险，保险期限为1年. 假设在1年内每人的死亡率为0.1%，参加保险的人在投保日须交付保险费10元，被保险人在保险期间死亡时家属可以从保险公司领取2000元. 试用中心极限定理求保险公司亏本的概率.

解 设死亡人数为 X，$X \sim B(3000,0.001)$，保险公司亏本当且仅当 $2000X > 10 \times 3000$，即 $X > 15$. 于是，由棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理，公司亏本的概率为

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{15-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X-3}{\sqrt{3 \times 0.999}} > \frac{15-3}{\sqrt{3 \times 0.999}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(6.93) = 0. \end{aligned}$$

32. 某种电器有100个独立的电源可供使用，每个电源的寿命服从均值为10 h的指数分布，求这个电器的使用总寿命大于1200 h的概率.

解 记 X_i = 第 i 个电源的寿命，$i = 1,2,\cdots,100$，依假设诸 X_i 服从独立指数分布，$\lambda = 0.1$，$E(X_i) = \dfrac{1}{\lambda} = 10$，$D(X_i) = \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = 100$. 又令 $X = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 表示该电器的总寿命，则 $E(X) = 1000$，$D(X) = 100 \times 100 = 10^4$，使用中心极限定理，近似地有

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1200) &= P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \geqslant \frac{1200-1000}{100}\right) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \geqslant 2\right) \\ &\approx 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228. \end{aligned}$$

33. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 X 的中位数.

解 记 X 的中位数为 μ，则有 $\dfrac{1}{2} = P(X \leqslant \mu) = \displaystyle\int_0^{\mu}\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu}{2}$，化简为 $\mu^2 + \mu - 1 = 0$，求解方程得 X 的中位数为 $\mu = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.618$.

练 习 7

7.1 掷一颗骰子，出现点数记为 X. 计算 $E(X)$，$E(X^2)$，$E[(X-3.5)^2]$.

7.2 拉普拉斯分布的密度函数为 $f(x) = \dfrac{1}{2\sigma}\exp\left\{-\dfrac{|x-\mu|}{\sigma}\right\}$，$-\infty < x < +\infty$，求此分布的期望和方差.

7.3 设随机变量 X 有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (m\text{ 为正整数}),$$

称 X 服从指数幂分布，求 $E(X)$，$D(X)$.

7.4 汽车起点站分别于每小时的10分、30分和55分发车. 若乘客不知发车的时间，在每小时内的任一时刻随机到达车站，求乘客等候时间的数学期望.

7.5 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下：

X \ Y	1	2	3	4
−2	0.1	0.05	0.05	0.1
0	0.05	0	0.1	0.2
2	0.1	0.15	0.05	0.05

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$\rho_{X,Y}$.

7.6 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x, & 0 < x < 1,\ -x < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$ 和 $E(XY^2)$.

7.7 设独立随机变量 X_1，X_2，X_3 的数学期望分别为2，1，4，方差分别为9，20，12.

(1) 计算 $2X_1 + 3X_2 + X_3$ 的数学期望与方差；

(2) 计算 $X_1 - 2X_2 + 5X_3$ 的数学期望与方差.

7.8 设随机变量 $X \sim R(0,1)$，$Y \sim R(1,3)$，且 X 与 Y 相互独立，求 $E(XY)$ 和 $D(XY)$.

7.9 某单位有200台分机电话，每台使用外线通话的概率为15%. 若每台分机是否使用外线是相互独立的. 问该单位电话总机至少需要安装多少条外线，才能以95% 的概率保证每台分机能随时接通外线电话？

答案与提示

7.1 3.5，15.1667，2.9167.

7.2 μ, σ^2.

（提示：利用积分公式$\int x e^{\frac{x}{a}} dx = e^{\frac{x}{a}}(ax - a^2)$，$\int x^2 e^{\frac{x}{a}} dx = e^{\frac{x}{a}}(ax^2 - 2a^2 x + 2a^3)$.）

7.3 $m+1, m+1$.

7.4 10 分 25 秒.

7.5 $0.1, 2.65, 0, -0.175$.

7.6 $\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{6}$.

7.7 (1) 11,228；(2) 20,389.

7.8 $1, \frac{7}{18}$.

7.9 38.

第八章 统计量和抽样分布

一、基本要求

1. 了解统计学的主要内容及主要思想.
2. 理解总体和样本等基本概念.
3. 了解统计量的定义，掌握常用统计量的计算.
4. 了解χ^2分布、t分布和F分布的定义和性质，掌握分位数的概念并会查表计算.
5. 了解正态总体的抽样分布.

二、内容提要

1. 总体和样本

总体是研究对象的统计指标，个体是统计指标的特定观察.

总体中按一定规则抽出的一部分个体的统计指标称之为样本. 其中样本所包含的个体个数称为样本容量.

独立同分布样本，称之为简单随机样本.

统计学是使用有效方法收集数据、分析数据，并基于数据作出结论的一门方法论科学.

2. 统计量

完全由样本确定的量称之为统计量，它是样本的函数. 重要的是：该函数不含有总体分布的未知参数，一旦有了样本数据，就能据此算出统计量的值.

3. 常用统计量

(1) 样本均值：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(2) 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$.

(3) 样本标准差：$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2}$.

它们的观察值分别为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2, 及\ s=\sqrt{s^2}.$$

这些观察值仍分别称为样本均值、样本方差和样本标准差.

(4) 样本中位数:

$$\text{med}=\begin{cases}x_{(\frac{n+1}{2})}, & 当\ n\ 为奇数,\\ \frac{1}{2}\left[x_{(\frac{n}{2})}+x_{(\frac{n}{2}+1)}\right], & 当\ n\ 为偶数,\end{cases}$$

其中 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$ 是数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 由小到大的重排.

(5) 样本的极差:$R=x_{(n)}-x_{(1)}$.

(6) 样本的四分位间距:$H=Q_U-Q_L$,其中 Q_U,Q_L 分别为数据的上、下四分位数.

(7) 样本相关系数:$r_{xy}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

4. 三个重要分布

(1) χ^2 分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为相互独立的标准正态变量,称随机变量 $U\equiv X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 的分布为自由度为 n 的 χ^2 分布,记为 $U\sim\chi^2(n)$.

称满足 $P(U\leqslant\chi_\alpha^2(n))=\alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的 α 分位点.

(2) t 分布

设随机变量 X 与 Y 独立,$X\sim N(0,1)$,$Y\sim\chi^2(n)$,则称

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

的分布为自由度 n 的 t 分布,记为 $T\sim t(n)$.

称满足 $P(T\leqslant t_\alpha(n))=\alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的 α 分位点.

(3) F 分布

设随机变量 U 与 V 相互独立,$U\sim\chi^2(n)$,$V\sim\chi^2(m)$,则称

$$F\equiv\frac{U/n}{V/m}$$

的分布为自由度(n,m)的 F 分布,记为 $F\sim F(n,m)$.

称满足 $P(F\leqslant F_\alpha(n,m))=\alpha$ 的点 $F_\alpha(n,m)$ 为 $F(n,m)$ 分布的 α 分位点,且有

$$F_{1-\alpha}(n,m)=\frac{1}{F_\alpha(m,n)}.$$

5. 正态总体的抽样分布

统计量的分布称为抽样分布,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本,$\bar{X}$ 与 S^2 分别为样本均值和样本方差,则有

(1) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$;

(2) $\bar{X}$ 与 $S^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 相互独立;

(3) $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

三、学习要点

从本章起将讲述统计的基本知识. 统计是具有广泛应用的一个数学分支,它以概率论为基础,根据试验或观察得到的数据,来研究随机现象,对研究对象的客观规律性作出种种合理的估计和判断. 本章着眼于一些统计的基本概念,例如总体和样本、统计量和抽样分布等.

统计学的核心问题是由样本推断总体,因此理解统计量的概念非常重要. 它是样本的函数,统计量的选择和运用在统计推断中占据核心地位. 样本均值、样本方差以及其他样本矩都是一些常用的统计量,必须熟悉它们的计算方法及其有关性质. 统计量的分布称为抽样分布,其中 χ^2 分布、t 分布、F 分布即是本章的重点,必须熟悉它们的定义、性质及其 α 分位点的查表方法;正态总体抽样分布是统计学中最重要的一个理论结果,必须弄清它的条件及结论,并能用以判断一些常用统计量的分布.

四、释疑解难

问 8.1 为什么要提出统计量?

答 样本表现为一大批的数字,很难直接用来解决我们所要研究的具体问题,所以常常需要把样本数据整理加工成若干个简单明了的数字特征,当样本数据确定后,统计量的值即可以知道了. 所以统计量综合了样本的信息,是统计推断的基础.

问 8.2 三大分布的作用是什么?

答 χ^2 分布、t 分布、F 分布都是从正态总体中衍生出来的,几种常用的统计

量的分布都与这三大分布有关,所以这三大分布在正态总体的统计推断中起着重要的作用.

五、例题分析及增补

例 8 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 是来自 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的两个独立样本,记 $\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i$, $\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$, $S_1^{*2}=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$, $S_2^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$,则有

$$\frac{S_1^{*2}/S_2^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1).$$

证 由本章定理 2,

$$\frac{(m-1)S_1^{*2}}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1),$$

$$\frac{(n-1)S_2^{*2}}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1).$$

由假设 S_1^{*2} 和 S_2^{*2} 独立,则由 F 分布的定义知

$$\frac{(m-1)S_1^{*2}}{\sigma_1^2(m-1)}\Big/\frac{(n-1)S_2^{*2}}{\sigma_2^2(n-1)}\sim F(m-1,n-1),$$

即

$$\frac{S_1^{*2}/S_2^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1).$$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时,即有 $\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\sim F(m-1,n-1)$.

例 8.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ 未知,σ^2 已知,试求:

(1) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合密度函数;

(2) $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$.

解 (1) 联合密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

(2) $E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$,

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2,$$

$$E(S^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+(E(X_i))^2)-n(D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

例 8.2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自正态总体 $N(0,3^2)$ 的一个简单随机样本,求常数 a,b,c,使 $Q=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2$ 服从 χ^2 分布,并求自由度 n.

解 由 $X_i\sim N(0,3^2)$,且 X_i 之间相互独立,故 $X_1\sim N(0,3^2)$, $\frac{1}{3}X_1\sim N(0,1)$.

同理,

$$X_2+X_3\sim N(0,18),\quad \frac{X_2+X_3}{\sqrt{18}}\sim N(0,1),$$

又

$$X_4+X_5+X_6\sim N(0,27),\quad \frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{27}}\sim N(0,1),$$

所以由 χ^2 分布的定义可知

$$\left(\frac{1}{3}X_1\right)^2+\left(\frac{X_2+X_3}{\sqrt{18}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{27}}\right)^2\sim\chi^2(3),$$

即 $a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{1}{18}$, $c=\frac{1}{27}$ 时 Q 服从自由度为 3 的 χ^2 分布.

例 8.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本,$\overline{X}_n$ 和 S_n^2 是样本均值和样本方差,又设 X_{n+1} 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的新试验值,与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立,求统计量 $T=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}$ 的分布.

解 $E(X_{n+1}-\overline{X}_n)=E(X_{n+1})-E(\overline{X}_n)=\mu-\mu=0$,

$$D(X_{n+1}-\overline{X}_n)=D(X_{n+1})+D(\overline{X}_n)=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n+1}{n}\sigma^2,$$

故

$$X_{n+1}-\overline{X}_n\sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right),$$

则

$$\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0,1).$$

又$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且它们相互独立，故

$$T=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\Bigg/\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim t(n-1).$$

例 8.4 设(X_1,X_2,X_3,X_4)取自总体 X 的一个简单随机样本，$X \sim N(0,\sigma^2)$，试确定常数 c，使得 $P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}>c\right)=0.9$.

解 $X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$，即$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0,1)$，则

$$\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2 \sim \chi^2(1).$$

同理可知

$$\left(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2 \sim \chi^2(1).$$

又 X_3-X_4 与 X_1+X_2 相互独立，则

$$\left(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\Bigg/\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2 \sim F(1,1),$$

即

$$\frac{(X_3-X_4)^2}{(X_1+X_2)^2} \sim F(1,1).$$

$$P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}>c\right)=P\left(\frac{(X_3-X_4)^2}{(X_1+X_2)^2}<\frac{1}{c}-1\right)=0.9,$$

故$\frac{1}{c}-1=F_{0.9}(1,1)=39.86$，$c=0.02447$.

例 8.5 设随机变量 $T \sim t(n)$，证明$\frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$.

证 由于 $T \sim t(n)$，不妨设 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，其中随机变量 X 与 Y 独立，$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$. 则$\frac{1}{T^2}=\frac{Y/n}{X^2}$，因为 $X^2 \sim \chi^2(1)$，且 X^2 与 Y 独立，故由 F 分布定义，即知

$$\frac{1}{T^2}=\frac{Y/n}{X^2/1} \sim F(n,1).$$

六、习题解答

1. 设 $X_1,\cdots,X_6$ 是来自服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$ 的样本，试写出样本的联合分布律.

解 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_6)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdots e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_6}}{x_6!}$$
$$=e^{-6\lambda}\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{6}x_i!},\qquad x_1,x_2,\cdots,x_6=0,1,2,\cdots.$$

2. 设 $X_1,\cdots,X_6$ 是来自$(0,\theta)$上均匀分布的样本，$\theta>0$ 未知.

(1) 写出样本的联合密度函数.

(2) 指出下列样本函数中哪些是统计量，哪些不是？为什么？

$$T_1=\frac{X_1+\cdots+X_6}{6},\quad T_2=X_6-\theta,\quad T_3=X_6-E(X_1),\quad T_4=\max(X_1,\cdots,X_6).$$

(3) 如样本的一组观测值是 0.5，1，0.7，0.6，1，1，写出样本均值、样本方差和样本标准差.

解 (1) 样本的联合密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_6)=\begin{cases}\theta^{-6}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_6<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) T_1 和 T_4 是，T_2 和 T_3 不是. 因为 T_1 和 T_4 中不含总体中的唯一未知参数 θ，而 T_2 和 T_3 中含有未知参数 θ.

(3) 样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i=\frac{1}{6}(0.5+1+0.7+0.6+1+1)=0.8.$$

样本方差

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2$$
$$=\frac{1}{6}\left[(-0.3)^2+(0.2)^2+(-0.1)^2+(-0.2)^2+(0.2)^2+(0.2)^2\right]$$
$$=0.0433.$$

样本标准差

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{0.0433}=0.2082.$$

3. 某一马拉松比赛中前 30 名运动员成绩(单位:min) 如下:

129,130,130,133,134,135,136,136,138,138,138,141,141,141,142,142,142,142,143,143,143,143,143,144,144,145,145,145,145,145.

(1) 计算该 30 名运动员成绩的均值和样本标准差;

(2) 计算这组成绩的样本中位数.

解 (1) 均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(129+130+\cdots+145)=139.8667,$$

也可在 Excel 单元格中先把数据输入,如图 8.1 所示.

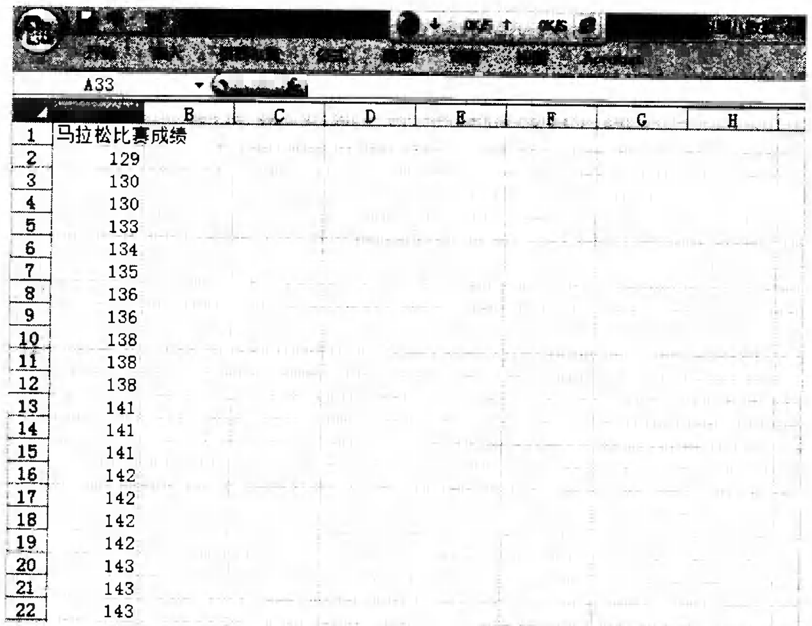


图 8.1

在空白单元格中输入"= AVERAGE(A2:A31)",回车即可显示 139.8667.

样本标准差

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(X_i-\overline{X})^2}=4.814792,$$

在空白单元格中输入"= STDEVP(A2:A31)",回车即可显示 4.814792.

(2) 样本容量为 30,样本中位数为

$$\text{med}=\frac{1}{2}[x_{(15)}+x_{(16)}]=\frac{1}{2}(142+142)=142,$$

在空白单元格中输入"= MEDIAN(A2:A31)",回车即可显示 142.

4. 为研究训练水平与心脏血液输出量之间的关系,随机抽取 20 人,并将他们随机分成四组,每组一个训练水平,训练 15 分钟后,测量他们的心脏血液输出量(单位:ml/min),结果如下:

序号	训练水平 (x)	心脏血液输出量 (y)	序号	训练水平 (x)	心脏血液输出量 (y)
1	0	4.4	11	600	12.8
2	0	5.6	12	600	13.4
3	0	5.2	13	600	13.2
4	0	5.4	14	600	12.6
5	0	4.4	15	600	13.2
6	300	9.1	16	900	17.0
7	300	8.6	17	900	17.3
8	300	8.5	18	900	16.5
9	300	9.3	19	900	16.8
10	300	9.0	20	900	17.2

试计算样本相关系数,并由此解释训练水平与心脏血液输出量之间的相关关系.

解 样本相关系数

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}},$$

计算得 $\bar{x}=450$,$\bar{y}=10.975$,代入公式可得 $r_{xy}=0.996723$.

也可在 Excel 单元格中先把数据输入,如图 8.2 所示.

在空白单元格中输入"= CORREL(B3:B22,C3:C22)",回车即可显示 0.996723. 这说明训练水平与心脏血液输出量有很高的正相关关系.

