Exercice1

1-Une solution réalisable est une solution pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites.
2-Un programme linéaire n'a pas de solution si son domaine admissible est vide ou sa fonction objectif est non bornée.
3-Une solution de base est réalisable si tous les bi ≥ 0.
4-Une solution de base réalisable est dégénérée lorsqu'au moins une variable de base est nulle.
5-une solution de base réalisable est optimale est une solution donnant la meilleure valeur objectif.

Max $F=x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 18 & (1) \\ -4x_1 + x_2 - x_3 \leq -12 & (2) \\ -8x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 0 & (3) \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6 & (4) = (1) + (2) \\ -x_2 \leq -5 & (5) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On remplace chaque solution dans les contraintes et on vérifie si elles sont satisfaites :

1. (20, 5, 25) est une solution non réalisable car la contrainte (1) n'est pas vérifiée :
2*20 + 5 – 25 = 20 > 18

2. (5, 20, 12) est une solution de base (au moins 3 contraintes sont satisfaites) et réalisable (**toutes les contraintes sont satisfaites**):
2*5 + 20 – 12 = 18
-4*5 + 20 – 12 = -12
-8*5 – 20 + 5*12 = 0
-2*5+ 2*20 - 2*12 = 6
-20 ≤ -5

3. (5, 5, -3) est une solution de base mais non réalisable car x_3 doit être ≥ 0
2*5 + 5 + 3 = 18
-4*5 + 5 +3 = -12
-8*5 -5- 3*5 = -60 < 0
-2*5 +2*5 +2*3 = 6
-5 = -5
$x_3 < 0$

4. (35, 5, 57) est une solution de base réalisable
2*35 + 5 - 57 = 18
-4*35 + 5 -57 < -12
-8*35 -5- 3*57 = 0
-2*35 +2*5 -2*57 < 6
-5= -5

5. (0, 22.5, 4.5) est une solution non réalisable ni de base
2*0 + 22.5 - 4.5 = 18
-4*0 + 22.5 -4.5 > -12
-8*0 – 22.25 + 5*4.5 = 0
-2*0 +2*22.5 -2*4.5 = 6
-2*0 + 2* 22.5 -2*4.5 > 6
-22.5 < -5

6. (40, 2, 64) est une solution ni de base ni réalisable

$2*40 + 2 - 64 = 18$
$-4*40 + 2 -64 < -12$
$-8*40 - 2 + 5*64 < 0$
$-2*40 +2*2 -2*64 < 6$
$-2 > -5$

7. (5, 10, 2) est une solution réalisable mais pas de base

$2*5 + 10 - 2 = 18$
$-4*5 + 10 -2 = -12$
$-8*5 - 10 + 5*2 < 0$
$-2*5 +2*10 -2*2 = 6$
$-10 < -5$

Exercice2 : Forme standard

(1) Max $F=6x_1 + 20x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 8 \\ x_2 \geq 10 \end{cases}$$

On pose $x=x_1-8$ et $y = x_2-10$

Max $F=6x + 48+ 20y+200$ — **Max $F= 6x+20y+248$**

$$\begin{cases} 2x+16 + y+10 \leq 32 \\ 3x+24 + 4y+40 \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Le standard : **Max $F= 6x+20y+248$**

$$\begin{cases} 2x+y +e_1= 6 \\ 3x+4y+e_2= 16 \\ x,y,e_1,e_2 \geq 0 \end{cases}$$

---

(2) Max $F=x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 - x_2 \geq 30 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \text{ qcq} \end{cases}$$

On pose $x_2=x_2^+-x_2^-$

Le standard : **Max $F = x_1+ 2 x_2^+-2x_2^-$**

$$\begin{cases} 3x_1 + 3 x_2^+-3x_2^- + e_1 = 40 \\ x_1 - x_2^++x_2^- - e_2 = 30 \\ x_1, x_2^+,x_2^-,e_1,e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice3

1-Solution : Affecter le projet 2 à l'ingénieur 1 pour un gain de 6. Affecter le projet 3 à l'ingénieur 2 pour un gain de 5. Affecter le projet 1 à l'ingénieur 3 pour un gain de 6

Le gain total = 6+5+6= 17 est un gain maximal

2-Programme linéaire

Soit x_{ij} la variable d'affectation du projet j à l'ingénieur i

On a donc **Max** $\mathbf{Z= 3x_{11}+6x_{12}+4x_{13}+6x_{21}+4x_{22}+5x_{23}+6x_{31}+5x_{32}+4x_{33}}$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 1 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} \le 1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \le 1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \le 1 \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0$ $x_{ij} \in IN$ i = 1, 2, 3 et j =1, 2, 3

3- Le dictionnaire final des données

Les variables définies dans le dictionnaire sont les variables de base et celles qui ne sont pas définies dans le dictionnaire sont les variables hors-base.

