Függvények diszjunktív, konjunktív kanonikus alakjai

Az előző 3 modulban megismerkedtünk azzal, hogy a logikai hálózatok működését hogyan írhatjuk le igazságtáblával. Áttekintettük a digitális technikában használatos számrendszereket, illetve a logikai hálózatok tervezéséhez, leírásához használt logikai algebrát (Boole algebra). Ebben a modulban azt fogjuk átnézni, hogyan lehet egy logikai hálózat működését leíró függvény algebrai alakját megadni. Egy logikai függvénynek több algebrai alakja is létezik. Induljunk ki egy olyan alakból, amely minden logikai függvényhez csak egy létezik. Ez az alak a függvény kanonikus alakja. Kétféle kanonikus alakról beszélhetünk, az egyik a diszjunktív kanonikus alak, a másik a konjunktív kanonikus alak. Amikor felírjuk egy függvény igazságtábláját a bemeneti (független) változók száma megadja a táblázat sorainak számát. N db bemeneti változó esetén a sorok száma 2^N. A táblázat oszlopainak számát a bemeneti (független), és a kimeneti (függő) változók száma adja meg. A diszjunktív, illetve konjunktív kanonikus alakot legegyszerűbben az igazságtáblázatból tudjuk felírni. Egy N változós logikai függvénynek 2^N féle mintermje és ugyanennyi maxtermje lehet.

- Minterm: olyan logikai ÉS kapcsolat, amelyben minden bemeneti (független) változó egyszer, és csakis egyszer fordul elő ponált, vagy negált formában.
- Maxterm: olyan logikai VAGY kapcsolat, amelyben minden bemeneti (független) változó egyszer, és csakis egyszer fordul elő ponált, vagy negált formában.

Egy 3 változós függvény összes lehetséges mintermje és maxtermje:

Sorszám i	Bementi változók			Mintermek	m_i^3	Maxtermek	M_j^3
	$C \equiv 2^2$	$B \equiv 2^1$	$A \equiv 2^0$				
0	0	0	0	$\bar{C} * \bar{B} * \bar{A}$	m_0^3	$C + B + A$	M_7^3
1	0	0	1	$\bar{C} * \bar{B} * A$	m_1^3	$C + B + \bar{A}$	M_6^3
2	0	1	0	$\bar{C} * B * \bar{A}$	m_2^3	$C + \bar{B} + A$	M_5^3
3	0	1	1	$\bar{C} * B * A$	m_3^3	$C + \bar{B} + \bar{A}$	M_4^3
4	1	0	0	$C * \bar{B} * \bar{A}$	m_4^3	$\bar{C} + B + A$	M_3^3
5	1	0	1	$C * \bar{B} * A$	m_5^3	$\bar{C} + B + \bar{A}$	M_2^3
6	1	1	0	$C * B * \bar{A}$	m_6^3	$\bar{C} + \bar{B} + A$	M_1^3
7	1	1	1	$C * B * A$	m_7^3	$\bar{C} + \bar{B} + \bar{A}$	M_0^3

A két kanonikus alak:

- Diszjunktív:(teljes diszjunktív normál forma): olyan függvény, amely mintermek VAGY kapcsolatából áll. Szokás még egyszerűen mintermes alaknak, szorzatok összegének, mintermek összegének is nevezni. Pl.: $Y = (C * B * A) + (C * \bar{B} * A) + (\bar{C} * B * \bar{A})$, rövidebb megadási forma: $Y = m_7^3 + m_5^3 + m_2^3$, és még egy egyszerűsített forma:

  $$Y = \sum m_i^3 \;\; (i = 7,5,2)$$

- Konjunktív: (teljes konjunktív normál forma): olyan függvény, amely maxtermek ÉS kapcsolatából áll. Szokás még egyszerűen maxtermes alaknak, összegek szorzatának, maxtermek szorzatának is nevezni. Pl.: $Y = (\bar{C} + B + A) * (C + \bar{B} + \bar{A}) * (\bar{C} + \bar{B} + \bar{A})$, rövidebb megadási forma: $Y = M_3^3 * M_4^3 * M_0^3$, és még egy egyszerűsített forma:

  $$Y = \prod M_j^3 \;\; (j = 3,4,0)$$

Amikor adott egy függvény igazságtáblával, abból felírhatjuk a diszjunktív, illetve konjunktív kanonikus alakokat.