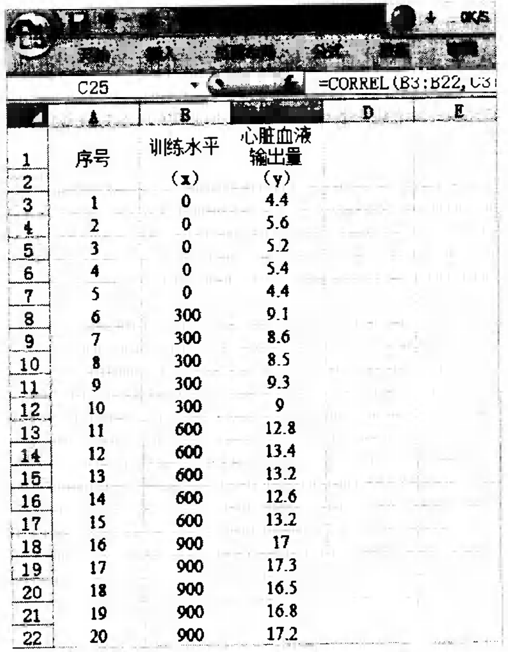
5. 查表求 $\chi^2_{0.99}(12)$,$\chi^2_{0.01}(12)$,$t_{0.99}(12)$,$t_{0.01}(12)$.

解 $\chi^2_{0.99}(12)=26.217$, $\chi^2_{0.01}(12)=3.571$, $t_{0.99}(12)=2.6810$, $t_{0.01}(12)=-2.6810$.

6. 设随机变量 $T\sim t(10)$,求常数 c 使 $P(T>c)=0.95$.

解 由 t 分布关于纵轴对称,所以 $P(T>c)=0.95$ 即为 $P(T>-c)=0.05$. 可查得 $-c=1.81$,所以 $c=-1.81$.

7. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本,试证:



C25 | =CORREL(B3:B22,C3

	A	B	C	D	E
1	序号	训练水平	心脏血液输出量		
2		(x)	(y)		
3	1	0	4.4		
4	2	0	5.6		
5	3	0	5.2		
6	4	0	5.4		
7	5	0	4.4		
8	6	300	9.1		
9	7	300	8.6		
10	8	300	8.5		
11	9	300	9.3		
12	10	300	9		
13	11	600	12.8		
14	12	600	13.4		
15	13	600	13.2		
16	14	600	12.6		
17	15	600	13.2		
18	16	900	17		
19	17	900	17.3		
20	18	900	16.5		
21	19	900	16.8		
22	20	900	17.2		

图 8.2

(1) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$;

(2) $\frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

证 (1) $\frac{X_i}{\sigma}$ 独立同分布于 $N(0,1)$,由 χ^2 分布的定义,$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$,即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

(2) 易见,$\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(0,n\sigma^2)$,即 $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1)$,由 χ^2 分布的定义,

$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$,即 $\frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

8. 设 $X_1,\cdots,X_5$ 是独立且服从相同分布的随机变量,且每一个 $X_i(i=1,2,\cdots,5)$ 都服从 $N(0,1)$.

(1) 试给出常数 c,使得 $c(X_1^2+X_2^2)$ 服从 χ^2 分布,并指出它的自由度;

(2) 试给出常数 d,使得 $d\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布,并指出它的自由度;

(3) 试给出常数 k,使得 $k\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从 F 分布,并指出它的自由度.

解 (1) 易见,$X_1^2+X_2^2$ 即为两个独立的服从 $N(0,1)$ 的随机变量平方和,服从 $\chi^2(2)$ 分布,即 $c=1$,自由度为 2.

(2) 由于 $X_1+X_2 \sim N(0,2)$,则 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$. 又 $X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$,$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ 与 $X_3^2+X_4^2+X_5^2$ 相互独立,则

$$\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}} \sim t(3),$$

即

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \sim t(3),$$

即 $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$,自由度为 3.

(3) 由于 $X_1^2+X_2^2 \sim \chi^2(2)$,又 $X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$,且 $X_1^2+X_2^2$ 与 $X_3^2+X_4^2+X_5^2$ 相互独立,则

$$\frac{(X_1^2+X_2^2)/2}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3} \sim F(2,3),$$

即

$$\frac{3}{2}\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2} \sim F(2,3),$$

即 $k=\frac{3}{2}$,第一自由度为 2,第二自由度为 3.

9. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本,在下列三种情况下,分别求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$:

(1) $X \sim B(1,p)$;(2) $X \sim E(\lambda)$;(3) $X \sim R(0,2\theta)$,其中 $\theta>0$.

解 (1) 由 $X \sim B(1,p)$ 可得

$E(X)=p,E(X^2)=p,D(X)=p(1-p)$,

$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=p$,

$$D(\overline{X})=D\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{p(1-p)}{n},$$

$$E(S^2)=E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big)=\frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\Big)=\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+(E(X_i))^2)-n(D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2)\Big]$$

$$=\frac{1}{n}\Big[np-n\Big(\frac{p(1-p)}{n}+p^2\Big)\Big]=\Big(1-\frac{1}{n}\Big)p(1-p).$$

（2）由 $X\sim E(\lambda)$ 可得

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad E(\overline{X})=\frac{1}{\lambda},\quad D(\overline{X})=\frac{1}{n\lambda^2},$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+(E(X_i))^2)-n(D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2)\Big]=\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{\lambda^2}.$$

（3）由 $X\sim R(0,2\theta)$，其中 $\theta>0$，可得

$$E(X)=\theta,\quad D(X)=\frac{\theta^2}{3},\quad E(\overline{X})=\theta,\quad D(\overline{X})=\frac{\theta^2}{3n},$$

因此

$$E(S^2)=\frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+(E(X_i))^2)-n(D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2)\Big]=\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{\theta^2}{3}.$$

***10.** 某市有 100000 个年满 18 岁的居民，他们中 10% 年收入超过 15 万，20% 受过高等教育. 今从中抽取 1600 人的随机样本，求：

（1）样本中不少于 11% 的人年收入超过 15 万的概率；

（2）样本中 19% 和 21% 之间的人受过高等教育的概率.

解　（1）引入新变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个样本居民年收入超过 15 万},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个样本居民年收入没超过 15 万},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n,n=1600$.

易见 $p=P(X_i=1)=0.1$. 又因 $n=1600\ll N=100000$，故可以近似看成有放回抽样，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

$$\mu=E(X_i)=0.1,\quad \sigma=\sqrt{D(X_i)}=\sqrt{0.1\times0.9}=0.3.$$

样本中年收入超过 15 万的比例即为 $\overline{X}$，由于 $n=1600$ 较大，可以使用渐近分布求解，即 $\overline{X}\sim N\Big(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\Big)$，所求概率即为

$$P(\overline{X}\geqslant 11\%)=1-P(\overline{X}\leqslant 0.11)=1-P\Big(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\leqslant\frac{40(0.11-0.1)}{0.3}\Big)$$

$$=1-\Phi\Big(\frac{4}{3}\Big)=1-0.9082=0.0918.$$

（2）同（1）解法. 引入新变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个样本居民受过高等教育},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个样本居民未受过高等教育},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n,n=1600$.

由已知可得

$$p=P(X_i=1)=0.2,$$

$$\mu=0.2,\sigma=\sqrt{0.2\times0.8}=0.4,$$

故所求概率为

$$P(19\%\leqslant\overline{X}\leqslant 21\%)=P\Big(\frac{40(0.19-0.2)}{0.4}\leqslant\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\leqslant\frac{40(0.21-0.2)}{0.4}\Big)$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times0.8413-1=0.6826.$$

练　习　8

8.1　设总体 $X\sim N(40,5^2)$.

（1）抽取容量为 36 的样本，求 $P(38\leqslant\overline{X}\leqslant 43)$；

（2）抽取容量为 64 的样本，求 $P(|\overline{X}-40|<1)$；

（3）取样本容量 n 多大时，才能使 $P(|\overline{X}-40|<1)=0.95$.

8.2　设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 皆未知. 已知样本容量 $n=16$，样本均值 $\bar{x}=12.5$，修正样本方差 $s^{*2}=5.333$，求 $P(|\overline{X}-\mu|<0.4)$.

8.3　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m}$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$，容量为 $n+m$ 的样本，求下列统计量的抽样分布：

（1）$Y=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n+m}X_i^2$；

（2）$Z=\dfrac{\sqrt{m}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}}$；

（3）$F=\dfrac{m\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$.

8.4　若 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $\chi^2(n)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，试求 $E(\overline{X}),D(\overline{X})$.

8.5　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 是取自正态总体 $N(\mu,0.5^2)$ 的一个样本，其中 μ 未知. 试求概

率 $P\left(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\geq 4.755\right)$.(已知 $\chi^2_{0.975}(9)=19.023$.)

8.6　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的一个样本,$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差,试求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$.

8.7　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本,$X\sim R(0,\theta)$. 试求次序统计量 $X_{(n)}$ 的均值和方差.

8.8　某区有 25000 户家庭,10% 的家庭没有汽车,今有 1600 户家庭的随机样本,试求:9% ~ 11% 之间的样本家庭没有汽车的概率.

答案与提示

8.1　0.9916,0.8904,96.

8.2　0.5.

8.3　(1) $\chi^2(n+m)$;(2) $t(m)$;(3) $F(n,m)$.

8.4　n,2.

8.5　0.025.

8.6　$\lambda,\frac{\lambda}{n},\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda$.

8.7　$\frac{n}{n+1}\theta,\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$.

8.8　0.8164.

第九章　点　估　计

一、基本要求

1. 理解参数的点估计概念.
2. 掌握用矩估计法和最大似然估计法构造参数的估计量.
3. 了解估计量的优良性评判准则(无偏性、有效性和一致性).

二、内容提要

1. 点估计方法

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本,θ 是总体的未知参数,若用一个统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来估计 θ,则称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计量,在抽样后,称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计值. 这种估计称为点估计.

矩估计和最大似然估计是两种常用的点估计法.

(1) 矩估计法

用样本的各阶原点矩去估计对应的各阶总体的原点矩,这就是矩估计的基本方法.

记样本的 i 阶原点矩为 $m_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^i$,记总体的 i 阶原点矩为 $\mu_i=E(X^i)$,则 $\hat{\mu}_i=m_i$.

若总体的未知参数 $\theta_i=g_i(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)\ (i=1,2,\cdots,k)$,其中 $g_1,\cdots,g_k$ 为 k 个多元的已知函数,则 θ_i 的矩估计量为 $\hat{\theta}_i=g_i(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

其中用样本均值估计总体均值,用样本方差估计总体方差最为常用.

(2) 最大似然估计法

设总体 X 的密度函数 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$(其中 θ_i 为未知参数),已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观测值,则求 θ_i 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的步骤如下:

① 写出似然函数

$$L=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k).$$

② 称满足关系式

$$L(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k)=\max L(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

的解 $\hat{\theta}_i(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ_i 的最大似然估计值，而 $\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ_i 的最大似然估计量.

如果 $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 是 θ_i 的可微函数，则将似然函数取对数：

$$\ln L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),$$

建立并求似然方程组

$$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\cdots,\theta_k)}{\partial\theta_i}=0,i=1,2,\cdots,k.$$

一般来说，最大似然估计值可以由解对数似然方程得到. 当似然函数不可微时，可以直接寻求使得 $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 达到最大的解来求得最大似然估计值.

如果总体 X 为离散型，其分布律为

$$P(X=x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),$$

则似然函数为

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),$$

计算方法同连续型一致.

2. 点估计的优良性评判准则

(1) 无偏性

设 $\hat{g}=\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的一个估计量，若

$$E_\theta(\hat{g})=g(\theta),$$

对每一 $\theta\in\Theta$ 成立，则称 $\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的一个无偏估计.

(2) 有效性

设 $\hat{g}_1,\hat{g}_2$ 是 $g(\theta)$ 的两个无偏估计，如对每一 $\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{g}_1)\leqslant D(\hat{g}_2)$，且至少存在某个 θ_0 使之成为严格不等式，则称 $\hat{g}_1$ 比 $\hat{g}_2$ 有效.

称在所有的 $g(\theta)$ 无偏估计中，方差最小的那一个为一致最小方差无偏估计.

(3) 相合性

对 $\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}P_\theta(|\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)-g(\theta)|>\varepsilon)=0,\theta\in\Theta$，则称估计量 $\hat{g}$ 具有相合性.

三、学习要点

本章的要点是理解参数点估计的概念，掌握参数点估计的三个评判标准，能

实际应用. 特别是要掌握矩估计法和最大似然估计法这两种点估计的常用方法，并能熟练地运用这两种点估计的常用方法去求参数的估计量.

四、释疑解难

问 9.1 最大似然估计的统计思想是什么?

答 似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ 是 θ 的函数，表示由参数 θ 产生样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的"可能性"大小. 将样本观察看成"结果"，θ 是产生结果的"原因"，$L(\theta)$ 则是度量产生该结果的各种"原因"的机会. 因此，θ 的一个合理的估计应使这种机会(即 $L(\theta)$)达到最大的那个值. 若记为 $\hat{\theta}$，则 $\hat{\theta}$ 应满足 $L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)$.

问 9.2 什么是一个好的点估计?

答 一个基于样本的特定的估计值决不会精确地等于总体参数的真值，所以问某一个值是否是好的估计值是没有意义的. 而可以问的是计算估计值的方法是不是一个好方法.

为了确定一个方法的好坏，需要对多次重复同一个研究所得的结果进行比较. 尽管所有的样本都来自于同一个总体，但这些样本所得到的结论各不相同，这一现象是由抽样的随机性引起的.

一个好的估计方法可以这样定义：如果在无数个样本上应用该估计方法，得到的估计的均值等于总体参数的真值，则这种估计即是该参数的无偏估计. 其次，许多重复抽样所得的估计值不应该离真值太远，"无偏估计"的方差恰好反映了估计值相对于真值的分散程度，显然方差越小，该估计作为真值的估计愈精确，由此给出了有效性的定义.

无偏性是对一种估计方法的基本要求. 而相合性也是对估计的另一种基本要求. 相合性的定义就是要求当样本容量 n 不断增加，估计量按概率收敛于真值，即与真值相差无几. 而事实上当 $n\to\infty$ 时样本提供的信息量越来越大，对真值的估计应该越来越精确，估计量与真值相差无几才合理.

五、例题分析及增补

例 9.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2,\mu,\sigma^2$ 未知，求 μ,σ^2 的矩估计.

解 由于

$$\mu=E(X)=\mu_1,\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=\mu_2-(\mu_1)^2,$$

故 μ 的矩估计量为 $\hat{\mu}=m_1=\overline{X}$，$\sigma^2$ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}^2=m_2-m_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=S^2$.

这就是最常见的样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2 分别为总体均值 μ 和总体方差的矩估计量. 从这里还可以看到求解未知参数的矩估计量时无需知道总体的具体分布形式，只需知道未知参数与总体各阶矩之间的函数关系式.

例 9.2 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自服从几何分布的总体 X，其分布律为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\ (k=1,2,\cdots),$$

其中 p 未知，$0<p<1$，试求 p 的矩估计量.

解 由于 $E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}ip(1-p)^{i-1}=\frac{1}{p}$，令 $\frac{1}{p}=\mu_1$，$p=\frac{1}{\mu_1}$，故 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{m_1}=\frac{1}{\overline{X}}$.

例 9.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x,a)=\begin{cases}\frac{2}{a^2}(a-x), & 0<x<a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 a 的矩估计量.

解 由于 $E(X)=\int_0^a x\frac{2}{a^2}(a-x)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}$，令 $\frac{a}{3}=\mu_1$，$a=3\mu_1$，故 a 的矩估计量 $\hat{a}=3m_1=3\overline{X}$.

例 9.4 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，X 的密度函数

$$f(x,\theta,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，求 θ 及 λ 的最大似然估计量.

解 似然函数为

$$L(\theta,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)}, & X_i\geqslant\theta, i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因 $L(\theta,\lambda)$ 作为 θ 的函数不连续，只能从使 $L(\theta,\lambda)$ 取得最大定义求解.

由 $L(\theta)$ 的表达式，有 $\min_i X_i\geqslant\theta$，$\theta$ 愈大时 $L(\theta)$ 愈大，又 $\theta\leqslant\min_i X_i$，故取 $\hat{\theta}=\min_i X_i$ 时，$L(\hat{\theta})$ 达到最大，即 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\min_i X_i$.

又

$$\ln L(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)-n\ln\lambda,$$

$$\frac{\partial\ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)-\frac{n}{\lambda}=0,$$

故 λ 的最大似然估计量为

$$\hat{\lambda}=\overline{X}-\hat{\theta}=\overline{X}-\min_i X_i.$$

从这例中可以看出求解未知参数的最大似然估计的方法不唯一. 但不管用何种方法，求解最大似然估计量必须已知总体 X 的分布类型. 由此可知，最大似然估计的条件比矩估计的条件要强，故最大似然估计的大样本性质一般优于矩估计.

例 9.5 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ 未知，求 $\theta=P(X\geqslant2)$ 的最大似然估计.

解 已知 $\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=S$，

$$\theta=P(X\geqslant2)=1-\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right),$$

以 $\hat{\mu},\hat{\sigma}$ 代 μ,σ，得 θ 的最大似然估计为

$$\hat{\theta}=1-\Phi\left(\frac{2-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)=1-\Phi\left(\frac{2-\overline{X}}{S}\right).$$

此例的解答过程需要用到一个性质：若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计量，$g(x)$ 是单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 是 $g(\theta)$ 的最大似然估计量.

例 9.6 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的分布律如下表所示：

X	-1	0	1
P	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

其中 θ 未知，$0<\theta<1$. 试求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$，并讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性，若不是无偏估计，试修正为无偏估计.

解 由于 $E(X)=0$，与 θ 无关. 进一步，$E(X^2)=\theta$，故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}_1=m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2.$$

似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}(1-\theta)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}, & X_i=-1,0,1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}|X_i|(\ln\theta-\ln 2)+(n-\sum_{i=1}^{n}|X_i|)\ln(1-\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{\theta}-\frac{n-\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{1-\theta}=0,$$

解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.

$$E(\hat{\theta}_1)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{\theta}{2}+0\cdot(1-\theta)+1^2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta,$$

所以 $\hat{\theta}_1$ 是无偏估计.

$$E(\hat{\theta}_2)=E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}\right)=E(|X|)=|-1|\cdot\frac{\theta}{2}+0\cdot(1-\theta)+|1|\cdot\frac{\theta}{2}=\theta,$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 是无偏估计.

