Título del Tema

Prof. Arnoldo Del Toro Peña

22 de agosto de 2025

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definición

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se llama **exacta** si existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

En este caso, la función $F(x,y)$ se denomina **función potencial** de la ecuación diferencial.

Condición de Exactitud

Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si y solo si:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esta condición se deriva del teorema de Schwarz sobre la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

Método de Solución

Paso 1: Verificar exactitud

Comprobar que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Paso 2: Encontrar la función potencial F(x,y)

1. Integrar $M(x, y)$ respecto a x:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$$

2. O integrar $N(x, y)$ respecto a y:

$$F(x, y) = \int N(x, y)dy + h(x)$$

Paso 3: Determinar la función desconocida

- Si usaste el método 1: Derivar F respecto a y e igualar a $N(x, y)$ para encontrar $g'(y)$
- Si usaste el método 2: Derivar F respecto a x e igualar a $M(x, y)$ para encontrar $h'(x)$

Paso 4: Escribir la solución

La solución general es:

$$F(x, y) = C$$

donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo Resuelto

Resolver: $(2xy + 3)dx + (x^2 - 4y)dy = 0$

Solución:

1. **Verificar exactitud:**
   - $M(x, y) = 2xy + 3$, entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x$
   - $N(x, y) = x^2 - 4y$, entonces $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$

   Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$, la ecuación es exacta.

2. **Encontrar F(x,y):**

$$F(x, y) = \int (2xy + 3)dx = x^2y + 3x + g(y)$$

3. **Determinar g(y):**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y) = N(x, y) = x^2 - 4y$$

   Por lo tanto: $g'(y) = -4y$, entonces $g(y) = -2y^2$

4. **Solución:**

$$F(x, y) = x^2y + 3x - 2y^2 = C$$

Factores Integrantes

Cuando una ecuación no es exacta, a veces se puede multiplicar por un **factor integrante** $\mu(x, y)$ para hacerla exacta.

Factores integrantes comunes:

1. **Factor que depende solo de x:** Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ depende solo de x, entonces:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

2. **Factor que depende solo de y:** Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ depende solo de y, entonces:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$$

Aplicaciones

Las ecuaciones exactas aparecen frecuentemente en:

- **Física:** Campos conservativos, termodinámica
- **Ingeniería:** Circuitos eléctricos, mecánica de fluidos
- **Economía:** Modelos de equilibrio
- **Geometría:** Campos de direcciones, trayectorias ortogonales

Notas Importantes

- Una ecuación exacta representa un campo vectorial conservativo
- La solución $F(x, y) = C$ describe las curvas de nivel de la función potencial
- Si una ecuación no es exacta, verificar si existe un factor integrante antes de usar otros métodos
- Las condiciones iniciales determinan el valor específico de la constante C

Relación con Otros Métodos

- **Variables separables:** Caso especial cuando M depende solo de x y N solo de y
- **Ecuaciones homogéneas:** Pueden volverse exactas después de una sustitución apropiada
- **Ecuaciones lineales:** A menudo pueden resolverse como exactas o mediante factores integrantes