- **Diszjunktív kanonikus alak:**

  A felírás szabálya

  1 Vesszük az igazságtábla azon sorait, ahol a kimeneti (függő) változó értéke 1.
  2 Ezekben a sorokban felírjuk a bemeneti (független) változók ÉS kapcsolatát, oly módon, hogy ha a bemeneti változó 1-es értékű, akkor ponáltan, ha 0 értékű, akkor negáltan szerepeltetjük az ÉS kapcsolatban. Minden ÉS kapcsolatban valamennyi bemeneti változó szerepel.
  3 Az egyes sorokra felírt ÉS műveleteket a végén VAGY művelettel kapcsoljuk össze. Az ÉS kapcsolatok az összeg tagjai.

- **Konjunktív kanonikus alak:**

  A felírás szabálya

  1 Vesszük az igazságtábla azon sorait, ahol a kimeneti (függő) változó értéke 0.
  2 Ezekben a sorokban felírjuk a bemeneti (független) változók VAGY kapcsolatát, oly módon, hogy ha a bemeneti változó 1-es értékű, akkor negáltan, ha 0 értékű, akkor ponáltan szerepeltetjük a VAGY kapcsolatban. Minden VAGY kapcsolatban valamennyi bemeneti változó szerepel.
  3 Az egyes sorokra felírt VAGY műveleteket a végén ÉS művelettel kapcsoljuk össze. A VAGY kapcsolatok a szorzat tényezői.

Nézzünk egy példát az eddig leírtak megértéséhez: Adott egy 3 változós függvény, ahol a kimenet akkor lesz 1-es értékű, ha a C változó 0 értékű, és az A és B közül legfeljebb az egyik 1-es értékű. Adjuk meg a függvény diszjunktív, konjunktív kanonikus alakját!

Megoldás:első lépésben írjuk fel a függvény igazságtábláját:

Sorszám i	Bementi változók			Y
	$C \equiv 2^2$	$B \equiv 2^1$	$A \equiv 2^0$	
0	0	0	0	1
1	0	0	1	**1**
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Ezután az igazságtábla alapján írjuk fel a **diszjunktív kanonikus alak**ot:

1 Vesszük az igazságtábla azon sorait, ahol a kimeneti (Y) változó értéke 1, ezek a 0, 1, 2 sorok.

2 Ezekben a sorokban felírjuk a bemeneti (C,B,A) változók ÉS kapcsolatát, oly módon, hogy ha a bemeneti változó 1-es értékű, akkor ponáltan, ha 0 értékű, akkor negáltan szerepeltetjük az ÉS kapcsolatban. Ezek alapján az alábbi ÉS kapcsolatokat kapjuk, amelyek a logikai összeg tagjai lesznek:

0-s sor: $\bar{C} * \bar{B} * \bar{A}$
1-es sor: $\bar{C} * \bar{B} * A$
2-es sor: $\bar{C} * B * \bar{A}$

3 Az egyes sorokra felírt ÉS műveleteket a végén VAGY művelettel kapcsoljuk össze:

$Y = (\bar{C} * \bar{B} * \bar{A}) + (\bar{C} * \bar{B} * A) + (\bar{C} * B * \bar{A})$, egyszerűbb alak: $Y = \sum \mathrm{m}_i^3 \ \ (i = 0{,}1{,}2)$

Konjunktív kanonikus alak felírása:

1 Vesszük az igazságtábla azon sorait, ahol a kimeneti (Y) változó értéke 0. Ezek a 3,4,5,6,7 sorok.

2 Ezekben a sorokban felírjuk a bemeneti (C,B,A) változók VAGY kapcsolatát, oly módon, hogy ha a bemeneti változó 1-es értékű, akkor negáltan, ha 0 értékű, akkor ponáltan szerepeltetjük a VAGY kapcsolatban. Ezek alapján az alábbi VAGY kapcsolatokat kapjuk, amelyek a logikai szorzat tényezői lesznek:

