Számjegyes minimalizálás (Quine-McCluskey módszer)

Mint korábban már láttuk a függvények diszjunktív, illetve konjunktív kanonikus alakjai nem éppen a legegyszerűbb megoldásai az adott függvénynek, bár igaz, hogy minden függvényhez csak egy-egy ilyen alak tartozik. Valamilyen módon egyszerűsítenünk kell a függvényt, hiszen a tényleges megvalósításnál nem mindegy, hogy hány kapuval kell számolnunk. Alapvetően kétféle megoldással foglalkozunk:

1. Grafikus egyszerűsítés (Karnaugh tábla segítségével, a 6. modulban részletesen tárgyaljuk)
2. Számjegyes minimalizálás (Quine – McCluskey módszer, jelen modul témája)

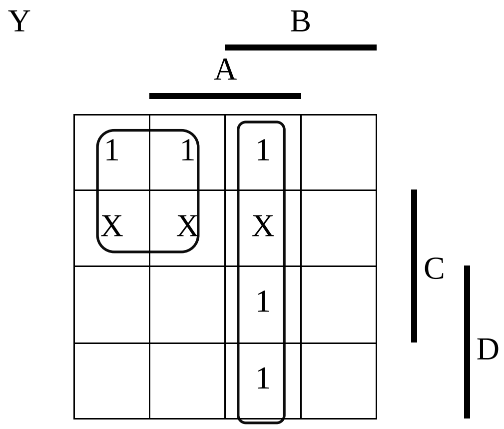
5 változóig a függvények egyszerűsítésénél nagyon jól használható a Karnaugh tábla, ennél több bemeneti változó esetén a Quine-McCluskey módszer használata javasolt. Ezen módszer jellemzői:

- A mintermsorszámok ismeretén alapuló minimalizálási eljárás. A minterm sorszám egyértelműen meghatározza a mintermet, decimális alakban célszerű megadni.
- Tetszőleges számú változóra megadható.
- Jól algoritimizálható.
- Az eljárás lényege, hogy megkeressük a szomszédos mintermeket, és addig egyszerűsítjük őket, amíg eljutunk a primimplikánsokig (olyan term, amelyből nem hagyható el több változó, nem egyszerűsíthető tovább). Két minterm szomszédosságának 3 szükséges és elégséges feltétele van:
    1. Két minterm szomszédos, ha decimális sorszámaik különbsége 2 egész számú hatványa.
    2. Két minterm szomszédos, ha bináris súlyaik (a minterm sorszám bináris alakjában lévő 1-esek száma) különbsége 1.
    3. Két minterm szomszédos, ha a nagyobb bináris súlyú mintermnek a decimális sorszáma is nagyobb a másikénál.
- Az előző pontban leírt 3 feltétel egyidejű teljesülése szükséges és elégséges feltétele a mintermek szomszédosságának.

A számjegyes minimalizálás Quine-McClsukey féle algoritmusa a fentiekben leírt három feltétel teljesülése alapján megkeresi a szomszédos mintermeket, párba rendezi őket, majd egyszerűsítés után a folyamatot addig ismétli, míg el nem jut a prímimplikánsokig. Az algoritmus az összes prímimplikánst megadja, ezért a második lépés az, hogy ki kell választani közülük a lényeges prímimplikánsokat. Az algoritmus gyakorlati alkalmazását egy példán keresztül mutatjuk be. A korábbi mondatommal ellentmondva 4 változós függvényen mutatjuk be a módszer használatát, mert a megértéshez ez jobban megfelel. Adott az alábbi Y függvény.

$$Y(DCBA) = \sum m_i^4(i = 0,1,3,11,15)\ X = 4,5,7$$

Az i azokat a mintermsorszámokat jelöli, ahol az Y függvény 1-es értékű, X pedig azokat a mintermsorszámokat adja meg ahol a függvény értéke közömbös. Ha $\overline{Y(DCBA)}$ lenne az azt jelentené, hogy a függvény a megadott helyeken 0 értékű. Először írjuk be a függvényt egy Karnaugh táblába és nézzük meg milyen megoldást kapunk az egyszerűsítésre:



$Y = (\overline{D} * \overline{B}) + (B * A)$

Most nézzük meg ugyanennek a függvénynek az egyszerűsítését a Quine - McCluskey módszerrel. Ennél az egyszerűsítésnél oszlopokat írunk fel a mintermsorszámok felhasználásával. Az I. oszlopban a mintermsorszámok súlyát írjuk fel, vagyis hogy hány db 1-es van benne (a bináris alakjában). Növekvő súlyszámok sorrendjében adjuk meg a mintermsorszámokat. Ha valamelyik súlyszám hiányzik oda „–„ jelet teszünk és folytatjuk a felírást. Vesszük azokat a mintermsorszámokat, ahol a függvény 1-es értékű, és azokat is ahol közömbös a függvény értéke.

