Ecuaciones Diferenciales

Variables Separables

Prof. Arnoldo Del Toro Peña

11 de agosto de 2025

Método de Variables Separables

Definición

El **método de variables separables** es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden donde es posible separar las variables dependiente e independiente en lados opuestos de la ecuación.

Forma General

Una ecuación diferencial es **separable** si puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

O equivalentemente:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Donde $M(x)$ depende solo de x y $N(y)$ depende solo de y.

Procedimiento de Solución

Paso 1: Verificar que la ecuación es separable

La ecuación debe poder expresarse como producto de una función de x por una función de y.

Paso 2: Separar las variables

Reorganizar la ecuación para que todas las expresiones con y estén en un lado y todas las expresiones con x en el otro:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Paso 3: Integrar ambos lados

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Paso 4: Resolver para y (si es posible)

Despejar y de la ecuación resultante para obtener la solución general.

Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1: Ecuación Básica

Ecuación: $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$

Paso 1: Verificar separabilidad $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot y$ (producto de función de x por función de y)

Paso 2: Separar variables

$$\frac{dy}{y} = 3x^2dx$$

Paso 3: Integrar

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx$$

$$\ln|y| = x^3 + C_1$$

Paso 4: Resolver para y

$$|y| = e^{x^3+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^3}$$

$$y = Ce^{x^3}$$

(donde $C = \pm e^{C_1}$)

Solución general: $y = Ce^{x^3}$

Ejemplo 2: Con Condición Inicial

Ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$, con $y(1) = 2$

Paso 1: Separar variables

$$y^2dy = 2xdx$$

Paso 2: Integrar

$$\int y^2 dy = \int 2x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C$$

Paso 3: Aplicar condición inicial $y(1) = 2$

$$\frac{(2)^3}{3} = (1)^2 + C$$

$$\frac{8}{3} = 1 + C$$

$$C = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

Solución particular: $\frac{y^3}{3} = x^2 + \frac{5}{3}$

O despejando: $y^3 = 3x^2 + 5$, entonces $y = \sqrt[3]{3x^2 + 5}$

Ejemplo 3: Ecuación de Crecimiento Poblacional

Ecuación: $\frac{dP}{dt} = kP$ (donde k es una constante)

Separar variables:

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

Integrar:

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$\ln |P| = kt + C_1$$

Resolver para P:

$$P = Ce^{kt}$$

(donde $C = e^{C_1}$)

Con condición inicial $P(0) = P_0$:

$$P_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$$

Solución particular: $P(t) = P_0 e^{kt}$

Ejemplo 4: Ecuación Logística

Ecuación: $\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$ (crecimiento logístico)

Reescribir:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{rP(K-P)}{K}$$

Separar variables:

$$\frac{K\,dP}{P(K-P)} = r\,dt$$

Usar fracciones parciales:

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}$$

Integrar:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP = \int r\,dt$$

$$\ln|P| - \ln|K-P| = rt + C_1$$

$$\ln\left|\frac{P}{K-P}\right| = rt + C_1$$

Resolver:

$$\frac{P}{K-P} = Ce^{rt}$$

Despejando P:

$$P = \frac{CKe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}$$

Casos Especiales y Consideraciones

Caso 1: Cuando $g(y) = 0$

Si $g(y_0) = 0$ para algún valor y_0, entonces $y = y_0$ es una **solución singular** (equilibrio).

Ejemplo: En $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$, si $y^2 - 4 = 0$, entonces $y = 2$ y $y = -2$ son soluciones de equilibrio.

Caso 2: Pérdida de Soluciones

Al dividir por $g(y)$, podemos perder soluciones donde $g(y) = 0$. Siempre verificar estos casos por separado.

Caso 3: Integración con Valor Absoluto

Cuando aparece $\ln|y|$, considerar tanto valores positivos como negativos de y en la solución general.