例 9.7 设总体 X 的均值 $E(X)=\mu$ 已知,方差 $\sigma^2=D(X)$ 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本,证明:$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

证 $E(\hat{\sigma}^2)=\dfrac{1}{n}E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)^2]$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n}n\sigma^2=\sigma^2.$$

例 9.8 总体 X 的均值 $E(X)=\mu$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,令 $\hat{\mu}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i$,其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1,a_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 证明:

(1) $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计;

(2) 在一切形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i$ 的无偏估计中($\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1,a_i>0,i=1,2,\cdots,n$),以样本均值 $\overline{X}$ 最为有效(此时 $a_i=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$).

证 (1)

$$E(\hat{\mu})=E(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i=\mu,$$

故 $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计.

(2) 由施瓦茨(Schwarz)不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

取 $x_i=1,i=1,2,\cdots,n,y_i=a_i,i=1,2,\cdots,n$,有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$,故 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\dfrac{1}{n}$.

现

$$D(\hat{\mu})=D(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\frac{1}{n}\sigma^2=D(\overline{X}),$$

故在形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i$ 的 μ 的无偏估计中,以 $\overline{X}$ 最为有效.

六、习题解答

1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,在下列情形下,试求总体参数的矩估计量与最大似然估计量:

(1) $X\sim B(1,p)$,其中 p 未知,$0<p<1$;

(2) $X\sim E(\lambda)$,其中 λ 未知,$\lambda>0$.

解 (1) $E(X)=p$,故 p 的矩估计量有 $\hat{p}=\overline{X}$.

另,X 的分布律为

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}\ (x=0,1),$$

故似然函数为

$$L(p)=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}.$$

对数似然函数为

$$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}X_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}X_i)\ln(1-p).$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}X_i}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计量 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$.

可以看出 p 的矩估计量与最大似然估计量是相同的.

(2) $E(X)=\frac{1}{\lambda}$,令$\frac{1}{\lambda}=\overline{X}$,故 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$.

另,X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

故似然函数为

$$L(\lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}, & X_i>0, i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}X_i=0,$$

解得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}=\frac{1}{\overline{X}}$.

可以看出 λ 的矩估计量与最大似然估计量是相同的.

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,其中 X 服从参数为 λ 的泊松分布,其中 λ 未知,$\lambda>0$,求 λ 的矩估计量与最大似然估计量. 如得到一组样本观测值

X	0	1	2	3	4
频数	17	20	10	2	1

求 λ 的矩估计值与最大似然估计值.

解 $E(X)=\lambda$,故 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}=\overline{X}$.

由样本观测值可算得 λ 的矩估计值为

$$\bar{x}=\frac{0\times 17+1\times 20+2\times 10+3\times 2+4\times 1}{50}=1.$$

另,X 的分布律为

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\quad x=0,1,2,\cdots,$$

故似然函数为

$$L(\lambda)=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}X_i}}{X_1!\ \cdots X_n!},\quad X_i=0,1,2,\cdots,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i!).$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\lambda}=0,$$

解得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\overline{X}$. 故 λ 的最大似然估计值 $\hat{\lambda}=1$.

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,其中 X 服从区间$(0,\theta)$上的均匀分布,其中 $\theta>0$ 未知,求 θ 的矩估计量.

解 $E(X)=\frac{\theta}{2}$,令$\frac{\theta}{2}=\overline{X}$,故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 未知,求 θ 的矩估计量与最大似然估计量.

解 $E(X)=\int_0^\theta x\cdot\frac{2x}{\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\theta$,令$\frac{2}{3}\theta=\overline{X}$,故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}\overline{X}$.

另,似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}X_i, & 0<X_i\leqslant\theta, i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}X_i, & \theta\geqslant\max\limits_i X_i,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$L(\theta)$ 作为 θ 的函数不连续. 当 $\theta\geqslant\max\limits_i X_i$ 时,$L(\theta)$ 是 θ 的递减函数. 故当 $\theta=$

$\max_i X_i$ 时,$L(\theta)$ 达到最大值. 即 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max_i X_i$.

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 未知,求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解 $E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,令$\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$,故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}.$$

另,似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod\limits_{i=1}^{n}X_i^{\theta}, & 0<X_i<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0,$$

解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

6. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,总体 X 服从参数为 p 的几何分布,即 $P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$,$x=1,2,3,\cdots$,其中 p 未知,$0<p<1$,求 p 的最大似然估计量.

解 似然函数

$$L(p)=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n},$$

对数似然函数

$$\ln L(p)=n\ln p+\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\right)\ln(1-p).$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{n}{p}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

7. 已知某路口车辆经过的间隔时间服从指数分布 $E(\lambda)$,其中 $\lambda>0$ 未知,现在观测到六个间隔时间数据(单位:s):

1.8,3.2,4,8,4.5,2.5.

试求该路口车辆经过的平均间隔时间的矩估计值与最大似然估计值.

解 根据习题1的结果,λ 的矩估计量和最大似然估计量都为$\dfrac{1}{\overline{X}}$,故平均间隔时间的矩估计和最大似然估计都为$\dfrac{1}{\lambda}$,即为 $\overline{X}$.

由样本观测值可算得

$$\overline{X}=\frac{1}{6}(1.8+3.2+4+8+4.5+2.5)=4.$$

8. 设总体 X 的密度函数为$f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}$,$-\infty<x<+\infty$,其中 $\sigma>0$ 未知,设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自这个总体的一个样本,试求 σ 的最大似然估计量.

解 似然函数为

$$L(\sigma)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{\sigma}},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i|.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{\sigma^2}=0,$$

得 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

***9.** 帕雷托(Pareto)分布在计量经济中常常用到,它有密度函数

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta C_0^{\theta}x^{-\theta-1}, & x\geqslant C_0,\\ 0, & x<C_0,\end{cases}$$

其中 $\theta>1$ 为未知参数,$C_0>0$ 是给定的. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自帕雷托分布的随机样本,求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解
$$E(X)=\int_{C_0}^{+\infty}x\cdot\theta C_0^{\theta}x^{-\theta-1}\mathrm{d}x=\frac{\theta C_0}{\theta-1}.$$

令$\dfrac{\theta C_0}{\theta-1}=\overline{X}$,故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-C_0}$.

似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n C_0^{n\theta}(X_1\cdots X_n)^{-\theta-1}, & X_i\geqslant C_0,i=1,\cdots,n,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln C_0-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln C_0-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0,$$

得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i-\ln C_0}$.

*10. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^2}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中$\beta>0$未知,求β的矩估计量$\hat{\beta}_1$和最大似然估计量$\hat{\beta}_2$,并进一步求解估计量的均值和方差.

解 $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\beta}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}\cdot2\beta^2=2\beta.$

令 $2\beta=\overline{X}$,故 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}_1=\dfrac{\overline{X}}{2}$.

似然函数为

$$L(\beta)=\begin{cases}\dfrac{(X_1\cdots X_n)\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i/\beta}}{\beta^{2n}}, & X_i>0,i=1,\cdots,n,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}X_i-2n\ln\beta.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i-2n\frac{1}{\beta}=0,$$

得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}_2=\dfrac{\overline{X}}{2}$.

$$E\left(\frac{\overline{X}}{2}\right)=\frac{1}{2}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E(X_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}2\beta=\beta.$$

由于

$$D\left(\frac{\overline{X}}{2}\right)=\frac{1}{4n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X),$$

又因为

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^3\frac{1}{\beta}\cdot\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\beta}x})=\int_0^{+\infty}3x^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}\mathrm{d}x=6\beta^2,$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=6\beta^2-4\beta^2=2\beta^2,$$

则

$$D\left(\frac{\overline{X}}{2}\right)=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}2\beta^2=\frac{\beta^2}{2n}.$$

11. 在第 3 题中 θ 的矩估计量是否是 θ 的无偏估计?

解 $E(\hat{\theta})=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta}{2}=\theta,$

故 θ 的矩估计量 $2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计.

12. 试证第 8 题中 σ 的最大似然估计量是 σ 的无偏估计.

证 $E(\hat{\sigma})=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(|X_i|)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma,$$

故 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$是 σ 的无偏估计.

13. 设 θ 是一个未知的分布参数,$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量,定义 $MSE(\hat{\theta},\theta)=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 的均方误差,证明:

$$MSE(\hat{\theta},\theta)=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=D(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})-\theta]^2.$$

其中,$D(\hat{\theta})$ 表示估计量 $\hat{\theta}$ 相对于中心位置 $E(\hat{\theta})$ 的分散程度,$[E(\hat{\theta})-\theta]^2$ 则是估计的偏差平方,偏差和分散程度正是描述一个估计量表现的两个重要度量.

证 $MSE(\hat{\theta},\theta)=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=E[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})+E(\hat{\theta})-\theta)^2]$

$$=E[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2]+[E(\hat{\theta})-\theta]^2+$$

$$2E[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta})-\theta)]$$
$$=D(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})-\theta]^2,$$

所以得证.

14. 设 X_1,X_2,X_3 为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,证明:

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3,$$
$$\hat{\mu}_2=\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$$

都是总体均值 μ 的无偏估计,并进一步判断哪一个估计较有效.

证 $E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)$

$$=\frac{1}{6}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{2}E(X_3)$$
$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)E(X)=E(X)=\mu,$$
$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3\right)$$
$$=\frac{2}{5}E(X_1)+\frac{1}{5}E(X_2)+\frac{2}{5}E(X_3)$$
$$=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)E(X)=E(X)=\mu,$$

所以 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ 都是总体均值 μ 的无偏估计.

又

$$D(\hat{\mu}_1)=D\left(\frac{X_1}{6}+\frac{X_2}{3}+\frac{X_3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{36}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)+\frac{1}{4}D(X_3)$$
$$=\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)D(X)=\frac{7}{18}D(X)=\frac{7}{18}\sigma^2,$$
$$D(\hat{\mu}_2)=D\left(\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3\right)$$
$$=\frac{4}{25}D(X_1)+\frac{1}{25}D(X_2)+\frac{4}{25}D(X_3)$$
$$=\frac{9}{25}D(X)=\frac{9}{25}\sigma^2,$$

可见 $D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_1)$,所以两个估计量中 $\hat{\mu}_2$ 更有效.

15. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本,其中 $\sigma^2>0$ 未知,

令 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$,试证 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的相合估计.

证 易见

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\sigma^2.$$

又

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n),$$

由教材第八章公式(9),

$$D\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=2n,$$

故

$$D(\hat{\sigma}^2)=D\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\cdot\frac{\sigma^4}{n^2}=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

由切比雪夫不等式,当 $n\to\infty$,对任给 $\varepsilon>0$,

$$P(|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|>\varepsilon)\leqslant\frac{D(\hat{\sigma}^2)}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2}\to 0,$$

即 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的相合估计.

练　习　9

9.1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,求 $P(X>1)$ 的矩估计量.

9.2　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 分别是来自 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的两个独立样本,试求 μ_1,μ_2,σ^2 的最大似然估计量.

9.3　设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的样本,X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1-\theta, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 未知,$0<\theta<1$,求:

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

9.4　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,X 的密度函数为

$$f(x,\mu)=\begin{cases}e^{-(x-\mu)}, & x>\mu,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty$,μ 未知.

(1) 求 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_1$,$\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计吗?

(2) 证明:μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计.

9.5 设 X 服从均匀分布 $R(\theta,\theta+1)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自该总体的样本,试证:$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\frac{1}{2}$,$\hat{\theta}_2=X_{(n)}-\frac{n}{n+1}$,$\hat{\theta}_3=X_{(1)}-\frac{1}{n+1}$ 都是 θ 的无偏估计.

9.6 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,选适当的值 c,使 $\hat{\sigma}^2=c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

9.7 设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个相互独立的无偏估计量,且 $D(\hat{\theta}_1)=2D(\hat{\theta}_2)$,找到常数 k_1,k_2 使 $k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2$ 也是 θ 的无偏估计量,并且使它在所有这种形式的无偏估计量中方差最小.

9.8 设总体 X 服从区间 $[1,\theta]$ 上的均匀分布,$\theta>1$ 未知,$X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本.证明:θ 的矩估计量是 θ 的相合估计.

答案与提示

9.1 $\hat{\mu}=\overline{X}$,$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=S$,$P(X>1)=1-\Phi\left(\frac{1-\overline{X}}{S}\right)$.

9.2 $\overline{X},\overline{Y},\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2\right]$.

9.3 (1) $\frac{3}{2}-\overline{X}$;(2) $\frac{m}{n}$(其中 m 为样本值 $x_1,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数).

9.4 (1) $X_{(1)}$,不是;(2) 略.

9.5 提示:$X_{(n)}$ 的密度函数为$\begin{cases}n(x-\theta)^{n-1}, & \theta<x<\theta+1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$X_{(1)}$ 的密度函数为$\begin{cases}n(1-x+\theta)^{n-1}, & \theta<x<\theta+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

9.6 $\frac{1}{2(n-1)}$.

提示:$E[(X_{i+1}-X_i)^2]=D(X_{i+1}-X_i)=D(X_{i+1})+D(X_i)$.

9.7 $k_1+k_2=1$,$k_1=\frac{1}{3}$,$k_2=\frac{2}{3}$.

9.8 提示:$\hat{\theta}=2\overline{X}-1$,$D(\hat{\theta})=\frac{(\theta-1)^2}{3n}\to 0$,$n\to\infty$.

第十章 区间估计

一、基本要求

1. 了解区间估计的定义.
2. 掌握单正态总体情况下均值和方差的区间估计的求解.
3. 掌握两个正态总体情形下均值差的区间估计的方法.

二、内容提要

1. 区间估计

(1) 定义

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $f(x,\theta)$ 的样本,$\theta\in\Theta$ 未知,对于 $\forall 0<\alpha<1$,若统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)=\overline{\theta}$,使得

$$P_\theta(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta})\geqslant 1-\alpha,\quad \theta\in\Theta,$$

则称 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ 为 θ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间,$1-\alpha$ 为置信水平.一旦样本有观测值 $x_1,\cdots,x_n$,则称相应的 $[\underline{\theta}(x_1,\cdots,x_n),\overline{\theta}(x_1,\cdots,x_n)]$ 为置信区间的观测值.

若有统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$,使得

$$P_\theta(\theta\leqslant\overline{\theta})\geqslant 1-\alpha,\quad \theta\in\Theta,$$

则称 $(-\infty,\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)]$ 为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间,$\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信上限.

若有统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$,使得

$$P_\theta(\theta\geqslant\underline{\theta})\geqslant 1-\alpha,\quad \theta\in\Theta,$$

则称 $[\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n),+\infty)$ 为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间,$\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信下限.

(2) 求置信区间的一般步骤

(i) 先求出 θ 的一个点估计(通常为最大似然估计)$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$;

(ii) 构造 $\hat{\theta}$ 和 θ 的一个枢轴函数

$$G=G(\hat{\theta},\theta),$$

其中 G 除包含未知参数 θ 以外,不再有其他的未知参数,且 G 的分布完全已知或完全可以确定;

(iii) 确定 $a < b$,使得

$$P(a \leqslant G(\hat{\theta},\theta) \leqslant b) \geqslant 1-\alpha,$$

当 G 的分布为连续型时,只需考虑上述概率不等式等号成立的情形;

(iv) 将 $a \leqslant G(\hat{\theta},\theta) \leqslant b$ 等价变形为 $\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}$,其中 $\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 仅是样本函数,则 $[\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n),\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)]$ 就是 θ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间.

2. 单正态总体下的置信区间

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,置信水平为 $1-\alpha$,样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,样本方差 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,修正样本方差

$$S^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

(1) 均值 μ 的置信区间

若 σ^2 已知,取 $G(\overline{X},\mu)=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$,故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

若 σ^2 未知,取 $G(\overline{X},\mu)=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$,故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S^*}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right].$$

(2) 方差 σ^2 的置信区间

若 μ 已知,取 $G(\hat{\sigma}^2,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$,故 σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right].$$

若 μ 未知,取 $G(\hat{\sigma}^2,\sigma^2)=\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,故 σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

3. 两个正态总体下均值差的置信区间

设 $X_1,\cdots,X_m$ 是取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本,$Y_1,\cdots,Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一个样本,且 $(X_1,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 相互独立,置信水平为 $1-\alpha$,记 $\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i$,$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$,

$$S_w^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right].$$

(1) 若 σ_1^2,σ_2^2 已知,取 $G(\overline{X}-\overline{Y},\mu_1-\mu_2)=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$,

故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right].$$

(2) 若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知,取 $G(\overline{X}-\overline{Y},\mu_1-\mu_2)=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$,故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

三、学习要点

本章的要点是理解参数区间估计的概念和置信水平、置信区间的概念及其意义,熟悉对单正态总体的均值与方差和两个正态总体的均值差进行区间估计的方法及步骤,并能熟练地运用以上方法求各种置信区间.

四、释疑解难

问 10.1 置信区间的确定受哪些因素的影响?

答 影响置信区间确定的因素有两个:精度和可靠度.

估计精度的一种描述方法是置信区间长度的大小. 置信区间长度越短则估计越精确. 例如给出一个未知的总体百分比的置信区间是从 0%—100%,这种

区间估计是没有什么现实意义的. 如果给出置信区间是从 30%—70%，则对这个未知的参数有了一些了解. 如果给出置信区间是从 49%—52%，则对这个未知参数的认识就十分“精确”了.

置信区间可靠度的一种描述方法是置信水平. 置信水平表示的是一个概率值. 它表示的是在多次抽样得到的区间中大概有多少个包含了参数的真值，即如果你做了 100 次的抽样，大概有 95 次找的区间包含真值，有 5 次找的区间不包含真值. 显然95% 置信水平的置信区间比90% 的可靠度要高. 一般来说，当样本容量 n 给定后，90% 置信水平的置信区间长度要比 95% 置信水平的短. 例如正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，当 σ^2 已知时，μ 的置信水平 90% 及95% 的双侧置信区间长度分别为 $2u_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, 2u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. 显然前者小于后者. 所以可以看出可靠度和精度是一对矛盾.

为了保证一定的置信水平，又要使得区间的长度不大于某一常数，只有增加样本的容量 n，通过掌握更多的信息来实现.

五、例题分析及增补

例 10.1 某商店每天每百元投资的利润率服从正态分布，均值为μ，方差为 σ^2，长期以来 σ^2 稳定为 0.4，现随机抽取的五天的利润率为 -0.2，0.1，0.8，-0.6，0.9，试求 μ 的置信水平为 95% 的双侧置信区间.

解 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，且有 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，故

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha,$$

即

$$P\left(\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

故 μ 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为

$$\left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

由样本观测值得 $\bar{x}=0.2$，$u_{0.975}=1.96$，故 μ 的置信水平为95% 的双侧置信区间的观测值为

$$\left[0.2 - 1.96\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{5}},\ 0.2 + 1.96\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{5}}\right],$$

即为 $[-0.354, 0.754]$.