decimális mintermsorszám	mintermsorszám binárisan	súlyszám
0	0000	0
1	0001	1
3	0011	2
4	0100	1
5	0101	2
7	0111	3
11	1011	3
15	1111	4

Ennek alapján az I oszlop a következőképpen alakul:

	I
0 súlyú mintermsorszámok	0
1-es súlyú mintermsorszámok	1 4
2-es súlyú mintermsorszámok	3 5
3-as súlyú mintermsorszámok	7 11
4-es súlyú mintermsorszámok	15

A II oszlop elemeit úgy kapjuk, hogy az I oszlop azon elemeit (mintermsorszámait) vonjuk össze, amelyeknél a súlyszámok különbsége 1 (egymás alatti sorokat szabad csak összevonni), illetve a minterm sorszámaik különbsége 2 egész kitevős hatványának megfelelő. Valamint annak a feltételnek is teljesülnie kell, hogy a nagyobb súlyszámú elemnél a minterm sorszámnak is nagyobbnak kell lennie. Az összevont minterm sorszámokat vesszővel elválasztva növekvő sorrendben írjuk fel és zárójelben megadjuk az összevonási számot, vagyis a mintermsorszámok különbségét. Az I oszlopban pipát teszünk azon minterm sorszámok mellé, amelyeket össze tudtunk vonni egy másik mintermsorszámmal. A 0-t össze tudjuk vonni az 1-el és a 4-el is, mert minden fent említett feltétel teljesül. A felírt párok 0,1(1), illetve 0,4(4), majd pipát teszünk a 0, 1, 4 sorszámok mellé. Ezek után a következő két sorral számolunk. Az 1-et a 3-mal és az 5-tel is össze tudjuk vonni, így kapjuk az 1,3(2), illetve 1,5(4) párokat. A 4-et csak az 5-tel lehet összevonni, a végeredmény 4,5(1) lesz. A 3 és az 5 sorszám mellé is pipát tehetünk. Következő lépésben a 2-es és a 3-as súlyú mintermsorszámokat vonjuk össze. A 3-at a 7-tel és a 11-el is összevonhatjuk, így a 3,7(4), valamint a 3,11(8) párokat kapjuk, és a 7, 11 mellé pipát teszünk. Az 5-öt csak a 7-tel tudjuk összevonni, ennek alapján az 5,7(2) párost kapjuk. Minden sorszám mellé csak egy pipát teszünk akkor is, ha több elemmel tudtuk összevonni. Végezetül a 3-as és a 4-es súlyú mintermsorszámok összevonását valósítjuk meg. A 7 a 15-tel, és a 11 is a 15-tel összevonható, az ennek eredményeként kapott párok: 7,15(8), 11,15(4). A 15 mellé is pipát tehetünk.Ezek alapján a táblázatunk II. oszlopa a következőképpen néz ki:

	I	II
0 súlyú minterm sorszámok	0√	0,1(1)
		0,4(4)
	1√	1,3(2)
1-es súlyú mintermsorszámok	4√	1,5(4)
		4,5(1)
	3√	3,7(4)
2-es súlyú mintermsorszámok	5√	3,11(8)
		5,7(2)
3-as súlyú mintermsorszámok	7√	7,15(8)
	11√	11,15(4)
4-es súlyú mintermsorszámok	15√	

