

Boole algebrai ismeretek

A digitális áramkörök alap építőelemeinek és a belőlük felépített bonyolultabb áramkörök működésének leírásához a logikai algebra alap műveleteit használjuk. A logikai algebrában két értékkel dolgozunk, amely az igaz és a hamis érték, ezekhez rendelhetjük a 2-es számrendszer 1, 0 számértékét. (igaz-1, hamis-0). A 0, 1 értékekhez a konkrét megvalósítás során valamilyen fizikai mennyiséget rendelhetünk. Nézzük át a Boole algebra alpműveleteit, tételit. A bemeneti változókat (független változók) az abc elejéről vett ékezet nélküli nagy betűkkel (A, B, C...), míg a kimeneti változókat (függő változók) az abc végéről vett ékezet nélküli nagy betűkkel jelöljük (X,Y,Z...). A logikai változókkal végezhető műveletek, amelyekkel a logikai hálózatok működése leírható:

- ÉS (konjunkció) logikai szorzás művelete
- VAGY (diszjunkció) logikai összeadás
- NEM (negálás) logikai tagadás

A felsorolt műveletek közül az ÉS, illetve a VAGY művelet 2 vagy több bemeneti változóra is értelmezhető, a tagadás művelete csak egy változóra adható meg.

Tagadás (NOT) művelet

A Tagadás művelet azt jelenti, hogy a kimenet akkor igaz(1) ha a bemenet hamis(0), illetve akkor hamis(0) a kimenet, ha a bemenet igaz(1) értékű. Algebrai jelölése: $Y = \bar{A}$. Igazságtáblával leírva a művelet:

A	Y	$Y = \bar{A}$
0	1	$1 = \bar{0}$
1	0	$0 = \bar{1}$

Az áramköri elem, amely ezt a műveletet megvalósítja az inverter. Rajzjele:



Többféle szabvány szerinti jelölésmód létezik, mi ezt fogjuk használni.

Logikai szorzás, ÉS (AND) művelet

Ennél a logikai műveletnél a kimenet csak akkor lehet igaz(1) értékű, ha valamennyi bemeneti változó igaz(1) értékű. Másképpen megfogalmazva, ha bármelyik bemeneti változó hamis(0), akkor a kimenet is hamis(0) lesz. Algebrai jelölése: $Y = A * B$. Sok esetben a szorzás jelét „*” elhagyjuk és csak egymáshoz szorosan leírjuk a változókat: $Y = AB$. Igazságtáblával felírva a műveletet 2 bemeneti változóra:

A	B	Y	$Y = A * B$
0	0	0	$0 = 0 * 0$
0	1	0	$0 = 0 * 1$
1	0	0	$0 = 1 * 0$
1	1	1	$1 = 1 * 1$

Az áramköri elem, amely ezt a műveletet megvalósítja az ÉS kapu. Rajzjele:



Kettő bemeneti változó esetén a 0, 1 értékekkel előállítható kombinációk száma $2^2=4$, ezért van 4 sora az igazságtáblának. N bemeneti változóra általánosítva a kombinációk száma 2^N .

Logikai összeadás, VAGY (OR) művelet

A VAGY művelet eredménye akkor igaz(1), ha a bemeneti változók közül legalább az egyik igaz(1) értékű. Másképpen megfogalmazva a VAGY művelet eredménye csak akkor lesz hamis(0), ha valamennyi bemeneti változó hamis(0) értékű. Algebrai jelölése: $Y = A + B$. A művelet igazságtáblája kettő bemeneti változóra:

A	B	Y	$Y = A + B$
0	0	0	$0 = 0 + 0$
0	1	1	$1 = 0 + 1$
1	0	1	$1 = 1 + 0$
1	1	1	$1 = 1 + 1$

Az áramköri elem, amely ezt a műveletet megvalósítja a VAGY kapu. Rajzjele:



Az ÉS, illetve a VAGY műveletek azonos értékűek. Az ÉS, valamint a VAGY művelet is értelmezhető kettőnél több bemenetre is.

Az ÉS, valamint a VAGY műveletet negálva (tagadva) jutunk az ÉS-NEM, és a VAGY-NEM műveletekhez. Az angol elnevezésben előbb szerepel a negálás és utána az ÉS(NAND), illetve a VAGY(NOR) szó, mi azonban követve a műveletek sorrendjét maradunk az ÉS-NEM, VAGY-NEM megnevezésnél.