La solution optimale est obtenue en annulant les variables hors-base :

$x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1$ pour Z= 17

Le projet 2 est affecté à l'ingénieur 1. Le projet 3 est affecté à l'ingénieur 2.Le projet 1 est affecté à l'ingénieur 3.

Exercice4

1-Le standard

Max $\mathbf{F = 2x_1+ x_2+ x_3 + 3x_4}$

$$\begin{cases} 6x_1 + 8 x_2 + 5x_3 + 9 x_4 + e_1 = 6 \\ x_1 + 3 x_2 + x_3 + 2 x_4 + e_2 = 8 \\ x_1 + e_3 = 3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,e_1,e_2 , e_3,e_4 \ge 0 \end{cases}$$

2-Dictionnaire des données

1ère solution de base réalisable (e_1, e_2, e_3)

$x_1=x_2=x_3=x_4=0$ et $e_1=6$, $e_2 = 8$, $e_3 = 3$ avec F= 0

$\mathbf{e_1} = \mathbf{6} - 6x_1 - 8 x_2 - 5x_3 - \mathbf{9} x_4$
$\mathbf{e_2} = \mathbf{8} - x_1 - 3 x_2 - x_3 - \mathbf{2} x_4$
$\mathbf{e_3} = 3 - x_1$

$F = \mathbf{2}x_1+ \mathbf{1}x_2+ \mathbf{1}x_3 + \mathbf{3}x_4$

Variable entrante x_e: Max (**2**, **1**, **1**,**3**) = **3** donc $x_e = \mathbf{x_4}$

Variable sortante x_s : Min (**6/9**, **8/2**) = 2/3 ce qui correspond à $x_s = \mathbf{e_1}$

$\mathbf{x_4} = 2/3 – 2/3\ x_1 – 8/9\ x_2 – 5/9\ x_3 – 1/9\ e_1$
$\mathbf{e_2} = 8 - x_1 - 3 x_2 - x_3 - 2 x_4$
$\mathbf{e_3} = 3 - x_1$

$F = 2x_1+ x_2+ x_3 + 3(2/3 – 2/3\ x_1 – 8/9\ x_2 – 5/9\ x_3 – 1/9\ e_1) = 2+ 0\ x1 – \mathbf{5/3}\ x_2 – \mathbf{2/3}\ x_3 – \mathbf{1/3}\ e_1$

Tous les coûts sont ≤ 0 donc on atteint l'optimum :

$x_4 = 2/3$; $e_2 = 20/3$; $e_3 = 3$; $x_1= x_2= x_3= e_1=0$; F = 2

Exercice 5
1-Standard
Max F = 1000x_1+ 1200x_2

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 = 60 \\ x_1 + e_3 = 18 \\ x_2 + e_4 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0 \end{cases}$$

La 1ère solution de base réalisable (e_1= 200, e_2= 60, e_3 = 18, e_4=20) avec (x_1=x_2=x_3=0)

2-Méthode des tableaux

Tableau 1

c_j		1000	1200	0	0	0	0		θ
C_B	X_B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b	
0	e_1	10	5	1	0	0	0	200	200/5
0	← e_2	2	**3**	0	1	0	0	60	**60/3**
0	e_3	1	0	0	0	1	0	18	/
0	e_4	0	1	0	0	0	1	20	20/1
z_j		0	0	0	0	0	0		
$c_j - z_j$		1000	**1200**	0	0	0	0	F=0	