也可打开 Excel 2007 软件，点击任意空白单元格，输入“= 0.2 - confidence(0.05,0.6325,5)”，即可得到置信区间的下限 -0.354，另再输入“= 0.2 + confidence(0.05,0.6325,5)”，即可得到置信区间的上限 0.754.

例 10.2 为使例 10.1 中 μ 的置信水平为 95% 的双侧置信区间长度不超过 0.4，则至少应随机抽取多少天的利润率才能达到？

解 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

其区间长度为 $2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，故 $2\times1.96\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{n}} \leqslant 0.4$，解得 $n \geqslant 38.416$，即至少应抽取 39 天的利润率才能使置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 0.4.

例 10.3 为了解灯泡使用时数的均值 μ 及标准差 σ，测量 10 个灯泡，得 $\bar{x}=1500$ h，$s^*=20$ h，如果灯泡的使用时数服从正态分布，求 μ 和 σ 的双侧 95% 的置信区间.

解 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，又 σ^2 未知，故有

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n-1),$$

故

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\right| \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

即

$$P\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right].$$

由样本观测值得

$$\bar{x}=1500,\quad s^*=20,\quad n=10,\quad t_{0.975}(9)=2.262,$$

故 μ 的双侧 0.95 置信区间的观测值为 $\left[1500 - 2.262\times\frac{20}{\sqrt{10}}, 1500 + 2.262\times\frac{20}{\sqrt{10}}\right]$，即为 $[1485.69, 1514.31]$.

$\hat{\sigma}^2 = S^{*2}$ 是 σ^2 的无偏估计，且有 $\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，故

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

故 σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

由样本观测值得

$$\chi^2_{0.025}(9) = 2.7, \quad \chi^2_{0.975}(9) = 19.023,$$

故 σ^2 的双侧 95% 置信区间的观测值为$\left[\frac{9\times 20^2}{19.023}, \frac{9\times 20^2}{2.7}\right]$，即为[189.24,1333.33].

所以 σ 的双侧 95% 置信区间的观测值为$[\sqrt{189.24}, \sqrt{1333.33}] = [13.76, 36.51]$.

例 10.4 自动包装机包装食品，每袋净重 X(单位:g) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布，现随机抽取 4 袋，测得每袋净重 x_1, x_2, x_3, x_4，并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 24$，$\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 = 147$，试分别求未知参数 μ 和 σ 的双侧 90% 置信区间.

解 σ^2 未知，故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right].$$

由样本观测值得

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i = 6,$$

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{3}(147 - 4\times 6^2)} = 1,$$

$$t_{0.95}(3) = 2.3534,$$

故 μ 的双侧 90% 置信区间的观测值为$\left[6 - 2.3534\times\frac{1}{\sqrt{4}}, 6 + 2.3534\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right]$，即为[4.8233,7.1767].

σ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right].$$

由样本观测值得

$$\chi^2_{0.05}(3) = 0.352, \quad \chi^2_{0.95}(3) = 7.815,$$

故 σ 的双侧 90% 置信区间的观测值为$\left[\sqrt{\frac{3}{7.815}}, \sqrt{\frac{3}{0.352}}\right] = [0.620, 2.919]$.

例 10.5 设 $X_1, \cdots, X_{2n}$ 是取自正态总体 $N(\mu_1, 18)$ 的一组样本，$Y_1, \cdots, Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2, 16)$ 的一组样本，要使 $\mu_1 - \mu_2$ 的双侧 95% 置信区间的长度不超过 l，问 n 至少要取多大?

解 $\overline{X} - \overline{Y}$ 为 $\mu_1 - \mu_2$ 的点估计，由于 σ_1^2 和 σ_2^2 已知，故有

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}}} \sim N(0,1),$$

故

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}}}\right| \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

故 $\mu_1 - \mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}}, \overline{X} - \overline{Y} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}}\right].$$

置信区间的长度

$$L = 2u_{0.975}\sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}} = \frac{19.6}{\sqrt{n}} \leqslant l,$$

故 $n \geqslant \frac{384.16}{l^2}$，即 n 至少要取$\left[\frac{384.16}{l^2}\right] + 1$.

例 10.6 设某公司所属的两个分店的月营业额分别服从 $N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$. 先从第一分店抽取了容量为40的样本，求得平均月营业额为 $\bar{x}_1 = 22653$ 万元，样本标准差为 $s_1^* = 64.8$ 万元；第二分店抽取了容量为 30 的样本，求得平均月营业额为 $\bar{x}_2 = 12291$ 万元，样本标准差为 $s_2^* = 62.2$ 万元. 试求 $\mu_1 - \mu_2$ 的双侧 0.95 置信估计.

解 $\overline{X} - \overline{Y}$ 为 $\mu_1 - \mu_2$ 的点估计，由于 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知，故有

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

其中 $S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right]$. 故

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right| \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right) = 1-\alpha.$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

由样本观测值得 $\bar{x}-\bar{y}=10362, t_{0.975}(68)\approx u_{0.975}=1.96$,

$$S_w^2=\frac{(m-1)S_1^{*2}+(n-1)S_2^{*2}}{m+n-2}=\frac{39\times 64.8^2+29\times 62.2^2}{40+30-2}=4058.22,$$

$$S_w=63.7,$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 95% 置信区间观测值为

$$\left[10362-1.96\times 63.7\times\sqrt{\frac{1}{40}+\frac{1}{30}},\ 10362+1.96\times 63.7\times\sqrt{\frac{1}{40}+\frac{1}{30}}\right],$$

即为[10332,10392].

六、习题解答

1. 某车间生产滚珠,从长期实践中知道,滚珠直径 X(单位:mm)服从正态分布 $N(\mu,0.2^2)$,从某天生产的产品中随机抽取 6 个,量得直径如下:

14.7,15.0,14.9,14.8,15.2,15.1,

求 μ 的双侧 0.90 置信区间和双侧 0.99 置信区间.

解 由于 $\sigma^2=0.2^2$ 已知,所以选用 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间 $\left[\overline{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

当 $1-\alpha=0.9$,查表得 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.95}=1.64$,当 $1-\alpha=0.99$,查表得 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.995}=2.576$. $\bar{x}=14.95, n=6$.

代入数据得 μ 的双侧 0.90 置信区间观测值为 $\left[14.95-1.64\cdot\frac{0.2}{\sqrt{6}},\ 14.95+1.64\cdot\frac{0.2}{\sqrt{6}}\right]$,即为[14.82,15.08].

μ 的双侧 0.99 置信区间观测值为 $\left[14.95-2.576\cdot\frac{0.2}{\sqrt{6}},\ 14.95+2.576\cdot\frac{0.2}{\sqrt{6}}\right]$,即为[14.74,15.16].

2. 假定某商店中一种商品的月销售量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,σ 未知. 为了合理地确定商店对该商品的进货量,需对 μ 和 σ 作估计,为此随机抽取七个月,其销售量分别为

64,57,49,81,76,70,59,

试求 μ 的双侧 0.95 置信区间和方差 σ^2 的双侧 0.90 置信区间.

解 由于 μ 和 σ 都未知,故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right],$$

σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

代入数据得

$$\bar{x}=65.14,\quad s^2=108.41,\quad s^*=11.25,\quad t_{0.975}(6)=2.45,\quad n=7,$$

$$\chi^2_{0.95}(6)=12.592, \chi^2_{0.05}(6)=1.635.$$

μ 的双侧 0.95 置信区间观测值为 $\left[65.14-2.45\times\frac{11.25}{\sqrt{7}},65.14+2.45\times\frac{11.25}{\sqrt{7}}\right]$,即为[54.73,75.56].

σ^2 的双侧 0.90 置信区间观测值为 $\left[\frac{7\times 108.41}{12.592},\frac{7\times 108.41}{1.635}\right]$,即为[60.3,464.14].

3. 随机地取某种子弹 9 发做试验,测得枪口子弹速度的 $s^*=11$,设枪口子弹速度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,求这种子弹枪口速度的标准差 σ 和方差 σ^2 的双侧 0.95 置信区间.

解 由于 μ 未知,故 σ^2 的双侧置信区间为 $\left[\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$,代入数据得 $n=9$, $s^{*2}=121$, $\chi^2_{0.975}(8)=17.535$, $\chi^2_{0.025}(8)=2.18$.

σ^2 的双侧 0.95 置信区间观测值为 $\left[\frac{8\times 121}{17.535},\frac{8\times 121}{2.18}\right]$,即为[55.204,444.037]. 故 σ 的双侧 0.95 置信区间观测值为 $[\sqrt{55.204},\sqrt{444.037}]$,即为[7.43,21.07].

4. 已知某炼铁厂的铁水含碳量(单位:%)正常情况下服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,且标准差 $\sigma>0$ 未知. 现测量五炉铁水,其含碳量分别是

4.28, 4.40, 4.42, 4.35, 4.37,

试求未知参数 μ 的单侧置信水平为 0.95 的置信下限和置信上限.

解 由于 σ 未知,故 μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信下限为 $\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\cdot\frac{S^*}{\sqrt{n}}$,$\mu$ 的单侧 $1-\alpha$ 置信上限为 $\overline{X}+t_{1-\alpha}(n-1)\cdot\frac{S^*}{\sqrt{n}}$,代入数据得 $\bar{x}=4.364(\%)$,$s^*=$

$0.0541t_{0.95}(4)=2.1318$,$n=5$,故 μ 的单侧 0.95 置信下限观测值为 $4.364-2.1318\cdot\frac{0.0541}{\sqrt{5}}=4.3124$,$\mu$ 的单侧 0.95 置信上限观测值为 $4.364+2.1318\cdot\frac{0.0541}{\sqrt{5}}=4.4156$.

5. 某单位职工每天的医疗费服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,现抽查了 25 天,得 $\bar{x}=170$ 元,$s=30$ 元,求职工每天医疗费均值 μ 的双侧 0.95 置信区间.

解 由于 σ^2 未知,故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right],$$

代入数据得 $\bar{x}=170$,$s=30$,$n=25$,$t_{0.975}(24)=2.0639$,故 μ 的双侧 0.95 置信区间观测值为 $\left[170-2.0639\frac{30}{\sqrt{24}},\ 170+2.0639\frac{30}{\sqrt{24}}\right]$,即为 $[157.4,182.6]$.

6. 一个容量为 $n=16$ 的随机样本来自 μ 和 σ 未知的正态分布总体,已知样本均值 $\bar{x}=27.9$ 和标准差 $s=3.23$,求 μ 的双侧 0.95 置信区间.

解 由于 σ 未知,故 μ 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为

$$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right],$$

代入数据得 $\bar{x}=27.9$,$s=3.23$,$n=16$,$t_{0.975}(15)=2.13$,故 μ 的双侧 0.95 置信区间观测值为 $\left[27.9-2.13\frac{3.23}{\sqrt{15}},\ 27.9+2.13\frac{3.23}{\sqrt{15}}\right]$,即为 $[26.12,29.68]$.

***7.** 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,其中 X 服从参数为 λ 的指数分布,其中 λ 未知,$\lambda>0$,求参数 λ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间.

(提示:取枢轴函数 $2\lambda n\bar{X}$,可以证明 $2\lambda n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$.)

解 首先 λ 的一个点估计为 $\bar{X}$,根据提示,取枢轴函数为 $2\lambda n\bar{X}$,$2\lambda n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$,故

$$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)\leqslant 2\lambda n\bar{X}\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n))=1-\alpha,$$

故 λ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为 $\left[\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\bar{X}},\ \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\bar{X}}\right]$.

***8.** 化工厂经常用不锈钢处理腐蚀性液体,但是,这些不锈钢在某种特别环境下受到应力腐蚀断裂,发生在某炼油厂和化学制品厂的 295 个不锈钢失效样本中,有 118 个是由于应力腐蚀断裂的,求由应力腐蚀断裂引起的不锈钢失效比率真值的置信水平为 95% 的置信区间.

(提示:可用中心极限定理构造枢轴函数.)

解 记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个钢件因腐蚀断裂引起失效},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(i=1,\cdots,n)$.

$X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同 $B(1,p)$ 分布,其中 $p=P(X_1=1)$ 为失效比.由中心极限定理可知,近似地有

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\sim N(0,1),\text{其中 } q=1-p,$$

或等价地,

$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\sim N(0,1),\text{其中}\bar{X}=\frac{X}{n}.$$

今用 $\bar{X}$ 作 p 的点估计,则 $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ 的估计为 $\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$. 于是失效比 p 的近似置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}},\ \bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right].$$

今 $n=295$,$x=118$,因而

$$\bar{X}=\frac{118}{295}=0.4,\quad\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}=0.0285,\quad u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.975}=1.96,$$

于是 p 的近似置信水平为 95% 的置信区间的观测值为 $[0.3441,0.4559]$.

9. 某食品加工厂有甲乙两条加工猪肉罐头的生产线.设罐头重量服从正态分布并假设甲生产线与乙生产线互不影响.从甲生产线抽取 10 只罐头测得其平均重量 $\bar{x}=501$ g,已知其总体标准差 $\sigma_1=5$ g;从乙生产线抽取 20 只罐头测得其平均重量 $\bar{y}=498$ g,已知其总体标准差 $\sigma_2=4$ g,求甲乙两条猪肉罐头生产线生产罐头重量的均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.99 置信区间.

解 由于 $\sigma_1=5$ g,$\sigma_2=4$ g 已知,故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right].$$

代入数据得 $\bar{x}=501$,$\bar{y}=498$,$m=10$,$n=20$,$\sigma_1^2=25$,$\sigma_2^2=16$,$u_{0.995}=2.576$,故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.99 置信区间观测值为 $\left[501-498-2.576\sqrt{\frac{25}{10}+\frac{16}{20}},501-498+2.576\sqrt{\frac{25}{10}+\frac{16}{20}}\right]$,即为 $[-1.68,7.68]$.

10. 为了比较甲、乙两种显像管的使用寿命 X 和 Y(单位:10^4 h),随机地抽取甲、乙两种显像管各 10 只,得数据 $x_1,\cdots,x_{10}$ 和 $y_1,\cdots,y_{10}$,且由此算得

$$\bar{x}=2.33,\quad \bar{y}=0.75,\quad \sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=27.5,\quad \sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=19.2,$$

假定两种显像管的使用寿命均服从正态分布，且由生产过程知道它们的方差相等. 试求两个总体均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.95 置信区间.

解 由于 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，故 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right],$$

其中 $S_w^2=\dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right]$.

代入数据得 $\bar{x}=2.33,\bar{y}=0.75,m=10=n,s_w=1.611,t_{0.975}(18)=2.1009$，故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.95 置信区间观测值为

$$\left[2.33-0.75-2.1009\times1.611\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}},\ 2.33-0.75+2.1009\times1.611\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\right],$$

即为[0.066,3.094].

***11.** 在3091个男生，3581个女生组成的总体中，随机不放回抽取100人，观察其中男生的成数，要求计算样本中男生成数的 SE.

解 由于样本大小 $n=100$ 相对于总体容量 $N=6672$ 来说很小，因此可使用有放回抽样的公式.

样本成数 $\bar{x}=100\times\dfrac{3091}{6672}\approx46$，估计 $\hat{\sigma}=\sqrt{46\times54}\approx50$，标准差 SE 的估计为 $\hat{SE}=\dfrac{50}{\sqrt{100}}=5$.

***12.** 抽取1000人的随机样本估计一个大的人口总体中拥有私人汽车的人的百分数，样本中有543人拥有私人汽车.

(1) 求样本中拥有私人汽车的人的百分数的 SE；

(2) 求总体中拥有私人汽车的人的百分数的置信水平为95% 的置信区间.

解 $\bar{x}=\dfrac{543}{1000}\times100=54.3(\%)$，$\hat{\sigma}=\sqrt{54.3\times45.7}=49.8$，故

$$\hat{SE}=\frac{49.8}{\sqrt{1000}}=1.575,\quad u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{SE}=u_{0.975}\times1.575=3.087,$$

所以总体中拥有私人汽车的人的百分数的置信水平为95% 的置信区间观测值为(51.213,57.387).

练　习　10

10.1 某化纤强力长期以来标准差稳定在 $\sigma=1.19$，现抽取了一个容量 $n=100$ 的样

本，求得样本均值 $\bar{x}=6.35$，试求该化纤强力均值的置信水平为0.95的置信区间.

10.2 某银行要测定在业务柜台上处理每笔业务所花费的时间，假设处理每笔业务所需时间服从正态分布，现随机地抽取16笔业务，测得所需时间为 $x_1,\cdots,x_{16}$(单位:min). 由此算出 $\bar{x}=13,s^{*2}=5.6$，求处理每笔业务平均所需时间的双侧0.95置信区间.

10.3 设某自动车床加工的零件尺寸与规定尺寸的偏差 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，现从加工的一批零件中随机抽出10个，其偏差分别为

2, 1, −2, 3, 2, 4, −2, 5, 3, 4.

试求 μ,σ^2,σ 的置信水平为0.9的双侧置信区间.

10.4 设从2个正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$ 中分别抽取容量10和12的样本，算得 $\bar{x}=20,\bar{y}=24,s_1^*=5,s_2^*=6$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为0.95的双侧置信区间.

答案与提示

10.1 [6.117,6.583].

10.2 [10.0159,15.9841].

10.3 [0.6066,3.3934],[3.0735,15.6391],[1.7531,3.9546].

10.4 [−8.975,0.975].

第十一章 假设检验

一、基本要求

1. 了解原假设和备择假设的概念,弄清其间的差别和联系.
2. 知道两类错误概率,并在较简单的情况下能计算两类错误概率.
3. 理解显著水平检验法的基本思想,会构造简单假设的显著性检验.
4. 掌握单正态总体参数假设检验的基本步骤.

二、内容提要

1. 假设检验的基本概念

假设检验是基于样本判定一个关于总体分布的理论假设是否成立的统计方法. 方法的基本思想是当观察到的数据差异达到一定程度时,就会反映与总体理论假设的真实差异,从而拒绝理论假设.

原假设与备择假设是总体分布所处的两种状态的刻画,一般都是根据实际问题的需要以及相关的专业理论知识提出来的. 通常,备择假设的设定反映了收集数据的目的.

检验统计量是统计检验的重要工具,其功能在于构造观察数据与期望数之间的差异程度. 要求在原假设下分布是完全已知的或可以计算的. 检验的名称是由所使用的统计量来命名的.

否定论证是假设检验的重要推理方法,其要旨在:先假定原假设成立,如果导致观察数据的表现与此假定矛盾,则否定原假设. 通常使用的一个准则是小概率事件的实际推断原理.