Aplicaciones en Ingeniería

1. Circuitos RC

Ecuación: $RC\frac{dV}{dt} + V = 0$ (descarga del capacitor)

Separar: $\frac{dV}{V} = -\frac{dt}{RC}$

Solución: $V(t) = V_0 e^{-t/RC}$

2. Ley de Enfriamiento de Newton

Ecuación: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ (donde T_a es temperatura ambiente)

Separar: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$

Solución: $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$

3. Decaimiento Radiactivo

Ecuación: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

Solución: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

4. Vaciado de Tanques (Ley de Torricelli)

Ecuación: $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$ (donde h es la altura del líquido)

Separar: $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -k\,dt$

Integrar: $2\sqrt{h} = -kt + C$

Solución: $h(t) = \left(\frac{C - kt}{2}\right)^2$

Verificación de Soluciones

Siempre verificar la solución sustituyendo en la ecuación diferencial original:

Ejemplo: Si $y = Ce^{x^3}$ es solución de $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Ce^{x^3}) = C \cdot 3x^2 e^{x^3} = 3x^2(Ce^{x^3}) = 3x^2 y$$

Limitaciones del Método

1. **No todas las EDO son separables:** $\frac{dy}{dx} = x + y$ no es separable
2. **Integración compleja:** Algunas integrales pueden no tener forma cerrada
3. **Soluciones implícitas:** No siempre es posible despejar y explícitamente
4. **Pérdida de soluciones:** Al dividir por funciones que pueden ser cero

Ejemplos Adicionales Resueltos

Ejemplo 5: Ecuación con Funciones Trigonométricas

Ecuación: $\frac{dy}{dx} = y \cos x$

Solución:

- **Separar variables:** $\frac{dy}{y} = \cos x \, dx$
- **Integrar:** $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \, dx$
- **Resultado:** $\ln |y| = \sin x + C_1$
- **Solución general:** $y = Ce^{\sin x}$

Con condición inicial $y(0) = 3$: $3 = Ce^{\sin 0} = Ce^0 = C$ **Solución particular:** $y = 3e^{\sin x}$

Ejemplo 6: Ecuación con Raíces

Ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{x}$, para $x > 0$

Solución:

- **Separar variables:** $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dx}{x}$
- **Integrar:** $\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int \frac{dx}{x}$
- **Resultado:** $\arcsin(y) = \ln |x| + C$
- **Solución general:** $y = \sin(\ln |x| + C)$

Ejemplo 7: Ecuación con Productos de Funciones

Ecuación: $\frac{dy}{dx} = xy(1 + x^2)$

Solución:

- **Separar variables:** $\frac{dy}{y} = x(1 + x^2)dx$

- **Expandir:** $\frac{dy}{y} = (x + x^3)dx$
- **Integrar:** $\int \frac{dy}{y} = \int (x + x^3)dx$
- **Resultado:** $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C_1$
- **Solución general:** $y = Ce^{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}}$

Ejemplo 8: Ecuación que Requiere Factorización

Ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x^2}$

Solución:

- **Factorizar:** $\frac{dy}{dx} = \frac{(y-2)(y+2)}{x^2}$
- **Separar variables:** $\frac{dy}{(y-2)(y+2)} = \frac{dx}{x^2}$
- **Fracciones parciales:** $\frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$

Resolviendo: $1 = A(y + 2) + B(y - 2)$

- Si $y = 2$: $1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$
- Si $y = -2$: $1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$
- **Integrar:** $\int \left(\frac{1/4}{y-2} - \frac{1/4}{y+2} \right) dy = \int \frac{dx}{x^2}$
- **Resultado:** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = -\frac{1}{x} + C_1$
- **Solución implícita:** $\ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = -\frac{4}{x} + C$

Ejemplo 9: Problema de Mezclas

Situación: Un tanque contiene 100 L de agua pura. Se bombea salmuera con 2 kg/L de sal a razón de 3 L/min, y la mezcla sale a la misma velocidad.

