Título del Tema

Subtítulo o Capítulo

Prof. Arnoldo Del Toro Peña

5 de agosto de 2025

Resumen: Funciones y sus Aplicaciones

1. Dominio y Rango de Funciones

Definiciones

- **Dominio**: Conjunto de todos los valores posibles de entrada (x) para los cuales la función está definida.
- **Rango**: Conjunto de todos los valores posibles de salida (y) que puede tomar la función.

Determinación del Dominio

Para funciones polinomiales: $D = \mathbb{R}$ (todos los números reales) Para funciones racionales: excluir valores donde el denominador sea cero Para funciones con raíz cuadrada: el radicando debe ser ≤ 0

Determinación del Rango

- Analizar el comportamiento de la función
- Identificar valores máximos y mínimos
- Considerar las restricciones del contexto del problema

2. Tipos de Funciones Polinomiales

Clasificación por Grado

1. **Grado 0 (Constante)**: $f(x) = c$
2. **Grado 1 (Lineal)**: $f(x) = mx + b$
3. **Grado 2 (Cuadrática)**: $f(x) = ax^2 + bx + c$
4. **Grado 3 (Cúbica)**: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
5. **Grado n**: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Características Generales

- Dominio: $\mathbb{R}$ para todas las funciones polinomiales
- Continuidad en todo su dominio
- Diferenciables en todo punto de su dominio

3. Función Lineal y Variación

Función Lineal

Forma general: $f(x) = mx + b$

- m: pendiente (razón de cambio constante)
- b: ordenada al origen (intersección con eje y)

Aplicaciones de la Función Lineal

1. **Problemas de costo**: Costo total = Costo fijo + Costo variable × cantidad
2. **Movimiento uniforme**: Distancia = velocidad × tiempo + posición inicial
3. **Conversiones**: Celsius a Fahrenheit: $F = \frac{9}{5}C + 32$
4. **Depreciación lineal**: Valor = Valor inicial - tasa × tiempo

Variación Directa

$y = kx$ donde k es la constante de proporcionalidad

- Si x aumenta, y aumenta proporcionalmente
- La gráfica pasa por el origen

Variación Inversa

$y = \frac{k}{x}$ donde k es constante

- Si x aumenta, y disminuye proporcionalmente
- Producto $xy = k$ (constante)

4. Formas de la Ecuación Cuadrática

Forma Estándar

$f(x) = ax^2 + bx + c$

- $a \neq 0$
- Fácil identificación de coeficientes
- Útil para encontrar la ordenada al origen

Forma Factorizada

$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$

- r_1 y r_2 son las raíces de la función
- Directa identificación de las intersecciones con el eje x
- Útil cuando se conocen las raíces

Forma Vértice (Canónica)

$f(x) = a(x - h)^2 + k$

- (h, k) son las coordenadas del vértice
- $h = -\dfrac{b}{2a}$ (eje de simetría)
- $k = f(h)$ (valor máximo o mínimo)
- Útil para analizar el comportamiento de la parábola

5. Función Cuadrática y Modelos Cuadráticos

Características de la Función Cuadrática

- **Gráfica**: Parábola
- **Dominio**: $\mathbb{R}$
- **Rango**:
  - Si $a > 0$: $[k, +\infty)$ (parábola abre hacia arriba)
  - Si $a < 0$: $(-\infty, k]$ (parábola abre hacia abajo)

Elementos Importantes

1. **Vértice**: $(h, k) = \left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$
2. **Eje de simetría**: $x = -\dfrac{b}{2a}$
3. **Raíces**: Soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$
4. **Discriminante**: $\Delta = b^2 - 4ac$
   - $\Delta > 0$: dos raíces reales distintas
   - $\Delta = 0$: una raíz real doble
   - $\Delta < 0$: no hay raíces reales

Aplicaciones de Modelos Cuadráticos

1. **Tiro parabólico**: $h(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$
2. **Área de figuras**: Optimización de perímetros y áreas
3. **Problemas de maximización/minimización**: Ingresos, ganancias, costos
4. **Movimiento acelerado**: $s(t) = s_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$

Estrategias de Resolución

1. Identificar las variables del problema
2. Establecer la ecuación cuadrática apropiada
3. Determinar la forma más conveniente (estándar, factorizada o vértice)
4. Analizar el contexto para interpretar las soluciones
5. Verificar que las soluciones tengan sentido en el problema original

Optimización con Funciones Cuadráticas

Para encontrar el valor máximo o mínimo:

1. Identificar si $a > 0$ (mínimo) o $a < 0$ (máximo)
2. Calcular el vértice: $x = -\dfrac{b}{2a}$
3. Evaluar $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ para obtener el valor óptimo
4. Interpretar el resultado en el contexto del problema