3-as sor: $C + \bar{B} + \bar{A}$
4-es sor: $\bar{C} + B + A$
5-ös sor:$\bar{C} + B + \bar{A}$
6-os sor: $\bar{C} + \bar{B} + A$
7-es sor: $\bar{C} + \bar{B} + \bar{A}$

3 Az egyes sorokra felírt VAGY műveleteket a végén ÉS művelettel kapcsoljuk össze.
$Y = (C + \bar{B} + \bar{A}) * (\bar{C} + B + A) * (\bar{C} + B + \bar{A}) * (\bar{C} + \bar{B} + A) * (\bar{C} + \bar{B} + \bar{A})$, egyszerűbb alak: $Y = \prod M_j^3 \ \ (j = 4{,}3{,}2{,}1{,}0)$

A kanonikus alakok közötti átváltás

Az eddigiekben leírtuk hogyan lehet az igazságtáblázattal megadott logikai függvény két kanonikus alakját felírni. Most azt nézzük meg, hogy ha adott a függvény egyik kanonikus alakjának egyszerűsített formája, hogyan adhatjuk meg a másik kanonikus alak egyszerűsített formáját.

- Ismert a diszjunktív kanonikus alak az alábbi formában: $Y = \sum \mathrm{m}_i^3 \ (i = 7,5,2)$. Első lépésben képezzük a függvény negáltját, tagadottját. Megadjuk azokat az indexeket (mintermek sorszámait), ahol a függvény 0 értékű. A felsoroltakon kívül az összes többi index lesz az: $\bar{Y} = \sum \mathrm{m}_i^3 \ (i = 0,1,3,4,6)$. Ezután úgy kapjuk meg a konjunktív kanonikus alakban szereplő maxtermek sorszámait, hogy kiszámoljuk az alábbi összefüggéssel: $j = (2^N - 1) - i$, ahol j a maxtermek sorszáma, N a bemeneti változók száma, i az $\bar{Y}$ esetén megadott minterm sorszámokat jelöli. A konkrét feladathoz visszatérve helyettesítsük be az értékeket a képletbe és megkapjuk a maxtermek sorszámait, a bementi változók száma jelen példában N=3:

i	képlet	j
0	$(2^3$-1)-0	7
1	$(2^3$-1)-1	6
3	$(2^3$-1)-3	4
4	$(2^3$-1)-4	3
6	$(2^3$-1)-6	1

A fentiek alapján a konjunktív kanonikus alak: $Y = \prod M_j^3 \ (j = 7,6,4,3,1)$

- Ismert a konjunktív kanonikus alak az alábbi formában $Y = \prod M_j^3 \ (j = 1,2,4,5)$:. Első lépésben képezzük a függvény negáltját, tagadottját. Megadjuk azokat az indexeket (maxtermek sorszámait), ahol a függvény 1 értékű. A felsoroltakon kívül az összes többi index lesz az: $\bar{Y} = \prod M_j^3 \ (j = 0,3,6,7)$. Ezután úgy kapjuk meg a diszjunktív kanonikus alakban szereplő mintermek sorszámait, hogy kiszámoljuk az alábbi összefüggéssel: $i = (2^N - 1) - j$, ahol az i a mintermek sorszáma, N a bemeneti változók száma, j az $\bar{Y}$ esetén megadott maxterm sorszámokat jelöli. A konkrét feladathoz visszatérve helyettesítsük be az értékeket a képletbe és megkapjuk amintermek sorszámait, a bementi változók száma jelen példában N=3:

j	képlet	i
0	$(2^3$-1)-0	7
3	$(2^3$-1)-3	4
6	$(2^3$-1)-6	1
7	$(2^3$-1)-7	0

A fentiek alapján a diszjunktív kanonikus alak: $Y = \sum \mathrm{m}_i^3 \ (i = 7,4,1,0)$.