ÉS-NEM (NAND) művelet

Az ÉS-NEM logikai műveletnél a kimenet csak akkor lesz logikai 0 értékű, ha valamennyi bemenet 1-es értékű. Másképpen megfogalmazva, ha bármelyik bemenet 0 értékű, akkor a kimenet 1 lesz. Algebrai jelölése: $Y = \overline{A * B}$ ($Y = \overline{AB}$). A művelet igazságtáblája kettő bementi változóra:

A	B	Y	$Y = \overline{A * B}$
0	0	1	$1 = \overline{0 * 0}$
0	1	1	$1 = \overline{0 * 1}$
1	0	1	$1 = \overline{1 * 0}$
1	1	0	$0 = \overline{1 * 1}$

Az áramköri elem, amely ezt a műveletet megvalósítja az ÉS-NEM kapu. Rajzjele:



VAGY-NEM (NOR) művelet

A VAGY-NEM műveletnél a kimenet csak akkor lesz logikai 1 értékű, ha valamennyi bemeneti változó 0 értékű, vagyis ha bármelyik bemenet 1-es értékű a kimeneten a logikai 0 érték fog megjelenni. Algebrai jelölése: $Y = \overline{A + B}$. A művelet igazságtáblája kettő bementi változóra:

A	B	Y	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1	$1 = \overline{0 + 0}$
0	1	0	$0 = \overline{0 + 1}$
1	0	0	$0 = \overline{1 + 0}$
1	1	0	$0 = \overline{1 + 1}$

Az áramköri elem, amely ezt a műveletet megvalósítja a VAGY-NEM kapu. Rajzjele:



Az ÉS-NEM, és a VAGY -NEM művelet is értelmezhető kettőnél több bemenetre is. Még további két műveletet említünk meg, amelyek megvalósításához léteznek áramköri építőelemek. Az egyik a KIZÁRÓ VAGY, a másik az EKVIVALENCIA.

KIZÁRÓ VAGY (XOR) művelet

Alapvetően kettő bemenetre értelmezett. A kimenet akkor lesz logikai 1 értékű, ha a bemenetek különböző értékűek. Algebrai jelölése: $Y = A * \bar{B} + \bar{A} * B = A \oplus B$. A művelet igazságtáblája:

A	B	Y	$Y = A \oplus B$
0	0	0	$0 = 0 \oplus 0$
0	1	1	$1 = 0 \oplus 1$
1	0	1	$1 = 1 \oplus 0$
1	1	0	$0 = 1 \oplus 1$

Az áramköri elem rajzjele, amely ezt a műveletet megvalósítja:



EKVIVALENCIA (XNOR) művelet

Az EKVIVALENCIA műveletnél a kimenet értéke akkor lesz 1, ha a bemenetek azonos értékűek. Algebrai jelölése: $Y = A * B + \bar{A} * \bar{B} = A \otimes B$

A	B	Y	$Y = A \otimes B$
0	0	1	$1 = 0 \otimes 0$
0	1	0	$0 = 0 \otimes 1$
1	0	0	$0 = 1 \otimes 0$
1	1	1	$1 = 1 \otimes 1$

Az áramköri elem rajzjele, amely ezt a műveletet megvalósítja:



Logikai műveletek tulajdonságai

- Kommutativitás: az ÉS, illetve a VAGY műveletnél is az operandusok sorrendje felcserélhető.

$$A + B = B + A$$

$$A * B = B * A$$

- Asszociativitás: az ÉS, valamint a VAGY műveletnél az operandusok tetszőlegesen csoportosíthatók. A csoportosítást zárójelezéssel oldjuk meg, ahol a zárójelezéssel a végrehajtási sorrendet határozzuk meg.

$$A * (B * C) = (A * B) * C = A * B * C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

- Disztributivitás: ez a tulajdonság az operandusok átrendezhetőségét jelenti.

$$A * (B + C) = A * B + A * C$$

$$A + (B * C) = (A + B) * (A + C)$$

A logikai algebra tételei:

A tételeket nem bizonyítjuk, de a bemeneti változók összes lehetséges kombinációinak behelyettesítésével belátható az igazságuk.

$$A * 0 = 0$$

$$A + A = A$$

$$A * 1 = A$$

$$A * \bar{A} = 0$$

$$A + 0 = A$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + A * B = A$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A * (A + B) = A$$

De Morgan tételek

$$\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B} \longrightarrow A * B = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$$

A logikai szorzat negáltja, a változók negáltjának logikai összege.

$$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B} \longrightarrow A + B = \overline{\bar{A} * \bar{B}}$$

A logikai összeg negáltja, a változók negáltjának logikai szorzata. A De Morgan tételeket több bemenetre is értelmezhetjük. A logikai algebra tételeit felhasználva tudunk függvényeket egyszerűsíteni. Erre a kidolgozott feladatok között talál példát.

Az ÉS-NEM, illetve VAGY-NEM műveleteket univerzális műveleteknek nevezzük, mivel segítségükkel bármilyen egyenlet felírható.