2. 两类错误概率. 第一类错误概率即原假设成立,而错误地加以拒绝的概率;第二类错误概率即原假设不成立,而错误地接受它的概率.

3. 显著水平检验. 在收集数据之前假定一个准则,即文献上称之为拒绝域,一旦样本观测值落入拒绝域就拒绝原假设. 若在原假设成立条件下,样本落入拒绝域的概率不超过事先设定的 α,则称该拒绝域所代表的检验为显著性水平 α 的检验,而称 α 为显著性水平. 由定义可知,所谓显著水平检验就是控制第一类错误概率的检验.

4. 正态总体参数检验

我们以单正态总体均值 μ 检验为例,即假定总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

(1) 列出问题,即明确原假设和备择假设. 先设 σ^2 已知,检验

$$H_0:\mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0,$$

其中 μ_0 已知.

(2) 基于 μ 的估计 $\overline{X}$,提出检验统计量

$$Z=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}.$$

Z 满足如下要求:

(i) 在 H_0 下,Z 的分布完全已知,此处 $Z \sim N(0,1)$;

(ii) 由 Z 可诱导出与 H_0 背离的准则,此处当 $|Z|$ 偏大时与 H_0 背离.

(3) 对给定水平 α,构造水平 α 检验的拒绝域

$$R=\{|Z|>u_{1-\alpha/2}\},$$

其中 u_α 为标准正态分布的 α 分位点.

(4) 基于数据,算出 Z 的观测值 z,如 $z\in R$ 则拒绝 H_0,否则只能接受 H_0. 因此检验使用统计量 Z,称之为 Z 检验.

当 σ^2 未知时,改检验统计量 Z 为

$$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S^*},$$

其中 S^* 为修正样本标准差. 相应的拒绝域为

$$R=\{|T|\geqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)\},$$

$t_\alpha(n-1)$ 为自由度 $n-1$ 的 t 分布的 α 分位点. 其他的检验步骤相同.

*5. p 值和 p 值检验法

p 值是在原假设成立条件下检验统计量出现给定观察值或者比之更极端值的概率,直观上用以描述抽样结果与理论假设的吻合程度,因而也称 p 值为拟合优度. 例如在正态总体参数检验 $H_0:\mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$ 的情况,检验统计量为 T,观测值为 c,则 p 值为 $p=P(|T|\geqslant c\mid H_0)$.

p 值检验法的原则是当 p 值小到一定程度时拒绝 H_0,通常约定:当 $p\leqslant 0.05$ 时,称结果为显著;当 $p\leqslant 0.01$ 时,则称结果为高度显著.

三、学习要点

本章内容涉及概念及方法两大部分,要求理解和掌握假设检验的一些基本概念,如两类错误概率,否定论证原理,显著性水平. 弄清显著性水平 α 检验的确

切含义,掌握单正态总体检验的基本方法.

四、释疑解难

问 11.1 两类错误概率能否同时控制得很小?

答 当样本容量 n 固定时,做不到. 一般地说,当第一类错误概率 α 小时,第二类错误概率 β 就显得大,以下以正态总体 $N(\mu,1)$ 的参数 μ 的检验为例:检验 $H_0:\mu=0 \longleftrightarrow H_1:\mu>0$,拒绝域 $R=\left\{\overline{X}>\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right\}$. 其二类错误概率 α,β 见图11.1所示,其中右边曲线所围图形表示 H_1 成立时 $\overline{X}$ 的分布,而左边则是 H_0 成立时 $\overline{X}$ 的分布. 显然,当 α 小时,β 变大;反之亦然.

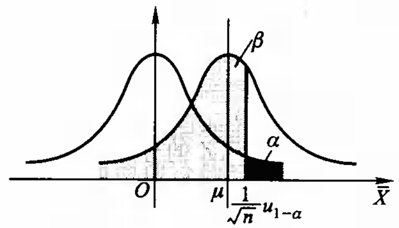


图 11.1

问 11.2 未被一个显著性检验所拒绝的原假设 H_0 是否一定成立?

答 不一定. 为一个水平 α 显著性检验所拒绝的假设 H_0,平均来说每 100 次,作出拒绝 H_0 结论,做错了的大约只有 $\alpha\times100$ 次. 因而有一定的可靠度,但未被拒绝时,犯第二类错误的概率 β 并未受到控制,因此接受 H_0 而犯错误的可能性无法预料. 另一方面,仅仅凭一次试验的结果没有被拒绝的假设,从人们的心理上是不放心的,一般需要继续做试验,重新取得数据作检验,根据多次试验的结果再作结论.

问 11.3 同一问题及同一批数据,如使用不同的显著性水平,其检验结果是否不同?

答 不同的显著性水平下,检验的结论可能是不同的. 例如可能在水平 $\alpha=0.05$ 下是不能拒绝的,而在水平 $\alpha=0.10$ 下被拒绝.

问 11.4 一个显著性水平 α 的检验的第一类错误概率与水平 α,这两个概念有何差别?

答 这是两个不同的概念,第一类错误概率与具体的检验有关,同一问题可以有不止一个水平 α 检验,它们具有不同的第一类错误概率,但是有一个共同点,就是第一类错误概率都不超过 α. 水平 α 则是所有可能的水平 α 检验的第一类错误概率的上界. 因此水平 α 与具体检验无关.

问 11.5 为什么不能称备择假设为对立假设?

答 注意到某些原假设 H_0 与备择假设 H_1 并不是非此即彼,例如 $H_0:\mu=$

μ_0,$H_1:\mu>\mu_0$. 此处“$\mu>\mu_0$”只是“$\mu=\mu_0$”的对立陈述的一部分,而非全部. 究竟备择假设选择对立陈述中的哪一部分,取决于收集数据的目的.

五、例题分析及增补

例 11.1 设购进 6 台同型号电视机,原假设 H_0:至多有 1 台有质量问题.

(1) 写出备择假设 H_1;

(2) 今有放回随机抽取 2 台测试其质量,用 X 表示 2 台中有质量问题的台数,拒绝域 $R=\{x:x\geq1\}$,试写出此检验的两类错误概率.

解 (1) 在对问题没有进一步信息情况下,只能假定备择假设 $H_1:\theta\geq2$,其中 $\theta=6$ 台中有质量问题的台数(因而原假设可表为 $H_0:\theta\leq1$).

(2) 记 $\alpha(\theta)=P_\theta(X\geq1)$,即在假定有质量问题的有 θ 台前提下,拒绝 H_0 的概率.

当 $\theta=0$ 时,$\alpha(0)=P_0(X\geq1)=0$;

当 $\theta=1$ 时,$\alpha(1)=P_1(X\geq1)=1-P_1(X=0)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$.

因此当 $\theta=0$ 及 $\theta=1$ 时,第一类错误概率分别是 0 及$\frac{11}{36}$.

又记 $\beta(\theta)=1-\alpha(\theta)=P_\theta(X=0)$,即当6 台中有质量问题的有 θ 台时,接受 H_0 的概率. 依定义,当 $\theta\geq2$ 时,$\beta(\theta)$ 即参数为 θ 时的第二类错误概率.

$$\beta(2)=P_2(X=0)=\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9},$$

$$\beta(3)=P_3(X=0)=\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$\beta(4)=P_4(X=0)=\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{1}{9},$$

$$\beta(5)=P_5(X=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36},$$

$$\beta(6)=P_6(X=0)=0.$$

例 11.2 据统计部门的调查显示:某城市有 37% 的人是独自开车上班的. 为了减轻道路拥堵的状况,该城市实行了一些限流措施后调查 300 个上班族发现有 30% 的人独自开车上班. 用 p 值法检验该限流措施是否起作用了. $\alpha=0.05$.

解 记 $\mu=$ 开车上班的比率,设 $H_0:\mu=0.37\longleftrightarrow H_1:\mu<0.37$,$X=300$ 名上班族中独自开车上班的人数,则在 H_0 下 $X\sim B(300,0.37)$,

期望数 $=300\times0.37=111$, $\sigma(X)=\sqrt{300\times0.37\times0.63}=8.362$.

在 H_0 下，$Z = \dfrac{X - 111}{8.362} \sim N(0,1)$.

X 的观测值为 $x = 90$，因而 Z 的观测值为 $z = \dfrac{90 - 111}{8.362} = -2.51$，

$$p = P(Z < -2.51 \mid H_0) = 1 - \Phi(2.51) = 0.006 < \alpha = 0.05,$$

所以可以认为这是一个小概率事件，与实际推断原理矛盾，拒绝 H_0，即可以认为该限流措施是起作用的.

例 11.3 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自正态分布 $N(\mu,1)$ 的样本，检验假设

$$H_0:\mu = 0 \longleftrightarrow H_1:\mu = 1,$$

拒绝域为 $R = \{\overline{X} \geqslant 0.98\}$. 求此检验的两类错误概率.

解 记 $\alpha(\mu) = P_\mu(\overline{X} \geqslant 0.98)$，$\beta(\mu) = P_\mu(\overline{X} < 0.98)$，因此第一类错误概率为

$$\alpha(0) = P_0(\overline{X} \geqslant 0.98) = P_0(2\overline{X} \geqslant 1.96) = P_0(\sqrt{4}\,\overline{X} \geqslant 1.96) = 0.025,$$

第二类错误概率为

$$\begin{aligned}\beta(1) &= P_1(\overline{X} < 0.98) = P_1(\sqrt{4}\,\overline{X} < 1.96) = P_1(\sqrt{4}(\overline{X} - 1) < 1.96 - 2) \\ &= P_1(\sqrt{4}(\overline{X} - 1) < -0.04) = 0.4840.\end{aligned}$$

例 11.4 某钢筋的抗拉强度（单位:kg）$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知. 今从一批钢筋中随机抽出 10 根，测得修正样本标准差 $s^* = 30$，$\bar{x} = 140$，按标准当抗拉强度不小于 120 时为合格，试检验该批钢筋是否合格（$\alpha = 0.05$）.

解 设原假设 $H_0:\mu < 120$，备择假设 $H_1:\mu \geqslant 120$，因而若拒绝 H_0，则该批钢筋合格.

因 σ^2 未知，使用 t 检验. 令

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{S^*} = \frac{\sqrt{10}(\overline{X} - 120)}{S^*},$$

拒绝域为

$$R = \{t : t \geqslant t_{1-\alpha}(9)\},$$

其中 $t_{1-\alpha}(9) = t_{0.95}(9) = 1.8331$. 代入观察数据，可算出

$$t = \frac{\sqrt{10}(140 - 120)}{30} = 2.1082.$$

因而结论拒绝 H_0，即该批钢筋合格.

以上求解过程忽略了一个问题：即以 R 为拒绝域的检验是否为水平 $\alpha = 0.05$ 的检验？

注意到当 H_0 成立时，

$$\frac{\sqrt{10}(\overline{X} - \mu)}{S^*} \geqslant \frac{\sqrt{10}(\overline{X} - 120)}{S^*},$$

因而

$$P_\mu\left(\frac{\sqrt{10}(\overline{X} - 120)}{S^*} \geqslant t_{0.95}(9) \,\middle|\, H_0\right) \leqslant P_\mu\left(\frac{\sqrt{10}(\overline{X} - \mu)}{S^*} \geqslant t_{0.95}(9) \,\middle|\, H_0\right) = 0.05.$$

所以，依定义此检验水平为 $\alpha = 0.05$.

例 11.5 为比较新老品种的肥料对作物的效用有无显著差别，选用了各方面条件差不多的10个地块种上此作物. 随机选用其中5块施上新肥料，而剩下的5块施上老肥料. 等到收获时观察到施新肥的地块，平均年产 33，修正样本方差为3.2，施老肥的地块平均年产30，修正样本方差为4. 假设作物产量服从正态分布，检验新肥是否比老肥效用上有显著提高（显著性水平 $\alpha = 0.10$）.

解 设 X 为施新肥地块的产量，Y 为老肥地块的产量，$X_1,\cdots,X_5,Y_1,\cdots,Y_5$ 分别是来自 X 及 Y 的样本，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，检验假设 $H_0:\mu_1 \leqslant \mu_2$，备择假设 $H_1:\mu_1 > \mu_2$. 这是二样本检验问题，但还不能直接进行两样本 t 检验，因为我们还不知道 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是否成立. 为此先要做一个假设 $H_0':\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的检验. 注意到，σ_1^2,σ_2^2 的点估计为修正样本方差 S_1^{*2}, S_2^{*2}. 因

$$F \triangleq \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}$$

在 H_0' 下服从 $F(4,4)$ 分布，而当 F 偏小或偏大均与 H_0' 背离. 因而假设 H_0' 的拒绝域为

$$R' = \{F < c_1 \text{ 或 } F > c_2\},$$

其中 $c_1 < c_2$ 由给定水平 α 确定，今取 $\alpha = 0.10$，则取 $c_1 = F_{0.05}(4,4) = 0.1565$，$c_2 = F_{0.95}(4,4) = 6.39$. 可以验证以 R' 为代表的检验是水平 $\alpha = 0.10$ 的检验. 今计算统计量 F 值为 $F = 3.2/4 = 0.8$，介于 c_1, c_2 之间，因而不能拒绝 H'_0，即可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

现在回到 H_0 的检验：检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{2/5}},$$

其中

$$S_w^2 = \frac{1}{m + n - 2}\left[(m-1)S_1^{*2} + (n-1)S_2^{*2}\right] = \frac{4}{8}(S_1^{*2} + S_2^{*2}) = \frac{1}{2}(S_1^{*2} + S_2^{*2}).$$

所以

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_1^{*2} + S_2^{*2}}\sqrt{1/5}}.$$

拒绝域为

$$R=\{T>c\},$$

其中 $c=t_{1-\alpha}(m+n-2)=t_{0.90}(8)=1.3968$. 今计算 t 值为

$$t=\frac{\sqrt{5}(33-30)}{\sqrt{3.2+4}}=\frac{3\times 2.236}{2.683}\approx 2.5001,$$

因而拒绝 H_0,即新肥比老肥在效用上有显著提高.

六、习题解答

1. 在一个假设检验问题中,当检验最终结果是接受 H_1 时,可能犯什么错误? 在一个假设检验问题中,当检验最终结果是拒绝 H_1 时,可能犯什么错误?

解 (1) 犯拒真的错误,即第一类错误;

(2) 犯采伪的错误,即第二类错误.

2. 某厂生产的化纤纤度服从正态分布 $N(\mu,0.04^2)$,现测得 25 根纤维的纤度,其样本均值 $\bar{x}=1.39$,试用 p 值法检验总体的均值是否为 1.40.

解 原假设 $H_0:\mu=1.40$,统计量 $Z=\sqrt{25}\dfrac{(\bar{X}-1.4)}{0.04}=125(\bar{X}-1.4)$,观测值 $c=125(1.39-1.4)=-1.25$,所以 p 值为

$$p=P(|125(\bar{X}-1.4)|>|c|)=P(|Z|>1.25)=2P(Z>1.25)\approx 0.20.$$

因此不能拒绝 H_0,即可以认为 $\mu=1.40$.

***3.** 为了研究司机在驾驶车辆过程中使用手机的频率,在全国范围内随机选取了 1165 个司机作为一个样本,其中有 35 个正在使用手机,用 p 值法检验司机使用手机的真实比率 p 是否等于 0.02. $\alpha=0.05$.

解 设 $H_0:p=0.02\longleftrightarrow H_1:p\neq 0.02$.

记 $X=1165$ 个司机中正在使用手机的人数,则在 H_0 下有 $X\sim B(1165,0.02)$,

期望数 $=1165\times 0.02=23.3$,$\sigma(X)=\sqrt{1165\times 0.02\times 0.98}=4.7785$,

在 H_0 下,$Z=\dfrac{X-23.3}{4.7785}\sim N(0,1)$.

X 的观测值为 $x=35$,因而 Z 的观测值为 $z=\dfrac{35-23.3}{4.7785}=2.45$,

$p=P(|Z|\geqslant 2.45|H_0)=2(1-\Phi(2.45))=2\times 0.0071=0.0142<\alpha=0.05$,

所以可以认为这是一个小概率事件,与实际推断原理矛盾,拒绝 H_0,即认为司机使用手机的真实比率 p 不等于 0.02.

***4.** 科学家研究暴露于低氧对昆虫死亡率的影响. 在一个实验室里放置成

千上万只昆虫,将它们放置于低氧状态 4 天,结果发现其中 31386 只死亡,35 只存活. 以前的研究表明,暴露于低氧的死亡率为 99%,用 p 值法检验现在的昆虫暴露于低氧的死亡率是否高于 99%. $\alpha=0.1$.

解 设 $H_0:p=0.99\longleftrightarrow H_1:p>0.99$.

记 $X=31421$ 只昆虫中死亡的个数,则在 H_0 下,$X\sim B(31421,0.99)$. 且在 H_0 下,由中心极限定理,近似地有 $Z=\dfrac{X-31106.79}{17.637}\sim N(0,1)$.

X 的观测值为 $x=31386$,因而 Z 的观测值为 $z=\dfrac{31386-31106.79}{17.637}=15.83$,

p 值为

$$p=P(Z>15.83|H_0)=1-\Phi(15.83)\approx 0<\alpha=0.1.$$

因此在水平 α 下拒绝 H_0,即以显著性水平 $\alpha=0.1$,死亡率高于 99%.

5. 某印刷厂旧机器每周开工成本服从正态分布 $N(100,25^2)$,现安装一台新机器,观测到九周平均每周开工成本 $\bar{x}=75$ 元,假定标准差不变,试用 p 值法检验每周开工平均成本是否为 100.

解 $H_0:\mu=100$,统计量 $Z=\dfrac{3(\bar{X}-100)}{25}$,观测值 $c=\dfrac{3(75-100)}{25}=-3$,故 p 值为

$$p=P(|Z|\geqslant|c|)=2P(Z\geqslant 3)=0.002,$$

故拒绝 H_0 是高度显著,即 $\mu\neq 100$.

6. 设 $(x_1,\cdots,x_{25})$ 是取自总体 $N(\mu,100)$ 的一个样本的观测值,要检验假设

$$H_0:\mu=0,H_1:\mu\neq 0,$$

试给出显著性水平 α 的检验的拒绝域 R.

解 $R=\left\{\dfrac{\sqrt{25}|\bar{X}|}{10}>u_{1-\alpha/2}\right\}=\{|\bar{X}|>2u_{1-\alpha/2}\}$.

7. 某纤维的强力服从正态分布 $N(\mu,1.19^2)$. 原设计的平均强力为 6 g,现改进工艺后,某天测得 100 个强力数据,其样本均值为 6.35 g,总体标准差假定不变,试问均值的提高是否是工艺改进的结果? (取 $\alpha=0.05$.)