Tableau 2

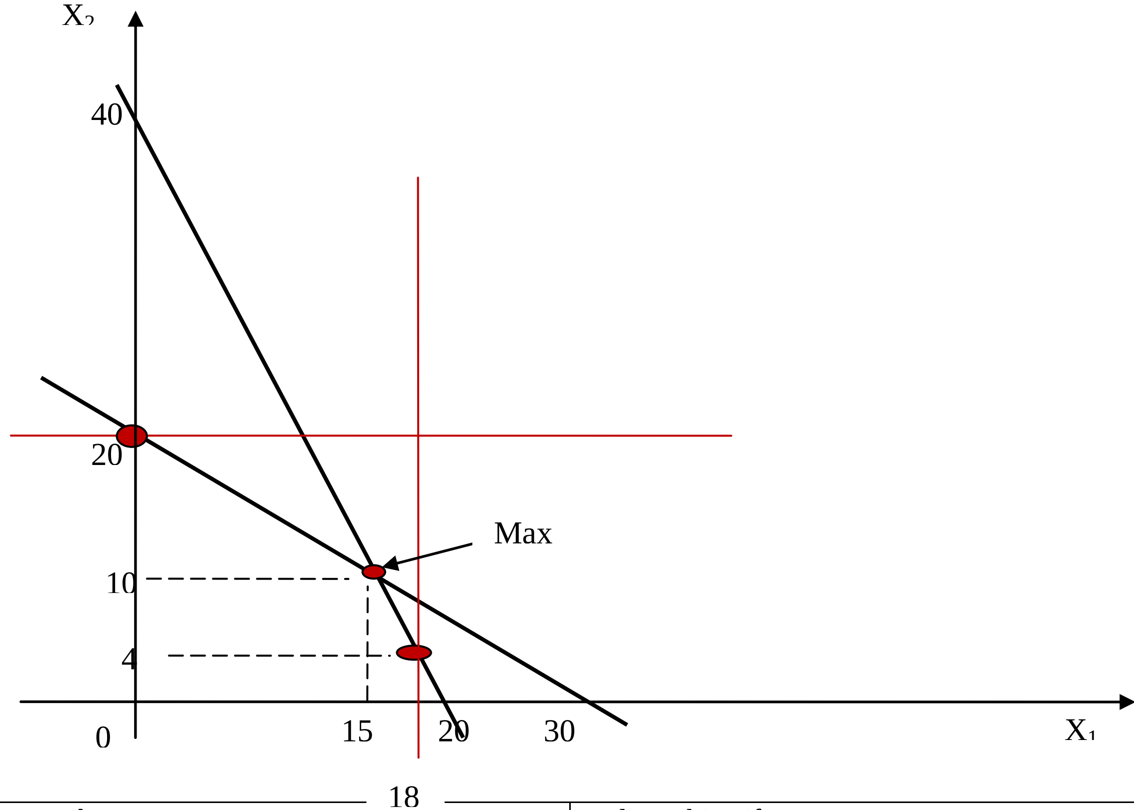
c_j		1000	1200	0	0	0	0		θ
C_B	X_B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b	
0	← e_1	20/3	0	1	-5/3	0	0	100	100/(20/3) =**15**
1200	x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	20	20/(2/3) = 30
0	e_3	1	0	0	0	1	0	18	18
0	e_4	-2/3	0	0	-1/3	0	1	0	/
z_j		800	1200	0	400	0	0		
$c_j - z_j$		**200**	0	0	-400	0	0	F=24000	

Tableau 3

c_j		1000	1200	0	0	0	0		θ
C_B	X_B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b	
1000	x_1	1	0	3/20	-1/4	0	0	15	100/(20/3) =**15**
1200	x_2	0	1	-1/10	1/2	0	0	10	20/(2/3) = 30
0	e_3	0	0	-3/20	1/4	1	0	3	18
0	e_4	0	0	1/10	-1/2	0	1	10	/
z_j		1000	1200	30	350	0	0		
$c_j - z_j$		0	0	-30	-350	0	0	F=27000	

Tous les cj-zj sont ≤ 0 donc on atteint l'optimum :
x_1 = 15, x_2= 10 , e_3=3 , e_4 = 10
e_1=e_2=0

3- Résolution graphique :



Points extrêmes	Valeur objectif
(0,0)	0
(0,20)	24000
(18,4)	22800
(15,10)	27000

4-Analyse post-optimale du Coefficient c_1 :
On reprend le dernier tableau en remplaçant 1200 par un coût c_1 et on refait le calcul:

c_j		$\mathbf{c_1}$	1200	0	0	0	0	
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2	e_3	e_4	b
$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{x_1}$	1	0	3/20	-1/4	0	0	15
1200	x_2	0	1	-1/10	1/2	0	0	10
0	e_3	0	0	-3/20	1/4	1	0	3
0	e_4	0	0	1/10	-1/2	0	1	10
z_j		$\mathbf{c_1}$	1200	**$(3/20)*c_1)-120$**	**$(-1/4)*c_1+600$**	0	0	
$c_j - z_j$		0	0	**$120-(3/20)*c_1$**	**$(1/4)* c_1-600$**	0	0	**$F^*=15c_1+12000$**