Ecuación: $\frac{dS}{dt} = 6 - \frac{3S}{100}$ (donde S es la cantidad de sal en kg)

Solución:

- **Reescribir:** $\frac{dS}{dt} = \frac{600 - 3S}{100}$
- **Separar variables:** $\frac{dS}{600 - 3S} = \frac{dt}{100}$

- **Integrar:** $\displaystyle\int \frac{dS}{600-3S} = \int \frac{dt}{100}$
- **Resultado:** $-\frac{1}{3}\ln|600-3S| = \frac{t}{100} + C_1$
- **Simplificar:** $\ln|600-3S| = -\frac{3t}{100} + C$
- **Solución general:** $600 - 3S = Ae^{-3t/100}$
- **Despejar S:** $S = 200 - \frac{A}{3}e^{-3t/100}$

Con condición inicial $S(0) = 0$: $0 = 200 - \frac{A}{3} \Rightarrow A = 600$

Solución particular: $S(t) = 200(1 - e^{-3t/100})$

Ejemplo 10: Ecuación de Bernoulli Reducible

Ecuación: $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

Transformación: Esta es una ecuación de Bernoulli. Dividiendo por y^3: $y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x$

Sustitución: $v = y^{-2}$, entonces $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

Nueva ecuación: $-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + xv = x$

Multiplicar por -2: $\frac{dv}{dx} - 2xv = -2x$

Esta es lineal en v, pero también separable: $\frac{dv}{dx} = 2xv - 2x = 2x(v-1)$

Separar variables: $\frac{dv}{v-1} = 2x\,dx$

Integrar: $\ln|v-1| = x^2 + C_1$

Solución para v: $v = 1 + Ce^{x^2}$

Regresar a y: $y^{-2} = 1 + Ce^{x^2}$

Solución final: $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{x^2}}}$

Ejemplo 11: Trayectorias Ortogonales

Problema: Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = Cx^2$.

Solución:

- **Familia dada:** $y = Cx^2$
- **Derivar:** $\frac{dy}{dx} = 2Cx = \frac{2y}{x}$ (eliminando C)

- **Trayectorias ortogonales:** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$ (pendiente recíproca negativa)
- **Separar variables:** $2y\,dy = -x\,dx$
- **Integrar:** $\int 2y\,dy = \int -x\,dx$
- **Resultado:** $y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$
- **Trayectorias ortogonales:** $x^2 + 2y^2 = K$ (familia de elipses)

Ejemplo 12: Problema de Velocidad Terminal

Situación: Un objeto cae con resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad.

Ecuación: $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ (donde $k > 0$)

Solución:

- **Reescribir:** $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 = g\left(1 - \frac{kv^2}{mg}\right)$
- **Definir:** $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ (velocidad terminal)
- **Ecuación:** $\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right) = \frac{g}{v_t^2}(v_t^2 - v^2)$
- **Separar variables:** $\frac{dv}{v_t^2 - v^2} = \frac{g}{v_t^2}dt$
- **Fracciones parciales:** $\frac{1}{v_t^2 - v^2} = \frac{1}{(v_t - v)(v_t + v)} = \frac{1}{2v_t}\left(\frac{1}{v_t - v} + \frac{1}{v_t + v}\right)$
- **Integrar:** $\frac{1}{2v_t}\ln\left|\frac{v_t + v}{v_t - v}\right| = \frac{g}{v_t^2}t + C$

Con condición inicial $v(0) = 0$: $C = 0$

Solución implícita: $\ln\left|\frac{v_t + v}{v_t - v}\right| = \frac{2gt}{v_t}$

Solución explícita: $v(t) = v_t \tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right)$

Resumen del Proceso

1. **Identificar** si la ecuación es separable: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
2. **Separar** las variables: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
3. **Integrar** ambos lados: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$
4. **Resolver** para y (si es posible)
5. **Aplicar** condiciones iniciales si se proporcionan

6. **Verificar** la solución en la ecuación original
7. **Considerar** soluciones singulares donde $g(y) = 0$