解 设原假设 $H_0:\mu\leqslant 6$,备择假设 $H_1:\mu>6$,统计量 $Z=\dfrac{10(\bar{X}-6)}{1.19}$,临界值 $c=u_{0.95}=1.645$,拒绝域为 $R=\{Z>1.645\}$.

今计算 Z 值为

$$z=\frac{10(6.35-6)}{1.19}=2.941,$$

因而拒绝 H_0,即认为改进工艺后强力有显著提高.

8. 监测站对某条河流的溶解氧(DO)浓度(单位:mg/L)记录了30个数据,并由此算得 $\bar{x}=2.52, s^*=2.05$,已知这条河流每日的DO浓度服从 $N(\mu,\sigma^2)$. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下,检验假设:$H_0:\mu=2.7, H_1:\mu<2.7$.

解 统计量 $T=\dfrac{\sqrt{30}(\bar{X}-2.7)}{S^*}$,拒绝域为 $R=\left\{T<-t_{1-\alpha}(29)\right\}$.

今 $t_{1-\alpha}(29)=t_{0.95}(29)=1.6991$. 计算 t 值为

$$t=\frac{\sqrt{30}(2.52-2.7)}{2.05}=-0.481>-1.6991,$$

因而不能拒绝 H_0.

9. 从某厂生产的电子元件中随机地抽取了25件作寿命测试,得数据(单位:h)$x_1,\cdots,x_{25}$,并由此算得 $\bar{x}=100, \sum\limits_{i=1}^{25}x_i^2=4.9\times10^5$,已知这种电子元件的使用寿命服从 $N(\mu,\sigma^2)$,且出厂标准为90 h以上,试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下,检验该厂生产的电子元件是否符合出厂标准,即检验假设:$H_0:\mu=90, H_1:\mu>90$.

解 首先

$$S^{*2}=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{24}(4.9\times10^5-25\times10^4)=\frac{24\times10^4}{24}=10^4,$$

所以修正样本标准差的观测值 $s^*=100$,t 统计量的观测值为

$$t=\frac{5(\bar{x}-90)}{s^*}=\frac{5\times10}{100}=0.5.$$

临界值 $c=t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(24)=1.7109$. 因 $t<c$,不落入拒绝域,不能拒绝 H_0.

*10. 一位研究某一甲虫的生物学家发现生活在高原上的该种类的一个总体,从中取出 $n=20$ 个高山甲虫,以考察高山上的该甲虫是否不同于平原上的该甲虫,其中度量之一是翅膀上黑斑的长度(单位:mm). 已知平原甲虫黑斑长度服从 $\mu=3.14, \sigma^2=0.0505$ 的正态分布,从高山上甲虫样本得到的黑斑长度 $\bar{x}=3.23, s=0.4$,假定高山甲虫斑长也服从正态分布,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下分别进行下列检验:

(1) $H_0:\mu=3.14$ $(H_1:\mu\neq3.14)$;

(2) $H_0:\sigma^2=0.0505$ $(H_1:\sigma^2\neq0.0505)$.

解 (1) 统计量 $T=\dfrac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-3.14)}{S}$,拒绝域为

$$R=\left\{|T|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}.$$

今 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(19)=t_{0.975}(19)=2.093$. 计算 t 值为

$$t=\frac{\sqrt{19}(3.23-3.14)}{0.4}=0.98<2.093,$$

因而不能拒绝 H_0.

(2) 统计量 $\chi^2=\dfrac{nS^2}{0.0505}$,拒绝域为

$$R=\left\{\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ 或\ \chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}.$$

今 $\chi^2_{0.975}(19)=32.852, \chi^2_{0.025}(19)=8.907$,计算 χ^2 值为

$$\chi^2=\frac{20\times0.4^2}{0.0505}=63.366>32.852,$$

因而拒绝 H_0.

11. 随机地从一批外径为1 cm的钢珠中抽取10只,测试其屈服强度(单位:kg),得数据 $x_1,\cdots,x_{10}$,并由此算得 $\bar{x}=2200, s^*=220$,已知钢珠的屈服强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下分别检验:

(1) $H_0:\mu=2000$ $(H_1:\mu>2000)$;

(2) $H_0:\sigma^2=200^2(H_1:\sigma^2>200^2)$.

解 (1) 拒绝域 $R=\{T>c\}$,其中 $c=t_{0.95}(n-1)=1.8331$. T 的观测值为

$$t=\sqrt{10}\,\frac{(\bar{x}-2000)}{s^*}=\sqrt{10}\,\frac{(2200-2000)}{220}\approx2.875>c,$$

所以拒绝 H_0.

(2) 拒绝域 $R=\{\chi^2>c\}$,其中

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{200^2},\quad c=\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=16.919.$$

今 χ^2 的观测值为 $\chi^2=\dfrac{9\times220^2}{200^2}=\dfrac{435600}{200^2}=10.89<c$,因而不能拒绝 H_0.

12. 一卷烟厂向化验室送去A,B两种烟草,化验尼古丁的含量是否相同,从A,B中各随机抽取重量相同的五例进行化验,测得尼古丁的含量(单位:mg)为

A:24,27,26,21,24,

B:27,28,23,31,26.

据经验知,尼古丁含量服从正态分布,且A种的方差为5,B种的方差为8,取显著性水平 $\alpha=0.05$,问两种烟草的尼古丁含量是否有差异?

解 设A的含量为 X,B的含量为 Y,且 $X\sim N(\mu_1,5), Y\sim N(\mu_2,8)$,检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2, H_1:\mu_1\neq\mu_2$. 拒绝域为

$$R=\{|Z|>c\},$$

其中

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{5}{5}+\frac{8}{5}}},\quad c=u_{0.975}=1.96.$$

今计算 $\bar{x} = 24.4, \bar{y} = 27$，故

$$z = \frac{24.4 - 27}{\sqrt{1 + 8/5}} = -\frac{2.6}{1.612} = -1.6129,$$

因而不能拒绝 H_0，即认为两种烟草的尼古丁含量没有差异.

13. 某厂铸造车间为提高缸体的耐磨性而试制了一种镍合金铸件以取代一种铜合金铸件，现从两种铸件中各抽一个样本进行硬度测试，其结果如下：

镍合金铸件(X)：72.0，69.5，74.0，70.5，71.8，

铜合金铸件(Y)：69.8，70.0，72.0，68.5，73.0，70.0.

根据以往经验知硬度 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$，试在 $\alpha = 0.05$ 水平上比较镍合金铸件硬度有无显著提高.

解 假设 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$，$H_1: \mu_1 > \mu_2$，检验统计量

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{6}}},$$

拒绝域为

$$R = \{Z > u_{0.95}\}.$$

今 $u_{0.95} = 1.645$，$\bar{x} = 71.56$，$\bar{y} = 70.55$，

$$z = \frac{71.56 - 70.55}{2\sqrt{0.366}} \approx \frac{1.01}{1.21} \approx 0.8347,$$

因此不能拒绝 H_0，即不能认为镍合金铸件的硬度有提高.

14. 用两种不同方法冶炼的某种金属材料，分别取样测定其某种杂质的含量，所得数据如下(单位为万分率)：

原方法(X)：26.9，25.7，22.3，26.8，27.2，24.5，22.8，23.0，24.2，26.4，30.5，29.5，25.1，

新方法(Y)：22.6，22.5，20.6，23.5，24.3，21.9，20.6，23.2，23.4.

假设这两种方法冶炼时杂质含量均服从正态分布，且方差相同，问这两种方法冶炼时杂质的平均含量有没有显著差异？取显著性水平为 0.05.

解 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，检验假设为 $H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，检验统计量为

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{9}}} \quad \left(S_w^2 = \frac{1}{13 + 9 - 2}(13S_1^2 + 9S_2^2)\right),$$

拒绝域为 $R = \{|T| > c\}$，其中 $c = t_{0.975}(13 + 9 - 2) = 2.086$.

今 $\bar{x} = 25.76$，$\bar{y} = 22.51$，$\sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 8701.67$，$\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 4573.88$，$13s_1^2 = 8701.67 - 8626.51 = 75.16$，$9s_2^2 = 4573.88 - 4560.30 = 13.58$，$s_w^2 = 4.437$，所以

$$t = \frac{25.76 - 22.51}{2.1064 \times \sqrt{0.077 + 0.111}} = \frac{3.25}{0.9133} = 3.559,$$

因此拒绝 H_0，即认为两种方法有显著差异.

15. 为了降低成本，某面包店在制作面包时采用了一种新的发酵方法. 分别从新方法之前和之后制作的面包中随机抽样，并分析其热量. 两组样本分析结果如下：

新方法：$n = 50$，$\bar{y} = 1255$，$s_2 = 215$，其中 $s_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$，

原方法：$m = 30$，$\bar{x} = 1330$，$s_1 = 238$，其中 $s_1^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2$.

假设采用这两种方法其热量均服从正态分布，且方差相同，从以上数据分析能否认为因为采用了新的发酵方法使每个面包的平均热量降低了. 取显著性水平为 0.05.

解 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，检验假设 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$，$H_1: \mu_1 > \mu_2$，拒绝域为

$$R = \{T > c\},$$

其中 $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{30}}}$，$c = t_{0.95}(50 + 30 - 2) \approx u_{0.95} = 1.645$.

今计算 $s_w^2 = \frac{1}{50 + 30 - 2}(50 \times 215^2 + 30 \times 238^2) = 51417.56$，故

$$t = \frac{1330 - 1255}{\sqrt{51417.56}\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{30}}} = 1.432,$$

因此不能拒绝 H_0，即不能认为因为采用了新的发酵方法使每个面包的平均热量降低了.

16. 随机地挑选20位失眠者分别服用甲、乙两种安眠药，记录下他们睡眠的延长时间(单位：h)，得数据 $x_1, \cdots, x_{10}$ 和 $y_1, \cdots, y_{10}$，由此算得 $\bar{x} = 4.04$，$s_1^{*2} = 0.001$，$\bar{y} = 4$，$s_2^{*2} = 0.004$，问：能否认为甲药的疗效显著地高于乙药？假定甲、乙两种安眠药的延长睡眠时间均服从正态分布，且方差相等，取显著性水平为 0.05.

解 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，检验假设 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$，$H_1: \mu_1 > \mu_2$，拒绝域为

$$R = \{T > c\},$$

其中

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{2}{10}}},\quad c=t_{0.95}(10+10-2)=1.7341.$$

今计算 $s_w^2=\frac{1}{18}(9\times 0.001+9\times 0.004)=0.0025$,故

$$t=\frac{4.04-4}{0.05\times 0.448}=\frac{0.04}{0.0224}=1.7857,$$

因此应拒绝 H_0,即认为甲药的疗效显著高于乙药.

*17. 灰色的兔与棕色的兔交配能产生灰色、黑色、肉桂色和棕色等四种颜色的后代,其数量的比例由遗传学理论是9∶3∶3∶1,为了验证这个理论,作了一些观测,得到如下数据:

	实　测　数	理　论　数
灰色	149	144(= 256 × 9/16)
黑色	54	48(= 256 × 3/16)
肉桂色	42	48(= 256 × 3/16)
棕色	11	16(= 256 × 1/16)
总计	256	256

问:关于兔子的遗传理论是否可信?($\alpha=0.05.$)

解　检验假设 $H_0:p_1=\frac{9}{16},p_2=\frac{3}{16},p_3=\frac{3}{16},p_4=\frac{1}{16}.$

χ^2 统计量的值为

$$\chi^2=\frac{(149-144)^2}{144}+\frac{(54-48)^2}{48}+\frac{(42-48)^2}{48}+\frac{(11-16)^2}{16}$$
$$=0.1736+0.75+0.75+1.5625=3.2361.$$

临界值 $c=\chi^2_{0.95}(3)=7.815$,因此不能拒绝 H_0,即遗传学理论是可信的.

*18. 某电话交换台在一小时(60 分钟)内每分钟接到电话用户的呼唤次数有如下记录:

呼唤次数	0	1	2	3	4	5	6	7
实际频数	8	16	17	10	6	2	1	0

问:统计资料是否可以说明,每分钟电话呼唤次数服从泊松分布?($\alpha=0.05.$)

解　检验假设 $H_0:X\sim P(\lambda)$,λ 未知,其最大似然估计为 $\hat{\lambda}=\overline{X}=\frac{1}{60}\sum_{i=0}^{7}i\times$

$n_i=\frac{120}{60}=2$,先求期望数:

$60\hat{p}(0)=60\times 0.135=8.1,\qquad 60\hat{p}(1)=60\times 0.271=16.26,$

$60\hat{p}(2)=60\times 0.271=16.26,\qquad 60\hat{p}(3)=60\times 0.181=10.86,$

$60\hat{p}(4)=60\times 0.091=5.46,\qquad 60\hat{p}(5)=60\times 0.036=2.16,$

$60\hat{p}(6)=60\times 0.012=0.72,\qquad 60\hat{p}(7)=60\times 0.003=0.18.$

再计算 χ^2 值:

$$\chi^2=\frac{(8-8.1)^2}{8.1}+\frac{(16-16.26)^2}{16.26}+\frac{(17-16.26)^2}{16.26}+\frac{(10-10.86)^2}{10.86}$$
$$+\frac{(6-5.46)^2}{5.46}+\frac{(2-2.16)^2}{2.16}+\frac{(1-0.72)^2}{0.72}+\frac{(0-0.18)^2}{0.18}$$
$$=0.0012+0.0042+0.0337+0.0681+0.0534+0.0119+0.1089+0.18$$
$$=0.4614.$$

临界值 $c=\chi^2_{0.95}(8-1-1)=12.592$,因此不能拒绝 H_0,即认为每分钟呼唤次数服从泊松分布.

*19. 1976—1977 年美国佛罗里达州 29 个地区发生凶杀案中被告人判死刑的情况,白人参与凶杀案中被判死刑的比例比黑人参与凶杀案中被判死刑的比例要高,具体数据如下:

判刑结果 \ 被害人	死刑	非死刑
白人	30	184
黑人	6	106

那么被害人的肤色的不同对死刑的判罚有没有影响?取显著性水平为0.05.

解　检验假设 H_0:被害人的肤色的不同对死刑的判罚没有影响.

判刑结果 \ 被害人	死刑	非死刑	n_i
白人	30	184	214
黑人	6	106	112
n_j	36	290	总和 = 326

计算 χ^2 值:

$$\chi^2=\frac{\left(30-\frac{214\times 36}{326}\right)^2}{\frac{214\times 36}{326}}+\frac{\left(184-\frac{214\times 290}{326}\right)^2}{\frac{214\times 290}{326}}+$$

$$\frac{\left(6-\frac{112\times 36}{326}\right)^2}{\frac{112\times 36}{326}}+\frac{\left(106-\frac{112\times 290}{326}\right)^2}{\frac{112\times 290}{326}}$$
$$=5.615.$$

临界值 $c=\chi^2_{0.95}(1)=3.841$，因此拒绝 H_0，即认为被害人的肤色的不同对死刑的判罚有影响.

练　习　11

11.1　设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，对于检验 $H_0:\mu_1=\mu_2, H_1:\mu_1>\mu_2$，

(1) 写出拒绝域 R；

(2) 对于给定数据 $x_1,\cdots,x_n$，若在水平 $\alpha=0.05$ 下不能拒绝 H_0，问在水平 $\alpha=0.01$ 下能否拒绝 H_0？

(3) 反之，若在水平 $\alpha=0.01$ 下不能拒绝 H_0，问在水平 $\alpha=0.05$ 下能否拒绝 H_0？

11.2　设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ 和 σ^2 均未知，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，$U^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$，试写出对于假设 $H_0:\mu=0$ 的检验统计量(用 $\overline{X},U^2$ 表示).

11.3　设样本 X(容量为 1) 来自具有概率密度 $f(x)$ 的总体，今有关于总体的假设：

$$H_0:f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}\longleftrightarrow H_1:f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

检验的拒绝域为 $R=\{X>2/3\}$，试求该检验的两类错误概率 α 及 β.

11.4　设某次考试考生的成绩(单位:分)服从分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算出 $\bar{x}=66.5, s^*=15$，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下可否认为考生的平均成绩 $\mu=70$？

11.5　某种电子产品按国家标准要求平均使用寿命不得低于 1000 h，生产者从一批这样的电子产品中随机抽取了 25 个进行了寿命测试. 由测试结果算得 $\bar{x}=970$ h，$s^*=100$ h. 假定该电子产品的寿命服从分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知，在下列要求下，能否断言这批电子产品的平均寿命达到了国家标准 1000 h？

(1) 为了维护生产者的利益，要求第一类错误不超过 5%；

(2) 为了维护消费者的利益，要求第一类错误不超过 5%.

11.6　某化工厂为了提高化工产品的得率，提出甲乙两种方案，为比较它们的好坏，分别用两种方案各进行了 10 次试验，得到如下数据：

甲方案得率(%)	68.1	62.4	64.3	64.7	68.4	66.0	65.5	66.7	67.3	66.2
乙方案得率(%)	69.1	71.0	69.1	70.0	69.1	69.1	67.3	70.2	72.1	67.3

假设得率服从正态分布，问：方案乙是否比甲有显著提高(显著性水平 $\alpha=0.01$)？

答案与提示

11.1　(1) $R=\left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}>u_{1-\alpha}\right\}$；

(2) 不能拒绝；

(3) 无法判断.

11.2　$\frac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{U}$.

11.3　$\alpha=\frac{1}{3}, \beta=\frac{4}{9}$.

(提示：$\alpha=P\left(X>\frac{2}{3}\,\middle|\,H_0\right)=\int_{\frac{2}{3}}^1 \mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，

$\beta=P\left(X\leqslant\frac{2}{3}\,\middle|\,H_1\right)=\int_0^{\frac{2}{3}}2x\mathrm{d}x=\frac{4}{9}$.)

11.4　可以认为平均成绩为 70 分.

11.5　提示(1) $H_0:\mu\geqslant 1000\longleftrightarrow H_1:\mu<1000$. 不能拒绝 H_0，即认为产品是符合国家标准的.

(2) $H_0:\mu<1000\longleftrightarrow H_1:\mu\geqslant 1000$. 不能拒绝 H_0，即认为产品是不符合国家标准的.

11.6　可以认为乙方案比甲方案提高得率.

第十二章　一元线性回归

一、基本要求

1. 掌握解释变量和响应变量的定义以及它们之间的区别.

2. 了解散点图的制作方法及其应用.

3. 弄清什么是理论模型,什么是线性回归模型,并掌握线性回归模型应满足的条件.