$120-3/20* c_1 \leq 0$
$3/20* c_1 \geq 120$
$c_1 \geq 20*120/3$
$c_1 \geq 800$

$1/4* c_1- 600 \leq 0$
$1/4* c_1 \leq 600$
$c_1 \leq 4*600$
$c_1 \leq 2400$

$800 \leq c_1 \leq 2400$

Pour c1 = 2400 on a F* = 15*2400+12000 = 48000
dF = 48000-27000 = 21000

5-Analyse post-optimale du Coefficient b_2 :

- On reprend le système initial

$$\begin{cases} 10x_1 + 5\,x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3\,x_2 \quad + e_2 = \mathbf{b_2} \\ x_1 + \ e_3 = 18 \\ x_2 + \ e_4 = 20 \end{cases}$$

- On reprend le dernier tableau

c_j		1000	1200	0	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	**e_1**	**e_2**	e_3	e_4	
1000	**x_1**	1	0	3/20	-1/4	0	0	
1200	**x_2**	0	1	-1/10	1/2	0	0	
0	**e_3**	0	0	-3/20	1/4	1	0	
0	**e_4**	0	0	1/10	-1/2	0	1	
z_j		1000	1200	30	350	0	0	
$c_j - z_j$		0	0	-30	-350	0	0	

Les variables de base : x_1, x_2, e_3, e_4 et les variables hors-base : e_1, e_2.

La Matrice de base correspondante à (***x_1, x_2, e_3, e_4***) à partir du système principal :

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sa Matrice inverse (dernier tableau)

$$\begin{pmatrix} 3/20 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/2 & 0 & 0 \\ -3/20 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1/10 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On utilise la ***Condition de faisabilité de la solution de base*** :

$$\left(\begin{pmatrix} 3/20 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/2 & 0 & 0 \\ -3/20 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1/10 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 200 \\ \mathbf{b_2} \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0 \right)$$

$$\begin{aligned} &3/20 * 200 - 1/4 * b_2 \geq 0 && 30 - b_2 * 1/4 \geq 0 && b_2 \leq 120 \\ &-1/10 * 200 + 1/2 * b_2 \geq 0 \quad \Longrightarrow && -20 + b_2 * 1/2 \geq 0 \quad \Longrightarrow && b_2 \geq 40 \\ &-3/20 * 200 + 1/4 * b_2 + 18 \geq 0 && -12 + b_2 * 1/4 \geq 0 && b_2 \geq 48 \\ &1/10 * 200 - 1/2 * b_2 + 20 \geq 0 && 40 - b_2 * 1/2 \geq 0 && b_2 \leq 80 \end{aligned}$$

$$\mathbf{48 \leq b_2 \leq 80}$$

Exercice 6 : Méthode des pénalités

Max $F = x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \le -1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Standard

Max $F = x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + \mathbf{e_1} = 4 & (1) \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - \mathbf{e_2} = 5 \longleftarrow & (2) \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - \mathbf{e_3} = 1 \longleftarrow & (3) \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \ge 0 \end{cases}$$

La 1ère solution de base (e_1, e_2, e_3) n'est pas réalisable

$\mathbf{e_1} = 4 \quad \mathbf{e_2} = -5 \quad \mathbf{e_3} = -1$

On applique la méthode des pénalités en ajoutant deux variables artificielles (a_1 et a_2) aux contraintes (2) et (3)) et on réapplique la méthode des tableaux :

Max $F = x_1 - x_2 + x_3 - Ma_1 - Ma_2 \qquad M \gg$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + \mathbf{e_1} = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - \mathbf{e_2} + \mathbf{a_1} = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - \mathbf{e_3} + \mathbf{a_2} = 1 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \ge 0 \end{cases}$$