A III oszlop elemeit úgy kapjuk, hogy a II oszlop egymás alatti soraiban azokat a párokat vonjuk össze, amelyeknél megegyezik a minterm sorszámok különbsége (a zárójelben megadott szám), illetve páronként teljesül, hogy a mintermsorszámok különbsége 2 egész kitevős hatványának megfelelő, illetve az alsóbb sorban lévő mintermsorszámokra páronként igaz, hogy nagyobbak az előző sorból vett elemeknél. Az összevonható pároknál a mintermsorszámokat vesszővel elválasztva növekvő sorrendben adjuk meg, zárójelben pedig a régi és az új összevonási számot (mintermsorszámok különbségét) írjuk le növekvő sorrendben, amire igaz, hogy a pároknál megegyezik. A II oszlopban pipát teszünk azon elemek mellé, amelyeket össze tudtunk vonni más elemmel. Ha már szerepel a III oszlop megadott sorában egy 4-es csoport, akkor csak a pipákat tesszük a megfelelő párok mellé, de az oszlopban nem írjuk le még egyszer ezt a csoportot. A 0,1(1) párt az alatta lévő sorban a 4,5(1) párral tudjuk összevonni, az eredmény a 0,1,4,5(1,4) négyes lesz. A 0,1(1); 4,5(1) párok mellé pipát teszünk. A 0,4(4) párt az alatta lévő sorban található 1,5(4) párral tudjuk összevonni, de az összevonás eredménye ugyanaz lesz, amit már korábban felírtunk, így csak a pipákat tesszük ki. Az első két sorral végeztünk, jön a 2. és a 3. sor. A 2. sorból az 1,3(2) párt az 5,7(2) párral vonjuk össze, így az 1,3,5,7(2,4) elemet kapjuk. A párok mellé a pipákat kitesszük. Az 1,5(4) párt a 3,7(4)-el vonhatjuk össze, de így ugyanazt a négyest kapjuk, amit már felírtunk, ezért csak a pipákat tesszük ki. A következő lépésben a 3., illetve 4. sor elemeit vizsgáljuk. A 3,7(4) párost a 11,15(4)-gyel tudjuk összevonni, az eredmény a 3,7,11,15(4,8) négyes lesz. A pipákat a párok mellé kitesszük. A 3,11(8) párost a 7,15(8) párral vonhatjuk össze, de ez ugyanazt a négyest eredményezi, amit már korábban felírtunk. Mindenesetre a pipákat a párok mellé elhelyezzük, ahol még nincs. Így a III. oszloppal kiegészítve a táblázat az alábbiak szerint alakul.

	I	II	III	
0 súlyú mintermsorszámok	0√	0,1(1)√ 0,4(4)√	0,1,4,5(1,4)	a
1-es súlyú mintermsorszámok	1√ 4√	1,3(2)√ 1,5(4)√ 4,5(1)√	1,3,5,7(2,4)	b
2-es súlyú mintermsorszámok	3√ 5√	3,7(4)√ 3,11(8)√ 5,7(2)√	3,7,11,15(4,8)	c
3-as súlyú mintermsorszámok	7√ 11√	7,15(8)√ 11,15(4)√		
4-es súlyú mintermsorszámok	15√			

Addig folytatjuk az oszlopok felírását, amíg tudunk összevonni az egymás alatt lévő sorok elemeiből. A III oszlopnál egyik sor elemét sem tudjuk összevonni az alatta lévő sor elemével, mert az összevonási számok nem egyeznek meg (páronként nézve). Ezek a kapott elemek lesznek a függvényünk elsődleges összetevői (prímimplikáns, ahol nincs pipa), amelyek közül ki kell majd választanunk a lényeges prímimplikánsokat, amelyekkel a függvény egyértelműen megadható. Jelöljük a prímimplikánsokat a-val, b-vel, c-vel. A következő lépés az lesz, hogy felírjuk a prímimplikáns táblát. A sorokba a prímimplikánsokat írjuk fel, az oszlopokba azokat a mintermsorszámokat, ahol a függvény 1-es értékű:

prímimplikánsok	mintermek (csak azok, ahol a függvény 1-es értékű)				
	0	1	3	11	15
a	X	X			
b		X	X		
c			X	X	X

A táblában oda kerül X, amelyik mintermet a prímimplikáns tartalmazza. Meg kell néznünk, hogy mely prímimplikánsokkal írható fel a függvény. Amelyik oszlopban csak egy X van, azt a prímimplikánst biztosan be kell vennünk a függvény megvalósításába. Ilyenek az a és a c prímimplikánsok (a kék hátterű cellákban található X-ek miatt). Ez a kettő prímimplikáns valamennyi mintermet tartalmazza, ezért egyértelműen meghatározzák az Y függvényt. Y=a+c. Ez azonban nem olyan alakú, mint amit a Karnaugh táblás egyszerűsítésnél kaptunk így tovább kell mennünk.

a: 0,1,4,5(1,4) vesszük az első (legkisebb) mintermsorszámot, ami a 0 és ezt felírjuk a DCBA változókkal: $\overline{D} * \overline{C} * \overline{B} * \overline{A}$, majd ezek közül kihúzzuk az 1-es és a 4-es (zárójelben lévő számok alapján) helyi értéken álló változókat, így marad a $\overline{D} * \overline{B}$.

c: 3,7,11,15(4,8) vesszük az első (legkisebb) mintermsorszámot, ami a 3 és ezt felírjuk a DCBA változókkal: $\overline{D} * \bar{C} * B * A$, majd ezek közül kihúzzuk az 4-es és a 8-as (zárójelben lévő számok alapján) helyi értéken álló változókat, így marad a $B * A$.

Ezek alapján az Y függvény a következő lesz: $Y = (\overline{D} * \bar{B}) + (B * A)$. Teljesen ugyanazt kaptuk, mint a Karnaugh táblás megoldásnál.