4. 掌握模型参数的最小二乘估计原理,并知道计算公式;理解最小二乘回归直线的意义及作用.

5. 了解确定系数的意义及计算公式.

6. 理解回归系数显著性检验和置信推断的意义和步骤,并能使用 Excel 软件进行模型参数估计、回归系数显著性检验和置信推断.

7. 掌握基于样本预测响应变量个别值及求预测区间的方法和原理,了解如何评价预测精度.

二、内容提要

1. 线性回归模型

假定在解释变量 x 的 n 个给定的水平 $x_1,\cdots,x_n$ 上,对响应变量 Y 作 n 次独立观测,得到 $y_1,\cdots,y_n$,如果满足关系式

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i,\ i = 1,\cdots,n,$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为相互独立的随机误差,且有公共的正态分布 $N(0,\sigma^2)$,则称样本 (x_i,y_i), $i = 1,\cdots,n$ 服从一元线性回归模型.

2. 最小二乘回归

基于观测样本 (x_i,y_i), $i = 1,\cdots,n$,若有拟合直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 使偏差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$ 达到极小,则称该直线为最小二乘直线,其中 $\hat{a},\hat{b}$ 满足

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x},\ \hat{b}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2},$$

并称 $SSE = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ 为残差平方和. 这样我们得到回归模型两个参数 a,b 的最小二乘估计,而模型的第三个参数,即误差方差 σ^2 的估计为 $S^2 = \dfrac{SSE}{n-2}$.

3. 确定系数 R^2

响应变量变异的诱因有二:一是由解释变量的改变通过线性关系诱导响应变量的改变;二是其他因素,例如 x 对 y 的非线性因素,随机误差的影响,等等. 度量响应变量的变异为由回归直线所述的线性关系所能解释的那部分所占的比例,被称之为确定系数. 其定义为

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}\left(= 1 - \frac{SSE}{SST}\right),$$

其中 SSR 称之为回归平方和,也是回归直线与数据的拟合程度的度量. 显然, $0 \leqslant R^2 \leqslant 1$,当 R^2 接近 1,则 SSE 接近 0,有较好的拟合;相反,当 R^2 接近 0,数据拟合很差.

4. 回归系数的显著性检验

假设 $H_0: b = 0$ 成立,表示 Y 的变异只同随机误差 ε 有关,而与 X 没有关系. 这是必须首先排除的情况,对于假设 H_0 的检验统计量为

$$T = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}.$$

其中 $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = \dfrac{S}{\sqrt{S_{xx}}}$ 为 b 的估计量 $\hat{b}$ 的标准差的估计,也称之为 b 的标准误. 当 H_0 成立时, $T \sim t(n-2)$. 下面是 Excel 输出的回归分析部分结果的格式:

	Coefficients	标准误	t Stat	P - value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept						
X Variable 1						

其中 p 值即 $P(|T| \geqslant |T_0| \mid H_0)$, T_0 为 T 的观测值. 当 p 值不超过给定水平 α 时,就拒绝 H_0.

5. 回归系数 b 的置信区间

回归系数 b 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\hat{b} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}},\ \hat{b} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\right).$$

其含义是：若进行 100 次重复抽样，每次使用此公式，计算出一个 b 的区间估计，这些区间中有可能包含 b，也有可能不包含 b；但平均来说有 $100\times(1-\alpha)$ 次是包含 b 的. 前面的 Excel 输出格式的最后两栏，就分别是置信区间下、上限值.

6. 个别值 y_0 的预测

预测的基本问题就是：基于数据及给定的 x_0，预测相应的响应变量值 y_0，且给出 y_0 的预测区间. 使用最小二乘回归直线，直接得到 y_0 的预测值是 $\hat{y}_0=\hat{a}+\hat{b}x_0$. 其置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\hat{y}_0-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}},\hat{y}_0+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\right).$$

预测精度可以用该预测区间的宽度，即 $2t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}$ 来度量.

当预测点 x_0 离数据中心位置 $\bar{x}$ 越远，则预测区间就越宽，预测越不精确. 因此我们要求待预测点 x_0 不能离数据中心 $\bar{x}$ 太远，特别是 x_0 不能超出数据的范围.

三、学 习 要 点

本章的重点是：回归模型的基本假设，模型参数的点估计及最小二乘原理，最小二乘直线与数据的拟合度的概念及平方和分解的意义和作用，回归系数显著性检验的概念和基本原理，预测原理及精度，对 Excel 关于回归分析输出结果的解释.

四、释 疑 解 难

问 12.1　线性回归模型的基本假定有哪些？

答　模型的基本假定有：一是线性，即回归函数 $E(Y|x)$ 是 x 的一元线性函数；二是正态性；三是方差齐次性，即 y 的方差为常数 σ^2，与 x 无关. 由此基本假定决定了线性回归模型的一个重要特点，即其样本 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 是独立的，但一般来说不同分布.

问 12.2　试证明 $SST=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2=SSE+SSR$，并解释其意义.

答　因为

$$SST=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\bar{y}),$$

只需证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\bar{y})=0$. 注意到估计 $\hat{a},\hat{b}$ 的表达式，即可得到

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\bar{y}+\hat{b}(\bar{x}-x_i)\right]\hat{b}(x_i-\bar{x})$$
$$=\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})-(\hat{b})^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=0.$$

下面我们解释平方和分解的意义.

响应变量 y 在不同的观测点其取值一般是不相同的，常称这种波动为变异. 对每一 $i\geqslant 1$，用 $y_i-\bar{y}$ 表示观测值 y_i 的偏差，随着 i 的不同其值是不同的；而 $SST=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ 即全部偏差的平方和，定量地描述了响应变量的总变异. 我们的关注点在产生变异的因素，从而对变异作出解释，注意到有如下的偏差分解式：

$$(y_i-\bar{y})=(\hat{y}_i-\bar{y})+(y_i-\hat{y}_i)\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

即第 i 个观测值 y_i 的偏差可分解成两部分：一是回归变量(与 x 有线性关系)的偏差，其次是剔除了回归后的剩余. 相应地，平方和分解

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

意味着响应变量的变异来源于两个部分：一是解释变量的变异通过回归的线性关系的传导，产生了回归变量的变异，其大小是用回归平方和 SSR 来度量；二是剔除了回归变异后，其他因素(例如与 x 的非线性关系，随机误差等)产生的变异，其大小是用残差平方和 SSE 度量.

平方和分解对构造确定系数以及 F 检验都是十分基础的.

问 12.3　确定系数 R^2 为什么能度量回归直线与数据的拟合程度？

答　依定义及问 12.2，有

$$R^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{SST}=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{SST}.$$

因此 R^2 越大(不能超过 1)，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 越小，一个极端情况是 $R^2=1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=0$，从而对每一 $1\leqslant i\leqslant n$，$y_i=\hat{y}_i$. 此即观测点 (x_i,y_i)，$i=1,\cdots,n$ 完全落在回归直线上. 同样 R^2 越小，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 越大，表明观测点离回归直线越远. 另一个极端情况是 $R^2=0$，则 $SSR=0$，从而 $SST=SSE$. 注意到总有 $SSE\leqslant SST$，因而此时观测点离回归直线在垂直方向的距离平方和达到最大，数据的拟合度最差.

问 12.4 R^2 与样本相关系数有什么关系?

答 如记$\{x_1,\cdots,x_n\}$与$\{y_1,\cdots,y_n\}$的样本相关系数为 r_{xy},即

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

则有关系 $R^2=(r_{xy})^2$.

事实上,因

$$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{a}+\hat{b}x_i-\bar{y})^2=\hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$
$$=\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}),$$

所以

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=(r_{xy})^2.$$

因此 $R^2=1$,对应着 $|r_{xy}|=1$,x 与 y 有最大线性相关;$R^2=0$,x 与 y 无线性相关关系. 但用 r_{xy} 说明回归直线的拟合程度需慎重,例如当 $r_{xy}=0.5$ 时,只能推出 $R^2=0.25$,也就是说回归的变异只能解释响应变量变异的$\frac{1}{4}$,而不是一半!

问 12.5 回归系数检验与线性关系的显著性检验有什么区别?

答 线性关系的检验,也称之为模型显著性检验,即检验诸解释变量与响应变量之间是否存在线性关系,而回归系数检验则是检验单个回归系数是否为零. 当回归模型有多个解释变量时,这两个检验是不同性质的检验(我们在教科书的附录中已指出线性关系检验使用 F 检验,而单个回归系数检验使用 t 检验). 但对于一元线性回归模型,这两个检验是等价的. 它们有相同的待检假设 $H_0:b=0$,而且这两个检验的检验统计量有下述关系:

$$F=(T)^2,$$

其中 F,T 分别为 F 检验统计量和 T 检验统计量. 为证明这一关系式,只需注意到

$$F=\frac{MSR}{MSE}=\frac{SSR/1}{SSE/(n-2)},T=\frac{\hat{b}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{SSE/(n-2)}}.$$

在解答问 12.4 中,我们已知 $SSR=\hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 代入 F 表达式,即得到 $F=(T)^2$.

问 12.6 在 Excel 回归分析结果输出中,截距参数 a 的估计标准误是如何计算的?

答 已知 a 的最小二乘估计为 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$,其方差为

$$D(\hat{a})=D(\bar{y}-\hat{b}\bar{x})=D(\bar{y})+D(\hat{b})(\bar{x})^2-2\mathrm{cov}(\bar{y},\hat{b}\bar{x})$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}+\bar{x}^2\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^2}\right]\sigma^2$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\bar{x}^2\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]\sigma^2,$$

其中

$$\mathrm{cov}(\bar{y},\hat{b}\bar{x})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{cov}\ (y_j,\bar{x}(x_j-\bar{x})y_j)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})\bar{x}\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.$$

因此 $\hat{a}$ 的标准差为 $\sigma_{\hat{a}}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\sigma$,再用 S 替代 σ,得到 a 的估计标准误为

$$S_{\hat{a}}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}S.$$

问 12.7 如何求参数 a 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间?

答 可以证明

$$T=\frac{\hat{a}-a}{S_{\hat{a}}}\sim t(n-2).$$

因此 T 是一个合理的枢轴变量,由此可导出 a 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\hat{a}-S_{\hat{a}}\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2),\hat{a}+S_{\hat{a}}\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right].$$

五、例题分析及增补

例 12.1 以下是20名学生的某门课程的期中测试成绩(x)与期末成绩(y)的数据:

序号	期中测试成绩(x)	期末成绩(y)	序号	期中测试成绩(x)	期末成绩(y)
1	50	53	11	90	54
2	35	41	12	80	91
3	35	61	13	60	48
4	46	56	14	60	71
5	55	68	15	60	71
6	65	36	16	40	47
7	35	11	17	55	53
8	60	70	18	50	68
9	96	79	19	65	57
10	35	59	20	50	79

下面是该数据的散点图(图 12.1).

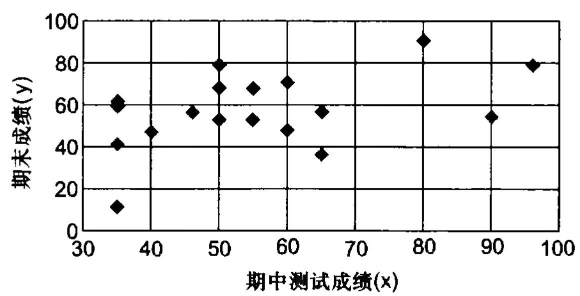


图 12.1

散点图并未显示出 x 与 y 之间有明显的线性关系. 使用 Excel 可得如下回归分析输出结果:

	Coefficients	标准误差	t Stat	P - value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	32.53081	12.4169	2.619881	0.017358	6.443864	58.61775
X Variable 1	0.465583	0.211811	2.198104	0.041264	0.020584	0.910581

而且 $R^2 = 0.211621$. 尽管可从中得到拟合直线 $y = 32.53 + 0.4656x$,但由于 R^2 很小,该直线与数据的拟合程度是很差的,这与散点图所显示的一致.

例 12.2 下面是一组 32 个人的收缩压 SBP(y,单位:mmHg) 与其肥胖指标 Quet(x) 的数据,其中 Quet = 100 × 体重 / 身高^2.

序号	Quet(x)	SBP(y)	序号	Quet(x)	SBP(y)
1	2.876	135	17	3.36	145
2	3.251	122	18	3.024	142
3	3.1	130	19	3.171	135
4	3.768	148	20	3.401	142
5	2.979	146	21	3.628	150
6	2.79	129	22	3.751	144
7	3.668	162	23	3.296	137
8	3.612	160	24	3.21	132
9	2.368	144	25	3.301	149
10	4.637	180	26	3.017	132
11	3.877	166	27	2.789	120
12	4.032	138	28	2.956	126
13	4.116	152	29	3.8	161
14	3.673	138	30	4.132	170
15	3.562	140	31	3.962	152
16	2.998	134	32	4.01	164

下面是该数据的散点图(图 12.2).

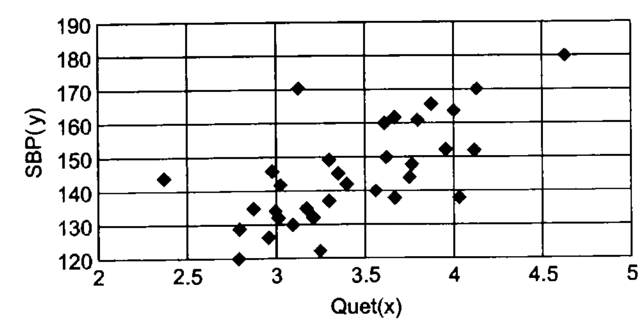


图 12.2

该图显示 x 与 y 之间有一定的线性关系. 使用 Excel 可得如下回归分析输出结果:

	Coefficients	标准误差	t Stat	P - value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	70.5764	12.32187	5.727736	2.99E-06	45.41179	95.74101
X Variable 1	21.49167	3.545147	6.062279	1.17E-06	14.25151	28.73182

其最小二乘直线为 $y = 70.5764 + 21.49167x$，确定系数为 $R^2 = 0.55057$，由于 p 值非常接近零，回归是显著的.

例 12.3 为研究犯罪与智力之间的关系，犯罪行为的指标分别从 0 到 50，它是由已被记录的犯罪次数及危害程度来评估，而智力则用智商来标识. 下面是一组 18 个已被定罪的罪犯的样本数据，其中 y 即犯罪指数 DI，x 为智商 IQ：

序号	IQ(x)	DI(y)	序号	IQ(x)	DI(y)
1	110	20.2	10	92	22.1
2	89	33	11	116	18.6
3	102	17.5	12	85	35.5
4	98	25.25	13	73	38
5	110	20.3	14	90	30
6	98	31.9	15	104	19.7
7	122	21.1	16	82	41.1
8	119	22.7	17	134	39.6
9	120	10.7	18	114	25.15

下面是该数据的散点图（图 12.3）.

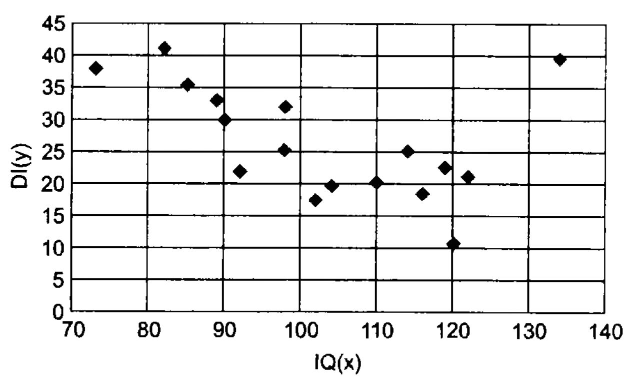


图 12.3

从散点图可见数据（134，39.6）远远偏离在一边，文献中称其为离群值. 先对全部的 18 组数据进行回归分析，可得回归直线为 $y = 52.88141 - 0.25805x$，由于 $R^2 = 0.234767$，该直线与数据的拟合度较差.

再对去掉离群值后的 17 组数据作回归分析，可得 Excel 分析结果：

	Coefficients	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	72.00599	8.389464	8.582908	3.58E-07	54.12428	89.88771
X Variable 1	- 0.45899	0.081921	- 5.60283	5.04E-05	- 0.6336	- 0.28438

回归直线为 $y = 72.00599 - 0.45899x$，$R^2 = 0.67666$ 较前显著提升，且 p 值非常接近零，因此回归是显著的.

例 12.4 假设一元线性回归模型，样本容量 $n = 10$，由数据算得确定系数 $R^2 = 0.45$，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验回归模型的显著性.

解 由 F 统计量定义 $F = \dfrac{SSR/1}{SSE/(n-2)}$，其中 $n = 10$，且依假设 $R^2 = 0.45$. 但 $R^2 = \dfrac{SSR}{SST}$，因此 $SSR = 0.45SST$；又 $SSE = SST - SSR = 0.55SST$，因而 $F = \dfrac{0.45SST}{0.55SST/8} = 6.55$. 注意到在假设 $H_0: b = 0$ 下，$F \sim F(1,8)$，而相应的临界值 $F_{0.95}(1,8) = 5.32$. 由于 F 的观测值 6.55 大于临界值 $F_{0.95}(1,8)$，因此在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，回归模型是显著的.

六、习题解答

1. 下表给出了 10 个 18 岁成年女孩的身高 x（单位：cm）和体重 y（单位：kg）的数据：

序号	身高 x	体重 y	序号	身高 x	体重 y
1	169.6	71.2	6	165.5	52.4
2	166.8	58.2	7	166.7	56.8
3	157.1	56	8	156.5	49.2
4	181.1	64.5	9	168.1	55.6
5	158.4	53	10	165.3	77.8

假定体重服从正态分布.

（1）构造体重 y 关于身高 x 的散点图，该散点图是否提示两者之间存在线性关系？

（2）给出体重 y 关于身高 x 的最小二乘回归直线.

解 （1）散点图如图 12.4.

该图提示两者之间存在线性关系.

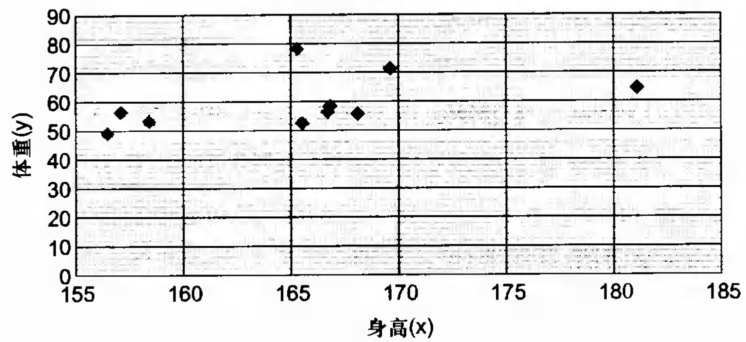


图 12.4

（2）注意到，有 Excel 回归分析输出结果：

	Coefficients	标准误差	t Stat	P-value
Intercept	-37.1194	64.4228	-0.57618	0.580335
X Variable 1	0.583586	0.388903	1.500596	0.171852

可知，体重关于身高的最小二乘直线为 $y = 0.5836x - 37.1194$.