Tableau 1

c_j		1	-1	1	0	0	0	-M	-M		θ
C_B	X_B	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	b	
0	e_1	2	-1	2	1	0	0	0	0	4	4/1
-M	$\mathbf{a_1}$	-2	**3**	-1	0	-1	0	1	0	5	**5/3**
-M	a_2	1	-1	2	0	0	-1	0	1	1	/
z_j		M	-4M	-M	0	M	M	-M	-M		
$c_j - z_j$		1-M	**-1+2M**	1+M	0	-M	-M	0	0	-6M	

Tableau 2

c_j		1	-1	1	0	0	0	-M	-M		θ
C_B	X_B	x_1	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	b	
0	e_1	4/3	0	5/3	1	-1/3	0		0	17/3	17/5
-1	$\mathbf{x_2}$	-2/3	**1**	-1/3	0	-1/3	0		0	5/3	/
-M	$\mathbf{a_2}$	1/3	0	**5/3**	0	-1/3	-1		1	8/3	**8/5**
z_j		2/3-M/3	-1	1/3-5/3*M	0	1/3+1/3*M	M		-M		
$c_j - z_j$		1/3+M/3	**0**	**2/3+5/3*M**	0	-1/3-1/3*M	-M		0	**-5/3-8/3M**	

Tableau3

c_j		1	-1	1	0	0	0	-M	-M		θ
C_B	X_B	x_1	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	$\mathbf{e_3}$	a_1	a_2	b	
0	$\mathbf{e_1}$	1	0	0	1	0	**1**			3	3/1
-1	$\mathbf{x_2}$	-3/5	**1**	0	0	-2/5	-1/5			11/5	/
1	$\mathbf{x_3}$	1/5	0	**1**	0	-1/5	-3/5			8/5	/
z_j		4/5	-1	1	0	1/5	-2/5				
$c_j - z_j$		1/5	**0**	0	0	-1/5	**2/5**			**-3/5**	

Tableau 4

c_j		1	-1	1	0	0	0	-M	-M		θ
C_B	X_B	x_1	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	$\mathbf{e_3}$	a_1	a_2	b	
0	$\mathbf{e_3}$	1	0	0	1	0	1			3	3/1
-1	$\mathbf{x_2}$	-2/5	**1**	0	1/5	-2/5	0			14/5	/
1	$\mathbf{x_3}$	4/5	0	**1**	3/5	-1/5	0			17/5	/
z_j		6/5	-1	1	2/5	1/5	0				
c_j - z_j		-1/5	**0**	0	-2/5	-1/5	0			**3/5**	

Tous les cj-zj ≤ 0, le maximum est atteint :
$x_1=e_1=e_2 = 0$; $x_2=14/5$; x_3 17/5 $e_3=3$.

<u>Exercice 6</u> : Méthode des pénalités

$$\mathbf{Min\ F=195x_1 +160\ x_2\ + 120x_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\ x_2\ + x_3 \geq 16 \\ 5/2\ x_1 + x_2 + 3/2\ x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Standard

$$\mathbf{Min\ F=195x_1 +160x_2\ + 120x_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\ x_2 + x_3 \mathbf{- e_1 =}\ 4 \\ 5/2\ x_1 + x_2\ + 3/2\ x_3 - \mathbf{e_2} = 5 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

La 1ère solution de base (e_1, e_2, e_3) n'est pas réalisable

$\mathbf{e_1 =}$ -16 $\qquad \mathbf{e_2}$ = -10

On applique la méthode des pénalités en ajoutant deux variables artificielles (a_1 et a_2 aux contraintes) et on réapplique la méthode des tableaux :

$$\mathbf{Min\ F=195x_1 +160x_2\ + 120x_3 + Ma_1 +\ Ma_2 \qquad M >>}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\ x_2\ + x_3 \mathbf{- e_1 + a_1 =}\ 16 \\ 5/2\ x_1 + x_2\ + 3/2\ x_3\ \mathbf{- e_2 + a_2} = 10 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 1

c_j		195	160	120	0	0	M	M		θ
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	x_3	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
M	$\mathbf{a_1}$	1	2	1	-1	0	1	0	16	16/1
M	$\mathbf{a_2}$	**5/2**	1	3/2	0	-1	0	1	10	**20/5**
z_j		7M/2	3M	5M/2	-M	-M	M	M		
c_j - z_j		**195-7M/2**	160-3M	120-5M/2	M	M	0	0	26M	