2. 考察修理（服务）时间与计算机中需要修理或更换的元件个数的关系. 现有一组修理记录数据如下：

序号	修理时间 y	元件个数 x	序号	修理时间 y	元件个数 x
1	23	1	8	97	6
2	29	2	9	109	7
3	49	3	10	119	8
4	64	4	11	149	9
5	74	4	12	145	9
6	87	5	13	154	10
7	96	6	14	166	10

假定修理时间服从正态分布.

（1）构造修理时间 y 关于修理的元件个数 x 的散点图，该散点图是否提示两者之间存在线性关系？

（2）给出修理时间 y 关于修理的元件个数 x 的最小二乘回归直线；

（3）作回归系数 b 的显著性 T 检验，取显著性水平为 5%；

（4）给出 b 的置信水平为 95% 的置信区间.

解 （1）散点图如图 12.5.

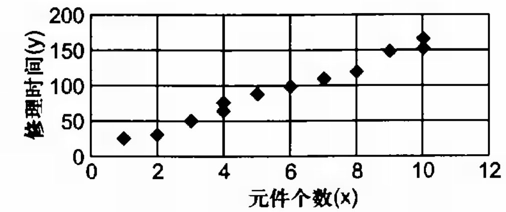


图 12.5

该图提示两者之间存在线性关系. 使用 Excel 软件可得下述回归分析的输出结果：

回归统计	
Multiple R	0.993699
R Square	0.987437
Adjusted R Square	0.98639
标准误差	5.391725
观测值	14

方差分析表：

	df	SS	MS	F	Significance F
回归分析	1	27419.51	27419.51	943.2009	8.92E-13
残差	12	348.8484	29.0707		
总计	13	27768.36			

	Coefficients	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	4.161654	3.3551	1.240396	0.238534	-3.14848	11.47179
X Variable 1	15.50877	0.504981	30.71158	8.92E-13	14.40851	16.60903

（2）从回归分析表可知 y 与 x 之间的最小二乘回归直线为 $y = 15.509x + 4.162$.

（3）由于 p 值接近零，因此对于 $\alpha = 0.05$，回归是显著的.

（4）从回归分析表的最后两栏可知 b 的置信水平为 95% 的置信区间的观测值为 (14.409, 16.609).

3. 假定一保险公司希望确定居民住宅火灾造成的损失数额与住户到最近的消防站的距离之间的相关关系，以便准确地定出保险金额. 下表给出了 15 起

火灾事故的损失及火灾发生地与最近的消防站的距离：

序号	距消防站距离 x(km)	火灾损失 y(千元)	序号	距消防站距离 x(km)	火灾损失 y(千元)
1	3.4	26.2	9	2.6	19.6
2	1.8	17.8	10	4.3	31.3
3	4.6	31.3	11	2.1	24
4	2.3	23.1	12	1.1	17.3
5	3.1	27.5	13	6.1	43.2
6	5.5	36	14	4.8	36.4
7	0.7	14.1	15	3.8	26.1
8	3	22.3			

假定火灾损失数额服从正态分布.

(1) 构造火灾损失 y 关于距消防站距离 x 的散点图，该散点图是否提示两者之间存在线性关系？

(2) 给出火灾损失 y 关于距消防站距离 x 的最小二乘回归直线；

(3) 求回归模型随机误差的标准误差估计 $\hat{\sigma}$；

*(4) 作出平方和分解并列出方差分析表；

(5) 作回归系数 b 的显著性 T 检验，取显著性水平为 5%.

解 (1) 散点图如图 12.6.

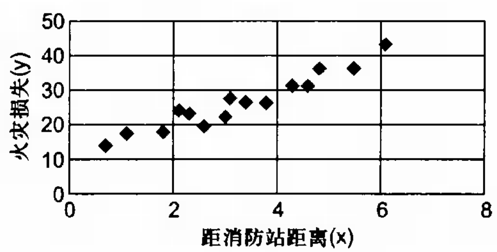


图 12.6

该图提示两者之间存在线性关系. 使用 Excel 软件可得下述回归分析的输出结果：

	Coefficients	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	10.27793	1.420278	7.236562	6.59E-06	7.209605	13.34625
X Variable 1	4.919331	0.392748	12.52542	1.25E-08	4.070851	5.767811

(2) 从回归分析表可知 y 与 x 之间的最小二乘回归直线为 $y = 4.919331x + 10.27793$.

(3) 因 $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{SSE}{n-2} = MSE$，从下面的方差分析表可知 $MSE = 5.36546$，所以 $S^2 = 5.36546$，从而

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{MSE} = 2.316346.$$

(4) 方差分析表

	df	SS	MS	F	Significance F
回归分析	1	841.7664	841.7664	156.8862	1.25E-08
残差	13	69.75098	5.36546		
总计	14	911.5173			

(5) 从回归分析表可知 p 值与零非常接近，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，回归是显著的.

4. 一家保险公司十分关心其总公司营业部加班的情况，决定认真调查一下现状. 经过 10 周时间，收集了每周加班工作时间的数据和签发的新保单数目，x 为每周签发的新保单数目，y 为每周加班工作时间（单位：h）（假定每周加班时间服从正态分布）.

序号	新保单数 x	每周加班时间 y	序号	新保单数 x	每周加班时间 y
1	825	3.5	6	920	3
2	215	1	7	1350	4.5
3	1070	4	8	325	1.5
4	550	2	9	670	3
5	480	1	10	1215	5

(1) 构造每周加班工作时间 y 关于每周签发的新保单数目 x 的散点图，该散点图是否提示两者之间存在线性关系？

(2) 给出每周加班工作时间 y 关于每周签发的新保单数目 x 的最小二乘回归直线；

*(3) 作回归系数 b 的显著性 F 检验，并列出方差分析表；

(4) 给出 b 的置信水平为 90% 的置信区间；

(5) 该公司预计下一周签发新保单 $x_0 = 1000$ 张，给出需要的加班时间的置信水平为 95% 的预测区间.

解 (1) 散点图如图 12.7.

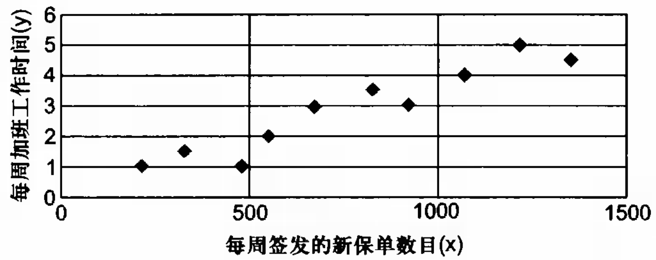


图 12.7

该图提示两者之间存在线性关系. 使用 Excel 软件可得下述回归分析的输出结果:

	Coefficients	标准误差	t Stat	P-value	Lower 90.0%	Upper 90.0%
Intercept	0.118129	0.355148	0.33262	0.74797	-0.542285143	0.778543291
X Variable 1	0.003585	0.000421	8.508575	2.79E-05	0.002801602	0.004368663

(2) 从回归分析表可知 y 与 x 之间的最小二乘回归直线为

$$y = 0.0036x + 0.1181.$$

(3) 方差分析表

	df	SS	MS	F	Significance F
回归分析	1	16.68162	16.68162	72.39585	2.79E-05
残差	8	1.843379	0.230422		
总计	9	18.525			

从方差分析表可知 p 值与零非常接近,在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下,回归是显著的.

(4) 从回归分析表可知 b 的置信水平为 90% 是置信区间为

$$(0.0028, 0.0044).$$

(5) 对应于 $x_0 = 1000$ 的预测值 $y_0 = 3.7181$,使用 Excel 软件可知其置信水平为 95%的预测区间为

$$(2.5195, 4.8870).$$

5. 为研究某一大都市报开设周日版的可行性,获得了 35 种报纸的平日和周日的发行量信息(以千为单位). 数据如下表所示:

序号	平日发行量 x	周日发行量 y	序号	平日发行量 x	周日发行量 y
1	391.952	488.506	19	781.796	983.24
2	516.981	798.198	20	1209.225	1762.015
3	355.628	235.084	21	825.512	960.308
4	238.555	299.451	22	223.748	284.611
5	391.952	488.506	23	354.843	407.76
6	537.78	559.093	24	515.523	982.663
7	733.775	1133.249	25	220.465	557
8	198.832	348.744	26	337.672	440.923
9	252.624	417.779	27	197.12	268.06
10	206.204	344.522	28	133.239	262.048
11	231.177	323.084	29	374.009	432.052
12	449.755	620.752	30	273.844	338.355
13	288.571	423.305	31	570.364	704.322
14	185.736	202.614	32	391.286	585.681
15	1164.388	1531.527	33	201.86	267.781
16	444.581	553.479	34	321.626	408.343
17	412.871	685.975	35	838.902	1165.567
18	272.28	324.241			

假定周日发行量服从正态分布.

(1) 构造周日发行量 y 关于平日发行量 x 的散点图,该散点图是否提示两者之间存在线性关系?

(2) 给出周日发行量 y 关于平日发行量 x 的最小二乘回归直线;

(3) 计算确定系数 R^2 的值;

(4) 某一正在考虑提供周日版的报纸,平日发行量为 500,给出该报纸周日发行量的置信水平为 95%预测区间.

解 (1) 散点图如图 12.8.

该图提示两者之间存在线性关系. 使用 Excel 软件可得下述回归分析的输出结果:

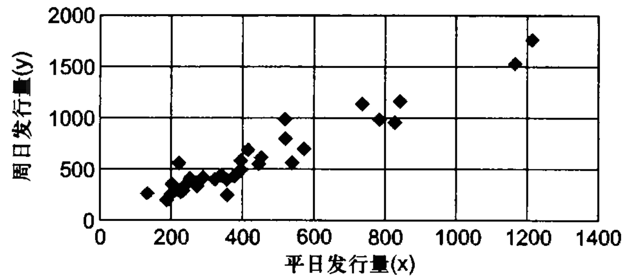


图 12.8

回归统计	
Multiple R	0.957968
R Square	0.917702
Adjusted R Square	0.915208
标准误差	108.1048
观测值	35

方差分析表：

	df	SS	MS	F	Significance F
回归分析	1	4300472	4300472	367.9818	1.8233E-19
残差	33	385659.3	11686.64		
总计	34	4686132			

	Coefficients	标准误差	t Stat	P - value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	12.03272	35.15967	0.342231	0.734347	- 59.50015357	83.5656
X Variable 1	1.34052	0.069881	19.18285	1.82E-19	1.198345922	1.482695

(2) 从回归分析表可知 y 与 x 之间的最小二乘回归直线为 $y = 1.341x + 12.033$.

(3) 从 Excel 输出结果可知 $R^2 = 0.918$.

(4) 使用 Excel 软件可知，对应于 $x_0 = 500$ 的预测值 $y_0 = 682.533$，其置信水平为 95% 的预测区间为(459.009,905.576).

6. 回归一词是英国统计学家高尔顿(F. Galton,1822—1911)和他的学生皮尔逊(K. Pearson,1857—1936)在研究父母身高与其子女身高的遗传问题时提出的. 他们观测了 928 对夫妇，以每对夫妇的平均身高作为自变量 x，而取他们的一个成年儿子的身高作为因变量 y. 他们发现：虽然高个子的父代会有高个子的子代，但子代的身高并不与其父代身高趋同，而是趋向于比他们的父代更加平均，就是说如果父亲身材高大而大大高于平均值，则子代的身材要比父代矮小一些；如果父亲身材矮小而大大低于平均值，则子代的身材要比父代高大一些. 换言之，子代的身高有向平均值靠拢的趋向. 因此，他用回归一词来描述子代身高与父代身高的这种关系. 尽管"回归"这个名称的由来具有其特定的含义，人们在研究大量的问题中变量 x 与 y 之间的关系并不总是具有"回归"的含义，但用这个名词来表示 x 与 y 之间的统计关系也是对高尔顿这位伟大的统计学家的纪念.

现截取其中的 10 对数据如下(其中 x 为父母平均身高，y 为儿子身高，单位：英寸)：

序号	x	y	序号	x	y
1	60	63.6	6	67	67.1
2	62	65.2	7	68	67.4
3	64	66	8	70	68.3
4	65	65.5	9	72	70.1
5	66	66.9	10	74	70

(1) 构造成年儿子身高 y 关于父母平均身高 x 的散点图，该散点图是否提示两者之间存在线性关系？

(2) 给出成年儿子身高 y 关于父母平均身高 x 的最小二乘回归直线.

解 (1) 散点图如图 12.9.

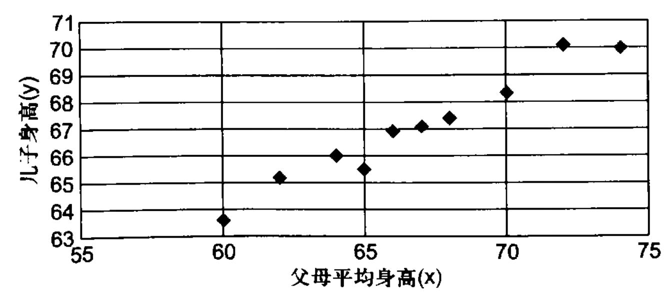


图 12.9

该图提示两者之间存在线性关系.

(2) 注意到，有 Excel 回归分析输出结果：

	Coefficients	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	35.97681	2.207599	16.2968	2.02E-07	30.88607	41.06754
X Variable 1	0.464569	0.032985	14.08444	6.27E-07	0.388506	0.540631

可得最小二乘直线为 $y = 0.46457x + 35.97681$.

*7. 证明:(1) $SSE = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{a}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;

(2) $SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

证 (1) 因为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0, \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)x_i = 0,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)(\hat{a} + \hat{b}x_i) = 0,$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{a}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(2) 由释疑解难的问 12.4 的证明过程可知

$$SSR = \hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

所以

$$SSE = SST - SSR = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

测　试　题[①]

一、填空题

1. 同时掷两枚均匀骰子,以 X,Y 分别表示掷出的点数,记 $A = \{(X,Y) \mid X + Y < 8\}$, $B = \{(X,Y) \mid X \geqslant Y\}$,则 $P(A \cup B) =$ ________, $P(\bar{A}\bar{B}) =$ ________, $P(\bar{B} \mid \bar{A}) =$ ________.

2. 已知某型号电子管的使用寿命 X 有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则常数 $c =$ ________. 该型号的电子管在使用最初的 1500 h 内损坏的概率为________. 如果已知一设备有 3 个这样的电子管,每个电子管是否正常工作相互独立,这 3 个电子管在使用最初的 1500 h 恰有一个损坏的概率为________.

3. 设 X 有已知分布律 $p_k = P(X = k)$, $k = 1,2,\cdots$,其分布函数为 $F(\cdot)$,随机变量 Y 服从(0,1) 上的均匀分布,定义随机变量 $Z = m$,若 $F(m-1) < Y \leqslant F(m)$, $m = 1,2,\cdots$,则 Z 的分布律为________.

4. 设随机变量 X,Y 相互独立,且有公共分布律 $P(X = k) = 2^{-k}$, $k = 1,2,\cdots$,则 $P(\min(X,Y) \leqslant 2) =$ ________, $P(\max(X,Y) \leqslant 2) =$ ________.

二、甲、乙、丙三人同时独立地对一敌机射击,三人击中敌机的概率分别是 0.3,0.4,0.6,敌机被一人击中而被击落的概率为 0.2,被两人击中而被击落的概率为 0.6,若三人都击中,则敌机必被击落.

(1) 求此敌机被击落的概率;

(2) 若已知敌机被击落,求此敌机被两人击中的概率.

三、设随机变量 X 有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求下列随机变量的密度函数:

(1) $Y = 2X + 1$;(2) $Y = e^X$.

四、设 (X,Y) 有联合密度函数

① 题一至七选自同济大学“概率论”课程的历届考试题.

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）分别求 X,Y 的边缘密度；

（2）求 $E(X),E(Y),E(XY)$；

（3）X,Y 是否独立？是否相关？为什么？

（4）求 $P\left(|X|<\frac{1}{2},|Y|<\frac{1}{2}\right)$.

五、设 X 有分布律 $P(X=-1)=P(X=1)=0.25,P(X=0)=0.5$，随机变量 Y 服从 $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ 分布，且 $P(XY=0)=1$. 求：

（1）(X,Y) 的分布律；

（2）$E(XY)$ 及 $\text{cov}(X,Y)$；

（3）X,Y 是否独立？为什么？

六、设 (X,Y) 有联合分布函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）分别求 X 及 Y 的边缘密度，X 与 Y 是否独立？

（2）求 $E(X^2),E(Y^2)$ 及 $D(XY)$；

（3）求 $\text{cov}(X^2,Y^2)$，X^2 与 Y^2 是否相关？

七、某金融机构为支付某日即将到期的债券需准备一笔现金，已知这批债券共发 500 张，每张到期便需付本息 1000 元，设持券人（一人一券）在到期日去该机构取本息的概率为 0.4，问该机构于到期日应准备多少现金才能以 97.72% 的概率满足客户的兑现需求（使用中心极限定理）？

八、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，其中 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$\lambda>0$ 未知. 求 λ 的矩估计和最大似然估计. 今有一组样本观测值如下：

X	0	1	2	3	4
频数	17	20	10	2	1

求 λ 的矩估计与最大似然估计的估计值.

九、以下样本数据来自一正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$：10，8，12，15，13，11，6.5.

（1）求总体均值 μ 的最大似然估计值；

（2）求总体标准差 σ 的最大似然估计值；

（3）求总体均值 μ 的置信水平为 95% 的置信区间.

参考书目

[1] 周概容. 概率论与数理统计习题课 12 讲. 北京：北京航空航天大学出版社，2003.

[2] 高等数学教学与命题研究组. 概率论与数理统计（浙大三版）学习指导. 北京：中国林业出版社，2003.

[3] 薛留根. 概率论解题方法与技巧. 北京：国防工业出版社，1996.

[4] P. J. Bickel, K. A. Doksum. Mathematical Statistics: Basic ideas and selected topics. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1977.