Tableau 2

c_j		195	160	120	0	0	M	M		θ
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	x_3	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
M	$\mathbf{a_1}$	0	**8/5**	2/5	-1	2/5	1		12	**12*5/8**
195	$\mathbf{x_1}$	**1**	2/5	3/5	0	-2/5	0		4	4*5/2
z_j		195	78+8M/5	117+2M/5	-M	2M/5-78	M			
c_j - z_j		0	**82-8M/5**	3-2M/5	M	78-2M/5	0		780+12M	

Tableau3

c_j	195	160	120	0	0	M	M		θ
C_B X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
160 $\mathbf{x_2}$	0	**1**	1/4	-5/8	1/4			15/2	30
195 x_1	**1**	0	**1/2**	1/4	-1/2			1	**2**
z_j	195	160	275/2	-205/4	-115/2				
c_j - z_j	0	0	**-35/2**	205/4	115/2			1395	

Tableau 4

c_j	195	160	120	0	0	M	M		θ
C_B X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
160 $\mathbf{x_2}$	-1/2	**1**	0	-3/4	1/2			7	
120 $\mathbf{x_3}$	**2**	0	1	1/2	-1			2	
z_j	160	160	120	-60	-40				
c_j - z_j	35	0	0	60	40			1360	

Tous les cj-zj ≥ 0, le minimum est atteint :
$x_1=e_1=e_2 = 0$; $x_2=7$; $x_3 =2$; F= 1360.

Exercice 6 : Méthode des deux phases

$$\mathbf{Min\ F=195x_1 +160\ x_2 + 120x_3}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \geq 16 \\ 5/2\ x_1 + x_2 + 3/2\ x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Standard

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \mathbf{- e_1 + a_1} = 16 \\ 5/2\ x_1 + x_2 + 3/2\ x_3 \mathbf{- e_2 + a_2} = 10 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

1ère phase : Soit la fonction objectif W des variables artificielles à minimiser

$$\mathbf{Min\ W = a_1 + a_2}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \mathbf{- e_1 + a_1} = 16 \\ 5/2\ x_1 + x_2 + 3/2\ x_3 \mathbf{- e_2 + a_2} = 10 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 1

c_j	0	0	0	0	0	1	1		θ
C_B X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	x_3	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
1 $\mathbf{a_1}$	1	2	1	-1	0	1	0	16	16/1
1 $\mathbf{a_2}$	**5/2**	1	3/2	0	-1	0	1	10	**20/5**
z_j	7/2	3	5/2	-1	-1	1	1		
c_j - z_j	**-7/2**	-3	-5/2	1	1	0	0	W=26	

Tableau 2

c_j		0	0	0	0	0	1	1		θ
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	x_3	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
1	$\mathbf{a_1}$	0	**8/5**	2/5	-1	2/5	1		12	**12*5/8**
0	$\mathbf{x_1}$	**1**	2/5	3/5	0	-2/5	0		4	4*5/2
z_j		0	8/5	2/5	-1	2/5	1			
$c_j - z_j$		0	**-8/5**	-2/5	1	-2/5	0		W=12	

Tableau3

c_j		0	0	0	0	0	1	1		θ
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
0	$\mathbf{x_2}$	0	**1**	1/4	-5/8	1/4			15/2	30
0	x_1	**1**	0	**1/2**	1/4	-1/2			1	**2**
z_j		0	0	0	0	0				
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0			W=0	

W = 0 le minimum est atteint, on passe à la 2ème phase en reprenant le tableau 3

2ème phase

Tableau 1

c_j		195	160	120	0	0				θ
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
160	$\mathbf{x_2}$	0	**1**	1/4	-5/8	1/4			15/2	30
195	x_1	**1**	0	**1/2**	1/4	-1/2			1	**2**
z_j		195	160	275/2	-205/4	-115/2				
$c_j - z_j$		0	0	-35/20	205/4	115/2			F=1395	

Tableau 2

c_j		195	160	120	0	0				θ
C_B	X_B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	a_1	a_2	b	
160	$\mathbf{x_2}$	-1/2	**1**	0	-3/4	1/2			7	
120	$\mathbf{x_3}$	**2**	0	**1**	1/2	-1			2	
z_j		160	160	120	-60	-40				
$c_j - z_j$		35	0	0	60	40			F=1360	

Tous les cj-zj sont ≥ 0, le minimum est atteint :
$x_1=e_1=e_2=0$
$x_2=7$; $x_3 = 2$ pour F = 1360